

Интеллектуальные системы управления, анализ данных

© 2026 г. А.П. НЕЛЮБИН, канд. физ.-мат. наук (nelubin@gmail.com)
(Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва),
В.В. ПОДИНОВСКИЙ, д-р техн. наук (podinovski@mail.ru)
(Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Москва)

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И МЕТОДЫ АНАЛИЗА РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПРИ КАЧЕСТВЕННЫХ ОЦЕНКАХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ПРЕДПОЧТЕНИЙ¹

Рассматриваются задачи принятия решений, когда предпочтения оцениваются в порядковой шкале, а возможности реализации значений неопределенного фактора описываются качественной вероятностью (полной или только частичной). Вводятся определения отношений предпочтения и безразличий на множестве стратегий. Предлагаются простые решающие правила, позволяющие сравнивать стратегии по предпочтительности, и приводятся иллюстративные примеры.

Ключевые слова: принятие решений при неопределенности, качественная вероятность, порядковая полезность, отношения предпочтения.

DOI: 10.7868/S2413977726070078

1. Введение

Практические задачи принятия решений часто предполагают необходимость учета неопределенных факторов, значения которых заранее точно не известны. Основные, наиболее распространенные подходы к анализу таких задач предполагают использование функции полезности, т.е. функции, математическое ожидание которой моделирует предпочтения лица, принимающего решение (ЛПР) [1–3], или же мер риска [4–6]. Однако построение функции полезности – проблема непростая, и даже само допущение существования функции полезности является достаточно сильным, так как может привести к появлению разного рода «парадоксов» – выводов, не согласующихся со здравым смыслом или с очевидно ожидаемыми ЛПР результатами [7, 8]. Кроме того, использование функции полезности предполагает использование количественной вероятности, т.е. распределение вероятностей на множестве значений неопределенного фактора должно быть задано полностью [9] или хотя бы

¹ Данная работа осуществлена в рамках Программы научного проекта «Модели и методы принятия решений в условиях глубокой неопределенности» НИУ ВШЭ.

частично [10–12]. А при использовании мер риска возникает проблема выбора подходящей меры: нет универсальных мер и каждая обладает недостатками, не позволяющими со всей полнотой адекватно оценить риск [13]. Кроме того, для их расчета также требуется знание количественной вероятности.

Однако в сложных задачах принятия решений социально-экономического, политического и иного характера объективных вероятностей обычно не существует и приходится обращаться к экспертным оценкам. Но, как известно из психологических исследований, количественные оценки весьма сложны для человека, а потому являются недостаточно надежными и могут содержать явные ошибки [14].

Поэтому теоретический и практический интерес представляет проблема разработки методов анализа решений в условиях неопределенности, которые не использовали бы количественных вероятностей. С другой стороны, в сложных задачах возможные последствия вариантов также проще и надежнее оценивать не количественно, а качественно – в порядковой шкале. Впервые метод анализа подобных задач был аннотирован в [15]. Цель настоящей статьи – подробно, с обоснованиями представить такие методы и проиллюстрировать их «работу».

2. Математическая модель проблемной ситуации

Далее используется следующая математическая модель ситуации принятия решения в условиях неопределенности:

$$\langle S, \Lambda, V, f, \succsim, R \rangle.$$

Здесь:

S – множество стратегий (планов, альтернатив, вариантов, действий, решений).

$\Lambda = \{\lambda^1, \dots, \lambda^n\}$ – конечное множество значений *неопределенного фактора* ($n \geq 2$). Его элементы называются *состояниями природы*, или *элементарными событиями*, а его подмножества именуются *событиями*.

V – множество *числовых оценок последствий*, которые определяются в порядковой шкале [16]. Предполагается, что предпочтения возрастают на V , т.е. чем числовая оценка v больше, тем она предпочтительнее.

f – *оценочный критерий* – отображение $S \times \Lambda \rightarrow V$, т.е. $v = f(s, \lambda)$ – числовая оценка последствия использования стратегии s , если реализуется значение неопределенного фактора λ . Каждая стратегия s характеризуется векторной оценкой последствий $x = (f(s, \lambda^1), \dots, f(s, \lambda^n))$. Множество всех векторных оценок x (как достижимых, так и гипотетических) есть $X = V^n$. Согласно принятому допущению о характере оценок из V полагаем, что оценочный критерий является порядковым.

\succsim – качественная вероятность, полная или только частичная (для удобства читателя необходимые сведения о качественной вероятности приведены в разделе 3).

R – отношение нестрогого предпочтения ЛПП на множестве X : запись xRy означает, что вектор x не менее предпочтителен, чем y . Оно порождает отношение (строгого) предпочтения P и безразличия (равенства по предпочтительности) I : xPy верно, когда верно xRy и неверно yRx , и xIy верно, когда верно и xRy , и yRx . Запись xPy означает, что x предпочтительнее, чем y , а xIy означает, что x и y безразличны (одинаковы по предпочтительности). Предполагается, что отношение R есть квазипорядок (оно рефлексивно: xRx верно для любого $x \in X$ и транзитивно: для любых $x, y, z \in X$ из xRy и yRz следует xRz), но лишь частичный, т.е. не всякие x и y из X сравнимы по R : может не выполняться ни xRy , ни yRx . Иными словами, отношения I и P являются симметричной и асимметричной частями отношения R . Для квазипорядка R отношение P оказывается строгим частичным порядком (оно иррефлексивно: yPy неверно для любого $y \in X$ и транзитивно), а отношение I – эквивалентностью (оно симметрично: для любых $x, y \in X$ из xRy следует yRx , рефлексивно и транзитивно). Отношения R, P, I порождают на множестве стратегий S аналогичные по смыслу отношения R_*, P_*, I_* следующим образом:

$$s'R_*s'' \Leftrightarrow x'Rx'', \quad s'P_*s'' \Leftrightarrow x'Px'', \quad s'I_*s'' \Leftrightarrow x'Ix'',$$

где $x' = (f(s', \lambda^1), \dots, f(s', \lambda^n))$ и $x'' = (f(s'', \lambda^1), \dots, f(s'', \lambda^n))$. Именно отношения R_*, P_*, I_* непосредственно используются для формирования решения анализируемой задачи принятия решения с учетом типа ее постановки. Например, если требуется выбрать оптимальную стратегию, то строится множество недоминируемых по P_* стратегий, среди которых и надлежит выделить наилучшую (разумеется, если оно внешне устойчиво). Отношение R заранее неизвестно: его нужно построить на основе заданных предпочтений на множестве оценок V и качественной вероятности \succsim . Методы построения этого отношения рассматриваются далее в разделах 4 и 5.

3. Качественная вероятность

Приведем необходимые сведения о качественной вероятности. Через A, B, C будут обозначаться подмножества конечного множества элементарных событий, или *состояний природы* $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$; эти подмножества будут называться «событиями». Число всех событий в 2^Λ (с учетом самого Λ и пустого множества \emptyset) равно 2^n . Пусть $N = \{1, \dots, n\}$.

Определение 1 [17]. *Бинарное отношение \succsim на множестве 2^Λ называется полной качественной, или полной сравнительной вероятностью, если оно обладает следующими свойствами, принимаемыми за аксиомы:*

C1. Сравнимость: для любых A и B выполнено по крайней мере одно из соотношений $A \succsim B$ или $B \succsim A$.

C2. Транзитивность: из соотношений $A \succsim B$ и $B \succsim C$ следует $A \succsim C$.

C3. Существенность: $\Lambda \succ \emptyset$ и для любого A выполнено $A \succ \emptyset$.

C4. Аддитивность: если $A \cap C = B \cap C = \emptyset$, то соотношения $A \succsim B$ и $A \cup C \succsim B \cup C$ выполнены или не выполнены одновременно.

Из свойств С1 и С2 следует, что полная качественная вероятность рефлексивна и потому является связным квази порядком. Поэтому его асимметричная часть \succ есть (частичный) порядок, а симметричная часть \sim является эквивалентностью.

Пусть задана количественная вероятность Pr рядом распределения $\text{Pr}(\lambda^1) = p_1, \dots, \text{Pr}(\lambda^n) = p_n$, так что вероятность события A равна $\text{Pr}A = \sum_{j:\lambda^j \in A} p_j$. Говорят, что количественная вероятность *численно представляет* качественную вероятность, или что количественная вероятность *согласована* с качественной, если выполнено условие: для любых A, B

$$(1) \quad A \succsim B \Leftrightarrow \text{Pr}A \geq \text{Pr}B.$$

Из (1) следует, что $A \succ B \Leftrightarrow \text{Pr}A > \text{Pr}B$, $A \sim B \Leftrightarrow \text{Pr}A = \text{Pr}B$ для любых A, B .

Если задана количественная вероятность Pr , то порождаемое ею согласно (1) отношение \succsim удовлетворяет всем свойствам С1–С4, т.е. является качественной вероятностью.

Оказалось, что всякую полную качественную вероятность можно представить некоторой количественной лишь при $n \leq 4$: в [18] построен контрпример для $n = 5$.

Далее для сокращения записи элементарное событие λ^i будем также обозначать его номером i , а события A записывать в мультипликативной форме. Например, событие $A = \{\lambda^1, \lambda^2, \lambda^4\}$ будем писать как $\{1, 2, 4\}$ или 124, а вместо $\lambda^2 \in A$ запишем $2 \in A$.

Пример 1 [18]. Пусть $n = 5$. Рассмотрим отношение \succ , заданное цепочкой:

$$(2) \quad \begin{aligned} &12345 \succ 2345 \succ 1345 \succ 1245 \succ 345 \succ 245 \succ 1235 \succ 235 \succ 145 \succ \\ &\succ 1234 \succ 45 \succ 135 \succ 125 \succ 234 \succ 35 \succ 134 \succ 25 \succ 124 \succ 15 \succ \\ &\succ 34 \succ 24 \succ 123 \succ 5 \succ 23 \succ 14 \succ 4 \succ 13 \succ 12 \succ 3 \succ 2 \succ 1 \succ \emptyset. \end{aligned}$$

Проверка показывает, что все свойства С1–С4 выполнены, так что отношение \succsim , задаваемое (2), есть полная качественная вероятность. Предположим, что существуют количественные вероятности p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 , которые представляют эту качественную вероятность. Из приведенной выше цепочки выделим четыре звена: $4 \succ 13$, $23 \succ 14$, $15 \succ 34$, $134 \succ 25$. Им соответствуют четыре строгих неравенства:

$$p_4 > p_1 + p_3, \quad p_2 + p_3 > p_1 + p_4, \quad p_1 + p_5 > p_3 + p_4, \quad p_1 + p_3 + p_4 > p_2 + p_5.$$

Однако система из этих четырех неравенств несовместна. Действительно, сложив их левые и правые части, получим:

$$2p_1 + p_2 + 2p_3 + 2p_4 + p_5 > 2p_1 + p_2 + 2p_3 + 2p_4 + p_5, \text{ т.е. } 0 > 0.$$

В свете изложенного понятно, что методы, опирающиеся на предположение о существовании количественной вероятности (в том числе методы теории

полезности), к качественной вероятности, не представимой количественной, в принципе не применимы!

Определение 2 [19]. Бинарное отношение \succsim на множестве 2^A называется частичной качественной (или частичной сравнительной) вероятностью, если оно удовлетворяет аксиомам C2–C4 и аксиоме

C5. Рефлексивность: для любого A выполнено $A \succsim A$.

Более подробно со свойствами полной и частичной качественными вероятностями (а эти свойства необычны и далеко не очевидны) можно ознакомиться по учебнику [20]. Здесь же отметим следующие два свойства:

C6. Если $A_i \succsim B_i$, $i = 1, \dots, m$, $A_i \cap A_j = B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, то $A_1 \cup \dots \cup A_m \succsim B_1 \cup \dots \cup B_m$.

C7. $A \succsim B \Leftrightarrow \overline{B} \succsim \overline{A}$; поэтому $A \succ B \Leftrightarrow \overline{B} \succ \overline{A}$ и $A \sim B \Leftrightarrow \overline{B} \sim \overline{A}$ (это свойство авторы в литературе не встречали, и поэтому в Приложении приводится его доказательство).

4. Определение отношений предпочтения и безразличия

Введем определения отношений предпочтения и безразличия на множестве векторных оценок $X = V^n$ с учетом заданной качественной вероятности \succsim (полной или только частичной). Определения отношений R^{\succsim} , P^{\succsim} , I^{\succsim} на множестве векторных оценок $X = V^n$ с учетом заданной качественной вероятности \succsim введем аксиоматически, т.е. укажем систему аксиом, которые имеют ясный практический смысл (с точки зрения предпочтений) и потому им должны удовлетворять эти отношения. Поскольку при сравнении стратегий по предпочтительности состояния природы, в которые она заведомо не попадет, учитывать не имеет смысла, то далее для качественной вероятности будем использовать аксиому существенности в более сильной формулировке: для любого $A \neq \emptyset$ выполнено $A \succ \emptyset$.

Аксиома 1. Отношение R^{\succsim} рефлексивно.

Аксиома 2. Отношение R^{\succsim} транзитивно.

При выполнении для R^{\succsim} этих аксиом отношение P^{\succsim} оказывается строгим частичным порядком, а отношение I^{\succsim} – эквивалентностью.

Аксиома 3. Если одна из компонент векторной оценки x больше соответствующей компоненты векторной оценки y , а все остальные из соответственные компоненты равны, то x предпочтительнее, чем y : если $x_i > y_i$ и $x_j = y_j$, $j \in N = \{1, \dots, n\}$, $j \neq i$, то $x P^{\succsim} y$.

Отношение Парето P^\emptyset задается так: $x P^\emptyset y \Leftrightarrow x_i \geq y_i$, $i \in N$, $x \neq y$.

Из аксиом 2 и 3 следует, что отношение P^{\succsim} удовлетворяет аксиоме Парето: если $x_i \geq y_i$, $i \in N$, $x \neq y$, то $x P^{\succsim} y$, т.е. $x P^\emptyset y$ влечет $x P^{\succsim} y$.

Пусть A, B – два события. Пусть $x, y \in X$ – две векторные оценки такие, что $x_i = y_j$, $i \in A$, $j \in B$, т.е. все их компоненты с номерами из A и B равны a . Пусть $b \in V$, причем $b \neq a$, и $x' = (x \parallel x_i = b, i \in A) \in X$ (соответственно, $y' = (y \parallel y_j = b, j \in B) \in X$) – векторная оценка, полученная из x заменой на b

всех ее компонент с номерами из A (соответственно, полученная из y заменой на b всех ее компонент с номерами из B). Будем говорить, что векторные оценки $(x$ и $y)$ изменены одинаковым образом по двум событиям, если их равные компоненты, соответствующие этим событиям, изменены на одну и ту же величину (т.е. x и y заменены соответственно на x' и y'). При этом если $b > a$, то будем говорить об улучшении x и y (ибо при этом $x'P^\emptyset x$ и $y'P^\emptyset y$), а если $b < a$, то, наоборот, будем говорить об их ухудшении (ибо $xP^\emptyset x'$ и $yP^\emptyset y'$). Заметим, что при $A = \emptyset$ или $B = \emptyset$ векторные оценки x или, соответственно, y не меняются.

Для отношения нестрогого предпочтения R^\sim и порождаемых им отношений P^\sim и I^\sim на множестве векторных оценок X согласно смыслу этих отношений постулируются их следующие свойства.

Аксиома 4. Пусть две векторные оценки одинаковым образом улучшены по двум равновероятным событиям; если эти векторные оценки одинаковы по предпочтительности, то они и останутся одинаковыми по предпочтительности; если же первая векторная оценка предпочтительнее второй, то она останется предпочтительнее второй: если $A \sim B \succ \emptyset$ и $a < b$, то из $xI^\sim y$ следует $x'I^\sim y'$, а из $xP^\sim y$ следует $x'P^\sim y'$.

Аксиома 5. Если две векторные оценки, первая из которых не менее предпочтительна, чем вторая, одинаковым образом улучшены по двум событиям, первое из которых вероятнее второго, то первая из полученных векторных оценок будет предпочтительнее второй: если $A \succ B$ и $a < b$, то $xR^\sim y \Rightarrow x'P^\sim y'$.

С учетом того, что отношение R^\sim рефлексивно, транзитивно и удовлетворяет аксиоме 3, аксиомы 4 и 5 задают рекурсивное (индуктивное) определение этого отношения, если начинать с соотношений $xI^\sim x$, верных для любых $x \in X$, или с $xP^\sim y$, если верно $xP^\emptyset y$.

Пример 2. Пусть $n = 5$, $V = \{1, 2, \dots, 10\}$, полная качественная вероятность задана соотношениями (2). Начнем с $x = (1, 1, 1, 1, 1)$. Поскольку $2345 \succ 1235$, то по аксиоме 5 выполняется $(1, 2, 2, 2, 2) P^\sim (2, 2, 2, 1, 2)$. Далее, так как $245 \succ 123$, то $(1, 3, 2, 3, 3) P^\sim (3, 3, 3, 1, 2)$. С учетом $4 \succ 13$ получаем $(1, 3, 2, 4, 3) P^\sim (4, 3, 4, 1, 2)$. Но $4 \succ \emptyset$, и поэтому $(1, 3, 2, 5, 3) P^\sim (4, 3, 4, 1, 2)$. Удобно представить проведенные выкладки в виде двойной цепочки (стрелки проводятся от более предпочтительных векторных оценок к менее предпочтительным, прямые соединяют равные или одинаковые по предпочтительности векторные оценки):

$$\begin{array}{cccccccc} (1, 1, 1, 1, 1) & \leftarrow & (1, 2, 2, 2, 2) & \leftarrow & (1, 3, 2, 3, 3) & \leftarrow & (1, 3, 2, 4, 3) & \leftarrow & (1, 3, 2, 5, 3) \\ & & \downarrow_{2345 \succ 1235} & & \downarrow_{245 \succ 123} & & \downarrow_{4 \succ 13} & & \downarrow_{4 \succ \emptyset} \\ (1, 1, 1, 1, 1) & \leftarrow & (2, 2, 2, 1, 2) & \leftarrow & (3, 3, 3, 1, 2) & \leftarrow & (4, 3, 4, 1, 2) & \leftarrow & (4, 3, 4, 1, 2) \end{array}$$

Подобные двойные цепочки можно назвать *объяснительными*: они наглядно показывают, почему одна из векторных оценок предпочтительнее другой (или же они безразличны). Приведенная выше цепочка является *возрастающей*

щей, поскольку векторные оценки в ней улучшаются. Из аксиом 1–5 могут быть выведены следующие утверждения, использующие также ухудшение векторных оценок.

Теорема 1. Пусть две векторные оценки одинаковым образом изменены по двум равновероятным событиям; если эти векторные оценки одинаковы по предпочтительности, то они и останутся одинаковыми по предпочтительности; если же первая векторная оценка предпочтительнее второй, то она останется предпочтительнее второй: если $A \sim B \succ \emptyset$, то при любых a и b из $xI \tilde{\sim} y$ следует $x'I \tilde{\sim} y'$, а из $xP \tilde{\sim} y$ следует $x'P \tilde{\sim} y'$.

Доказательства теорем вынесены в Приложение.

Теорема 2. Пусть две векторные оценки, первая из которых не менее предпочтительна, чем вторая, одинаковым образом изменены по двум событиям. Если первая векторная оценка улучшена по более вероятному событию или ухудшена по менее вероятному событию, то первая из полученных векторных оценок будет предпочтительнее второй: если $(A \succ B$ и $a < b)$ или $(A \prec B$ и $a > b)$, то $xR \tilde{\sim} y \Rightarrow x'P \tilde{\sim} y'$.

Теоремы 1 и 2 являются обобщениями аксиом 4 и 5 и также могут быть использованы при построении двойных цепочек. В записи цепочек специально используем отношение $A \prec B$ вместо $B \succ A$, чтобы дополнительно указать, что используется теорема 2 с ухудшением векторных оценок.

Пример 3. Пусть $n = 5$, $V = \{1, 2, \dots, 10\}$, полная качественная вероятность задана соотношениями (2). Начнем с $x = (5, 5, 5, 5, 5)$. Поскольку $1235 \prec 12345$, то по теореме 2 верно $(4, 4, 4, 5, 4) P \tilde{\sim} (4, 4, 4, 4, 4)$. Далее, так как $1235 \prec 245$, то $(3, 3, 3, 5, 3) P \tilde{\sim} (4, 3, 4, 3, 3)$. С учетом $13 \prec 45$ получаем $(2, 3, 2, 5, 3) P \tilde{\sim} (4, 3, 4, 2, 2)$. Но $1 \prec 4$, и поэтому $(1, 3, 2, 5, 3) P \tilde{\sim} (4, 3, 4, 1, 2)$. Имеем цепочку (эта цепочка является *убывающей*):

$$\begin{array}{ccccccccccc} (5, 5, 5, 5, 5) & \rightarrow & (4, 4, 4, 5, 4) & \rightarrow & (3, 3, 3, 5, 3) & \rightarrow & (2, 3, 2, 5, 3) & \rightarrow & (1, 3, 2, 5, 3) \\ & & \downarrow_{1235 \prec 12345} & & \downarrow_{1235 \prec 245} & & \downarrow_{13 \prec 45} & & \downarrow_{1 \prec 4} \\ (5, 5, 5, 5, 5) & \rightarrow & (4, 4, 4, 4, 4) & \rightarrow & (4, 3, 4, 3, 3) & \rightarrow & (4, 3, 4, 2, 2) & \rightarrow & (4, 3, 4, 1, 2). \end{array}$$

5. Построение отношений предпочтения и безразличия

В основе приведенных ниже решающих правил лежит развитие идей теории качественной важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений [21]. Для их формулировки каждой паре векторных оценок x и y поставим в соответствие упорядоченное по неубыванию множество, состоящее из их компонент:

$$W(x, y) = \{x_1\} \cup \dots \cup \{x_n\} \cup \{y_1\} \cup \dots \cup \{y_n\} = \{w_1, \dots, w_q\},$$

где $q \leq 2n$ и зависит от x и y , $w_1 < \dots < w_q$. Векторным оценкам поставим в соответствие $2(q-1)$ множеств номеров компонент:

$$\begin{aligned} M_k(x) &= \{i \in N \mid x_i \geq w_k\}, & M_k(y) &= \{i \in N \mid y_i \geq w_k\}, & k &= 2, 3, \dots, q. \\ L_k(x) &= \{i \in N \mid x_i \leq w_k\}, & L_k(y) &= \{i \in N \mid y_i \leq w_k\}, & k &= q-1, q-2, \dots, 1. \end{aligned}$$

Теорема 3. Соотношение $xR^{\succsim}y$ верно тогда и только тогда, когда справедливы соотношения:

$$(3) \quad M_k(x) \succsim M_k(y), \quad k = 2, 3, \dots, q.$$

При этом если в (3) все \succsim суть \sim , то $xI^{\succsim}y$. В противном случае (когда в (3) имеется \succ) верно $xP^{\succsim}y$.

Пример 4. В условиях примера 2 сравним векторные оценки $x = (1, 3, 2, 5, 3)$ и $y = (4, 3, 4, 1, 2)$. Для них $W(x, y) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $q = 5$. Согласно (3) имеем:

$$\begin{aligned} w_2 = 2, M_2(x) &= \{2, 3, 4, 5\} \succ \{1, 2, 3, 5\} = M_2(y); \\ w_3 = 3, M_3(x) &= \{2, 4, 5\} \succ \{1, 2, 3\} = M_3(y); \\ w_4 = 4, M_4(x) &= \{4\} \succ \{1, 3\} = M_4(y); \\ w_5 = 5, M_5(x) &= \{4\} \succ \emptyset = M_5(y), \end{aligned}$$

так что верно $xP^{\succsim}y$. Легко видеть, что в процессе последовательного использования (3) порождается как раз двойная цепочка из примера 2.

В силу рефлексивности и транзитивности качественной вероятности \succsim определяемое согласно (3) отношение R^{\succsim} действительно оказывается квазипорядком, но в общем случае лишь частичным. Однако в случае $q = 2$ и полной качественной вероятности любые две векторные оценки согласно (3) оказываются сравнимыми по предпочтительности.

Пример 5. Пусть $V = \{1, 2\}$ и полная качественная вероятность задается соотношениями (2). Полное упорядочение множества X всех тридцати двух ($= 2^5$) векторных оценок, которые для краткости записаны в мультипликативном виде, таково:

$$\begin{aligned} &22222 P 12222 P 21222 P 22122 P 11222 P 12122 P 22212 P 12212 P \\ &P 21122 P 22221 P 11122 P 21212 P 22112 P 12221 P 11212 P 21221 P \\ &P 12112 P 22121 P 21112 P 11221 P 12121 P 22211 P 11112 P 12211 P \\ &P 21121 P 11121 P 21211 P 22111 P 11211 P 12111 P 21111 P 11111. \end{aligned}$$

Можно сформулировать также решающее правило, эквивалентное (3) и в некотором смысле двойственное ему.

Теорема 4. Соотношение $xR^{\preccurlyeq}y$ верно тогда и только тогда, когда справедливы соотношения

$$(4) \quad L_k(x) \preccurlyeq L_k(y), \quad k = q - 1, q - 2, \dots, 1.$$

При этом если в (4) все \preccurlyeq суть \sim , то $xI^{\preccurlyeq}y$. В противном случае (когда в (4) имеется \prec) верно $xP^{\preccurlyeq}y$.

Рассматривая множества $M_k(x)$ и $L_k(x)$ как подмножества универсального множества $U = N$, можно записать: $\overline{M}_{k+1}(x) = L_k(x)$ и $\overline{M}_{k+1}(y) = L_k(y)$, $k = 1, \dots, q - 1$, и тогда в свете свойства С7 сразу видно, что условия (3) и (4) равносильны.

Пример 6. В условиях примера 3 сравним векторные оценки $x = (1, 3, 2, 5, 3)$ и $y = (4, 3, 4, 1, 2)$. Для них $W(x, y) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $q = 5$. Согласно (4) имеем:

$$\begin{aligned}w_4 &= 4, L_4(x) = \{1, 2, 3, 5\} \prec \{1, 2, 3, 4, 5\} = L_4(y); \\w_3 &= 3, L_3(x) = \{1, 2, 3, 5\} \prec \{2, 4, 5\} = L_3(y); \\w_2 &= 2, L_2(x) = \{1, 3\} \prec \{4, 5\} = L_2(y); \\w_1 &= 1, L_1(x) = \{1\} \prec \{4\} = L_1(y),\end{aligned}$$

так что верно $xP^{\succ}y$. В процессе последовательного использования (4) порождается как раз двойная цепочка из примера 3.

Замечание 1. Отношение нестрогого предпочтения на множестве стратегий для задач принятия решений при качественных оценках вероятностей и предпочтений вводилось ранее в [22] аналогично отношению нестрогого предпочтения для сравнимых по важности групп критериев, но оно было более узким, чем рассматриваемое здесь, и для него не было установлено аналитического решающего правила.

6. Заключение

В статье рассмотрена новая, ранее не изучавшаяся постановка задачи анализа принятия решений, в которой предпочтения оцениваются по порядковой шкале, а возможности реализации значений неопределенного фактора выражаются с помощью качественной вероятности. При этом не предполагается, что качественная вероятность может быть представлена количественной. Разработан и обоснован подход к анализу таких проблем и предложены эффективные решающие правила, которые позволяют попарно сравнивать стратегии по предпочтительности и удалять неприемлемые (доминируемые).

Известно, что применение одних качественных оценок обычно не позволяет полностью решить задачу выделения одной оптимальной стратегии, а лишь приводит к сужению множества претендентов на нее. Это облегчает дальнейший анализ (в частности, требует получения меньшего числа количественных оценок предпочтений, причем более простых, например интервальных). Поэтому получение и использование только качественных оценок обычно происходит на первых этапах итеративных процедур решения задач выбора [20, 23].

Полученные результаты можно рассматривать как первый шаг на пути к разработке методологии анализа решений, ориентированной на случаи, в которых предпочтения и вероятности событий оцениваются качественно. Дальнейшие исследования могут быть направлены на учет отношения людей к риску, включение более общих типов отношений предпочтений в набор результатов (например, частичных отношений, которые являются общими для многокритериальных задач), а также более совершенных шкал для представления отношений предпочтений (например, шкалы показателей первого порядка).

Доказательство свойства С7. Рассмотрим сначала случай 1, когда $A \cap B = \emptyset$. Из этого следует $A \subseteq \overline{B}$ и $B \subseteq \overline{A}$. Обозначим $C = \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Очевидно, что $A \cap C = B \cap C = \emptyset$. Распишем $A \cup C = (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup \overline{B}) = A \cup \overline{B}$. Тогда из $A \subseteq \overline{B}$ следует $A \cup C = \overline{B}$. Аналогично, $B \cup C = \overline{A}$. Так как $A \cap C = B \cap C = \emptyset$, то по свойству С4 получаем $A \lesssim B \Leftrightarrow A \cup C \lesssim B \cup C \Leftrightarrow \overline{B} \lesssim \overline{A}$.

Теперь рассмотрим общий случай 2, когда $A \cap B \neq \emptyset$. Обозначим $D = A \cap B$. По свойству С4 имеем $A \lesssim B \Leftrightarrow A \setminus D \lesssim B \setminus D$. Поскольку $A \setminus D \cap B \setminus D = \emptyset$, то из рассмотренного выше случая 1 следует $A \setminus D \lesssim B \setminus D \Leftrightarrow \overline{B \setminus D} \lesssim \overline{A \setminus D}$. Преобразуем $\overline{A \setminus D} = \overline{A} \cup D$ и $\overline{B \setminus D} = \overline{B} \cup D$. Так как $\overline{A} \cap D = \overline{B} \cap D = \emptyset$, то по свойству С4 имеем $\overline{B} \cup D \lesssim \overline{A} \cup D \Leftrightarrow \overline{B} \lesssim \overline{A}$. В итоге получаем требуемое $A \lesssim B \Leftrightarrow \overline{B} \lesssim \overline{A}$. Свойство С7 доказано.

Доказательства теорем 1 и 2 получаются намного проще, если использовать теорему 3. Поэтому сначала приведем доказательство теоремы 3, которое не использует теоремы 1 и 2.

Доказательство теоремы 3. Введем оператор параллельного улучшения векторных оценок:

$$\uparrow [A, B, a, b], \text{ где } A, B \in 2^A, a, b \in \mathbb{R}, a < b.$$

Область определения оператора – множество пар векторных оценок (x, y) , таких что $x_i = y_j = a, i \in A, j \in B$. Результатом действия оператора на (x, y) является пара векторных оценок (x', y') , таких что $x' = (x \parallel x_i = b, i \in A)$, $y' = (y \parallel y_j = b, j \in B)$. Таким образом, для действия оператора должны выполняться аксиомы 4 и 5 отношения R^{\lesssim} . А отношение $x R^{\lesssim} y$ между произвольными векторными оценками x и y выполняется тогда и только тогда, когда существует векторная оценка z и суперпозиция операторов улучшения вида:

$$(П.1) \quad (x, y) = \uparrow [A_L, B_L, a_L, b_L] \dots \uparrow [A_1, B_1, a_1, b_1] (z, z),$$

где $A_l \lesssim B_l, l = 1, \dots, L$. Очевидно, что для компонент векторной оценки z должны выполняться условия $z_i \leq x_i$ и $z_i \leq y_i, i \in N$. Далее для удобства будем считать, что для всех $i \in N$ выполняется $z_i \geq w_1 = \min_{j \in N} \{x_j, y_j\}$. В противном случае можно увеличить значения соответствующих компонент с помощью оператора $\uparrow [\{i\}, \{i\}, z_i, w_1]$.

Последовательность применения операторов (П.1) соответствует двойной цепочке, начинающейся с векторной оценки z . Поэтому далее выражение вида (П.1) будем также называть двойной цепочкой.

Сравнение векторных оценок x и y при помощи решающего правила (3) можно представить в виде суперпозиции операторов улучшения следующего вида:

$$(П.2) \quad (x, y) = \uparrow [M_q(x), M_q(y), w_{q-1}, w_q] \dots \uparrow [M_2(x), M_2(y), w_1, w_2] (e, e),$$

где $e = (w_1, \dots, w_1)$. Существование двойной цепочки (П.2) доказывает достаточное условие теоремы 3.

Перейдем к доказательству необходимости. Пусть задана некоторая двойная цепочка вида (П.1). Для нее обозначим $U = W(x, y) \cup \{a_1\} \cup \dots \cup \{a_L\} \cup \{b_1\} \cup \dots \cup \{b_L\} = \{u_1, \dots, u_r\}$, где $r \leq 2n + 2L$, $u_1 < \dots < u_r$. В силу сделанного допущения $z_i \geq w_1$, $i \in N$, должно выполняться $u_1 = w_1$. Кроме того, $u_r = w_q$, так как величины $a_l, b_l, l = 1, \dots, L$, не могут превышать конечные значения компонент векторных оценок x и y . Таким образом, границы неравномерных сеток U и $W(x, y)$ совпадают, но в общем случае U может быть более мелкой, чем $W(x, y)$, т.е. $W(x, y) \subseteq U$.

Построим с помощью (П.1) двойную цепочку вида (П.2) по шагам:

- 1) Перейдем от начальной векторной оценки z к e .
- 2) Разобьем все операторы на операторы с шагом по соседним узлам неравномерной сетки U .
- 3) Отсортируем операторы по возрастанию номера k шага по сетке U .
- 4) Объединим операторы с совпадающими k в общий оператор.
- 5) Объединим операторы внутри шага по сетке $W(x, y)$ в общий оператор.

Шаг 1. Из (e, e) легко получить (z, z) , последовательно применяя операторы улучшения $\uparrow [\{i\}, \{i\}, w_1, z_i]$ для всех $i \in N$, при которых $z_i > w_1$. Напомним, что в (П.1) сделано допущение $z_i \geq w_1$, $i \in N$. Получившееся выражение подставим в (П.1) вместо (z, z) .

Шаг 2. Интервал приращения в произвольном операторе улучшения может быть разбит по следующему правилу:

$$(П.3) \quad \uparrow [A, B, a, b] = \uparrow [A, B, c, b] \uparrow [A, B, a, c], \text{ где } a < c < b.$$

Пользуясь свойством (П.3), каждый оператор $\uparrow [A, B, u_k, u_t]$, $k < t$, в имеющейся цепочке можно выразить через операторы с шагами по сетке U :

$$\uparrow [A, B, u_k, u_t] = \uparrow [A, B, u_{t-1}, u_t] \dots \uparrow [A, B, u_{k+1}, u_{k+2}] \uparrow [A, B, u_k, u_{k+1}].$$

Шаг 3. Рассмотрим любые два соседние оператора в получившейся цепочке:

$$\dots \uparrow [C, D, u_{t-1}, u_t] \uparrow [A, B, u_{k-1}, u_k] \dots$$

Если $k \leq t$, оставляем операторы в той же последовательности. А случай $k > t$ возможен только тогда, когда $(A \cup B) \cap (C \cup D) = \emptyset$, иначе результат действия оператора $\uparrow [A, B, u_{k-1}, u_k]$ не попадет в область определения оператора $\uparrow [C, D, u_{t-1}, u_t]$. Так как эти два оператора действуют на непересекающиеся множества компонент векторных оценок, то эти соседние операторы можно переставить местами в общей последовательности выполнения операторов без влияния на общий результат.

Используя рассмотренную перестановку соседних операторов, отсортируем по возрастанию k всю последовательность операторов.

Шаг 4. Для каждого $k = 2, \dots, r$ рассмотрим все операторы, увеличивающие компоненты векторных оценок от u_{k-1} до u_k . Благодаря выполненной на предыдущем шаге сортировке, все эти операторы образуют подпоследовательность:

$$\uparrow [A_{km}, B_{km}, u_{k-1}, u_k] \dots \uparrow [A_{k2}, B_{k2}, u_{k-1}, u_k] \uparrow [A_{k1}, B_{k1}, u_{k-1}, u_k].$$

Рассмотрим интервал $w_{t-1} < u_k \leq w_t$ на более крупной сетке $W(x, y)$. Для каждого $k = 2, \dots, r$ он существует, так как $w_1 < w_2$ и $w_r = w_q$. Получается, что при преобразовании (П.1) от векторной оценки e до векторной оценки x компоненты с номерами из множеств A_{k1}, \dots, A_{km} увеличивались от u_{k-1} до u_k , т.е. для них в итоге $x_i \geq u_k$. При этом множества A_{k1}, \dots, A_{km} попарно не пересекаются, так как одна и та же компонента векторной оценки не может быть увеличена от u_{k-1} до u_k более одного раза. Так как итоговые значения компонент векторной оценки x принадлежат $W(x, y)$, то $x_i \geq w_t$. А это по определению значит, что $N_t(x) = A_{k1} \cup A_{k2} \cup \dots \cup A_{km}$. Аналогично, $N_t(y) = B_{k1} \cup B_{k2} \cup \dots \cup B_{km}$ и множества B_{k1}, \dots, B_{km} попарно не пересекаются. Тогда из $A_{ki} \succsim B_{ki}$, $i = 1, \dots, m$, по свойству С6 качественной вероятности (см. раздел 3) следует $N_t(x) \succsim N_t(y)$. И рассмотренную подпоследовательность операторов можно свернуть в один: $\uparrow [N_t(x), N_t(y), u_{k-1}, u_k]$.

Шаг 5. Предыдущие рассуждения совпадают для всех шагов $[u_{k-1}, u_k]$ сетки U , попадающих внутрь шага $[w_{t-1}, w_t]$ сетки $W(x, y)$, а именно, $[u_{k_{t-1}}, u_{k_{t-1}+1}]$, $[u_{k_{t-1}+1}, u_{k_{t-1}+2}]$, \dots , $[u_{k_t-1}, u_{k_t}]$, где $u_{k_{t-1}} = w_{t-1}$, $u_{k_t} = w_t$. Кроме того, весь интервал $[w_{t-1}, w_t]$ должен быть покрыт этими шагами сетки U , так как в векторных оценках x и y компоненты с номерами из $N_t(x)$ и $N_t(y)$ соответственно в итоге увеличивались от w_{t-1} до w_t . Поэтому операторы $\uparrow [N_t(x), N_t(y), u_{k-1}, u_k]$ для всех $k = k_{t-1} + 1, \dots, k_t$ можно свернуть в один оператор по свойству (П.3):

$$\begin{aligned} \uparrow [N_t(x), N_t(y), w_{t-1}, w_t] &= \uparrow [N_t(x), N_t(y), u_{k_{t-1}}, u_{k_t}] \dots \\ &\dots \uparrow [N_t(x), N_t(y), u_{k_{t-1}}, u_{k_{t-1}+1}]. \end{aligned}$$

Искомая цепочка (П.2) получена. Необходимое условие теоремы 3 доказано.

Лемма 1. Если $A = B \succ \emptyset$, то при любых a и b из $xI \tilde{\succ} y$ следует $x'I \tilde{\succ} y'$, а из $xP \tilde{\succ} y$ следует $x'P \tilde{\succ} y'$.

Доказательство леммы 1. Условие леммы 1 при $a < b$ следует из аксиомы 4. Предположим, что при $A = B$ и $a > b$ выполняется $xR \tilde{\succ} y$. Рассмотрим объединение множеств $W = W(x, y) \cup W(x', y')$. От $W(x, y)$ оно отличается добавлением числа b , если его не было в $W(x, y)$. А от $W(x', y')$ оно отличается добавлением числа a , если его не было в $W(x', y')$. Пусть $W = \{w_1, \dots, w_q\}$, $w_1 < \dots < w_q$. Добавление элементов в $W(x, y)$ не влияет на выполнение условий решающего правила (3), поэтому из $xR \tilde{\succ} y$ по теореме 3 следует

$$(П.4) \quad M_k(x) \succsim M_k(y), \quad k = 2, 3, \dots, q.$$

При этом в случае $xI\tilde{>}y$ в (П.4) для всех k верно $M_k(x) \sim M_k(y)$, а в случае $xP\tilde{>}y$ в (П.4) хотя бы для одного k выполняется $M_k(x) \succ M_k(y)$.

Обозначим $w_{k_a} = a$, $w_{k_b} = b$. Заметим, что при $k \leq k_b$ и $k > k_a$ выполняются равенства множеств $M_k(x') = M_k(x)$ и $M_k(y') = M_k(y)$. А при $k_b < k \leq k_a$ справедливо $M_k(x') \cup A = M_k(x)$, $M_k(x') \cap A = \emptyset$ и $M_k(y') \cup A = M_k(y)$, $M_k(y') \cap A = \emptyset$. Тогда по аксиоме аддитивности из $M_k(x) \sim M_k(y)$ следует $M_k(x') \sim M_k(y')$, а из $M_k(x) \succ M_k(y)$ следует $M_k(x') \succ M_k(y')$. Поэтому по теореме 3 с учетом (П.4) в случае $xI\tilde{>}y$ получаем $x'I\tilde{>}y'$, а в случае $xP\tilde{>}y$ получаем $x'P\tilde{>}y'$. Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 1. При $a < b$ утверждение теоремы 1 следует из аксиомы 4. Предположим, что при $a > b$ выполняется $xR\tilde{>}y$. Ухудшим векторные оценки x и y по одному и тому же событию $C = A \cup B$: $x'' = (x \parallel x_i = b, i \in C)$, $y'' = (y \parallel y_i = b, i \in C)$. Тогда по лемме 1 верно $x''R\tilde{>}y''$. Заметим, что векторные оценки x' и y' могут быть получены путем улучшения одинаковым образом (от b до a) векторных оценок x'' и y'' по событиям $B \setminus A$ и $A \setminus B$ соответственно. Но из $A \sim B$ по аксиоме аддитивности следует $B \setminus A \sim A \setminus B$. Тогда по аксиоме 4 получаем $x'R\tilde{>}y'$. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. При $A \succ B$ и $a < b$ утверждение теоремы 2 следует из аксиомы 5. Предположим, что при $A \prec B$ и $a > b$ выполняется $xR\tilde{>}y$. Ухудшим векторные оценки x и y по одному и тому же событию $C = A \cup B$: $x'' = (x \parallel x_i = b, i \in C)$, $y'' = (y \parallel y_i = b, i \in C)$. Тогда по лемме 1 верно $x''R\tilde{>}y''$. Заметим, что векторные оценки x' и y' могут быть получены путем улучшения одинаковым образом (от b до a) векторных оценок x'' и y'' по событиям $B \setminus A$ и $A \setminus B$ соответственно. Но из $A \prec B$ по аксиоме аддитивности следует $B \setminus A \succ A \setminus B$. Тогда по аксиоме 5 получаем $x'P\tilde{>}y'$. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нейман Дж., фон Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. Пер. с англ. М.: Наука Физматлит, 1970.
2. *Фишберн П.* Теория полезности для принятия решений. Пер. с англ. М.: Наука, 1978.
3. *Briggs R.A.* Normative theories of rational choice: expected utility / The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2023 Edition). E.N. Zalta, U. Nodelman (eds.). <https://plato.stanford.edu/archives/win2023/entries/rationality-normative-utility/>
4. *Muller A., Stoyan D.* Comparison methods for stochastic models and risks. Chichester: Wiley: 2002.
5. *Kovacevic R.W., Pflug G.C., Pichler A.* Measuring and managing risk. In: Baker, H.K., Filbeck, G. (Eds.). Investment Risk Management. New York: Oxford University press, 2015. P. 17–41.
6. *Montiel L.V., Bickel E.* Decision making with partial probabilistic or preference information // Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science. 2015. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/9780470400531.eorms1104>

7. *Льюс Р.Д., Райфа Х.* Игры и решения. Введение и критический обзор. Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
8. *Schoemaker P.* The expected utility model: its variants, purposes, evidence and limitations // *Journal of Economic Literature*. 1982. V. 20. P. 529–563.
9. *Райфа Х.* Анализ решений: введение в проблему выбора в условиях неопределенности. Пер. с англ. М.: Наука, 1977.
10. *Fishburn P.C.* Decision and Value Theory. New York: Wiley, 1964.
11. *Kirkwood C.W., Sarin R.K.* Ranking with partial information: a method and an application // *Operations Research*. 1985. V. 33. P. 38–48.
12. *Подиновский В.В.* Анализ решений при множественных оценках коэффициентов важности критериев и вероятностей значений неопределенных факторов в целевой функции // *АиТ*. 2004. № 11. С. 141–159.
Podinovskii V.V. Decision under multiple estimates for the importance coefficients of criteria and probabilities of values of uncertain factors in the aim function // *Autom. Remote Control*. 2004. V. 65. No. 11. P. 1817–1833.
13. *Подиновский В.В.* Меры риска как критерии выбора при вероятностной неопределенности // *Искусственный интеллект и принятие решений*. 2015. № 2. С. 60–74.
14. *Ларичев О.И.* Наука и искусство принятия решений. М.: Наука, 1979.
15. *Нелюбин А.П., Подиновский В.В.* Метод анализа решений в условиях неопределенности при качественном оценивании предпочтений и вероятностей // *Доклады РАН. Матем., информ., проц. упр.* 2025. Т. 524. № 4. С. 47–50.
16. *Пфанцагль И.* Теория измерений. Пер. с англ. М.: Мир, 1976.
17. *Fishburn P.C.* The axioms of subjective probability // *Statistical Science*. 1986. V. 1. P. 335–345.
18. *Kraft C.H., Pratt J.W., Seidenberg A.* Intuitive probability on finite sets // *Annals of mathematical statistics*. 1959. V. 30. P. 408–419.
19. *Fishburn P.C.* Linear extensions of additive partial orders // *Order*. 1997–1998. V. 14. P. 153–169.
20. *Подиновский В.В.* Многокритериальные задачи принятия решений: теория и методы анализа: учебник для вузов. М.: Юрайт, 2025.
21. *Нелюбин А.П., Подиновский В.В.* Многокритериальные задачи с упорядоченными по важности группами критериев // *АиТ*. 2022. № 7. С. 119–136.
Nelyubin A.P., Podinovskii V.V. Multicriteria problems with importance-ordered criteria groups // *Autom. Remote Control*. 2022. No. 7. P. 1108–1122.
22. *Подиновский В.В.* Анализ решений в условиях неопределенности при нечисловом оценивании предпочтений и вероятностей // *Проблемы управления*. 2020. № 1. С. 48–58. <https://doi.org/10.25728/ru.2020.1.5>
23. *Гафт М.Г., Подиновский В.В.* О построении решающих правил в задачах принятия решений // *АиТ*. 1981. № 6. С. 128–138.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 07.08.2025

После доработки 18.09.2025

Принята к публикации 17.12.2025