

© 2026 г. В.В. АВETИСЯН, д-р физ.-мат. наук (vanavet@yahoo.com)
(Институт механики НАН Республики Армения, Ереван),
С.П. СТЕПАНЯН, д-р тех. наук (sevran.steranyan@ysu.am)
(Ереванский государственный университет)

ДОСТИЖИМЫЕ КОНФИГУРАЦИИ ДВУЗВЕННОГО МАНИПУЛЯТОРА С ОГРАНИЧЕННЫМИ УГЛОВЫМИ СКОРОСТЯМИ ПРИ ОПТИМАЛЬНОМ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИИ

Рассматривается задача построения областей достижимости плоского двузвенного манипулятора со вторым статически уравновешенным звеном при оптимальном по быстродействию управлении его перемещением с ограничениями на величины угловых скоростей звеньев. Оптимальные управления принадлежат классу релейных режимов и содержат минимальное суммарное число переключений, достаточное для выполнения граничных условий: система покоится в начальный и конечный моменты времени. Разработан метод определения областей в конфигурационной плоскости манипулятора, достижимых при предложенных управлениях, соблюдающих ограничения на угловые скорости.

Ключевые слова: область достижимости, двузвенный манипулятор, оптимальное управление, ограниченные угловые скорости.

DOI: 10.7868/S2413977726070052

1. Введение

Двузвенные роботы-манипуляторы широко применяются в различных отраслях современного производства как самостоятельно, так и в составе многозвенных систем, где два звена выполняют основной объем движений при осуществлении технологических операций. Разработка эффективных режимов программного управления для таких манипуляторов остается актуальной задачей. В случаях, когда сокращение времени рабочего цикла манипулятора ускоряет технологический процесс, целесообразно разрабатывать управляющие режимы, оптимизированные по быстродействию. Существует множество исследований, посвященных как механическим моделям двузвенных манипуляторов [1–9], так и их динамическому взаимодействию с приводами [10–13]. Важно отметить, что при проектировании таких режимов необходимо учитывать не только скорость выполнения операций, но и ограничения на угловые скорости звеньев. Превышение допустимых угловых скоростей может привести к механическим повреждениям, потере устойчивости системы и сни-

жению точности выполнения задач. Вопросы оптимизации быстродействующих управлений при наличии ограничений на угловые скорости рассмотрены в [14, 15]. При этом учет ограничений на угловые скорости может увеличить количество переключений в структуре оптимального управления и привести к появлению интервалов времени, в течение которых манипулятор или двигатель работают на предельных значениях угловой скорости. Для реализации таких оптимальных управлений необходимо точно рассчитывать моменты переключений управляющего воздействия. Однако из-за неизбежных вычислительных погрешностей увеличение числа переключений может существенно повлиять на точность управления.

Таким образом, ключевой задачей является построение областей достижимых конфигураций на конфигурационной плоскости манипулятора, реализуемых при оптимальных управлениях с минимальным числом переключений. При этом предельные угловые скорости должны достигаться только в моменты переключения управления, в зависимости от его конечной конфигурации. Настоящая статья посвящена решению этой задачи для модели двухзвенного манипулятора со вторым уравновешенным звеном [16–18]. Отметим, что упрощенные и полные модели манипуляторов с двумя степенями свободы в контексте оптимального быстродействия рассматривались также в [19–25].

2. Расчетная модель манипулятора и постановка задачи

Рассмотрим механическую двухзвенную систему, состоящую из двух абсолютно жестких звеньев G_1 , G_2 равной длины, соединенных шарниром O_2 (рис. 1). Звено G_1 при помощи шарнира O_1 связано с неподвижным основанием. Шарниры являются идеальными, цилиндрическими, а их оси параллельны друг другу. На конце второго звена в точке O_3 укреплен схват. Будем предполагать, что линейные размеры схвата много меньше длин звеньев, и при исследовании транспортных движений считать схват материальной точкой. Управление манипулятором осуществляется с помощью двух независимых приводов D_1 , D_2 . Привод D_1 осуществляет взаимодействие первого звена

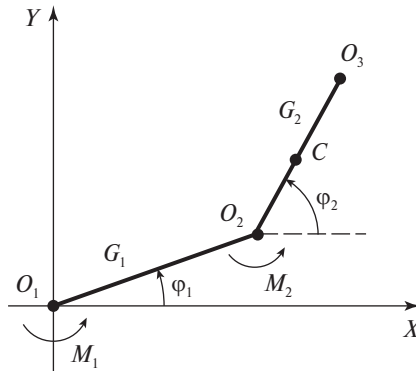


Рис. 1. Расчетная модель двухзвенного манипулятора.

с основанием, а D_2 – взаимодействие между звеньями G_1, G_2 манипулятора. Управляющими функциями в исследуемой модели манипулятора являются величины M_1, M_2 – вращающие моменты относительно осей O_1, O_2 , развиваемые приводами D_1, D_2 соответственно.

Описанная система совершает плоскопараллельное движение в горизонтальной плоскости, перпендикулярной осям шарниров O_1, O_2 .

В случае, когда центр масс C второго звена G_2 находится на оси второго шарнира (т.е. второе звено манипулятора статически уравновешено), уравнения Лагранжа, описывающие движение системы, имеют вид [1]:

$$(2.1) \quad (I_1 + m_2 L^2) \ddot{\varphi}_1 = M_1 - M_2, \quad I_2 \ddot{\varphi}_2 = M_2.$$

Здесь φ_1 – угол между осью O_1x и прямой O_1O_2 ; φ_2 – угол между осью O_1x и прямой O_2O_3 ; $L = |O_1O_2| = |O_2O_3|$ – длина первого и второго звеньев; I_1, I_2 – моменты инерции звеньев G_1, G_2 относительно осей шарниров O_1, O_2 соответственно; m_2 – масса звена G_2 .

Будем считать, что конструкция манипулятора позволяет его звеньям выполнять более одного полного оборота как в положительном, так и в отрицательном направлении. В зависимости от технологического назначения это, например, позволяет перемещать конец O_3 манипулятора по спиралеобразной траектории в рабочей зоне.

Отметим, что в задачах оптимального быстродействия уравнения (2.1) рассматриваются не только как базовая модель для исследования полных уравнений манипулятора со смещенным центром масс второго звена [2–9], но и отдельно [16–18].

Задача. Определить законы изменения управляющих моментов $M_1 = M_1(t), M_2 = M_2(t)$ и построить области достижимых конечных состояний покоя манипулятора, при которых обеспечивается перемещение системы (2.1) из начального состояния покоя

$$(2.2) \quad \varphi_1(0) = \varphi_1^0, \quad \dot{\varphi}_1(0) = 0, \quad \varphi_2(0) = \varphi_2^0, \quad \dot{\varphi}_2(0) = 0$$

в любое конечное состояние покоя в пределах построенной области

$$(2.3) \quad \varphi_1(T) = \varphi_1^T, \quad \dot{\varphi}_1(T) = 0, \quad \varphi_2(T) = \varphi_2^T, \quad \dot{\varphi}_2(T) = 0$$

за минимальное время T . При этом должны выполняться ограничения:

$$(2.4) \quad |M_1(t)| \leq M_1^0, \quad |M_2(t)| \leq M_2^0,$$

а также ограничения на угловые скорости:

$$(2.5) \quad |\dot{\varphi}_1(t)| \leq a_1, \quad |\dot{\varphi}_2(t)| \leq a_2.$$

Эти ограничения должны соблюдаться на всем протяжении движения.

В безразмерных переменных (с дальнейшим опусканием штрихов)

$$(2.6) \quad \begin{aligned} t' &= [M_2^0 / (m_2 L^2)]^{1/2} t, & I'_i &= I_i / (m_2 L^2), & M'_i &= M_i / M_2^0, \\ a'_i &= [M_2^0 / (m_2 L^2)]^{-1/2} a_i, & \varphi'_i &= \varphi_i - \varphi_i^0, & \varphi_i^{0,T} &= \varphi_i^{0,T} - \varphi_i^0, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

соотношения (2.1)–(2.5) упрощаются и принимают вид

$$(2.7) \quad (I_1 + 1) \ddot{\varphi}_1 = M_1 - M_2, \quad I_2 \ddot{\varphi}_2 = M_2,$$

$$(2.8) \quad \varphi_i(0) = \dot{\varphi}_i(0) = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$(2.9) \quad \varphi_i(T) = \varphi_i^T, \quad \dot{\varphi}_i(T) = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$(2.10) \quad |M_1(t)| \leq M_1^0, \quad |M_2(t)| \leq 1,$$

$$(2.11) \quad |\dot{\varphi}_1(t)| \leq a_1, \quad |\dot{\varphi}_2(t)| \leq a_2.$$

3. Оптимальные управления без учета ограничений на угловые скорости

Используя результаты [1, 9], решение задачи оптимального быстродействия для системы (2.7)–(2.10) (без учета ограничений на угловые скорости (2.11)) можно представить следующим образом:

$$(3.1) \quad M^* = \begin{cases} (M_1^*, M_2), & \text{если } (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_1 = \bigcup_{\alpha=0}^1 \Phi_1^{(\alpha)}, \\ (M_1, M_2^*), & \text{если } (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_2 = \bigcup_{\alpha=0}^1 \Phi_2^{(\alpha)}, \\ M^* = (M_1^*, M_2^*), & \text{если } (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_0 = \bigcup_{\alpha, k=0}^1 \Phi_0^{(\alpha, k)}. \end{cases}$$

Согласно (3.1),

1. если $(\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_1 = \bigcup_{\alpha=0}^1 \Phi_1^{(\alpha)}$, где

$$(3.2) \quad \Phi_1^{(\alpha)} = \left\{ \begin{aligned} &(\varphi_1^T, \varphi_2^T): (-1)^\alpha (I_1 + 1) [I_2 (M_1^0 + (-1)^\alpha)]^{-1} \varphi_1^T < \\ &< \varphi_2^T < (-1)^\alpha (I_1 + 1) [I_2 (M_1^0 - (-1)^\alpha)]^{-1} \varphi_1^T, \\ &(-1)^\alpha \varphi_1^T > 0 \end{aligned} \right\}, \quad \alpha = 0, 1,$$

то оптимальное управление M_1^* – релейная функция с одной точкой переключения

$$(3.3) \quad \begin{aligned} M_1^*(t) &= M_1^0 \operatorname{sign} \{ (t_0 - t) [(I_1 + 1) \varphi_1^T + I_2 \varphi_2^T] \}, \\ t_0 &= T/2, \quad T = 2 (|(I_1 + 1) \varphi_1^T + I_2 \varphi_2^T| / M_1^0)^{1/2}, \end{aligned}$$

а $M_2(t)$ – любое допустимое управление, в частности релейная функция с двумя точками переключения:

$$(3.4) \quad M_2(t) = \begin{cases} (-1)^\gamma, & t \in [0, t_1) \cup [t_2, T], \\ (-1)^{\gamma+1}, & t \in [t_1, t_2), \end{cases} \quad \gamma = 0, 1,$$

$$t_1 = (-1)^\gamma I_2 \varphi_2^T / T + T/4, \quad t_2 = (-1)^\gamma I_2 \varphi_2^T / T + 3T/4,$$

$$T = 2 (|(I_1 + 1) \varphi_1^T + I_2 \varphi_2^T| / M_1^0)^{1/2}, \quad T = 2(t_2 - t_1), \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T.$$

2. если $(\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_2 = \bigcup_{\alpha=0}^1 \Phi_2^{(\alpha)}$, где

$$(3.5) \quad \Phi_2^{(\alpha)} = \left\{ \begin{array}{l} (\varphi_1^T, \varphi_2^T): -(-1)^\alpha [I_2 (M_1^0 + (-1)^\alpha) (I_1 + 1)^{-1} \varphi_2^T < \\ < \varphi_1^T < (-1)^\alpha (I_1 + 1) [I_2 (M_1^0 - (-1)^\alpha)]^{-1} \varphi_2^T, \\ (-1)^\alpha \varphi_2^T > 0 \end{array} \right\}, \quad \alpha = 0, 1,$$

то, наоборот,

$$(3.6) \quad M_2(t) = M_2^*(t) = \text{sign} [(t_0 - t) I_2 \varphi_2^T], \quad t_0 = T/2, \quad T = 2 (|I_2 \varphi_2^T|)^{1/2},$$

а $M_1(t)$ – любое допустимое управление, в частности релейная функция с двумя точками переключения:

$$(3.7) \quad M_1(t) = \begin{cases} (-1)^\gamma, & t \in [0, t_1) \cup [t_2, T], \\ (-1)^{\gamma+1}, & t \in [t_1, t_2), \end{cases} \quad \gamma = 0, 1,$$

$$t_1 = (-1)^\gamma [(I_1 + 1) \varphi_1^T + I_2 \varphi_2^T] / (M_1^0 T) + T/4,$$

$$t_2 = (-1)^\gamma [(I_1 + 1) \varphi_1^T + I_2 \varphi_2^T] / (M_1^0 T) + 3T/4,$$

$$T = 2 (|I_2 \varphi_2^T|)^{1/2}, \quad T = 2(t_2 - t_1), \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T.$$

3. если $(\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_0 = \bigcup_{\alpha, k=0}^1 \Phi_0^{(\alpha, k)}$, где

$$(3.8) \quad \Phi_0^{(\alpha, k)} = \left\{ \begin{array}{l} (\varphi_1^T, \varphi_2^T): \varphi_2^T = (-1)^k (I_1 + 1) [I_2 (M_1^0 - (-1)^k)]^{-1} \varphi_1^T, \\ (-1)^\alpha \varphi_1^T > 0 \end{array} \right\},$$

$$\alpha, k = 0, 1,$$

то $M_1^*(t)$ и $M_2^*(t)$ – релейные функции с одной точкой переключения:

$$(3.9) \quad M_1^*(t) = (-1)^\alpha M_1^0 \text{sign}(t_0 - t), \quad M_2^*(t) = (-1)^k \text{sign}(t_0 - t),$$

$$t_0 = T/2, \quad \alpha, k = 0, 1.$$

В (3.9) T определяются с помощью равносильных формул (3.3) или (3.6).

4. Построение областей достижимости двузвенного манипулятора при оптимальных управлениях с учетом ограничений на угловые скорости

Введем следующие обозначения:

$$(4.1) \quad R(M^*) = \bigcup_{i=0}^2 R_i(M^*),$$

$$R_0(M^*) = \bigcup_{\alpha, k=0}^1 R_0^{(\alpha, k)}(M^*), \quad R_i(M^*) = \bigcup_{\alpha=0}^1 R_i^{(\alpha)}(M^*),$$

$$R_0^{(\alpha, k)}(M^*) = \left\{ (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_0^{(\alpha, k)} : |\dot{\varphi}_1| \leq a_1, |\dot{\varphi}_2| \leq a_2 \right\},$$

$$R_i^{(\alpha)}(M^*) = \left\{ (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_i^{(\alpha)} : |\dot{\varphi}_1| \leq a_1, |\dot{\varphi}_2| \leq a_2 \right\},$$

где управление M^* задается с помощью (3.1).

Согласно (4.1) $R(M^*)$ – область на конфигурационной плоскости $(\varphi_1^T, \varphi_2^T)$, где реализуются оптимальные режимы (3.1) и при этом не нарушаются ограничения на угловые скорости (2.11).

Как показывают построенные оптимальные решения для кусочно-постоянных законов управления вида (3.1), для управляющих моментов $M_1(t)$, $M_2(t)$ с двумя моментами переключений имеется два эквивалентных режима управления $\gamma = 0, 1$, которые в паре с управлением одним переключением эквивалентны в смысле быстродействия. Поэтому достаточно рассмотреть только режимы с $\gamma = 0$.

В силу инвариантности системы (2.7)–(2.9) относительно замены переменных $\varphi_i \rightarrow -\varphi_i$, $\varphi_1^T \rightarrow -\varphi_1^T$, $\varphi_2^T \rightarrow -\varphi_2^T$, $M^* \rightarrow -M^*$ следует, что области $R_0^{(0,0)}$ и $R_0^{(1,0)}$, $R_0^{(0,1)}$ и $R_0^{(1,1)}$, $R_1^{(0)}$ и $R_1^{(1)}$, $R_2^{(0)}$ и $R_2^{(1)}$ попарно симметричны относительно начала координат. В связи с этим можно сосредоточиться на построении только областей $R_0^{(0,0)}$, $R_0^{(0,1)}$, $R_1^{(0)}$, $R_2^{(0)}$.

Процедура построения областей $R_i^{(0)}$, $i = 1, 2$, состоит в следующем: на основе анализа зависимостей $\dot{\varphi}_i(\varphi_i)$, $i = 1, 2$, найденных при оптимальных режимах управления (3.2), (3.4), (3.6), (3.7), приводящих систему (2.7) из (2.8) в (2.9) по каждой степени подвижности, следует, что максимальное по модулю значение угловой скорости i -ого звена манипулятора достигается в момент времени t_0 , если вращение звена осуществляется при управлении с одной точкой переключения, и в моменты времени t_1 или t_2 , если вращение осуществляется при управлении с двумя точками переключения. Следовательно, условия (2.11) (или (4.1)) заведомо не нарушаются, если выполняются следующие соотношения:

$$(4.2) \quad \max_{t \in [0, T]} |\dot{\varphi}_1(t)| = |\dot{\varphi}_1(t_j)| \leq a_1, \quad j = 0, 1, 2, \quad 0 < t_1 \leq t_0 \leq t_2,$$

$$\max_{t \in [0, T]} |\dot{\varphi}_2(t)| = |\dot{\varphi}_2(t_j)| \leq a_2, \quad j = 0, 1, 2, \quad 0 < t_1 \leq t_0 \leq t_2.$$

После подстановки $t_0 = t_0(\varphi_1^T, \varphi_2^T)$, $t_1 = t_1(\varphi_1^T, \varphi_2^T)$, $t_2 = t_2(\varphi_1^T, \varphi_2^T)$ из (3.3), (3.4), (3.6), (3.7) в условия (4.2) получим два неравенства относительно φ_1^T , φ_2^T , которым отвечают области:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} D_1^{(0)}(a_1) &= \left\{ (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_1^{(0)} : |\dot{\varphi}_1| \leq a_1 \right\}, \\ D_1^{(0)}(a_2) &= \left\{ (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_1^{(0)} : |\dot{\varphi}_2| \leq a_2 \right\}, \\ D_2^{(0)}(a_1) &= \left\{ (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_2^{(0)} : |\dot{\varphi}_1| \leq a_1 \right\}, \\ D_2^{(0)}(a_2) &= \left\{ (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_2^{(0)} : |\dot{\varphi}_2| \leq a_2 \right\}. \end{aligned}$$

Тогда искомые области определяются следующим образом:

$$(4.4) \quad R_1^{(0)} = D_1^{(0)}(a_1) \cap D_1^{(0)}(a_2), \quad R_2^{(0)} = D_2^{(0)}(a_1) \cap D_2^{(0)}(a_2).$$

Перейдем к построению областей $R_0^{(0,0)}$, $R_0^{(0,1)}$, $R_1^{(0)}$, $R_2^{(0)}$.

4.1. Построение $R_0^{(0,0)}$ и $R_0^{(0,1)}$

В областях $\Phi_0^{(0,0)}$ и $\Phi_0^{(0,1)}$, представляющих собой пару полупрямых, исходящих из начала координат, оба управляющих момента M_1 и M_2 имеют по одной точке переключения (3.9). Если между параметрами задачи имеет место соотношение

$$(4.5) \quad a_1 (I_1 + 1) (M_1^0 - 1)^{-1} < a_2 I_2,$$

то угловая скорость $\dot{\varphi}_1$ достигает своего максимального по модулю значения a_1 раньше, чем $\dot{\varphi}_2$ своего a_2 . Это утверждение следует из простого интегрирования системы (2.7), (2.8) до момента $t = t_0$ – выхода $\dot{\varphi}_1$ на ограничение.

В этом случае $R_0^{(0,0)}$, $R_0^{(0,1)}$ состоят из двух отрезков, один из концов которых совпадает с началом координат $(0, 0)$, а другие концы имеют соответственно координаты:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} A &= (\varphi_1^A, \varphi_2^A), & B &= (\varphi_1^B, \varphi_2^B), \\ \varphi_1^A &= a_1^2 (I_1 + 1) (M_1^0 - 1)^{-1}, & \varphi_2^A &= a_1^2 (I_1 + 1)^2 I_2^{-1} (M_1^0 - 1)^{-2}, \\ \varphi_1^B &= a_1^2 (I_1 + 1) (M_1^0 + 1)^{-1}, & \varphi_2^B &= -a_1^2 (I_1 + 1)^2 I_2^{-1} (M_1^0 + 1)^{-2}. \end{aligned}$$

При приведении системы (2.7), (2.8) в точки A и B в момент переключения $t = t_0$ выполняются равенство $\dot{\varphi}_1 = a_1$ и неравенство $\dot{\varphi}_2 < a_2$.

В случае обратного неравенства (4.5),

$$(4.7) \quad a_1 (I_1 + 1) (M_1^0 - 1)^{-1} > a_2 I_2,$$

наоборот, угловая скорость $\dot{\varphi}_2$ достигает своего максимального по модулю значения a_2 раньше. Тогда соответствующие области $R_0^{(0,0)}$, $R_0^{(0,1)}$ состоят из двух отрезков, один из концов которых совпадает с началом координат $(0, 0)$, а другие концы имеют соответственно координаты:

$$(4.8) \quad C = (\varphi_1^C, \varphi_2^C), \quad D = (\varphi_1^D, \varphi_2^D),$$

$$\varphi_1^C = a_2^2 I_2^2 (M_1^0 - 1) (I_1 + 1)^{-1}, \quad \varphi_2^C = a_2^2 I_2,$$

$$\varphi_1^D = a_2^2 I_2^2 (M_1^0 + 1) (I_1 + 1)^{-1}, \quad \varphi_2^D = -a_2^2 I_2^2.$$

При приведении системы (2.7), (2.8) в точки C и D в момент переключения $t = t_0$ выполняются равенство $\dot{\varphi}_2 = a_2$ и неравенство $\dot{\varphi}_1 < a_1$.

4.2. Построение $R_1^{(0)}$

Пусть $(\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_1^{(0)}$. Тогда интегрируя систему (2.7), (2.8) на интервале $[0, T]$ при соответствующих управлениях (3.3), (3.4) ($\gamma = 0$) один раз, получим зависимости $\dot{\varphi}_i(\varphi_i)$, $i = 1, 2$, изображенные на рис. 2.

Вычисления показывают, что

$$(4.9) \quad |\dot{\varphi}_1(t)| \leq \max_{t \in [0, T_1]} |\dot{\varphi}_1(t)| = |\dot{\varphi}_1(t_0)|.$$

$$(4.10) \quad |\dot{\varphi}_2(t)| \leq \max_{t \in [0, T_1]} |\dot{\varphi}_2(t)| = \begin{cases} |\dot{\varphi}_2(t_1)|, & \varphi_2^T > 0, \\ |\dot{\varphi}_2(t_2)|, & \varphi_2^T < 0. \end{cases}$$

В (4.9), (4.10) $\dot{\varphi}_1(t_0)$, $\dot{\varphi}_2(t_1)$, $\dot{\varphi}_2(t_2)$, учитывая выражения для T , t_1 , t_2 через t_0 (3.3), (3.4), можно представить в следующих формах соответственно:

$$(4.11) \quad \dot{\varphi}_1(t_0) = -I_2 (I_1 + 1)^{-1} \varphi_2^T t_0^{-1} + M_1^0 (I_1 + 1)^{-1} t_0 > 0,$$

$$(4.12) \quad \dot{\varphi}_2(t_1) = (\varphi_2^T t_0^{-1} + I_2^{-1} t_0) / 2 > 0 \quad \text{при} \quad \varphi_2^T > 0,$$

$$(4.13) \quad \dot{\varphi}_2(t_2) = (\varphi_2^T t_0^{-1} + I_2^{-1} t_0) / 2 < 0 \quad \text{при} \quad \varphi_2^T < 0.$$

После подстановки t_0 из (3.3) в (4.1) неравенство $|\dot{\varphi}_1| \leq a_1$ преобразуется к виду

$$(4.14) \quad \varphi_2^T \geq M_1^0 I_2^{-1} a_1^{-2} (\varphi_1^T)^2 - (I_1 + 1) I_2^{-1} \varphi_1^T.$$

На плоскости $(\varphi_1^T, \varphi_2^T)$ неравенство (4.14) задает область, пересечение которой с областью $\Phi_1^{(0)}$ (3.2) определяется следующим образом:

$$(4.15) \quad D_1^{(0)}(a_1) =$$

$$= \left\{ (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_1^{(0)} : \begin{array}{l} -\frac{I_1 + 1}{I_2(M_1^0 + 1)} \varphi_1^T < \varphi_2^T < \frac{I_1 + 1}{I_2(M_1^0 - 1)} \varphi_1^T, \quad \varphi_1^T > 0 \\ \varphi_2^T \geq M_1^0 I_2^{-1} a_1^{-2} (\varphi_1^T)^2 - (I_1 + 1) I_2^{-1} \varphi_1^T, \quad \varphi_1^T > 0 \end{array} \right\}.$$

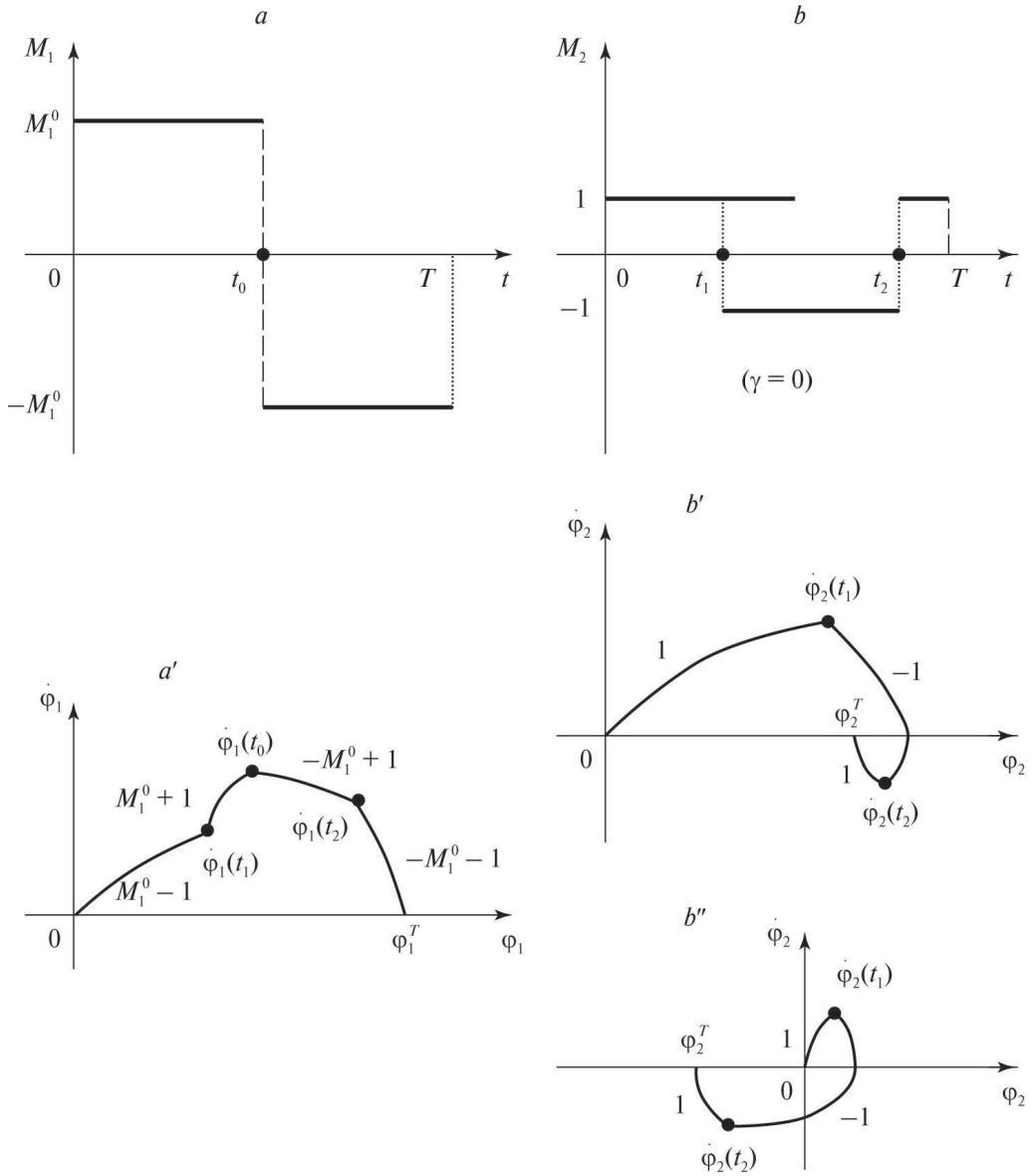


Рис. 2. Если $(\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_1^{(0)}$, то $a - M_1$ и $b - M_2$ – релейные функции с одной и двумя точками переключений соответственно, $a' - \dot{\varphi}_1(\varphi_1)$ и $b', b'' - \dot{\varphi}_2(\varphi_2)$ – соответствующие фазовые зависимости.

Второе неравенство $|\dot{\varphi}_2| \leq a_2$ из (4.1) в силу (4.10), (4.12), (4.13) преобразуется к квадратичному неравенству относительно t_0 : $t_0^2 - 2a_2 I_2 t_0 + I_2 |\varphi_2^T| \leq 0$, откуда имеем

$$(4.16) \quad t_0^- \leq t_0 \leq t_0^+, \quad t_0^{+,-} = a_2 I_2 \pm \sqrt{a_2^2 I_2^2 - I_2 |\varphi_2^T|}.$$

С использованием выражения для t_0 (3.3) неравенство (4.16) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \varphi_1^{T(-)} \leq \varphi_1^T \leq \varphi_1^{T(+)}, \\ (4.17) \quad & \varphi_1^{T(+)} = M_1^0 (I_1 + 1)^{-1} \left(a_2 I_2 + \sqrt{a_2^2 I_2^2 - I_2 |\varphi_2^T|} \right)^2 - I_2 (I_1 + 1)^{-1} \varphi_2^T, \\ & \varphi_1^{T(-)} = M_1^0 (I_1 + 1)^{-1} \left(a_2 I_2 - \sqrt{a_2^2 I_2^2 - I_2 |\varphi_2^T|} \right)^2 - I_2 (I_1 + 1)^{-1} \varphi_2^T. \end{aligned}$$

В пределах $\Phi_1^{(0)}$ область $D_1^{(0)}(a_2)$ определяется следующим образом:

$$(4.18) \quad D_1^{(0)}(a_2) = \left\{ (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_1^{(0)} : \varphi_1^{T(-)} \leq \varphi_1^T \leq \varphi_1^{T(+)} \right\},$$

где $\varphi_1^{T(+)}$ и $\varphi_1^{T(-)}$ задаются согласно (4.17).

В соответствии с (4.4) имеем

$$(4.19) \quad R_1^{(0)} = D_1^{(0)}(a_1) \cap D_1^{(0)}(a_2).$$

4.3. Построение $R_2^{(0)}$

Пусть $(\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_2^{(0)}$. Тогда интегрируя систему (2.7), (2.8) на интервале $[0, T]$ при соответствующих управлениях (3.6), (3.7) ($\gamma = 0$) один раз, получим зависимости $\dot{\varphi}_i(\varphi_i)$, $i = 1, 2$, изображенные на рис. 3.

Аналогично предыдущему вычисления дают следующие результаты:

$$(4.20) \quad |\dot{\varphi}_1| \leq \max_{0 \leq t \leq T_2} |\dot{\varphi}_1(t)| = \begin{cases} |\dot{\varphi}_1(t_1)|, & \varphi_1^T > 0, \\ |\dot{\varphi}_1(t_2)|, & \varphi_1^T < 0, \end{cases}$$

$$(4.21) \quad |\dot{\varphi}_2| \leq \max_{0 \leq t \leq T_2} |\dot{\varphi}_2(t)| = |\dot{\varphi}_2(t_0)|,$$

где $\dot{\varphi}_2(t_1)$, $\dot{\varphi}_2(t_2)$, $\dot{\varphi}_1(t_0)$, учитывая выражения для T , t_1 , t_2 через t_0 (3.6), (3.7), можно представить следующим образом соответственно:

$$(4.22) \quad \dot{\varphi}_1(t_1) = (M_1^0 - 1) (I_1 + 1)^{-1} \left\{ [(I_1 + 1)\varphi_1^T + I_2\varphi_2^T] / (M_1^0 t_0) + t_0 \right\} / 2 > 0,$$

$$(4.23) \quad \dot{\varphi}_1(t_2) = (M_1^0 + 1) (I_1 + 1)^{-1} \left\{ [(I_1 + 1)\varphi_1^T + I_2\varphi_2^T] / (M_1^0 t_0) - t_0 \right\} / 2 < 0,$$

$$(4.24) \quad \dot{\varphi}_2(t_0) = I_2^{-1} t_0 > 0.$$

С учетом выражения для t_0 (3.6), а также (4.20)–(4.24) неравенства $|\dot{\varphi}_1| \leq a_1$ и $|\dot{\varphi}_2| \leq a_2$ из (4.1) приобретают следующие формы соответственно:

$$(4.25) \quad \varphi_1^T \leq -I_2 (I_1 + 1)^{-1} (M_1^0 + 1) \varphi_2^T + 2a_1 M_1^0 (M_1^0 - 1)^{-1} \sqrt{I_2 \varphi_2^T}, \quad \varphi_1^T > 0,$$

$$(4.26) \quad \varphi_1^T \geq I_2 (I_1 + 1)^{-1} (M_1^0 - 1) \varphi_2^T - 2a_1 M_1^0 (M_1^0 + 1)^{-1} \sqrt{I_2 \varphi_2^T}, \quad \varphi_1^T < 0,$$

$$(4.27) \quad \varphi_2^T \leq I_2 a_2^2.$$

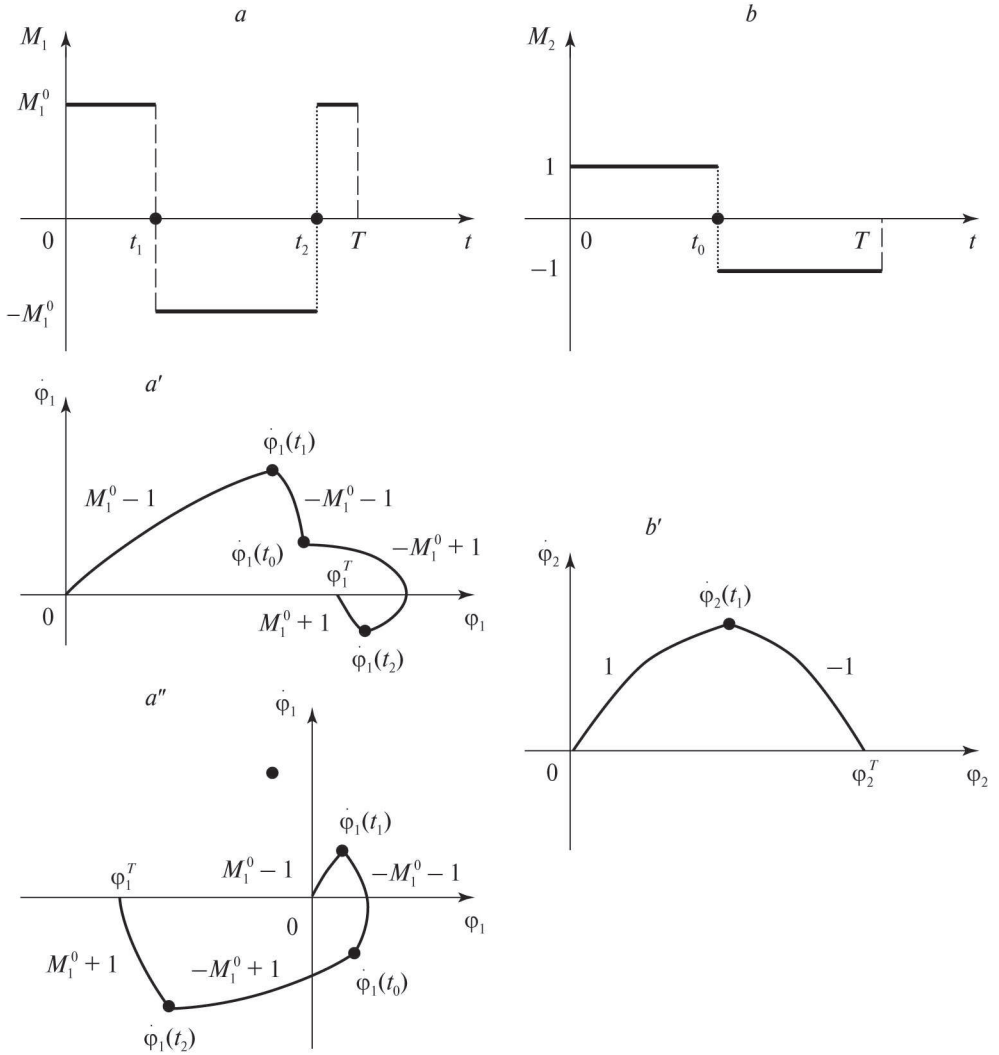


Рис. 3. Если $(\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_2^{(0)}$, то $a - M_1$ и $b - M_2$ – релейные функции с двумя и одной точками переключений соответственно, a' , $a'' - \dot{\varphi}_1(\varphi_1)$ и $b' - \dot{\varphi}_2(\varphi_2)$ – соответствующие фазовые зависимости.

В соответствии с (4.13), (4.25)–(4.27) имеем

$$(4.28) \quad D_2^{(0)}(a_1) = \left\{ (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_2^{(0)} : \begin{array}{l} \varphi_1^T \leq -\frac{I_2(M_1^0 + 1)}{I_1 + 1} \varphi_2^T + \frac{2a_1 M_1^0}{M_1^0 - 1} \sqrt{I_2 \varphi_2^T}, \quad \varphi_1^T > 0 \\ \varphi_1^T \geq \frac{I_2(M_1^0 - 1)}{I_1 + 1} \varphi_2^T - \frac{2a_1 M_1^0}{M_1^0 + 1} \sqrt{I_2 \varphi_2^T}, \quad \varphi_1^T < 0 \end{array} \right\},$$

$$(4.29) \quad D_2^{(0)}(a_2) = \left\{ (\varphi_1^T, \varphi_2^T) \in \Phi_2^{(0)} : \varphi_2^T \leq I_2^{-1} a_2^2 \right\}.$$

Следовательно, из (4.4) получаем

$$(4.30) \quad R_2^{(0)} = D_2^{(0)}(a_1) \cap D_2^{(0)}(a_2).$$

При построении областей $R_1^{(0)}$, $R_2^{(0)}$, $R_0^{(0,0)}$ и $R_0^{(0,1)}$ было принято, что манипулятор характеризуется размерными параметрами

$$(4.31) \quad \begin{aligned} L = 1 \text{ м}, \quad m_2 = 10 \text{ кг}, \quad I_1 = I_2 = (10/3) \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \\ M_1^0 = 2 \text{ н} \cdot \text{м}, \quad M_2^0 = 1 \text{ н} \cdot \text{м}, \end{aligned}$$

отвечающими манипулятору, звенья которого – одинаковые однородные стержни. После перехода к безразмерным параметрам согласно (2.6) получим из (4.31), что

$$(4.32) \quad L = 1, \quad m_2 = 1, \quad I_1 = I_2 = 1/3, \quad M_1^0 = 2, \quad M_2^0 = 1.$$

Безразмерные значения угловых скоростей зададим в виде

$$(4.33) \quad \begin{aligned} (A) \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 5,4, \\ (B) \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 0,75. \end{aligned}$$

В случае (4.33) (A) выполняется условие (4.5), а в случае (4.33) (B) – условие (4.17). Графические построения показали, что при значениях (4.33) (A) имеет место включение $D_{1,2}^{(0)}(a_1) \subset D_{1,2}^{(0)}(a_2)$, а при значениях (4.33) (B) – включение $D_{1,2}^{(0)}(a_2) \subset D_{1,2}^{(0)}(a_1)$.

Следовательно, из (4.19) и (4.30) получаем

$$(4.34) \quad \begin{aligned} R_{1,2}^{(0)} = D_{1,2}^{(0)}(a_1) \quad \text{в случае (A),} \\ R_{1,2}^{(0)} = D_{1,2}^{(0)}(a_2) \quad \text{в случае (B).} \end{aligned}$$

На рис. 4 граница области (4.19), определяемой параболой (4.14) (помечена номером (1)), пересекается с линиями $\Phi_0^{(0,0)}$ и $\Phi_0^{(0,1)}$ в точках A и B (4.6) соответственно. При этом в любой точке границы (4.19) выполняются условия: $\dot{\varphi} = a_1$ и $|\dot{\varphi}_2| < a_2$. Кривые, заданные равенствами (4.25) и (4.26) и помеченные номерами (2) и (3), стыкуются на оси φ_2^T , а также пересекаются с линиями $\Phi_0^{(0,0)}$ и $\Phi_0^{(0,1)}$ в точках A (4.6) и B' – центрально симметричной точке B (4.6). В силу вышеупомянутой центральной симметрии номерами (1)', (2)', (3)' помечены границы областей $R_1^{(1)}$, $R_2^{(1)}$.

Замечание. В зависимости от значения a_2 в случае (4.33) (A), точка стыковки кривых (2) и (3) на оси φ_2^T может располагаться ниже (рис. 4) или выше прямой $\varphi_2^T = I_2 a_2^2$. В последнем случае граница области $R_2^{(0)}$ будет содержать отрезок этой прямой.

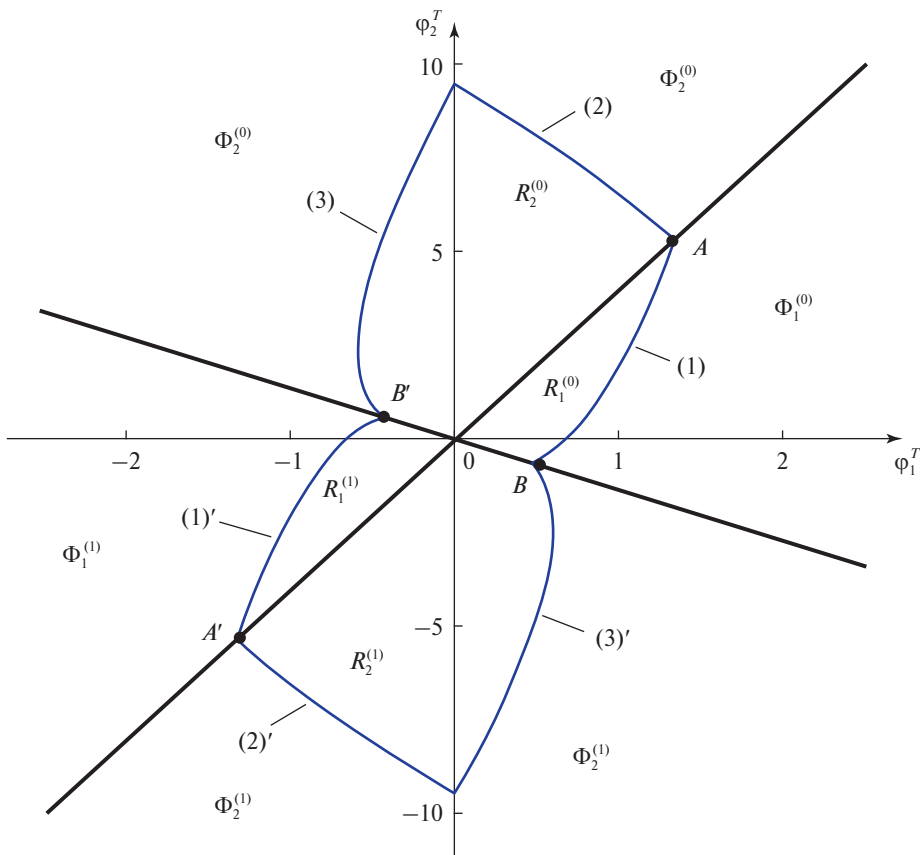


Рис. 4. Области конечных конфигураций, достижимых при оптимальных режимах (3.1) с учетом условия (4.5).

Из рис. 4 следует, что область R (4.1) сужается вблизи начала координат $(0,0)$. Это объясняется следующим образом. Первое звено достигает точки B (ближе к началу координат) с большим ускорением, так как момент $M_1^0 + 1$ разгоняет его быстрее, тогда как в точке A (дальше от начала координат) его ускорение меньше из-за более слабого действия момента $M_1^0 - 1$. В обоих случаях $\dot{\varphi}_1$ достигает своего максимального значения раньше, чем $\dot{\varphi}_2$, причем при большем ускорении этот момент наступает еще раньше, что сильнее ограничивает возможные конечные состояния, сдвигая их ближе к $(0,0)$. Таким образом, чем больше ускорение первого звена, тем ближе конечная точка оказывается к началу координат.

На рис. 5, соответствующем случаю (4.33) (B), номерами (1) и (1)' помечены центрально симметричные границы областей $R_1^{(0)} = D_1^{(0)}(a_2)$ и $R_1^{(1)} = D_1^{(1)}(a_2)$, а номерами (2) и (2)' – границы областей $R_2^{(0)} = D_2^{(0)}(a_2)$ и $R_2^{(1)} = D_2^{(1)}(a_2)$, представляющие собой отрезки прямых $\varphi_2^T = I_2 a_2^2$ и $\varphi_2^T = -I_2 a_2^2$. При этом в любой точке границы (4.19) выполняются условия: $\dot{\varphi} = a_1$ и

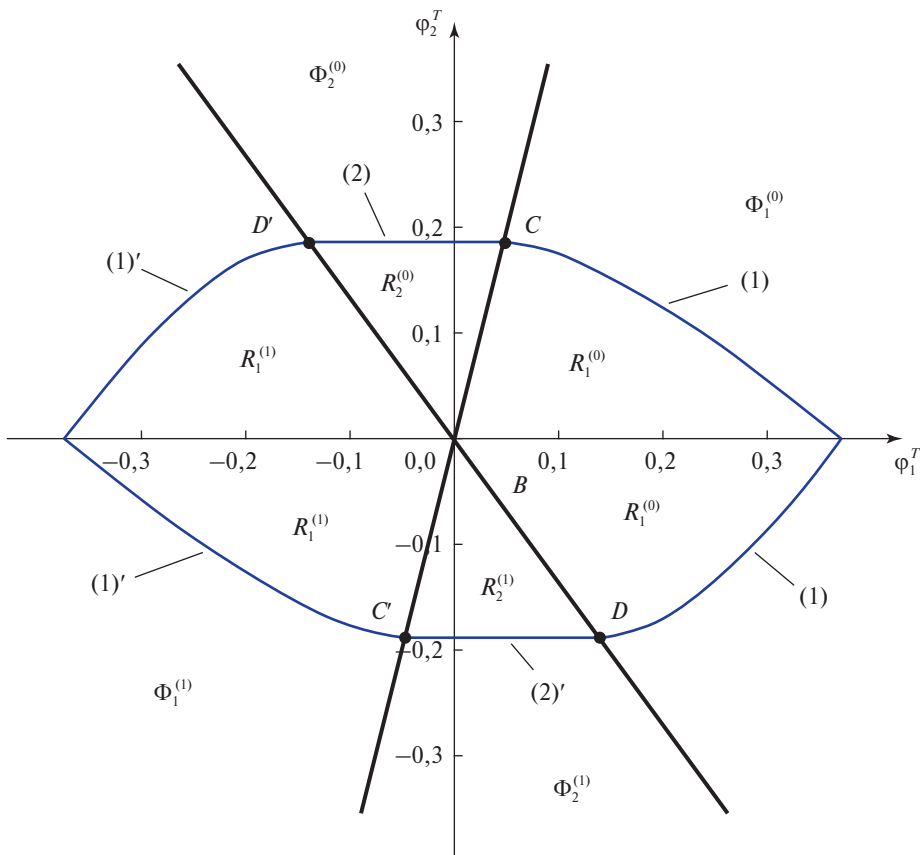


Рис. 5. Области конечных конфигураций, достижимых при оптимальных режимах (3.1) с учетом условия (4.7).

$|\dot{\varphi}_2| < a_2$. Прямая $\varphi_2^T = I_2 a_2^2$ пересекается с линиями $\Phi_0^{(0,0)}$ и $\Phi_0^{(1,0)}$ в точках C (4.8) и D' – симметричной точке D (4.8), а прямая $\varphi_2^T = -I_2 a_2^2$ пересекается с линиями $\Phi_0^{(0,1)}$ и $\Phi_0^{(1,1)}$ в точках D (4.8) и C' – центрально симметричной точке C (4.8).

5. Заключение

Для модели двузвенного манипулятора со вторым статически уравновешенным звеном и ограничениями на угловые скорости разработан алгоритм построения областей на конфигурационной плоскости, достижимых при оптимальных по быстродействию управлениях с минимальным числом переключений. Эти управления обеспечивают перемещение манипулятора из начального положения покоя в заданное конечное положение покоя. При этом ограничения на угловые скорости не нарушаются, а их предельные значения могут достигаться только в моменты переключения, в зависимости от конечной конфигурации манипулятора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. Манипуляционные роботы. М.: Наука, 1989.
2. Аветисян В.В., Болотник Н.Н., Черноусько Ф.Л. Оптимальные программные движения двузвенного манипулятора // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1985. № 3. С. 123–131.
3. Akulenko L.D., Bolotnik N.N., Chernousko F.L., Kaplunov A.A. Optimal Control of Manipulation Robots // IFAC Proc. 1985. V. 17. Iss. 2. P. 311–315.
4. Chernousko F.L., Akulenko L.D., Bolotnik N.N. Time-Optimal Control for Robotic Manipulators // Optimal Control Applications and Methods. 1989. V. 10. Iss. 4. P. 293–311. <https://doi.org/10.1002/oca.4660100402>
5. Meier E.B., Bryson A.E. Efficient Algorithm for Time-Optimal Control of a Two-Link Manipulator // J. Guidance, Control and Dynamics. 1990. V. 13. Iss. 5. P. 859–866. <https://doi.org/10.2514/3.25412>
6. Szyszkowski W., Fotouhi C.R. Improving Time-Optimal Maneuvers of Two-Link Robotic Manipulators // J. Guidance, Control and Dynamics. 2000. V. 23. P. 888–889. <https://doi.org/10.2514/2.4619>
7. Demydyuk I.V., Hoshov'ska N. Parametric Optimization of the Transport Operations of a Two-Link manipulator // J. Math. Sci. 2019. V. 238. No. 2. P. 174–188. <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04227-8>
8. Demydyuk I.V., Demydyuk V.I. Parametric Optimization of the Kinematic Structure and the Movement of the Two-Link Manipulator // Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University. Series Mathematical Modeling. Information Technology. Automated Control Systems. 2020. V. 48. P. 36–48. <https://doi.org/10.26565/2304-6201-2020-48-03>
9. Avetisyan V.V., Grigoryan Sh.A. Time-Suboptimal Control of a Two-Link Manipulator Motion // Mechanics – Proceedings of NAS PA. 2022. V. 75. Iss. 1–2. P. 136–147. <https://doi.org/10.54503/0002-3051-2022.75.1-2-136>
10. Аветисян В.В., Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н. Моделирование и оптимизация транспортных движений промышленного робота // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1982. № 1. С. 84–90.
11. Аветисян В.В. Оптимизация транспортных движений манипуляционных роботов с ограничением на мощность тепловыделения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1987. № 4. С. 200–207.
12. Аветисян В.В., Болотник Н.Н. Субоптимальное управление электромеханической системы с высокой точностью позиционирования // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 5. С. 32–41.
13. Chernousko F.L. Optimization in Control of Robots // Computational Optimal Control. Basel: Birkhause, 1994. P. 19–28.
14. Massaro M., Lovato S., Bottin M. An Optimal Control Approach to the Minimum-Time Trajectory Planning of Robotic Manipulators // Robotics. 2023. V. 12. No. 64. P. 1–24. <https://doi.org/10.3390/robotics12030064>
15. Kim J., Kim S.R., Kim S.H., Kim D.H. A practical approach for minimum-time trajectory planning for industrial robots // Ind. Robot Int. J. 2010. V. 37. No. 1. P. 51–61. <https://doi.org/10.1108/01439911011009957>

16. *Аветисян В.В., Овакимян Н.В.* Оптимальные плоскопараллельные перемещения двухзвенного манипулятора // Изв. РАН. ТиСУ. 1995. № 3. С. 161–168.
17. *Аветисян В.В.* Оптимизация конфигурации и направлений поворотов звеньев двухзвенного манипулятора по комбинированным критериям качества // Изв. НАН РА. Механика. 1998. Т. 51. № 4. С. 65–71.
18. *Avetisyan V.V.* Time-optimal control of gripper motion in a two-link manipulator with allowance for the terminal configuration // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. Iss. 2. P. 189–199. <https://doi.org/10.1134/S0005117921020016>
19. *Болотник Н.Н., Каплунов А.А.* Оптимальные прямолинейные перемещения груза при помощи двухзвенного манипулятора // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1982. № 1. С. 68–74.
20. *Болотник Н.Н., Каплунов А.А.* Оптимизация управления и конфигураций двухзвенного манипулятора // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 4. С. 123–131.
21. *Долгий Ю.Ф., Чупин И.А.* Импульсные управления двухзвенным манипуляционным роботом // Изв. ИМИ УдГУ. 2021. Т. 57. С. 77–90. <https://doi.org/10.35634/2226-3594-2021-57-02>
22. *Dolgii Yu.F., Chupin I.A.* Relay Controls for an Inertialess Two-Link Manipulation Robot // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2025. V. 63. No. 6. P. 972–982. <https://doi.org/10.1134/S1064230724700722>
23. *Shen P., Zhang X., Fang Y.* Complete and Time – Optimal Path-Constrained Trajectory Planning With Torque and Velocity Constraints: Theory and Applications // IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. 2018. V. 23. Iss. 2. P. 735–746. <https://doi.org/10.1109/TMECH.2018.2810828>
24. *Holmes P., Kousik Sh., Zhang B., et al.* Reachable Sets for Safe, Real-Time Manipulator Trajectory Design // arXiv:2002.01591. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2002.01591>
25. *Haghshenas H., Hansson A., Norrlof M.* Time – optimal path tracking for cooperative manipulators: A convex optimization approach // Control Engineering Practice. 2023. V. 140. 105668. <https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2023.105668>

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 28.03.2025

После доработки 26.08.2025

Принята к публикации 20.11.2025