

© 2026 г. А.Ю. АЛЕКСАНДРОВ, д-р физ.-мат. наук (a.u.aleksandrov@spbu.ru)
(Санкт-Петербургский государственный университет)

УПРАВЛЕНИЕ ТРЕХОСНОЙ ОРИЕНТАЦИЕЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ НАЛИЧИИ ЗАПАЗДЫВАНИЯ В ОБРАТНОЙ СВЯЗИ¹

Рассматривается твердое тело, находящееся под воздействием линейного диссипативного и существенно нелинейного восстанавливающего моментов. Предполагается, что в восстанавливающем моменте имеется постоянное запаздывание. С использованием специальной конструкции функционала Ляпунова–Красовского доказываем, что заданная ориентация тела будет асимптотически устойчива при любом значении запаздывания. Исследуется случай, когда на тело действует управление типа ПИД-регулятора с линейной дифференциальной частью и существенно нелинейными интегральной и пропорциональной частями. Определяются допустимые значения параметров регулятора, при которых он решает задачу трехосной стабилизации. Приводятся результаты численного моделирования, подтверждающие установленные теоретические выводы.

Ключевые слова: твердое тело, трехосная ориентация, запаздывание, функционал Ляпунова–Красовского, ПИД-регулятор.

DOI: 10.7868/S2413977726070063

1. Введение

Управление вращательным движением твердого тела представляет собой актуальную проблему нелинейной механики. Она имеет широкие приложения в задачах ориентации спутников, летательных и подводных аппаратов, роботизированных систем [1–3]. Одним из важных специальных случаев данной проблемы является трехосная стабилизация твердого тела [1, 2]. Изучению этого случая посвящено большое количество работ (см., например, [1–6] и цитируемую там литературу). Были предложены различные подходы к построению стабилизирующих управлений. При этом следует отметить, что управление ориентацией твердого тела – нелинейная задача, поскольку пространство конфигураций для нее не является линейным пространством [7].

При проектировании управляемых систем довольно часто требуется учитывать запаздывание, возникающее в обратной связи [8, 9]. Кроме того, запаздывание может специально вводиться в систему для обеспечения устойчивости или достаточной гладкости переходных процессов [9–13]. Наличие запаздывания существенно затрудняет анализ устойчивости. Основными под-

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-00091), <https://rscf.ru/project/24-21-00091/>

ходами к решению данной проблемы являются метод Разумихина и метод функционалов Ляпунова–Красовского [8, 9].

Некоторые способы синтеза управлений, обеспечивающих трехосную стабилизацию твердого тела с учетом постоянного запаздывания в обратной связи, предложены в [7, 14–16]. Были построены линейные управляющие моменты, а условия асимптотической устойчивости заданной ориентации тела формулировались в терминах разрешимости систем линейных матричных неравенств, что приводило к довольно жестким ограничениям на параметры системы и величину запаздывания. В [17, 18] для решения задачи трехосной стабилизации применялись линейные управления типа ПИД-регуляторов.

В настоящей работе сначала рассматривается твердое тело, находящееся под воздействием линейного диссипативного и существенно нелинейного восстанавливающего моментов. Нелинейные управления являются более робастными по отношению к запаздываниям и нестационарным возмущениям, чем линейные (см. [19–21]). В ряде случаев они позволяют обеспечить более высокую скорость сходимости нормы вектора состояния замкнутой системы, а также уменьшить установившуюся ошибку по сравнению с линейными алгоритмами [22].

Предполагается, что в восстанавливающем моменте имеется постоянное запаздывание. С использованием метода функционалов Ляпунова–Красовского найдены условия, гарантирующие асимптотическую устойчивость заданной ориентации тела при любом значении запаздывания. Далее рассматривается случай, когда на тело действует управление типа ПИД-регулятора, причем его дифференциальная часть является линейной, а интегральная и пропорциональная части существенно нелинейны. Определяются допустимые значения параметров регулятора, при которых он решает задачу трехосной стабилизации тела.

2. Постановка задачи

Рассмотрим твердое тело, которое вращается вокруг неподвижной точки O , совпадающей с его центром масс. Пусть $\omega(t)$ – вектор угловой скорости, а $Oxyz$ – главные центральные оси инерции тела.

Будем считать, что заданы две правые тройки взаимно ортогональных единичных векторов r_1, r_2, r_3 и s_1, s_2, s_3 , причем векторы r_1, r_2, r_3 неподвижны в системе $Oxyz$, векторы s_1, s_2, s_3 занимают неизменное положение в инерциальном пространстве.

Вращение тела под действием управляющего момента M_u моделируется уравнениями Эйлера

$$(1) \quad \Theta \dot{\omega}(t) + \omega(t) \times (\Theta \omega(t)) = M_u,$$

а для векторов s_1, s_2, s_3 имеем кинематические уравнения Пуассона

$$(2) \quad \dot{s}_i(t) = -\omega(t) \times s_i(t), \quad i = 1, 2, 3.$$

Здесь $\Theta = \text{diag} \{A, B, C\}$ – тензор инерции тела в осях $Oxyz$ (см. [1, 2]).

Проблема трехосной стабилизации тела заключается в синтезе момента M_u , обеспечивающего для системы (1), (2) существование и асимптотическую устойчивость положения равновесия

$$(3) \quad \omega = 0, \quad s_i = r_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

В [2, 4] показано, что требуемое управление можно выбирать в виде суммы линейных диссипативного и восстанавливающего моментов: $M_u = M_d + M_r$. Здесь

$$(4) \quad M_d = -D\omega(t),$$

$M_r = -L(t)$, D – постоянная положительно определенная матрица,

$$(5) \quad L(t) = \alpha_1 s_1(t) \times r_1 + \alpha_2 s_2(t) \times r_2,$$

α_1, α_2 – положительные коэффициенты. В [19] было предложено вместо линейного восстанавливающего момента использовать существенно нелинейный момент

$$(6) \quad M_r = -f^\nu(t)L(t),$$

где вектор $L(t)$ по-прежнему определяется по формуле (5), $\nu = \text{const} > 0$,

$$f(t) = \frac{1}{2} (\alpha_1 \|s_1(t) - r_1\|^2 + \alpha_2 \|s_2(t) - r_2\|^2),$$

а $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора. Была доказана робастность такого управления по отношению к нестационарным возмущениям с нулевыми средними значениями.

В настоящей работе исследуем условия трехосной стабилизации в случае, когда тело находится под воздействием линейного момента диссипативных сил (4) и существенно нелинейного восстанавливающего момента (6), причем в восстанавливающем моменте имеется постоянное запаздывание $\tau > 0$. Таким образом, динамические уравнения Эйлера можно записать в форме

$$(7) \quad \Theta \dot{\omega}(t) + \omega(t) \times (\Theta \omega(t)) = -f^\nu(t - \tau)L(t - \tau) - D\omega(t).$$

Кроме того, рассмотрим случай, когда на тело действует управление типа ПИД-регулятора следующего вида:

$$(8) \quad M_u = -\beta f^\nu(t)L(t) - D\omega(t) - \int_0^t f^\nu(\xi)G(t - \xi)L(\xi)d\xi,$$

где β – постоянный коэффициент, $G(\zeta)$ – непрерывная при $\zeta \in [0, +\infty)$ матрица. Определим допустимые значения параметров регулятора, при которых он обеспечивает для замкнутой системы существование и асимптотическую устойчивость положения равновесия (3).

3. Стабилизация с использованием запаздывающей обратной связи

Пусть задана система (2), (7). Будем предполагать, что начальные функции $\phi(\xi)$ для нее принадлежат пространству $C([- \tau, 0], \mathbb{R}^{12})$ непрерывных функций с равномерной нормой $\|\phi\|_\tau = \max_{\xi \in [- \tau, 0]} \|\phi(\xi)\|$.

Теорема 1. При любом постоянном положительном запаздывании τ система (2), (7) имеет асимптотически устойчивое положение равновесия (3).

Доказательство. Очевидно, что (3) является положением равновесия замкнутой системы. Для доказательства его асимптотической устойчивости выбираем функционал Ляпунова–Красовского в виде

$$(1) \quad \begin{aligned} V(\omega(t), s_{1t}, s_{2t}) = & f(t) + \frac{\gamma}{2} \omega^\top(t) \Theta \omega(t) + L^\top(t) D^{-1} \Theta \omega(t) + \\ & + \int_{t-\tau}^t (\lambda(\xi + \tau - t) + \mu) (\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+2}) d\xi - \\ & - L^\top(t) D^{-1} \int_{t-\tau}^t f^\nu(\xi) L(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

где γ, λ, μ – положительные параметры, s_{jt} – отрезки соответствующих компонент решения системы: $s_{jt} : \xi \mapsto s_j(t + \xi)$, $\xi \in [- \tau, 0]$, $j = 1, 2$.

Имеем

$$\begin{aligned} & f(t) + c_1 \gamma \|\omega(t)\|^2 - c_2 (\alpha_1 \|s_1(t) - r_1\| + \alpha_2 \|s_2(t) - r_2\|) \|\omega(t)\| + \\ & + \mu \int_{t-\tau}^t (\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+2}) d\xi - \\ & - c_3 (\alpha_1 \|s_1(t) - r_1\| + \alpha_2 \|s_2(t) - r_2\|) \int_{t-\tau}^t (\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+1} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+1}) d\xi \leq \\ & \leq V(\omega_t, s_{1t}, s_{2t}) \leq f(t) + c_2 (\alpha_1 \|s_1(t) - r_1\| + \alpha_2 \|s_2(t) - r_2\|) \|\omega(t)\| + \\ & + c_4 \gamma \|\omega(t)\|^2 + (\lambda \tau + \mu) \int_{t-\tau}^t (\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+2}) d\xi + \\ & + c_3 (\alpha_1 \|s_1(t) - r_1\| + \alpha_2 \|s_2(t) - r_2\|) \int_{t-\tau}^t (\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+1} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+1}) d\xi, \end{aligned}$$

где $c_l > 0$, $l = 1, 2, 3, 4$.

Продифференцируем функционал (9) в силу системы (2), (7). Получим

$$\begin{aligned}
\dot{V} = & -\gamma\omega^\top(t)D\omega(t) - f^\nu(t)L^\top(t)D^{-1}L(t) - L^\top(t)D^{-1}\left(\omega(t) \times (\Theta\omega(t))\right) + \\
& + \gamma f^\nu(t-\tau)\omega^\top(t)L^\top(t-\tau) + \left(\alpha_1(\omega(t) \times s_1(t)) \times r_1 + \right. \\
& + \left. \alpha_2(\omega(t) \times s_2(t)) \times r_2\right)^\top D^{-1} \left(\int_{t-\tau}^t f^\nu(\xi)L(\xi)d\xi - \Theta\omega(t) \right) - \\
& - \lambda \int_{t-\tau}^t \left(\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+2} \right) d\xi + \\
& + (\lambda\tau + \mu) \left(\|s_1(t) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(t) - r_2\|^{2\nu+2} \right) - \\
& - \mu \left(\|s_1(t-\tau) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(t-\tau) - r_2\|^{2\nu+2} \right) \leq \\
& \leq (c_5 - \gamma c_6) \|\omega(t)\|^2 - c_7 f^\nu(t) \|L(t)\|^2 + \\
& + \gamma c_8 \|\omega(t)\| \left(\|s_1(t-\tau) - r_1\|^{2\nu+1} + \|s_2(t-\tau) - r_2\|^{2\nu+1} \right) + \\
& + c_9 \|\omega(t)\|^2 (\|s_1(t) - r_1\| + \|s_2(t) - r_2\|) + \\
& + c_{10} \|\omega(t)\| \int_{t-\tau}^t \left(\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+1} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+1} \right) d\xi - \\
& - \lambda \int_{t-\tau}^t \left(\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+2} \right) d\xi + \\
& + (\lambda\tau + \mu) \left(\|s_1(t) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(t) - r_2\|^{2\nu+2} \right) - \\
& - \mu \left(\|s_1(t-\tau) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(t-\tau) - r_2\|^{2\nu+2} \right),
\end{aligned}$$

где c_5, \dots, c_{10} – положительные коэффициенты.

Выберем и зафиксируем число $\epsilon \in (0, 1)$. Известно [23], что найдется $\delta > 0$ такое, что

$$(10) \quad \|L(t)\|^2 \geq \epsilon (\alpha_1^2 \|s_1(t) - r_1\|^2 + \alpha_2^2 \|s_2(t) - r_2\|^2)$$

при

$$\|s_1(t) - r_1\| + \|s_2(t) - r_2\| < \delta.$$

Используя соотношение (10) и неравенство Йенсена (см. [8, с. 87]), нетрудно показать, что если значения параметров λ, μ, δ достаточно малы, а γ до-

статочно велико, то при $\|s_{1t} - r_1\|_\tau + \|s_{2t} - r_2\|_\tau < \delta$ будут справедливы оценки

$$(11) \quad \frac{1}{2} \left(f(t) + \mu \int_{t-\tau}^t (\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+2}) d\xi + c_1 \gamma \|\omega(t)\|^2 \right) \leq \\ \leq V(\omega_t, s_{1t}, s_{2t}) \leq 2 \left(f(t) + c_4 \gamma \|\omega(t)\|^2 + \right. \\ \left. + (\lambda\tau + \mu) \int_{t-\tau}^t (\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+2}) d\xi \right),$$

$$(12) \quad \dot{V} \leq -\frac{1}{2} \left(\gamma c_6 \|\omega(t)\|^2 + \epsilon c_7 f^\nu(t) (\alpha_1^2 \|s_1(t) - r_1\|^2 + \alpha_2^2 \|s_2(t) - r_2\|^2) + \right. \\ \left. + \lambda \int_{t-\tau}^t (\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+2}) d\xi \right).$$

Следовательно (см. [8, с. 53, 54]), положение равновесия (3) асимптотически устойчиво. Теорема доказана.

Замечание 1. В отличие от известных условий трехосной стабилизации, полученных при применении линейных управлений с запаздыванием [7, 14–16], теорема 1 гарантирует, что в случае существенно нелинейного восстанавливающего момента асимптотическая устойчивость требуемого положения равновесия имеет место при любом $\tau > 0$. Однако следует отметить, что увеличение запаздывания приводит к уменьшению величины δ , определяющей область, в которой справедливы оценки (11), (12). Таким образом, закон управления может не обеспечить асимптотическую устойчивость, если требуемое положение осей связанной с телом системы координат достаточно «далеко» от текущего при большом запаздывании. В таких ситуациях для стабилизации программной ориентации нужно увеличивать значения параметров α_1, α_2 в управляющем моменте.

4. Стабилизация с использованием нелинейного ПИД-регулятора

Пусть управляющий момент строится по формуле (8). Рассмотрим систему, состоящую из кинематических уравнений (2) и динамических уравнений Эйлера следующего вида:

$$(13) \quad \Theta \dot{\omega}(t) + \omega(t) \times (\Theta \omega(t)) = \\ = -\beta f^\nu(t) L(t) - D\omega(t) - \int_0^t f^\nu(\xi) G(t - \xi) L(\xi) d\xi.$$

Каждое решение данной системы определяется начальными условиями:

$$\omega(\xi + t_0) = w(\xi), \quad s_i(\xi + t_0) = \psi_i(\xi) \quad \text{при} \quad \xi \in [-t_0, 0], \quad i = 1, 2, 3.$$

Здесь $t_0 \geq 0$, а функции $w(\xi), \psi_i(\xi)$ принадлежат пространству $C([-t_0, 0], \mathbb{R}^3)$ непрерывных функций $\varphi(\xi)$ с нормой $\|\varphi\|_{[-t_0, 0]} = \max_{\xi \in [-t_0, 0]} \|\varphi(\xi)\|$.

Предположение 1. Матрица $G(\zeta)$ обладает следующими свойствами:

$$1) \quad \int_0^{+\infty} \|G(\xi)\| d\xi < +\infty,$$

$$2) \quad \int_{\zeta}^{+\infty} \|G(\xi)\| d\xi \leq \sigma \|G(\zeta)\| \quad \text{при} \quad \zeta \geq 0, \quad \text{где} \quad \sigma = \text{const} > 0.$$

Замечание 2. Предположение 1 выполнено в случае, когда $G(\zeta) = \exp(-a\zeta)\tilde{G}$, где a – положительная постоянная, \tilde{G} – постоянная матрица. Следует отметить, что ПИД регуляторы с такими ядрами широко применяются в теории управления (см., например, [8, 24]).

Пусть

$$\Xi = \beta I + \int_0^{+\infty} G(\zeta) d\zeta$$

где I – единичная матрица.

Предположение 2. Матрица $\Xi D + D\Xi^\top$ положительно определена.

Теорема 2. Если выполнены предположения 1 и 2, то система (2), (13) имеет асимптотически устойчивое положение равновесия (3).

Доказательство. Очевидно, что (3) является положением равновесия замкнутой системы. Для доказательства его асимптотической устойчивости функционал Ляпунова–Красовского строим в виде

$$(14) \quad \begin{aligned} V(t, \omega(t), s_{1t}, s_{2t}) = & f(t) + \frac{\gamma}{2} \omega^\top(t) \Theta \omega(t) + L^\top(t) D^{-1} \Theta \omega(t) + \\ & + \mu \int_0^t \int_{t-\xi}^{+\infty} \|G(\zeta)\| d\zeta (\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+2}) d\xi - \\ & - L^\top(t) D^{-1} \int_0^t \int_{t-\xi}^{+\infty} G(\zeta) d\zeta f^\nu(\xi) L(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

где γ, μ – положительные параметры, s_{jt} – отрезки соответствующих компонент решения системы, $s_{jt} : \xi \mapsto s_j(t + \xi)$, $\xi \in [-t, 0]$, $j = 1, 2$.

Для функционала (14) и его производной в силу системы (2), (13) справедливы оценки

$$\begin{aligned}
& f(t) + c_1\gamma\|\omega(t)\|^2 - c_2(\alpha_1\|s_1(t) - r_1\| + \alpha_2\|s_2(t) - r_2\|)\|\omega(t)\| + \\
& + \mu \int_0^t \int_{t-\xi}^{+\infty} \|G(\zeta)\|d\zeta(\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+2})d\xi - c_3(\alpha_1\|s_1(t) - r_1\| + \\
& + \alpha_2\|s_2(t) - r_2\|) \int_0^t \int_{t-\xi}^{+\infty} \|G(\zeta)\|d\zeta(\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+1} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+1})d\xi \leq \\
& \leq V(t, \omega_t, s_{1t}, s_{2t}) \leq f(t) + c_2(\alpha_1\|s_1(t) - r_1\| + \alpha_2\|s_2(t) - r_2\|)\|\omega(t)\| + \\
& + c_4\gamma\|\omega(t)\|^2 + \mu \int_0^t \int_{t-\xi}^{+\infty} \|G(\zeta)\|d\zeta(\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+2})d\xi + \\
& + c_3(\alpha_1\|s_1(t) - r_1\| + \alpha_2\|s_2(t) - r_2\|) \int_0^t \int_{t-\xi}^{+\infty} \|G(\zeta)\|d\zeta(\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+1} + \\
& \quad + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+1})d\xi, \\
& \dot{V} \leq (c_5 - \gamma c_6) \|\omega(t)\|^2 - f^\nu(t)L^\top(t)D^{-1}\Xi L(t) - \\
& - \mu \int_0^t \|G(t - \xi)\|(\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+2})d\xi + \\
& + \mu \int_0^{+\infty} \|G(\zeta)\|d\zeta(\|s_1(t) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(t) - r_2\|^{2\nu+2}) + \\
& + \gamma\beta c_7\|\omega(t)\|(\|s_1(t) - r_1\|^{2\nu+1} + \|s_2(t) - r_2\|^{2\nu+1}) + \\
& + c_8\|\omega(t)\|^2(\alpha_1\|s_1(t) - r_1\| + \alpha_2\|s_2(t) - r_2\|) + \\
& + \gamma c_9\|\omega(t)\| \int_0^t \|G(t - \xi)\|(\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+1} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+1})d\xi - \\
& + c_{10}\|\omega(t)\| \int_0^t \int_{t-\xi}^{+\infty} \|G(\zeta)\|d\zeta(\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+1} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+1})d\xi,
\end{aligned}$$

где c_1, \dots, c_{10} – положительные коэффициенты.

Как и при доказательстве теоремы 1, выбираем число $\epsilon \in (0, 1)$ и находим $\delta > 0$ такое, что при $\|s_1(t) - r_1\| + \|s_2(t) - r_2\| < \delta$ выполнено соотношение (10). Учитывая предположение 2, имеем

$$f^\nu(t)L^\top(t)D^{-1}\Xi L(t) \geq \epsilon c_{11}(\|s_1(t) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(t) - r_2\|^{2\nu+2})$$

при $\|s_1(t) - r_1\| + \|s_2(t) - r_2\| < \delta$, где $c_{11} = \text{const} > 0$.

Кроме того, с использованием предположения 1 и неравенства Гельдера получаем

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{t-\xi}^{+\infty} \|G(\zeta)\| d\zeta (\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+2}) d\xi \leq \\
& \leq \sigma \int_0^t \|G(t-\xi)\| (\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+2}) d\xi, \\
& \int_0^t \|G(t-\xi)\| \|s_j(\xi) - r_j\|^{2\nu+1} d\xi \leq \\
& \leq c_{12} \left(\int_0^t \|G(t-\xi)\| \|s_j(\xi) - r_j\|^{2\nu+2} d\xi \right)^{\frac{2\nu+1}{2\nu+2}}, \quad j = 1, 2,
\end{aligned}$$

где $c_{12} = \text{const} > 0$.

С помощью установленных оценок нетрудно показать, что если значения δ и μ достаточно малы, а γ достаточно велико, то при $\|s_{1t} - r_1\|_{[-t,0]} + \|s_{2t} - r_2\|_{[-t,0]} < \delta$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(f(t) + \mu \int_0^t \int_{t-\xi}^{+\infty} \|G(\zeta)\| d\zeta (\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+2}) d\xi + \right. \\
& \quad \left. + c_1 \gamma \|\omega(t)\|^2 \right) \leq V(t, \omega_t, s_{1t}, s_{2t}) \leq 2 \left(f(t) + c_4 \gamma \|\omega(t)\|^2 + \right. \\
& \quad \left. + \mu \int_0^t \int_{t-\xi}^{+\infty} \|G(\zeta)\| d\zeta (\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+2}) d\xi \right), \\
\dot{V} & \leq -\frac{1}{2} \left(\gamma c_6 \|\omega(t)\|^2 + \epsilon c_{11} (\|s_1(t) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(t) - r_2\|^{2\nu+2}) + \right. \\
& \quad \left. + \mu \int_0^t \|G(t-\xi)\| (\|s_1(\xi) - r_1\|^{2\nu+2} + \|s_2(\xi) - r_2\|^{2\nu+2}) d\xi \right).
\end{aligned}$$

Следовательно (см. [9, с. 211, 212]), положение равновесия (3) асимптотически устойчиво. Теорема доказана.

Замечание 3. Теорема 2 утверждает, что рассматриваемый регулятор может обеспечить асимптотическую устойчивость программной ориентации и в случае, когда его пропорциональная часть не является восстанавливающей, т.е. когда $\beta \leq 0$. Дестабилизирующий эффект этой части компенсируется за счет соответствующего выбора интегрального слагаемого.

Действительно, если $\beta \leq 0$, то матрицу $G(\zeta)$ можно выбрать в виде $G(\zeta) = ag(\zeta)I$, где a – положительный параметр, $g(\zeta)$ – скалярная непрерывная при $\zeta \in [0, +\infty)$ функция, обладающая следующими свойствами:

- а) $\int_0^{+\infty} |g(\xi)| d\xi < +\infty$,
- б) $\int_{\zeta}^{+\infty} |g(\xi)| d\xi \leq \sigma |g(\zeta)|$ при $\zeta \geq 0$, где $\sigma = \text{const} > 0$,
- в) $\int_0^{+\infty} g(\xi) d\xi > 0$.

В этом случае предположение 1 выполнено, а предположение 2 сводится к выполнению неравенства $\beta + a \int_0^{+\infty} g(\zeta) d\zeta > 0$, которое будет справедливо при достаточно большом значении параметра a .

5. Пример

Рассмотрим твердое тело с главными центральными моментами инерции $A = 20$, $B = 25$, $C = 35$, а в качестве программной ориентации выберем $r_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)^T$, $r_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)^T$, $r_3 = (0, 0, 1)^T$. Здесь и далее все физические величины имеют размерности в системе СИ.

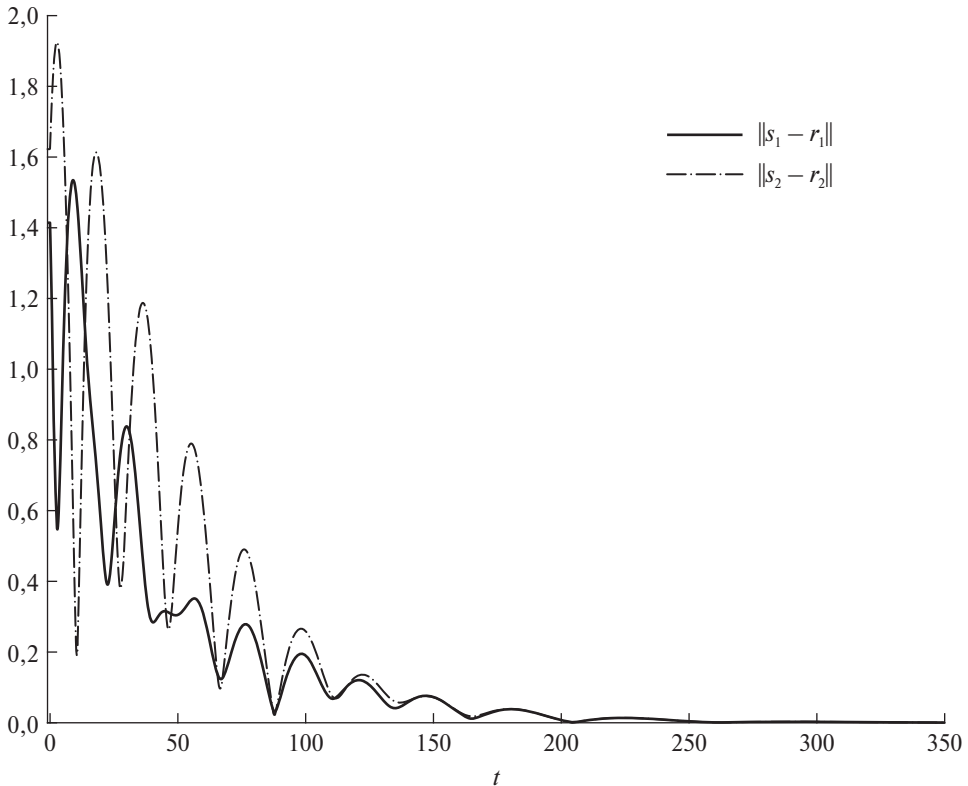


Рис. 1. Результаты численного моделирования при использовании запаздывающей обратной связи.

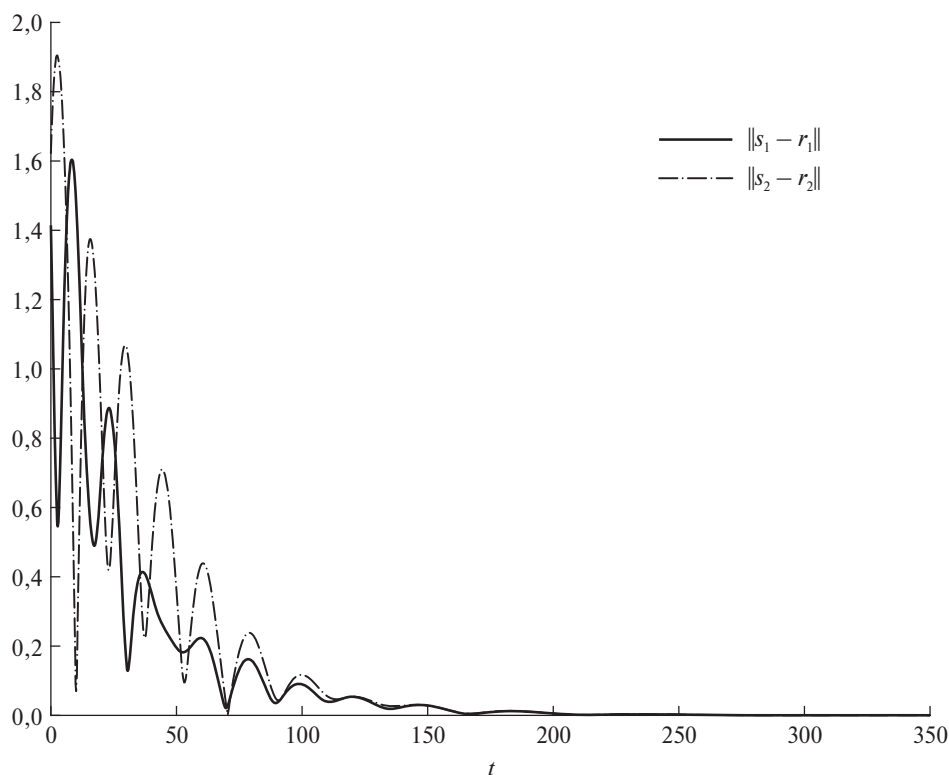


Рис. 2. Результаты численного моделирования при использовании ПИД-регулятора.

Сначала проведем численное моделирование в случае, когда вращательное движение тела описывается системой (2), (7), а затем сравним его результаты с результатами, полученными для системы (2), (13). Пусть $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\nu = 0,3$, $D = 2I$, $\tau = 1$, $\beta = 1$, $G(\zeta) = \exp(-2\zeta)I$.

В обоих случаях для численного моделирования были выбраны следующие начальные условия: $t_0 = 0$, $\omega(t) = (0,3, -0,4, 0,4)^\top$, $s_1(t) = (0, 0, 1)^\top$, $s_2(t) = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}, 0)^\top$, $s_3(t) = (-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 0)^\top$, при $t \in [-1, 0]$. На рис. 1 и 2 показана зависимость величин $\|s_1 - r_1\|$, $\|s_2 - r_2\|$ от времени. Результаты моделирования свидетельствуют об асимптотической устойчивости программной ориентации. Однако при использовании ПИД-регулятора переходные процессы становятся более гладкими, а их время сокращается.

6. Заключение

Рассмотрены два способа построения управляющих моментов, обеспечивающих трехосную стабилизацию твердого тела при наличии запаздывания в обратной связи. Первый способ основан на использовании линейного момента диссипативных сил и существенно нелинейного восстанавливающего момента, содержащего постоянное запаздывание. Доказано, что в отличие от строившихся ранее линейных управляющих моментов предложенное в настоя-

шей статье управление является робастным по отношению к запаздыванию. Второй способ базируется на применении управления типа ПИД-регулятора с линейной дифференциальной частью и существенно нелинейными интегральной и пропорциональной частями. Найдены допустимые значения параметров регулятора, при которых он решает задачу трехосной стабилизации. Из установленных результатов вытекает, что асимптотическую устойчивость программной ориентации можно обеспечить и в случае, когда пропорциональная часть регулятора не является восстанавливающей. Дестабилизирующий эффект этой части компенсируется за счет соответствующего выбора интегрального слагаемого.

Следует заметить, что в системе (7) запаздывание имеется только в восстанавливающем, а не в суммарном управляющем моменте. Это обусловлено тем, что в широком классе случаев диссипативные силы естественным образом присутствуют в реальных механических системах. Кроме того, для создания диссипативных управляющих сил довольно часто не требуется измерений скоростей.

С другой стороны, в ряде прикладных задач, особенно при управлении ориентацией спутников, положения и скорости механических систем вычисляются синхронно с помощью измерений датчиков, а запаздывание в управлении возникает вследствие задержек либо при расчете вектора состояния, либо из-за инерционности исполнительных органов. Поэтому в качестве направления дальнейших исследований отметим обобщение разработанных подходов на случай, когда запаздывание входит как в восстанавливающий, так и в диссипативный момент.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1975.
2. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975.
3. *Черноузько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д.* Эволюция движений твердого тела относительно центра масс. М.–Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2015.
4. *Смирнов Е.Я.* Некоторые задачи математической теории управления. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981.
5. *Воротников В.И.* Об оптимальной стабилизации нелинейных управляемых систем // *Авт.* 1991. № 3. С. 22–34.
6. *Тхай В.Н.* Семейство колебаний, связывающее устойчивое и неустойчивое перманентные вращения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой // *Известия РАН. Механика твердого тела.* 2023. № 6. С. 165–179.
7. *Samiei E., Sanyal A.K., Butcher E.A.* Stabilization of rigid body attitude motion with time-delayed feedback // *Aerospace Science and Technology.* 2017. V. 68. P. 509–517.
8. *Fridman E.* Introduction to Time-delay Systems: Analysis and Control. Basel: Birkhauser, 2014.
9. *Kolmanovskii V., Myshkis A.* Applied Theory of Functional Differential Equations. Dordrecht: Springer, 1999.

10. *Ананьевский И.М., Колмановский В.Б.* О стабилизации некоторых регулируемых систем с последействием // *АиТ.* 1989. № 9. С. 34–43.
11. *Formal'sky A.* On a modification of the PID controller // *Дун. Control.* 1997. V. 7. No. 3. P. 269–277.
12. *Fridman E., Shaikhet L.* Stabilization by using artificial delays: an LMI approach // *Automatica.* 2017. V. 81. P. 429–437.
13. *Zhao C., Guo L.* Towards a theoretical foundation of PID control for uncertain nonlinear systems. // *Automatica.* 2022. V. 142. Art. No. 110360.
14. *Bahrami S., Namvar M.* Rigid body attitude control with delayed attitude measurement // *IEEE Trans. on Control Systems Technology.* 2015. V. 23. No. 5. P. 1961–1969.
15. *Mazenc F., Akella M.R.* Quaternion-based stabilization of attitude dynamics subject to pointwise delay in the input // *In Proceedings of the American Control Conference, 2014.* P. 4877–4882.
16. *Safa A., Baradarannia M., Kharrati H., Khanmohammadi S.* Attitude stabilization of a rigid spacecraft with actuator delay and fault // *Trans. of the Institute of Measurement and Control.* 2018. V. 40. No. 7. P. 2340–2351.
17. *Павликов С.В.* К задаче о стабилизации управляемых механических систем // *АиТ.* 2007. № 9. С. 16–26.
18. *Александров А.Ю., Тихонов А.А.* Нелинейное управление с распределенным запаздыванием для угловой стабилизации твердого тела // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия.* 2022. Т. 9. Вып. 4. С. 653–664.
19. *Александров А.Ю.* О стабилизации вращательного движения твердого тела при неавтономных возмущениях // *Вестник Санкт-Петербургского университета.* Сер. 1. 1999. Вып. 3. С. 53–57.
20. *Aleksandrov A., Efimov D.* Averaging method for the stability analysis of strongly nonlinear mechanical systems // *Automatica.* 2022. V. 146. Art. No. 110576.
21. *Aleksandrov A., Efimov D., Fridman E.* Stability of homogeneous systems with distributed delay and time-varying perturbations // *Automatica.* 2023. V. 153. Art. No. 111058.
22. *Фуртат И.Б., Гуцин П.А., Копысова Е.А.* Нелинейные законы управления, построенные на базе линейных с использованием нечетных функций // *УБС.* 2023. Вып. 102. С. 58–75.
23. *Aleksandrov A.Y., Aleksandrova E.B., Tikhonov A.A.* Stabilization of a programmed rotation mode for a satellite with electrodynamic attitude control system // *Adv. Space Res.* 2018. V. 62. No. 1. P. 142–151.
24. *Sipahi R., Atay F., Niculescu S.-I.* Stability of traffic flow behavior with distributed delays modeling the memory effects of the drivers // *SIAM J. Applied Mathematics.* 2007. V. 68. P. 738–759.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Матасовым.

Поступила в редакцию 12.10.2025

После доработки 30.11.2025

Принята к публикации 08.12.2025