Автоматика и телемеханика, № 7, 2026

Линейные системы

© 2026 г. **А.А. ЩЕГЛОВА, д-р физ.-мат. наук (shchegl@icc.ru)**
(Институт динамики систем и теории управления СО РАН
им. В.М. Матросова, Иркутск)

ДЕТЕКТИРУЕМОСТЬ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СО СКАЛЯРНЫМ ВЫХОДОМ[1]

Рассматриваются нестационарные линейные и нелинейные системы дифференциально-алгебраических уравнений со скалярным наблюдаемым выходом. В линейном случае получены достаточные условия детектируемости и построен наблюдатель состояния. Для систем с управляемым входом специального вида предложена процедура стабилизации с помощью динамической обратной связи по выходу. С использованием линейного приближения получены условия детектируемости для нелинейной системы.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраические уравнения, детектируемость, стабилизируемость.

DOI: 10.7868/S2413977726070041

1. Введение

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$A(t)\frac{d}{dt}x(t) + B(t)x(t) + U(t)u(t) = 0, \tag{1.1}$$

$$y(t) = c(t)^\top x(t), \quad t \in T = [0, +\infty), \tag{1.2}$$

где $A(t)$, $B(t)$ – известные $(n \times n)$-матрицы; $U(t)$ – заданная $(n \times l)$-матрица, $x(t)$ – искомая, а $c(t)$ – заданные n-мерные вектор-функции; $u(t)$ – l-мерный управляемый вход, $y(t)$ – скалярный наблюдаемый выход, $^\top$ – символ транспонирования. Предполагается, что элементы матриц $A(t)$, $B(t)$, $U(t)$ и векторов $u(t)$, $c(t)$ – достаточное число раз непрерывно дифференцируемые на T функции. Допускается случай

$$\det A(t) \equiv 0, \quad t \in T.$$

Такие системы называются, в частности, дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ) или дескрипторными системами.

[1] Работа выполнена за счет государственного задания в рамках темы «Эволюционные и динамические управляемые системы: теория, численные методы, приложения». (Шифр научной темы FWEW-2026-0011, № госрегистрации 126021217177-7).

Изучаемые в данной работе классы ДАУ включают в себя прикладные задачи из различных областей науки и техники: теории электрических цепей [1], биологии [2], механики [3], химии [4], экономики [5], теории защиты информации [6] и др.

Начиная с 90-х г. прошлого столетия наблюдается значительный рост интереса к проблеме построения наблюдателей для дифференциально-алгебраических уравнений как в линейной [1, 3, 4, 7, 8], так и в нелинейной [9–20] постановках.

В большинстве работ по линейным системам анализируется стационарный случай. Результатов по нелинейным системам сравнительно немного. При этом, как правило, рассматривается квазилинейная постановка задачи в предположениях, обеспечивающих специальную структуру системы или выполнение других довольно жестких ограничений. Например, требуется, чтобы линейная часть не зависела от времени [9–11] или чтобы система имела «линейно-доминирующую структуру» [12, 13], треугольную форму [14], или чтобы нелинейность системы удовлетворяла строгому глобальному условию Липшица [10, 12, 13].

В [11] представлен обзор литературы по построению наблюдателей состояния для нелинейных дескрипторных систем с обсуждением типов рассматриваемых нелинейностей. В [9] рассматривается локальная устойчивость наблюдателя для полуявной системы с простой структурой. Также рассматриваются ДАУ с прямоугольными дескрипторами [6, 15]. В [16] при построении наблюдателей используется линеаризация и методы упрощения внутренней структуры системы. Наиболее распространенным является подход, при котором существование наблюдателей требует разрешимости определенных линейных матричных неравенств [17–20].

В настоящее время вопрос о получении условий детектируемости и построении наблюдателей состояния для нестационарных ДАУ в общем случае остается открытым. Данная работа посвящена линейным и нелинейным системам, удовлетворяющим достаточно общим требованиям на внутреннюю структуру. Разделы 2–4 посвящены анализу линейных систем. Структурная форма, представленная в разделе 2, позволила получить условия детектируемости и построить наблюдатель состояния (раздел 3). С использованием последнего в разделе 4 предложена процедура стабилизации для систем со специальным управляемым входом. В разделе 5 рассматривается внутренняя структура нелинейных ДАУ

$$f\left(t, x(t), \frac{d}{dt}x(t)\right) = 0,$$

где $\det \frac{\partial f(t,\alpha,\beta)}{\partial \beta} = 0$ в области определения. На этой основе в разделе 6 получены достаточные условия детектируемости по линейному приближению и вид наблюдателя состояния в нелинейном случае.

2. Вспомогательные результаты о структуре линейных ДАУ

При некотором $r : 0 \leqslant r \leqslant n$ поставим в соответствие матричным коэффициентам системы (1.1) следующие объекты: $(n(r+1) \times n)$-матрицы

$$\mathcal{B}_r(t) = \operatorname{col}\left(B(t),\ B'(t),\ \ldots,\ B^{(r)}(t)\right), \tag{2.1}$$

$$\mathcal{A}_r(t) = \operatorname{col}\left(C_0^0 A(t),\ C_1^0 A'(t) + C_1^1 B(t),\ \ldots,\ C_r^0 A^{(r)}(t) + C_r^1 B^{(r-1)}(t)\right), \tag{2.2}$$

$n(r+1) \times nr$-матрицу

$$\Lambda_r(t) = \tag{2.3}$$

$$= \begin{pmatrix} O & O & \ldots & O \\ C_1^1 A(t) & O & \ldots & O \\ C_2^1 A'(t) + C_2^2 B(t) & C_2^2 A(t) & \ldots & O \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ C_r^1 A^{(r-1)}(t) + C_r^2 B^{(r-2)}(t) & C_r^2 A^{(r-2)}(t) + C_r^3 B^{(r-3)}(t) & \ldots & C_r^r A(t) \end{pmatrix}$$

и матрицу

$$\mathcal{D}_r(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_r(t) & \mathcal{A}_r(t) & \Lambda_r(t) \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

размера $n(r+1) \times n(r+2)$. Здесь и далее $C_i^j = \frac{i!}{j!(i-j)!}$ – биномиальные коэффициенты,

$$\phi'(t) = \frac{d}{dt}\phi(t), \quad \phi^{(j)}(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^j \phi(t).$$

Предположим, что выполняются условия:
A1) $\operatorname{rank} \Lambda_r(t) = \lambda = \text{const} \ \ \forall t \in T$;
A2) матрица $\mathcal{D}_r(t)$ содержит обратимую при всех $t \in T$ подматрицу $\mathcal{M}_r(t)$ порядка $n(r+1)$, включающую в себя λ столбцов матрицы $\Lambda_r(t)$ и все n столбцов матрицы $\mathcal{A}_r(t)$.

Обозначим через Q матрицу перестановок столбцов такую, что

$$\mathcal{B}_r(t) Q = \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{B}}_1(t) & \bar{\mathcal{B}}_2(t) \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

где блок $\bar{\mathcal{B}}_2(t)$ входит, а блок $\bar{\mathcal{B}}_1(t)$ не входит в матрицу $\mathcal{M}_r(t)$. Обозначим через d число столбцов в $\bar{\mathcal{B}}_2(t)$. Соответственно

$$B(t)Q = \begin{pmatrix} B_1(t) & B_2(t) \end{pmatrix}, \quad A(t)Q = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

где блоки $B_1(t)$, $A_1(t)$ и $B_2(t)$, $A_2(t)$ имеют попарно размеры $n \times (n-d)$ и $n \times d$ соответственно.

В [21] показано, что в предположениях A1, A2 существует оператор

$$\mathcal{R} = \sum_{j=0}^{r} R_j(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^r, \tag{2.7}$$

коэффициенты которого вычисляются по формуле

$$(2.8)\qquad \begin{pmatrix} R_0(t) & R_1(t) & \dots & R_r(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & O & \dots & O \end{pmatrix} \mathcal{M}_r^{-1}(t),$$

E_n – единичная матрица порядка n.

Действие оператора (2.7) преобразует систему (1.1) к виду

$$(2.9)\quad \begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_1(t) & E_d \\ J_2(t) & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \mathcal{R}[U(t)u(t)] = 0, \quad t \in T,$$

где $x_1(t) \in \mathbf{R}^{n-d}$, а $x_2(t) \in \mathbf{R}^d$,

$$(2.10)\qquad \mathrm{col}\,(x_1(t), x_2(t)) = Q^{-1}x(t),$$

$$(2.11)\qquad \mathrm{col}\,(J_1(t),\, J_2(t)) = \sum_{j=0}^{r} R_j(t) B_1^{(j)}(t),$$

$$(2.12)\qquad \begin{aligned} \mathcal{R}[U(t)u(t)] &= \sum_{j=0}^{r} R_j(t)\,(U(t)u(t))^{(j)} = \\ &= \begin{pmatrix} R_0(t) & R_1(t) & \dots & R_r(t) \end{pmatrix} \mathcal{U}_r(t)\bar{u}_r(t), \end{aligned}$$

$$(2.13)\qquad \bar{u}_r(t) = \mathrm{col}\left(u(t), u'(t), \dots, u^{(r)}(t)\right),$$

$$(2.14)\qquad \mathcal{U}_r(t) = \begin{pmatrix} C_0^0U(t) & O & O & \dots & O \\ C_1^0U'(t) & C_1^1U(t) & O & \dots & O \\ C_2^0U^{(2)}(t) & C_2^1U'(t) & C_2^2U(t)\dots & O & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_r^0U^{(r)}(t) & C_r^1U^{(r-1)}(t) & C_r^2U^{(r-2)}(t) & \dots & C_r^rU(t) \end{pmatrix}.$$

Определение 1. Под решением системы (1.1) *будем понимать n-мерную вектор-функцию $x(t) \in \mathbf{C}(T)$, обращающую* (1.1) *в тождество при подстановке.*

Очевидно, что при достаточно гладких входных данных любое решение системы (1.1) является решением системы (2.9). Для того, чтобы доказать обратное утверждение, требуются дополнительные предположения.

Допустим, что помимо A1, A2, выполняются условия:
A3) $\mathrm{rank}\,\Lambda_{r+1}(t) = \mathrm{rank}\,\Lambda_r(t) + n \ \ \forall t \in T$;
A4) в матрице $\mathcal{D}_{r+1}(t)$ имеется обратимая при всех $t \in T$ подматрица $\mathcal{M}_{r+1}(t)$ порядка $n(r+2)$, включающая в себя все столбцы матрицы $\mathcal{M}_r(t)$ и еще n столбцов матрицы $\Lambda_{r+1}(t)$.

Тогда оператор $\mathcal{R}$ обладает левым обратным оператором [21]

$$\mathcal{L} = L_0(t) + L_1(t)\frac{d}{dt},$$

где $L_0(t)$, $L_1(t)$ – $(n \times n)$-матрицы. Последнее означает, что действие оператора $\mathcal{L}$ и перестановка строк искомого вектора (2.10) преобразуют систему (2.9) к виду (1.1). В этом случае любое решение системы (2.9) является решением системы (1.1).

Таким образом, предположения A1–A4 обеспечивают эквивалентность систем (1.1) и (2.9) в смысле решений (с точностью до перестановок компонент). Очевидно, что для выделения единственного решения системы (2.9) или (1.1) необходимо задать начальные данные в виде

$$x_1(0) = x_0, \tag{2.15}$$

где $x_0 \in \mathbf{R}^{n-d}$.

При определенных обстоятельствах оператор $\mathcal{R}$ (2.7) может иметь правый обратный оператор.

Лемма 1. Пусть:

1) $A(t)$, $B(t) \in \mathbf{C}^{r+1}(T)$;
2) *выполнены предположения A1, A2;*
3) *для всех* $t \in T$

$$\begin{pmatrix} R_1(t) & R_2(t) \dots R_r(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^1 B_1(t) & O & \dots & O \\ C_2^1 B_1'(t) & C_2^2 B_1(t) & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_r^1 B_1^{(r-1)}(t) & C_r^2 B_1^{(r-2)}(t) & \dots & C_r^r B_1(t) \end{pmatrix} = O. \tag{2.16}$$

Тогда для оператора (2.7) *существует правый обратный оператор вида*

$$\mathcal{P} = P_0(t) + P_1(t)\frac{d}{dt}, \tag{2.17}$$

где

$$P_0(t) = \begin{pmatrix} B_2(t) & A_1(t) \end{pmatrix}, \quad P_1(t) = \begin{pmatrix} A_2(t) & O \end{pmatrix}.$$

Здесь матрицы $B_1(t)$, $B_2(t)$, $A_1(t)$, $A_2(t)$ *определены в* (2.6).

Доказательство вынесено в Приложение.

3. Построение наблюдателя состояния линейной системы

Предположим справедливость условий A1–A4. В представлении для выхода (1.2) сделаем замену переменных

$$x(t) = Q\mathrm{col}\,(x_1(t), x_2(t)),$$

где Q – матрица перестановок из (2.5). Тогда

$$y(t) = c_1^\top(t) x_1(t) + c_2^\top x_2(t), \tag{3.1}$$

$c_1(t) \in \mathbf{R}^{n-d}$, $c_2(t) \in \mathbf{R}^d$ $\forall t \in T$.

Определение 2. Система

$$\begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1'(t) \\ \hat{x}_2'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{J}_1(t) & E_d \\ \hat{J}_2(t) & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{pmatrix} + \hat{U}(t)\bar{u}_r(t) +$$
$$+ g(t)\Big(y(t) - c_1^\top(t)\hat{x}_1(t) - c_2^\top \hat{x}_2(t)\Big) = 0,$$
$$\hat{y}(t) = H(t)\mathrm{col}\,(\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t)) + \nu(t)y(t) + F(t)\bar{u}_r(t), \quad t \in T,$$

где матрицы $\hat{J}_1(t)$, $\hat{J}_2(t)$, $\hat{U}(t)$, $H(t)$, $F(t)$ *и векторы* $g(t)$, $\nu(t)$ *имеют соответствующие размеры, называется наблюдателем состояния для* (2.9), (3.1), *если*

$$\lim_{t\to\infty}\left(\hat{y}(t) - \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}\right) = 0.$$

Будем искать наблюдатель состояния для системы (2.9), (3.1) в виде

$$\hat{x}_2(t) + J_1(t)\hat{x}_1(t) + \mathcal{V}_{r,1}(t)\bar{u}_r(t) = 0, \tag{3.2}$$

$$\hat{x}_1'(t) + J_2(t)\hat{x}_1(t) + \mathcal{V}_{r,2}(t)\bar{u}_r(t) + g(t)\Big(y(t) - c_1^\top \hat{x}_1(t) - c_2^\top \hat{x}_2(t)\Big) = 0, \tag{3.3}$$

$$\hat{y}_1(t) = \hat{x}_1(t), \;\; \hat{y}_2(t) = \hat{x}_2(t), \tag{3.4}$$

где $g(t) : T \to \mathbf{R}^{n-d}$,

$$\mathrm{col}\,(\mathcal{V}_{r,1}(t), \mathcal{V}_{r,2}(t)) = \begin{pmatrix} R_0(t) & R_1(t) & \dots & R_r(t) \end{pmatrix} \mathcal{U}_r(t),$$

$\mathcal{U}_r(t)$ определена в (2.14), матрицы $\mathcal{V}_{r,1}(t)$ и $\mathcal{V}_{r,2}(t)$ имеют размеры $d \times l(r+1)$ и $(n-d) \times l(r+1)$ соответственно, $J_1(t)$ и $J_2(t)$ – матричные коэффициенты из (2.9), которые вычисляются с использованием формул (2.6), (2.8), (2.11).

Тогда невязки

$$e_1(t) = \hat{x}_1(t) - x_1(t), \quad e_2(t) = \hat{x}_2(t) - x_2(t) \tag{3.5}$$

должны удовлетворять системе

$$e_2(t) + J_1(t)e_1(t) = 0, \tag{3.6}$$

$$e_1'(t) + J_2(t)e_1(t) - g(t)\Big(c_1^\top(t)e_1(t) + c_2^\top(t)e_2(t)\Big) = 0. \tag{3.7}$$

Из (3.6) следует

$$e_2(t) = -J_1(t)e_1(t). \tag{3.8}$$

Подстановка (3.8) в (3.7) приводит к уравнению относительно $e_1(t)$

$$e_1'(t) + \Big(J_2(t) - g(t)\Big(c_1^\top(t) - c_2^\top(t)J_1(t)\Big)\Big)e_1(t) = 0. \tag{3.9}$$

Допустим, найдется вектор-функция $g(t)$ такая, что для любого решения системы (3.9) справедливо предельное соотношение $\lim\limits_{t\to\infty} e_1(t) = 0$. В этом случае невырожденная система

$$x_1'(t) + J_2(t)x_1(t) = 0, \tag{3.10}$$

$$y(t) = \left(c_1^\top(t) - c_2^\top(t)J_1(t)\right) x_1(t) \tag{3.11}$$

называется *детектируемой* [22, с. 313], и для нее существует наблюдатель вида

$$\hat{x}_1'(t) + J_2(t)\hat{x}_1(t) + g(t)\left(y(t) - \left(c_1^\top(t) - c_2^\top(t)J_1(t)\right)\hat{x}_1(t)\right) = 0, \tag{3.12}$$

$$\hat{y}(t) = \hat{x}_1(t). \tag{3.13}$$

Если дополнительно предположить, что матрица $J_1(t)$ имеет неположительный характеристический показатель

$$\chi[J_1(t)] = \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\ln\|J_1(t)\| \leqslant 0, \tag{3.14}$$

то из (3.8) вытекает предельное соотношение $\lim\limits_{t\to\infty} e_2(t) = 0$. Таким образом, система (3.2)–(3.4) является наблюдателем состояния для системы (2.9), (3.1).

В предположениях A1–A4 системы (1.1) и (2.9) имеют одни и те же решения. Это означает, что система (3.2)–(3.4) является наблюдателем состояния и для системы (1.1), (1.2). Тем самым доказан слудующий результат.

Утверждение 1. Пусть выполнены условия A1–A4 и (3.14). *Для ДАУ* (1.1), (1.2) *существует наблюдатель состояния вида* (3.2)–(3.4) *тогда и только тогда, когда система* (3.10), (3.11) *имеет наблюдатель вида* (3.12), (3.13).

Определение 3. Система наблюдения (1.1), (1.2) *называется детектируемой, если найдется вектор-функция $g(t)$ такая, что система* (3.9) *асимптотически устойчива.*

Утверждение 2. Пусть имеют место предположения A1–A4 и (3.14). *Система* (1.1), (1.2) *детектируема тогда и только тогда, когда детектируема система* (3.10), (3.11).

Сформулируем условие детектируемости системы (3.10), (3.11) [22, с. 314]. Для этого определим матрицу наблюдаемости

$$\mathcal{S}(t) = \operatorname{col}\left(s_0(t), s_1(t), \ldots, s_{n-d-1}(t)\right), \tag{3.15}$$

где $s_0(t) = c_1^\top(t) - c_2^\top(t)J_1(t)$, $\quad s_i(t) = s_{i-1}'(t) - s_{i-1}(t)J_2(t)$, $\ i = \overline{1, n-d}$.

Для обратимой матрицы $\mathcal{S}(t)$ зададим функции

$$(\omega_1(t), \omega_2(t), \ldots, \omega_{n-d}(t)) = s_{n-d}(t)\mathcal{S}^{-1}(t). \tag{3.16}$$

Л е м м а 2. Пусть:
1) $J_2(t) \in \mathbf{C}^{n-d-1}(T)$, $c_1^\top(t) - c_2^\top(t)J_1(t) \in \mathbf{C}^{n-d}(T)$;
2) $\mathcal{S}(t)$ *– матрица Ляпунова;*
3) *каждая из функций* $\omega_i(t) \in \mathbf{C}^{i-1}(T)$ $(i = \overline{1, n-d})$ *ограничена на* T *вместе со своими производными до порядка* $i-1$ *включительно.*

Тогда система (3.10), (3.11) *детектируема.*

З а м е ч а н и е 1. Из доказательства теоремы о детектируемости линейной системы [22, с. 314] следует, что вектор-функция $g(t)$ в (3.12) может быть выбрана таким образом, что сама она будет ограничена на T, а система (3.12) приводима в смысле Ляпунова.

Опираясь на утверждения 1, 2 и лемму 2, можно получить достаточные условия детектируемости ДАУ (1.1), (1.2).

Т е о р е м а 1. Пусть:
1) $A(t), B(t) \in \mathbf{C}^{n+r-d}(T)$ $(n-d \geqslant 1)$; $c(t) \in \mathbf{C}^{n-d}(T)$; $U(t), u(t) \in \mathbf{C}^r(T)$;
2) *выполнены условия A1–A4 и* (3.14)*;*
3) *справедливы предположения 2 и 3 леммы 2.*

Тогда система (1.1), (1.2) *детектируема и имеет наблюдатель вида* (3.2)–(3.4).

4. Стабилизируемость линейной системы с помощью наблюдателя состояния

Допустим, что все предположения леммы 1 выполнены. Рассмотрим ДАУ

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) + P_0(t)b(t)u(t) + P_1(t)\left(b(t)u(t)\right)' = 0, \tag{4.1}$$

где $P_0(t)$ и $P_1(t)$ – коэффициенты оператора (2.17) правого обратного по отношению с оператору (2.7), $b(t)$ – заданная n-мерная вектор-функция, $u(t)$ – скалярный управляемый вход.

Пусть $\beta_1(t), \beta_2(t)$ – достаточно гладкие n-мерные вектор-функции. При определенных условиях систему

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) + \beta_1(t)u(t) + \beta_2(t)u(t)' = 0 \tag{4.2}$$

можно представить в виде (4.1).

Л е м м а 3. Пусть:
1) $A(t), B(t) \in \mathbf{C}^{r+1}(T)$;
2) *выполнены предположения 2, 3 леммы 1;*
3) $\beta_1(t) \in \mathbf{C}^r(T)$;
4) *для всех* $t \in T$

$$\beta_2(t) = P_1(t)\mathcal{R}\left[\beta_1(t)\right]. \tag{4.3}$$

Тогда систему (4.2) *можно записать в виде* (4.1)*, где* $b(t) \in \mathbf{C}^1(T)$ *находится по формуле*

$$b(t) = \mathcal{R}\left[\beta_1(t)\right], \tag{4.4}$$

оператор $\mathcal{R}$ *определен в* (2.7), (2.8).

Доказательство вынесено в Приложение.

Зададим для системы (4.1) наблюдаемый выход (1.2). Построим для (4.1) стабилизирующее управление.

В результате действия на обе части уравнения (4.1) оператора (2.7) получим систему

$$x_2(t) + J_1(t)x_1(t) + b_1(t)u(t) = 0, \tag{4.5}$$

$$x_1'(t) + J_2(t)x_1(t) + b_2(t)u(t) = 0 \tag{4.6}$$

с выходом (3.1). Здесь col $(b_1(t), b_2(t)) = b(t)$, $b_1(t) \in \mathbf{R}^d$, $b_2(t) \in \mathbf{R}^{n-d}$.

Наблюдатель состояния для (4.5), (4.6) будем строить в виде (3.2)–(3.4), где

$$\mathcal{V}_{r,1}(t)\bar{u}_r(t) = b_1(t)u(t), \;\; \mathcal{V}_{r,2}(t)\bar{u}_r(t) = b_2(t)u(t).$$

Стабилизирующее управление для ДАУ (4.5), (4.6) будем искать в виде динамической обратной связи

$$u(t) = k^\top(t)\hat{x}_1(t), \tag{4.7}$$

что приводит к уравнениям

$$x_2(t) + J_1(t)x_1(t) + b_1(t)k^\top(t)\hat{x}_1(t) = 0,$$
$$x_1'(t) + J_2(t)x_1(t) + b_2(t)k^\top(t)\hat{x}_1(t) = 0.$$

Вводя в рассмотрение невязки (3.5), приходим к системе

$$x_2(t) = -\left(J_1(t) + b_1(t)k^\top(t)\right)x_1(t) - b_1(t)k^\top(t)e_1(t), \tag{4.8}$$

$$x_1'(t) + \left(J_2(t) + b_2(t)k^\top(t)\right)x_1(t) + b_2(t)k^\top(t)e_1(t) = 0. \tag{4.9}$$

$$e_2(t) = -J_1(t)e_1(t), \tag{4.10}$$

$$e_1'(t) + \left(J_2(t) - g(t)\left(c_1^\top(t) - c_2^\top(t)J_1(t)\right)\right)e_1(t) = 0. \tag{4.11}$$

Управление (4.7) будет стабилизирующим, если система (4.8)–(4.11) асимптотически устойчива. Последнее, в частности, подразумевает стабилизируемость системы (4.6) и детектируемость системы (3.10), (3.11).

О п р е д е л е н и е 4. Система (4.6) *называется стабилизируемой, если существует обратная связь*

$$u(t) = k^\top(t)x_1(t) \tag{4.12}$$

такая, что замкнутая система

$$x_1'(t) + \left(J_2(t) + b_2(t)k^\top(t)\right)x_1(t) = 0 \tag{4.13}$$

асимптотически устойчива.

Сформулируем условия стабилизируемости системы (4.6). Для этого введем в рассмотрение векторы

$$\varphi_0(t) = b_2(t), \;\; \varphi_i = J_2(t)\varphi_{i-1}(t) - \varphi'_{i-1}(t), \;\; i = \overline{1, n-d},$$

и матрицу управляемости

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_0(t) & \varphi_1(t) & \dots & \varphi_{n-d-1}(t) \end{pmatrix}.$$

Если $\Phi(t)$ обратима, можно определить функцию

$$\psi(t) = \Phi^{-1}(t)\varphi_{n-d}(t) = \mathrm{col}\,(\psi_1(t),\, \psi_2(t), \dots,\, \psi_{n-d}(t))\,.$$

Л е м м а 4 [22, с. 302]. *Пусть:*
1) $J_2(t) \in \mathbf{C}^{n-d-1}(T)$, $b_2(t) \in \mathbf{C}^{n-d}(T)$;
2) $\Phi(t)$ – *матрица Ляпунова;*
3) *каждая из функций* $\psi_i(t) \in \mathbf{C}^i(T)$ $(i = \overline{1, n-d})$ *ограничена на* T *вместе со своими производными до порядка* $i-1$ *включительно.*

Тогда найдется строка

$$k^\top(t) = (k_1(t),\, \dots,\, k_{n-d}(t))\, K(t) \tag{4.14}$$

такая, что замкнутая система (4.13) *асимптотически устойчива. В* (4.14) $K(t)$ – *матрица Ляпунова, а каждая из функций* $k_i(t) \in \mathbf{C}^{i-1}(T)$ *ограничена на* T *вместе со своими производными до порядка* $i-1$ *включительно.*

З а м е ч а н и е 2. В соответствии с утверждением леммы 4, вектор-функция $k(t)$ в обратной связи (4.12) будет ограничена, а следовательно,

$$\chi[k(t)] = 0. \tag{4.15}$$

З а м е ч а н и е 3. Если в системе (4.6) $J_2(t) \in \mathbf{C}^{n-d}(T)$, $b_2(t) \in \mathbf{C}^{n-d+1}(T)$, то стабилизирующее управление (4.12) можно построить так, чтобы $k(t) \in$ $\in \mathbf{C}^1(T)$ [22, с. 166, 248, 299].

Т е о р е м а 2. *Пусть:*
1) $A(t), B(t) \in \mathbf{C}^{n+r-d}(T)$ $(n-d \geqslant 1)$, $c(t) \in \mathbf{C}^{n-d}(T)$, $b_2(t) \in \mathbf{C}^{n-d+1}(T)$, $b_1(t) \in \mathbf{C}^1(T)$;
2) *выполнены условия A1–A4 и* (3.14)*;*
3) *справедливы предположения 1, 3 леммы 1 и 2, 3 леммы 2;*
4) *выполнены условия 2 и 3 леммы 4;*
5) $\chi\,[b_1(t)] \leqslant 0$.

Тогда система (4.1) *стабилизируема с помощью обратной связи вида* (4.7).

Доказательство вынесено в Приложение.

5. Необходимые сведения о структуре нелинейных ДАУ

В этом разделе рассматривается нелинейная система со скалярным наблюдаемым выходом

$$f(t, x(t), x'(t)) = 0, \tag{5.1}$$

$$y(t) = c^\top(t)x(t) + \rho(t, x(t)) \;\; t \in T, \tag{5.2}$$

где компоненты функции $f(t, \alpha, \beta) : \mathcal{W} \to \mathbf{R}^n$ достаточное число раз непрерывно дифференцируемы по каждому из своих аргументов в области $\mathcal{W} = \{(t, \alpha, \beta) \in \mathbf{R}^{2n+1} : t \in T, \|\alpha\| < K_0, \|\beta\| < K_1\}$; $\rho(t, \alpha) : \hat{\mathcal{W}} \to \mathbf{R}$, $\hat{\mathcal{W}} = \{(t, \alpha) \in \mathbf{R}^{n+1} : t \in T, \|\alpha\| < K_0\}$, $c(t) : T \to \mathbf{R}^n$. Предполагается, что

$$\begin{gathered} f(t, 0, 0) = 0, \\ \rho(t, 0) = 0 \;\; \forall t \in T, \\ \det \frac{\partial f(t, \alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0 \;\; \forall (t, \alpha, \beta) \in \mathcal{W}. \end{gathered} \tag{5.3}$$

В нелинейном случае невырожденную систему, эквивалентную (5.1) в смысле решений, приходится искать как часть компонент неявной функции, удовлетворяющей так называемой r-продолженной системе (r-derivative array equations), которая представляет собой совокупность системы (5.1) и ее r полных производных по t:

$$\mathcal{F}_r\left(t, \bar{x}_{r+1}\right) = \begin{pmatrix} f(t, x(t), x'(t)) \\ \dfrac{d}{dt} f(t, x(t), x'(t)) \\ \dots \\ \left(\dfrac{d}{dt}\right)^r f(t, x(t), x'(t)) \end{pmatrix} = 0. \tag{5.4}$$

Здесь и далее

$$\bar{x}_{r+1} = \left(x, \, x', \, \dots, \, x^{(r+1)}\right). \tag{5.5}$$

В (5.4) t, x, x', $\dots$, $x^{(r+1)}$ следует рассматривать как независимые переменные.

Ситуация осложняется тем, что классическая теорема [23, с. 68] гарантирует существование неявной функции лишь в некоторой окрестности начальной точки, в то время как для анализа детектируемости необходимо, чтобы она была определена по крайней мере для всех $t \in T$. Для выполнения этого требования был использован глобальный вариант теоремы о неявной функции, полученный в [24].

Введем в рассмотрение $(n(r+1) \times n)$-матрицы

$$\bar{\mathcal{B}}_r\left(t, \bar{x}_{r+1}\right) = \left(\frac{\partial \mathcal{F}_r\left(t, \bar{x}_{r+1}\right)}{\partial x}\right), \quad \bar{\mathcal{A}}_r\left(t, \bar{x}_{r+1}\right) = \left(\frac{\partial \mathcal{F}_r\left(t, \bar{x}_{r+1}\right)}{\partial x'}\right),$$

$(n(r+1)\times nr)$-матрицу

$$\bar\Lambda_r\left(t,\bar x_{r+1}\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\mathcal F_r\left(t,\bar x_{r+1}\right)}{\partial x''} & \ldots & \dfrac{\partial\mathcal F_r\left(t,\bar x_{r+1}\right)}{\partial x^{(r+1)}}\end{pmatrix}$$

и $(n(r+1)\times n(r+2))$-матрицу

$$\bar{\mathcal D}_r\left(t,\bar x_{r+1}\right)=\begin{pmatrix}\bar{\mathcal B}_r\left(t,\bar x_{r+1}\right) & \bar{\mathcal A}_r\left(t,\bar x_{r+1}\right) & \bar\Lambda_r\left(t,\bar x_{r+1}\right)\end{pmatrix}.$$

Из (5.3) вытекает свойство

$$\mathcal F_r(0,0)=0.$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

B1) $\operatorname{rank}\bar\Lambda_r\left(t,\bar x_{r+1}\right)=\lambda=\mathrm{const}$ всюду в области определения;

B2) матрица $\bar{\mathcal D}_r\left(t,\bar x_{r+1}\right)$ имеет обратимую в точке $(t,\bar x_{r+1})=0$ подматрицу $\bar{\mathcal M}_r\left(t,\bar x_{r+1}\right)$ порядка $n(r+1)$, которая включает в себя λ столбцов матрицы $\bar\Lambda_r\left(t,\bar x_{r+1}\right)$ и все n столбцов матрицы $\bar{\mathcal A}_r\left(t,\bar x_{r+1}\right)$. При этом

$$\bar{\mathcal M}_r\left(t,\bar x_{r+1}\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\mathcal F_r}{\partial x_2} & \dfrac{\partial\mathcal F_r}{\partial x'} & \dfrac{\partial\mathcal F_r}{\partial X_1}\end{pmatrix},$$

где

$$x=Q\mathrm{col}\left(x_1,x_2\right),\tag{5.6}$$

$$\mathrm{col}\left(x'',\ldots,x^{(r+1)}\right)=Q_r\mathrm{col}\left(X_1,X_2\right),\tag{5.7}$$

Q, Q_r – соответствующие матрицы перестановок строк, $x_1\in\mathcal W_1\subseteq\mathbf R^{n-d}$, $x_2\in\mathcal W_2\subseteq\mathbf R^{d}$, $X_1\in\mathcal X_1\subseteq\mathbf R^{\lambda}$, $X_2\in\mathcal X_2\subseteq\mathbf R^{d}$, $d=nr-\lambda$, Q строится так же, как в линейном случае (см. (2.5)), $\mathcal W_1$, $\mathcal W_2$, $\mathcal X_1$, $\mathcal X_2$ – окрестности нуля в соответствующих пространствах.

В [25] показано, что в условиях B1, B2 и некоторых дополнительных предположениях в области $T\times\mathcal W_1\times\mathcal X_2$ определена неявная функция

$$x_2=f_1(t,x_1),\tag{5.8}$$

$$x_1'=f_2(t,x_1),\tag{5.9}$$

$$x_2'=f_3(t,x_1),\tag{5.10}$$

$$X_1=f_4(t,x_1,X_2),\tag{5.11}$$

обращающая систему (5.4) в тождество при подстановке.

Построим для (5.1) $(r+1)$-продолженную систему

$$\mathcal F_{r+1}(t,\bar x_{r+2})=0.$$

Допустим, что, помимо B1, B2, выполняются условия:

B3) $\operatorname{rank}\bar\Lambda_{r+1}\left(t,\bar x_{r+2}(t)\right)=\lambda+n=\mathrm{const}$ всюду на области определения этой матрицы;

B4) матрица $\bar{\mathcal D}_{r+1}\left(t,\bar x_{r+2}(t)\right)$ содержит обратимую в точке $(t,\bar x_{r+2})=0$ подматрицу $\bar{\mathcal M}_{r+1}\left(t,\bar x_{r+2}\right)$ порядка $n(r+2)$, которая включает в себя все столбцы, содержащие $\bar{\mathcal M}_r\left(t,\bar x_{r+1}\right)$ и еще n столбцов матрицы $\bar\Lambda_{r+1}\left(t,\bar x_{r+2}\right)$.

Тогда

$$\bar{\mathcal{M}}_{r+1}\left(t, \bar{x}_{r+2}\right)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial x'} & \dfrac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial \hat{X}_1} \end{pmatrix}.$$

$$\bar{\mathcal{D}}_{r+1}(t, \bar{x}_{r+2})\begin{pmatrix} Q & O & O \\ O & Q & O \\ O & O & \hat{Q}_r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial x_1'} & \dfrac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial x_2'} & \dfrac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial \hat{X}_1} & \dfrac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial \hat{X}_2} \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{col}\left(x'', \ldots, x^{(r+2)}\right)=\hat{Q}_r \operatorname{col}\left(\hat{X}_1,\, \hat{X}_2\right),$$

$\hat{Q}_r$ – соответствующая матрица перестановок строк, $\hat{X}_1(t) \in \hat{\mathcal{X}}_1 \subseteq \mathbf{R}^{\lambda+n}$, $\hat{X}_2(t) \in \hat{\mathcal{X}}_2 \subseteq \mathbf{R}^{d}$.

Для $(p \times q)$-матрицы H и q-мерного вектора h определим величины

$$\Omega(H)=\max_{\|h\|_{\mathbf{R}^q}=1}\|Hh\|_{\mathbf{R}^p}, \quad \omega(H)=\min_{\|h\|_{\mathbf{R}^q}=1}\|Hh\|_{\mathbf{R}^p}.$$

Здесь и далее под нормой вектора понимается евклидова норма, а под нормой матрицы – спектральная матричная норма.

Теорема 3 [25]. *Пусть:*
1) *функция $f(t, \alpha, \beta)$ имеет в области $\mathcal{W}$ непрерывные частные производные по своим аргументам до порядка $r+2$ включительно: $f(t, \alpha, \beta) \in \mathbf{C}^{r+2}(\mathcal{W})$;*
2) *выполнены условия B1–B4;*
3) *существует непрерывная функция $v(s): T \rightarrow T$ такая, что*

$$v(s)>0, \quad s \in(0, \infty); \quad \int_1^{\infty} \frac{ds}{v(s)}=\infty,$$

и для всех значений $(t, x, x', \hat{X}_1, \hat{X}_2) \in \mathcal{W} \times \hat{\mathcal{X}}_1 \times \hat{\mathcal{X}}_2$ имеют место оценки

$$\omega\left(\bar{\mathcal{M}}_{r+1}\right)>0,$$

$$\Omega\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial t} & \dfrac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial \hat{X}_2} \end{pmatrix} / \omega\left(\bar{\mathcal{M}}_{r+1}\right) \leqslant v\left(\left\|\left(x_2, x', \hat{X}_1\right)\right\|\right).$$

Тогда любое решение системы (5.1), *определенное в достаточно малой окрестности нуля, является решением системы*

$$x_2(t)=f_1\left(t, x_1(t)\right), \tag{5.12}$$

$$x_1'(t)=f_2\left(t, x_1(t)\right), \quad t \in T, \tag{5.13}$$

и наоборот.

Функции $f_1\left(t, x_1(t)\right)$ и $f_2\left(t, x_1(t)\right)$ находятся как часть компонент неявной функции (5.8)–(5.11), удовлетворяющей системе (5.4). При этом

$$f_i(t, x_1) \in \mathbf{C}^1(T \times \mathcal{W}_1), \tag{5.14}$$

$$f_i(t, 0)=0, \quad t \in T, \quad i=1,2. \tag{5.15}$$

Легко видеть, что для выделения единственного решения системы (5.12), (5.13) или (5.1) необходимо определить начальные данные (2.15).

6. Детектируемость нелинейных ДАУ

Сначала рассмотрим нелинейную систему вида (5.12), (5.13) со свойствами (5.14), (5.15) и наблюдаемым выходом

$$y(t) = c_1^\top(t)x_1(t) + c_2^\top(t)x_2(t) + \tilde{\rho}(t, x_1(t), x_2(t)), \tag{6.1}$$

где $c_1(t) : T \to \mathbf{R}^{n-d}$, $c_2(t) : T \to \mathbf{R}^d$,

$$\tilde{\rho}(t, 0, 0) \equiv 0 \;\; t \in T.$$

Линеаризуем систему (5.12), (5.13)

$$x_2(t) = G_1(t)x_1(t) + r_1(t, x_1(t)), \tag{6.2}$$

$$x_1'(t) = G_2(t)x_1(t) + r_2(t, x_1(t)), \tag{6.3}$$

где $G_1(t) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(t, 0)$, $G_2(t) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(t, 0)$.

Подставив (6.2) в (6.1), получим представление для выхода

$$\begin{aligned} y(t) = \Big(c_1^\top(t) + c_2^\top(t)G_1(t)\Big)\, x_1(t) + c_2^\top(t)r_1(t, x_1(t)) + \\ + \tilde{\rho}\Big(t, x_1(t), G_1(t) + r_1(t, x_1(t))\Big). \end{aligned} \tag{6.4}$$

Для системы (6.2)–(6.4) построим наблюдатель состояния

$$\hat{x}_2(t) = G_1(t)\hat{x}_1(t) + r_1(t, \hat{x}_1(t)), \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_1'(t) = G_2(t)\hat{x}_1(t) + r_2(t, \hat{x}_1(t)) + g(t)\Big(y(t) - (c_1^\top(t) + c_2^\top G_1(t))\hat{x}_1(t) - \\ - c_2^\top(t)r_1(t, \hat{x}_1(t)) - \tilde{\rho}\Big(t, \hat{x}_1(t), G_1(t)\hat{x}_1(t) + r_1(t, \hat{x}_1(t))\Big)\Big), \end{aligned} \tag{6.6}$$

$$\hat{y}_1(t) = \hat{x}_1(t), \;\; \hat{y}_2(t) = \hat{x}_2(t). \tag{6.7}$$

Тогда невязки $e_1(t) = \hat{x}_1(t) - x_1(t)$ и $e_2(t) = \hat{x}_2(t) - x_2(t)$ должны удовлетворять уравнениям

$$e_2(t) = G_1(t)e_1(t) + r_1(t, \hat{x}_1(t)) - r_1(t, x_1(t)), \tag{6.8}$$

$$\begin{aligned} e_1'(t) = \Big(G_2(t) - g(t)(c_1^\top(t) + c_2^\top G_1(t))\Big)\, e_1(t) + r_2(t, \hat{x}_1(t)) - r_2(t, x_1(t)) - \\ - c_2^\top(t)\left(r_1(t, \hat{x}_1(t)) - r_1(t, x_1(t))\right) + \tilde{\rho}\Big(t, x_1(t), G_1(t)x_1(t) + r_1(t, x_1(t))\Big) - \\ - \tilde{\rho}\Big(t, \hat{x}_1(t), G_1(t)\hat{x}_1(t) + r_1(t, \hat{x}_1(t))\Big). \end{aligned} \tag{6.9}$$

Определение 5. Будем говорить, что система (6.2)–(6.4) *имеет наблюдатель состояния вида* (6.5)–(6.7), *если*

$$\lim_{t\to\infty} (\hat{y}_i(t) - x_i(t)) = 0, \;\; i = 1, 2.$$

Определение 6. Система (6.2)–(6.4) *называется детектируемой, если найдется вектор-функция* $g(t) : T \to \mathbf{R}^{n-d}$ *такая, что система* (6.8)–(6.9) *асимптотически устойчива.*

Очевидно, что система

$$e_2(t) = G_1(t)e_1(t), \tag{6.10}$$

$$e_1'(t) = \Big(G_2(t) - g(t)(c_1^\top(t) + c_2^\top G_1(t))\Big)\, e_1(t), \;\; t \in T, \tag{6.11}$$

является системой первого приближения для (6.8), (6.9). Сформулируем для (6.10), (6.11) условия устойчивости, вытекающие непосредственно из леммы 2.

Замечание 4. Пусть:
1) $G_1(t) \in \mathbf{C}(T)$, $G_2(t) \in \mathbf{C}^{n-d-1}(t)$, $c_1^\top(t) + c_2^\top(t)G_1(t) \in \mathbf{C}^{n-d}(T)$ $(n-d \geqslant 1)$;
2) $\|G_1(t)\| \leqslant \kappa$ $\forall t \in T$, $\kappa = \mathrm{const} > 0$;
3) выполнены предположения 2, 3 леммы 2, при этом в (3.15), (3.16)

$$s_0(t) = c_1^\top + c_2^\top(t)G_1(t), \;\; s_i = s_{i-1}'(t) + s_{i-1}(t)G_2(t), \;\; i = \overline{1, n-d}. \tag{6.12}$$

Тогда найдется $(n-d)$-мерная вектор-функция $g(t)$ такая, что система (6.10), (6.11) будет асимптотически устойчива.

Опираясь на утверждение 3, можно получить достаточные условия детектируемости системы (5.12), (5.13), (6.1).

Теорема 4. Пусть:
1) *имеют место свойства* (5.14), (5.15) *и* $\tilde\rho(t, x_1, x_2) \in \mathbf{C}(\hat{\mathcal{W}})$*;*
2) *выполнены предположения утверждения 3;*
3) $|\tilde\rho(t, \hat x_1, \hat x_2) - \tilde\rho(t, x_1, x_2)| \leqslant \eta_\rho\,(\|\hat x_1 - x_1\| + \|\hat x_2 - x_2\|)$, *где* $\eta_\rho > 0$ *достаточно малая постоянная при достаточно малых* x_i *и* $\hat x_i - x_i$, *близких к нулю* $(i = 1, 2)$*;*
4) $\|c_2(t)\| \leqslant c$, $t \in T$, $c = \mathrm{const} > 0$;
5) $\|r_i(t, \hat x_1) - r_i(t, x_1)\| \leqslant \eta_i \|\hat x_1 - x_1\|$ $(i = 1, 2)$, *где* $\eta_i > 0$ – *постоянные, достаточно малые при достаточно близких к нулю* $\|x_1\|$ *и* $\|\hat x_1 - x_1\|$.

Тогда система (5.12), (5.13), (6.1) *детектируема и имеет наблюдатель состояния вида* (6.5)–(6.7).

Доказательство вынесено в Приложение.

Обратимся к системе (5.1), (5.2). Линеаризуем (5.1) в окрестности точки $(x, x') = (0, 0)$

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) + h(t, x(t), x'(t)) = 0, \tag{6.13}$$

где

$$A(t) = \frac{\partial f(t, x, x')}{x'}(t, 0, 0), \;\; B(t) = \frac{\partial f(t, x, x')}{x}(t, 0, 0).$$

Допустим, что выполнены предположения A1, A2. Тогда существует оператор (2.7), преобразующий систему (1.1) к виду (2.9)–(2.14). Подействовав этим оператором на уравнение (6.13), получим

$$x_2(t) + J_1(t)x_1(t) + h_1(t, \bar{x}_{r+1}(t)) = 0, \tag{6.14}$$

$$x_1'(t) + J_2(t)x_1(t) + h_2(t, \bar{x}_{r+1}(t)) = 0, \tag{6.15}$$

где использованы обозначения (2.10), (5.5) и

$$\begin{pmatrix} h_1(t, \bar{x}_{r+1}(t)) \\ h_2(t, \bar{x}_{r+1}(t)) \end{pmatrix} = \mathcal{R}\left[h(t, x(t), x'(t))\right].$$

В условиях теоремы 3 любое решение системы (5.1), определенное в достаточно малой окрестности нуля, является решением системы (5.12), (5.13) и наоборот. Уравнения (6.2), (6.3) представляют собой линеаризацию системы (5.12), (5.13) в окрестности точки $x_1 = 0$.

Лемма 5. Пусть выполнены все предположения теоремы 3. Тогда в системах (6.14), (6.15) *и* (6.2), (6.3)

$$J_1(t) = -G_1(t), \;\; J_2(t) = -G_2(t) \;\; \forall t \in T,$$

а функции $-r_1(t, x_1(t))$ *и* $-r_2(t, x_1(t))$ *получаются из* $h_1(t, \bar{x}_{r+1}(t))$ *и* $h_2(t, \bar{x}_{r+1}(t))$ *подстановкой неявной функции* (5.8)–(5.11), *удовлетворяющей* r*-продолженной системе* (5.4).

Аналогичный результат доказан в работе [26].

Теорема 5. Пусть выполнены предположения теоремы 3, а также условия 2–4 теоремы 4. Кроме того,

$$\lim_{\hat{x}_2 \to x_2,\, \hat{x}' \to x',\, \hat{X}_1 \to X_1,\, \hat{X}_2 \to X_2} \|h_i(t, \hat{\bar{x}}_{r+1}) - h_i(t, \bar{x}_{r+1})\| \leqslant \mu_i \|\hat{x}_1 - x_1\|, \quad i = 1, 2, \tag{6.16}$$

где $\mu_i = \mathrm{const} > 0$ *достаточно малы при* $\|\hat{x}_1 - x_1\|$ *и* $\|\bar{x}_{r+1}\|$ *из соответствующих малых окрестностей нуля. Переменные* $\bar{x}_{r+1}$, x_1, x_2, X_1 *и* X_2 *определены в* (5.5)–(5.7).

Тогда система (5.1), (5.2) *детектируема и имеет наблюдатель вида* (6.5)–(6.7).

Доказательство вынесено в Приложение.

7. Иллюстрирующий пример

Опираясь на теорему 5, исследуем детектируемость нелинейной системы

$$2x_{(1)}(t) + x_{(3)}(t) + e^{-t}x_{(1)}(t)x_{(2)}(t) = 0, \tag{7.1}$$

$$\left(1 + x_{(1)}(t)\right) x_{(1)}'(t) = 0, \tag{7.2}$$

$$x_{(2)}'(t) + x_{(3)}'(t) + 4x_{(2)}(t) + 2x_{(2)}(t)x_{(3)}(t) = 0, \tag{7.3}$$

$$y(t) = \left(1 + \frac{1}{4}\cos t\right) x_{(2)}(t) + 2x_{(3)}(t) + e^{-2t}x_{(1)}(t)x_{(3)}(t), \;\; t \in T, \tag{7.4}$$

где
$$x(t) = \mathrm{col}\,\left(x_{(1)}(t),\, x_{(2)}(t),\, x_{(3)}(t)\right).$$

Для того, чтобы проверить справдливость предположений B1–B4, выпишем матрицу

$$\mathcal{D}_2(t,x,x',x'',x''') =$$
$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc||ccc}
v_1 & v_2 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\
x'_{(1)} & 0 & 0 & \boxed{1+x_{(1)}} & 0 & 0 & & & & & & \\
0 & v_3 & v_4 & 0 & \boxed{1} & 1 & & & & & & \\
\hline
v'_1 & v'_2 & 0 & v_1 & v_2 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & & & \\
x''_{(1)} & 0 & 0 & 2x'_{(1)} & 0 & 0 & \boxed{1+x_{(1)}} & 0 & 0 & & & \\
0 & v'_3 & v'_4 & 0 & v_3 & v_4 & 0 & \boxed{1} & 1 & & & \\
\hline\hline
v''_1 & v''_2 & 0 & 2v'_1 & 2v'_2 & 0 & v_1 & v_2 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\
x'''_{(1)} & 0 & 0 & 3x''_{(1)} & 0 & 0 & 3x'_{(1)} & 0 & 0 & \boxed{1+x_{(1)}} & 0 & 0 \\
0 & v''_3 & v''_4 & 0 & 2v'_3 & 2v'_4 & 0 & v_3 & v_4 & 0 & \boxed{1} & 1
\end{array}\right),$$

где $v_1(t) = 2 + e^{-t}x_{(2)}(t)$, $v_2(t) = e^{-t}x_{(1)}(t)$, $v_3(t) = 4 + 2x_{(3)}(t)$, $v_4(t) = 2x_{(2)}(t)$.

Легко видеть, что при $r = 1$ выполняется предположение B1, а именно
$$\mathrm{rank}\,\Lambda_1(t,x,x') = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1+x_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \lambda = 2,$$
когда $x_{(1)}$ удовлетворяет неравенству $|x_{(1)}| < 1$.

Очевидно, что (6×9)-матрица $\mathcal{D}_1(t,x,x',x'')$, расположенная выше горизонтальной и левее вертикальной двойной линии, имеет обратимую подматрицу $\mathcal{M}_1(t,x,x',x'')$ порядка 6, столбцы которой отмечены элементами, обведенными рамками, так что условие B2 также имеет место.

Матрица $\Lambda_2(t,x,x',x'')$ представляет собой последние шесть столбцов матрицы $\mathcal{D}_2$. Легко убедиться, что при $|x_{(1)}| < 1$ $\mathrm{rank}\,\Lambda_2(t,x,x',x'') = \lambda + n = 5$, т.е. справедливо предположение B3.

В $\mathcal{D}_2(t,x,x',x'',x''')$ подматрица $\mathcal{M}_2(t,x,x',x'',x''')$ порядка 9 со свойствами, сформулированными в условии B4, также существует, она состоит из столбцов, содержащих обведенные рамками элементы. Таким образом, при $r = 1$ предположения B1–B4 выполнены.

Для системы первого приближения
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x'(t) + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} x(t) = 0$$
определен оператор $\mathcal{R}$:
$$\mathcal{R} = R_0(t) + R_1(t)\frac{d}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{dt},$$

который имеет левый обратный оператор $\mathcal{L} = L_0(t) + L_1(t)$, $L_0(t) = R_0^{-1}(t)$, $L_1(t) = -R_1(t)$.

Оператор $\mathcal{R}$ преобразует систему (7.1)–(7.3) к виду

$$\begin{pmatrix} O & O \\ E_2 & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_1(t) & 1 \\ J_2(t) & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1(t,x,x',x'') \\ h_2(t,x,x',x'') \end{pmatrix} = 0,$$

где $d = 1$, $Q = E_3$,

$$x_2(t) = x_{(3)}(t), \quad x_1(t) = \begin{pmatrix} x_{(1)}(t) \\ x_{(2)}(t) \end{pmatrix}, \tag{7.5}$$

$$J_1(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$h_1(t,x,x',x'') = e^{-t} x_{(1)}(t) x_{(2)}(t), \tag{7.6}$$

$$h_2(t,x,x',x'') = \begin{pmatrix} x_{(1)}(t) x'_{(1)}(t) \\ e^{-t}\Big(x_{(1)}(t)x_{(2)}(t) - x'_{(1)}(t)x_{(2)}(t) - x_{(1)}(t)x'_{(2)}(t)\Big) + \\ + 2x_{(1)}(t)x'_{(1)}(t) + 2x_{(2)}(t)x_{(3)}(t) \end{pmatrix}. \tag{7.7}$$

Перейдем к проверке предположений утверждения 3. Согласно лемме 5, $G_1(t) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix}$, $G_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. Очевидно, условие 2 выполнено.

С учетом (7.5) из (7.4) получим $c_1^\top(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 + \frac{1}{4}\cos t \end{pmatrix}$, $c_2^\top(t) = 2$. В соответствии с формулами (6.12), (3.15)

$$S(t) = \begin{pmatrix} -4 & 1 + \dfrac{1}{4}\cos t \\ 0 & -\left(4 + \dfrac{1}{4}\sin t + \cos t\right) \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\det S(t) = 16 + \sin t + 4\cos t \neq 0 \ \ \forall t \in T$, можно найти обратную матрицу

$$S^{-1}(t) = -\frac{1}{16 + \sin t + 4\cos t} \begin{pmatrix} 4 + \dfrac{1}{4}\sin t + \cos t & 1 + \dfrac{1}{4}\cos t \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

и функции (3.16)

$$\omega_1(t) = 0, \quad \omega_2(t) = -\frac{64 + 8\sin t + 15\cos t}{16 + \sin t + 4\cos t}.$$

Легко видеть, что условия 2, 3 леммы 2, а равно как и предположение 3 утверждения 3, выполнены.

Перейдем к проверке условий 3 и 4 теоремы 4, принимая во внимание соотношения (7.5). Очевидно, $\|c_2(t)\| = 2$. Поскольку $\tilde{\rho}(t, x_1, x_2) = e^{-2t}x_{(1)}x_{(3)}$,

$$|\tilde{\rho}(t, \hat{x}_1, \hat{x}_2) - \tilde{\rho}(t, x_1, x_2)| \leqslant |x_{(3)}| \, \|\hat{x}_1 - x_1\| + \big(|\hat{x}_{(1)} - x_{(1)}| + |x_{(1)}|\big) \, \|\hat{x}_2 - x_2\|,$$

откуда следует оценка из условия 3 теоремы 4 при $\eta_\rho = \max\{\delta_2, \delta_1 + \delta_3\}$, где $|x_{(1)}| \leqslant \delta_1 < 1$, $|x_{(3)}| \leqslant \delta_2$, $|\hat{x}_{(1)} - x_{(1)}| \leqslant \delta_3$, $\delta_i = \mathrm{const} > 0$, $i = 1, 2, 3$.

Обратимся к формулировке теоремы 5. Рассмотрим предположение (6.16). С учетом (7.6), (7.7)

$$\begin{aligned} \lim_{\hat{x}_2 \to x_2,\, \hat{x}' \to x',\, \hat{X}_1 \to X_1,\, \hat{X}_2 \to X_2} \|h_1(t, \hat{\bar{x}}_{r+1}) - h_1(t, \bar{x}_{r+1})\| &= \\ = e^{-t} \, |\hat{x}_{(1)}\hat{x}_{(2)} - x_{(1)}x_{(2)}| &\leqslant \\ \leqslant \big(|\hat{x}_{(1)} - x_{(1)}| + |x_{(1)}| + |x_{(2)}|\big) \, \|\hat{x}_1 - x_1\| &\leqslant \eta_1 \|\hat{x}_1 - x_1\|, \end{aligned}$$

где $\eta_1 = \delta_1 + \delta_3 + \delta_4$, $|x_{(2)}| \leqslant \delta_4$, $\delta_4 = \mathrm{const} > 0$.

В свою очередь,

$$\lim_{\hat{x}_2 \to x_2,\, \hat{x}' \to x',\, \hat{X}_1 \to X_1,\, \hat{X}_2 \to X_2} \|h_2(t, \hat{\bar{x}}_{r+1}) - h_2(t, \bar{x}_{r+1})\| \leqslant$$
$$\leqslant \Big(|x_{(1)}| + |x_{(2)}| + 2|x_{(3)}| + |\hat{x}_{(1)} - x_{(1)}| + 4|x'_{(1)}| + |x'_{(2)}|\Big) \, \|\hat{x}_1 - x_1\| \leqslant \eta_2 \|\hat{x}_1 - x_1\|,$$

где $\eta_2 = \delta_1 + 2\delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + 4\delta_5 + \delta_6$, $|x'_{(1)}| \leqslant \delta_5$, $|x'_{(2)}| \leqslant \delta_6$; δ_5, δ_6 – положительные константы.

Таким образом, все предположения теоремы 5 выполнены, вследствие чего система (7.1)–(7.4) является детектируемой.

Для рассматриваемого примера из первых четырех уравнений 2-продолженной системы можно найти функции (5.12), (5.13)

$$x_{(3)}(t) = -x_{(1)}(t)\left(2 + e^{-t}x_{(2)}(t)\right),$$
$$x'_{(1)}(t) = 0, \quad x'_{(2)}(t) = \frac{x_{(2)}(t)\left(e^{-t}x_{(1)}(t)(2x_{(2)}(t) - 1) + 4(x_{(1)}(t) - 1)\right)}{1 - e^{-t}x_{(1)}(t)},$$

что позволяет построить для системы (7.1)–(7.4) наблюдатель состояния с выходом (6.7):

$$\hat{x}_{(3)}(t) = -\hat{x}_{(1)}(t)\left(2 + e^{-t}\hat{x}_{(2)}(t)\right),$$
$$\begin{pmatrix} \hat{x}'_{(1)}(t) \\ \hat{x}'_{(2)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4\hat{x}_{(2)}(t) + \dfrac{\hat{x}_{(1)}(t)\hat{x}_{(2)}(t)\left(2e^{-t}\hat{x}_{(2)}(t) - 5e^{-t} - 4\right)}{1 - e^{-t}\hat{x}_{(1)}(t)} \end{pmatrix} +$$
$$+ g(t)\left(y(t) + 4\hat{x}_{(1)}(t) - \left(1 + \frac{1}{4}\right)\hat{x}_{(2)}(t) + 2e^{-t}\hat{x}_{(1)}(t)\hat{x}_{(2)}(t) + \right.$$
$$\left. + e^{-2t}\hat{x}^2_{(1)}(t)\left(2 + e^{-t}\hat{x}_{(2)}(t)\right)\right).$$

Вектор-функция $g(t)$ должна обеспечивать детектируемость системы (3.10), (3.11) или же асимптотическую устойчивость системы (3.9). Способ нахождения такой функции предложен в книге [22, с. 255–257, 283–284, 312–314], в соответствии с которым

$$g(t) = \Gamma(t) \begin{pmatrix} g_1(t) - \gamma_1 \\ g_2(t) - \gamma_2 \end{pmatrix},$$

где $\gamma_1 = -\xi_1\xi_2$, $\gamma_2 = -(\xi_1 + \xi_2)$, ξ_1 и ξ_2 – некоторые заданные отрицательные числа,

$$g_1(t) = \frac{\sin t + 4\cos t}{q(t)} + \left(\frac{\cos t - 4\sin t}{q(t)}\right)^2, \quad g_2(t) = 4 + \frac{4\sin t - \cos t}{q(t)},$$

$$\Gamma(t) = \frac{1}{q(t)} \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{4}\cos t & g_2(t)\left(1 + \frac{1}{4}\cos t\right) - 4 - \cos t - \frac{1}{4}\sin t \\ 4 & 4g_2(t) \end{pmatrix},$$

$$q(t) = 16 + 4\cos t + \sin t.$$

Для того, чтобы убедиться в асимптотической устойчивости системы (3.9), нужно в (3.9) сделать замену переменных $e_1(t) = \Gamma(t)\tilde{e}_1(t)$. В результате подстановки получим систему $\tilde{e}_1'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_1 \\ -1 & -\gamma_2 \end{pmatrix} \tilde{e}_1(t)$, матрица которой имеет отрицательные собственные числа ξ_1 и ξ_2. Поскольку $\Gamma(t)$ является матрицей Ляпунова, система (3.9) также будет асимптотически устойчива.

8. Заключение

В статье были рассмотрены линейные и нелинейные нестационарные ДАУ наблюдения в общих предположениях об их внутренней структуре.

Для линейной системы (1.1) сформулированы условия существования структурной формы (2.9), полученной в результате действия на (1.1) линейного дифференциального оператора (2.7). Этот оператор обладает левым обратным оператором, в силу чего системы (1.1) и (2.9) имеют одно и то же множество решений. При этом в (2.9) уже разделены дифференциальная и алгебраическая составляющие, каждая из которых невырождена. Получены условия, обеспечивающие для оператора (2.7) существование правого обратного оператора (2.17) (лемма 1).

Для структурной формы (2.9) со скалярным выходом построен наблюдатель состояния (3.2)–(3.4), который можно использовать в качестве такового и для системы (1.1), (1.2) (теорема 1). Фактически для построения наблюдателя достаточно построить наблюдатель для дифференциальной составляющей ДАУ (1.1).

Рассмотрена система (4.1) со скалярным управлением, включающая в себя также и производную от управления. Существенным является использование при построении такой системы правого обратного оператора (2.17). Обоснованы условия, при которых систему вида (4.2) можно представить в форме (4.1) (лемма 3). Для ДАУ (4.1) получены условия стабилизируемости с использованием наблюдателя состояния (3.2)–(3.4) (теорема 2). При этом стабилизирующая динамическая обратная связь (4.7) включает в себя лишь решение дифференциальной подсистемы наблюдателя.

При анализе нелинейной системы (5.1) со скалярным выходом (5.2) была использована структурная форма (5.12), (5.13), любое решение которой, начинающееся в достаточно малой окрестности нуля, является решением системы (5.1) и наоборот. Эта структурная форма представляет собой уже невырожденную систему и является частью компонент неявной функции, удовлетворяющей r-продолженной системе (5.4) (теорема 3). Для ДАУ (5.1), (5.2) с использованием системы линейного приближения получены достаточные условия детектируемости и построен наблюдатель состояния вида (6.5)–(6.7) (теорема 5). Следует заметить, что для построения наблюдателя приходится находить упомянутую выше неявную функцию. В то же время проверка условий детектируемости этого не требует, а использует исключительно свойства линейного приближения. Важным вспомогательным результатом представляются условия детектируемости и способ построения наблюдателя состояния для квазилинейной системы вида (5.12), (5.13), (6.1) (теорема 4).

Предложенный подход может быть использован для исследования детектируемости и построения наблюдателей для линейных и нелинейных дискретных дескрипторных систем, а также вырожденных систем с непрерывным и дискретным временем.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. В матрице $\mathcal{D}_r(t)$ (см. (2.1)–(2.4)) переставим столбцы, умножив ее справа на матрицу перестановок $\operatorname{diag}\{Q, \ldots, Q\}$, Q определена в (2.5). При этом необходимо учитывать структуру разбиений (2.6). Вычеркнув столбцы, входящие в блок $B_1(t)$, из $\mathcal{D}_r(t)$ получим матрицу $\bar{\mathcal{D}}_r(t)$, которую ввиду громоздкости выписывать не будем.

Заметим, что предположение 1 леммы обеспечивает включение $P_0(t), P_1(t) \in \mathbf{C}^r(T)$.

По построению коэффициенты оператора $\mathcal{R}$ при всех $t \in T$ удовлетворяют уравнению

$$\begin{pmatrix} R_0(t) & R_1(t) & \ldots & R_r(t) \end{pmatrix} \bar{\mathcal{D}}_r(t) = \begin{pmatrix} E_n & O & \ldots & O \end{pmatrix}. \tag{П.1}$$

С другой стороны, коэффициенты операторов (2.7) и (2.17) по определению связаны тождеством

$$\begin{pmatrix} R_0 & R_1 & \ldots & R_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 & C_0^0 P_1 & O & \ldots & O \\ P_0' & C_1^0 P_1' + C_1^1 P_0 & C_1^1 P_1 & \ldots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ P_0^{(r)} & C_r^0 P_1^{(r)} + C_r^1 P_0^{(r-1)} & C_r^1 P_1^{(r-1)} + C_r^2 P_0^{(r-2)} & \ldots & C_r^r P_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} E_n & O & \ldots & O \end{pmatrix}. \tag{П.2}$$

Если положить в (П.2) $P_0(t) = \begin{pmatrix} B_2(t) & A_1(t) \end{pmatrix}$, $P_1(t) = \begin{pmatrix} A_2(t) & O \end{pmatrix}$, то равенства (П.1) и (П.2) совпадут в том случае, если справедливо тождество (2.16).

Доказательство леммы 3. Очевидно, для того чтобы утверждение леммы было справедливым, векторы $b(t)$, $\beta_1(t)$ и $\beta_2(t)$ должны удовлетворять соотношениям

$$\beta_1(t) = P_0(t)b(t) + P_1(t)b'(t), \tag{П.3}$$

$$\beta_2(t) = P_1(t)b(t), \quad t \in T. \tag{П.4}$$

Согласно лемме 1, оператор $P_0(t) + P_1(t)\frac{d}{dt}$ имеет левый обратный оператор $\mathcal{R}$. Подействовав на обе части тождества (П.3) оператором $\mathcal{R}$, приходим к представлению (4.4). Условие (4.3) получается в результате подстановки (4.4) в равенство (П.4).

Доказательство теоремы 2. Сначала покажем, что в условиях теоремы найдется обратная связь (4.7), стабилизирующая систему (4.5), (4.6).

Рассмотрим уравнения (4.10), (4.11). Предположения 1 и 3 обеспечивают выполнение всех условий леммы 2, согласно которой найдется функция $g(t) \in \in \mathbf{C}(T)$ такая, что

$$\lim_{t\to\infty} e_1(t) = 0. \tag{П.5}$$

В этом случае, в силу оценки (3.14) из (4.10), вытекает предельное соотношение $\lim\limits_{t\to\infty} e_2(t) = 0$. Таким образом, при надлежащем выборе $g(t)$ подсистема (4.10), (4.11) будет асимптотически устойчива.

Обратимся к уравнениям (4.8), (4.9). Предположения 1 и 4 гарантируют справедливость утверждения леммы 4, в соответствии с которым найдется вектор-функция $k(t) \in \mathbf{C}(T)$ такая, что система (4.9) будет асимптотически устойчива. Это означает, что при любой непрерывной функции $b_2(t)k^\top(t)e_1(t)$ каждое решение $x_1(t)$ системы (4.9) обладает свойством

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = 0. \tag{П.6}$$

В свою очередь, из предположения 5 и условий (3.14), (4.15) вытекают оценки

$$\chi\left[J_1(t) + b_1(t)k^\top(t)\right] \leqslant 0, \quad \chi\left[b_1(t)k^\top(t)\right] \leqslant 0,$$

откуда с учетом (П.5), (П.6) следует, что в (4.8) $x_2(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

На основании изложенного выше можно сделать вывод, что управление (4.7) является стабилизирующим для системы (4.5), (4.6).

Предполагаемая гладкость входных данных системы (4.1) обеспечивает включения $J_2(t) \in \mathbf{C}^{n-d}(T)$, $b_2(t) \in \mathbf{C}^{n-d+1}(T)$. В соответствии с замечанием 3, для управления (4.7) функцию $k(t)$ можно построить в классе $\mathbf{C}^1(T)$.

В условиях А1–А4 ДАУ (4.1) и (П.5), (4.5) эквивалентны в смысле решений, поэтому обратная связь (4.7) будет стабилизировать также и систему (4.1).

Доказательство теоремы 4. В соответствии с утверждением 3 существует функция $g(t) : T \to \mathbf{R}^{n-d}$ такая, что система (6.11) будет асимптотически устойчива. При этом, согласно замечанию 1, можно считать $g(t)$ ограниченной, а систему (6.11) приводимой по Ляпунову.

В сделанных предположениях в уравнении (6.9)

$$\Big\| r_2(t, \hat{x}_1(t)) - r_2(t, x_1(t)) - c_2^\top(t)\Big(r_1(t, \hat{x}_1(t)) - r_1(t, x_1(t))\Big) +$$

$$+ \tilde{\rho}\Big(t, x_1(t), G_1(t)x_1(t) + r_1(t, x_1(t))\Big) - \tilde{\rho}\Big(t, \hat{x}_1(t), G_1(t)\hat{x}_1(t) + r_1(t, \hat{x}_1(t))\Big)\Big\| \leqslant$$

$$\leqslant (\eta_2 + \eta_1(1 + c) + \eta_\rho(1 + \kappa))\, \|e_1\|.$$

По теореме об устойчивости по первому приближению [22, с. 340] при постоянных η_1, η_2 и η_ρ достаточно малых, когда $e_1(t)$ изменяется в малой окрестности нуля, тривиальное решение системы (6.9) будет асимптотически устойчиво.

В свою очередь, в силу ограниченности матрицы $G_1(t)$ и оценки $\|r_1(t, \hat{x}_1) - r_1(t, x_1)\| \leqslant \eta_1 \|e_1(t)\|$ вектор-функция $e_2(t)$, как решение уравнения (6.8), будет стремиться к нулю при $e_1(t) \to 0$.

Таким образом, нулевое решение системы (6.8), (6.9) будет асимптотически устойчиво при надлежащем выборе $g(t)$. Это означает, что система (6.2)–(6.4), а значит и система (5.12), (5.13), (6.1), детектируема и имеет наблюдатель вида (6.5)–(6.7).

Доказательство теоремы 5. В соответствии с теоремой 3 при достаточно малых начальных данных (2.15) система (5.1) имеет ненулевое решение, удовлетворяющее уравнениям (5.12), (5.13). В свою очередь, любое решение системы (5.12), (5.13), расположенное в достаточно малой окрестности нуля, является решением системы (5.1). Следовательно, системы (5.1), (5.2) и (5.12), (5.13), (6.1) детектируемы одновременно. Напомним, что (6.1) – другое представление для выхода (5.2).

В условиях теоремы 3 существует неявная функция (5.8)–(5.11), удовлетворяющая r-продолженной системе (5.4). В силу предположения 1 теоремы 3 и условия (5.3) эта неявная функция имеет на своей области определения непрерывные частные производные по каждому из своих аргументов и обладает свойством $f_j(t, 0) \equiv 0$, $f_4(t, 0, 0) \equiv 0$, $t \in T$, $j = 1, 2, 3$.

Подставим функции (5.8)–(5.11) в условие (6.16). В отличие от постоянных η_i из предположения 5 теоремы 4 константы μ_i могут зависеть от размеров соответствующих окрестностей нуля, которым принадлежат переменные x_2, x_1', x_2' и X_1. В результате указанной подстановки эти переменные заменятся на функции, стоящие в правой части равенств (5.8)–(5.11). В соответствии с упомянутыми свойствами этих функций можно выбрать $\|x_1\|$ и $\|X_2\|$ настолько близкими к нулю, что величины $|f_j(t, x_1)|$ и $|f_4(t, x_1, X_2)|$ будут принадлежать заданным малым окрестностям нуля при любых $t \in T$. Принимая во внимание лемму 5, можно утверждать, что оценки предположения 5 теоремы 4 выполняются.

Таким образом, справедливы все предположения теоремы 4. Согласно этой теореме, система (5.12), (5.13), (5.2) детектируема и имеет наблюдатель состояния вида (6.5)–(6.7). Тем же свойством обладает и система (5.1), (5.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dai L.* Singular control systems. Berlin: Springer, 1989.
2. *Assoudi A., Yaagoubi H.* Observer design for a class of differential-algebraic model of an aerobic culture of a recombinant yeast // Bioprocess Biosyst. Eng. 2003. V. 26. P. 27–35.
3. *Hou M., Muller P.* Observer design for descriptor systems // IEEE Trans. Autom. Control. 1999. V. 44. No. 1. P. 164–169.
4. *Duan G.-R.* Analysis and design of descriptor linear systems. Advances in Mechanics and Mathematics. V. 23. NY: Springer, 2010.
5. *Silva M.S., Lima T.P.* Looking for nonnegative solutions of a Leontief dynamic model // Linear Algebra and its Applications. 2003. V. 364. P. 281–316.
6. *Moysis L., Giakoumis A., Gupta M.K., et al.* Observers for rectangular descriptor systems with output nonlinearities: application to secure communications and microcontroller implementation // Int. J. Dyn. Control. 2021. V. 9. No. 2. P. 530–540.
7. *Shields D.N.* Observers for descriptor systems // Int. J. of Control. 1991. V. 55. No. 1. P. 249–256.
8. *Nikoukhah R., Willsky A.S., Levy B.C.* Kalman filtering and Riccati equations for descriptor systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1992. V. 37. No. 9. P. 1325–1342.
9. *Aslund J., Frisk E.* An observer for non-linear differential-algebraic systems // Automatica. 2006. V. 42. No. 6. P. 959–965.
10. *Shields D.N.* Observer design and detection for nonlinear descriptor systems // Int. J. of Control. 2010. V. 67. No. 2. P. 153–168.
11. *Tripathi M., Moysis L., Gupta M.K., Fragulis G.F., Volos Ch.* Observer design for nonlinear descriptor systems: a survey on system nonlinearities // Curcuits, Systems and Signal Processing. 2024. V. 43. P. 2853–2872.
12. *Abbaszadeh M., Marquez H.J.* Nonlinear observer design for one-sided Lipschitz systems // In Proc. of the 2010 American Control Conference (IEEE, 2010). P. 5284–5289.
13. *Berger T.* On observers for nonlinear differential-algebraic systems // IEEE Trans. Autom. Control. 2018. V. 64. No. 5. P. 2150–2157.
14. *Cong C.* Observer-based robust control of uncertain systems via an integral quadratic constraint approach // Int. J. Dyn. Control. 2019. V. 7. No. 3. P. 926–939.
15. *Darouach M., Boutat-Baddas L., Zerrougui M.* H^∞-observers design for a class of nonlinear singular systems // Automatica. 2011. V. 47. No. 11. P. 2517–2525.
16. *Kidane N., Yamashita Y., Nishitani H.* Observer based I/O-linearizing control of high index dae systems // In Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control, Denver, Colorado, USA. 2003. P. 3537–3542.

17. *Gao Z., Ho D.W.* State/noise estimator for descriptor systems with application to sensor fault diagnosis // IEEE Trans. Signal Proc. 2006. V. 54. No. 4. P. 1316–1326.

18. *Lu G., Ho D.W.* Full-order and reduced-order observers for Lipschitz descriptor systems: The unified LMI approach // IEEE Trans. Circuits Syst., II: Express Briefs. 2006. V. 53. No. 7. P. 563–567.

19. *Zhang J., Swain A.K., Nguang S.K.* Simultaneous estimation of actuator and sensor faults for descriptor systems / In book Robust Observer Based Fault Diagnosis for Nonlinear Systems Using MATLAB, Advances in Industrial Control. Cham: Springer. 2016. P. 165–197.

20. *Zulfiqar A., Rehan M., Abid M.* Observer design for one-sided Lipschitz descriptor systems // Appl. Math. Model. 2016. V. 40. No. 3. P. 2301–2311.

21. *Щеглова А.А.* Существование решения начальной задачи для вырожденной линейной гибридной системы с переменными коэффициентами // Известия вузов. Математика. 2010. № 9. С. 57–70.

22. *Гайшун И.В.* Введение в теорию линейных нестационарных систем. Минск: Изд-во Института математики НАН Беларуси, 1999.

23. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных. М.: Наука, 1972.

24. *Cristea M.* A note on global implicit function theorem // Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics. 2007. V. 8. Issue 4. Article 100.

25. *Щеглова А.А.* О неограниченной продолжимости решений нелинейных алгебро-дифференциальных систем // Сибирский математический журнал. 2014. Т. 55. № 4. С. 937–953.

26. *Щеглова А.А.* Устойчивость по линейному приближению нелинейных вырожденных систем с дискретным временем // Сибирский математический журнал. 2024. Т. 65. № 2. С. 407–427.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 10.10.2025

После доработки 11.12.2025

Принята к публикации 24.12.2025