Автоматика и телемеханика, № 7, 2026

Линейные системы

© 2026 г. **В.Л. ХАЦКЕВИЧ, д-р техн. наук (vlkhats@mail.ru)**
(Военно-воздушная академия им. профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, Воронеж)

О ВЗАИМОСВЯЗИ СРЕДНИХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЧЕТКОГО СИГНАЛА НА ВХОДЕ И ВЫХОДЕ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрена задача о преобразовании нечеткого сигнала линейной динамической системой, описываемой линейным дифференциальным уравнением высокого порядка с переменными вещественными коэффициентами, нечеткозначной неоднородностью и нечеткими начальными условиями. Предполагается, что известны некоторые числовые средние характеристики нечеткозначного входного сигнала (нечеткие средние и нечеткие полуразмахи) и по ним с учетом параметров системы устанавливаются соответствующие числовые средние характеристики нечеткого сигнала на выходе. Используются методы нечеткой математики и теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В качестве приложения рассмотрена модель радиотехнической цепи (последовательного колебательного контура) с нечеткозначным входным сигналом.

Ключевые слова: нечеткозначные функции, числовые средние нечеткозначных функций, производные нечеткозначных функций, нечеткие линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами.

DOI: 10.7868/S2413977726070030

1. Введение

Задача оценивания сигнала на выходе динамических систем при неполной или слабоформализованной информации о входном сигнале имеет важное теоретическое и прикладное значение, в частности, для последующего парирования уровня внешних возмущений (шума измерений, возникающих дефектов и т.д.). Использование нечетких дифференциальных уравнений является важным современным способом моделирования динамических систем в условиях возможных неопределенностей.

В данной статье рассмотрена задача о преобразовании нечеткого сигнала линейной динамической системой. При этом линейная динамическая система описывается линейным нечетким дифференциальным уравнением высокого порядка с переменными вещественными коэффициентами, нечеткозначной неоднородностью и нечеткими начальными условиями.

Основы теории нечетких дифференциальных уравнений заложены в работах [1–5] и др. Эта тематика активно развивается и в последние десятилетия.

В работах [6, 7] и др. предложен метод преобразования нечетких линейных дифференциальных уравнений к интегральным нечетким уравнениям, которые затем решаются. Рядом авторов рассмотрен подход, состоящий в сведении нечетких дифференциальных уравнений к дифференциальным включениям [8, 9] и дальнейшему их исследованию.

Широкое распространение для решения линейных нечетких дифференциальных уравнений высокого порядка в последние годы получил метод нечеткого преобразования Лапласа [10, 11]. Многие авторы исследуют численные методы решения нечетких дифференциальных уравнений [12–14].

Как правило [15, 16], при решении линейных нечетких дифференциальных уравнений выписывают систему уравнений для соответствующих α-индексов и решают ее. Затем проверяют, определяют ли производные полученных α-индексов производную нечеткозначной функции. Как показывают примеры [6, 16], это не всегда так.

В данной статье используется понятие ультраслабого нечеткого решения (введенного ранее автором в работах [17, 18]) как непрерывной по метрике Хаусдорфа нечеткозначной функции, α-индексы которой удовлетворяют уравнениям для α-индексов, вытекающих из заданного нечеткого дифференциального уравнения.

В литературе рассматриваются различные определения дифференцируемости нечеткозначных функций (см., например, [2–5]). В разделе 3 настоящей работы применяется определение производной по Сеиккала [3], в разделе 4 – обобщенных производных по Хукухаре [5–7] и др.

Отметим, что в [17, 18] обсуждается, в частности, вопрос о гладкости ультраслабых решений по Сеиккала.

Стандартная ситуация в приложениях состоит в том, что про входной нечеткий сигнал имеется неполная информация. А именно, не известны точно функции принадлежности соответствующих нечетких чисел, однако можно указать некоторые оценки. Здесь будем использовать аналогию с теорией случайных процессов, где широко известен подход, когда по средним характеристикам входного случайного сигнала (математическому ожиданию и корреляционной функции) с учетом параметров линейной динамической системы определяются средние характеристики выходного случайного сигнала [19, гл. 7]. Такой подход связан с тем, что не всегда известны функции распределения случайных величин, соответствующих входному (а тем более выходному) случайному сигналу.

В данном исследовании предполагается, что известны числовые средние характеристики входного нечеткого сигнала – средние нечетких чисел (нечеткие средние) и полуразмахи нечетких чисел (нечеткие полуразмахи), которые, в частности, могут быть получены с помощью экспертных оценок. Тогда возникает практически важная задача определения с учетом параметров рассматриваемой системы соответствующих числовых средних характеристик нечеткого сигнала на выходе линейной динамической системы.

В настоящей работе фактически предлагается способ отыскания упомянутых числовых характеристик решения начальной задачи для нечеткого дифференциального уравнения по параметрам системы, нечетким начальным условиям и соответствующим числовым средним характеристикам входных данных задачи, не находя предварительно самого нечеткозначного решения. Отметим, что такой подход для нечетких дифференциальных уравнений ранее не рассматривался. При этом нечеткие средние широко используются для дефаззификации нечетких чисел, а нечеткие полуразмахи введены в данной работе и оказались полезными в теоретическом и прикладном аспектах.

Нечеткие линейные дифференциальные уравнения широко используются в различных приложениях (из недавних работ укажем [20–22]). В разделе 5 настоящей работы в качестве приложения рассмотрена модель реакции радиотехнической цепи с постоянными параметрами на нечеткий входной сигнал.

Данная статья продолжает исследования, начатые в работе автора [23], в которой для линейной динамической системы с постоянными вещественными параметрами установлена взаимосвязь средних, а также ковариационных функций входного и выходного нечетких ограниченных сигналов.

2. Нечеткие числа и нечеткозначные функции

Под нечетким числом будем понимать нечеткое подмножество универсального множества действительных чисел $\mathbb{R}$, имеющее компактный носитель и нормальную, выпуклую и полунепрерывную сверху функцию принадлежности (см., например, [24, гл. 5; 25, гл. 2, 3]).

При этом носителем нечеткого числа $\tilde{z}$ называется $Supp\,\tilde{z} = \{x|\mu_{\tilde{z}}(x) > 0\}$. Нечеткое число $\tilde{z}$ нормально, если $\max_x \mu_{\tilde{z}}(x) = 1$; выпукло, если для любых вещественных $r \leqslant t \leqslant s$ выполняется соотношение $\mu_{\tilde{z}}(t) \geqslant \min(\mu_{\tilde{z}}(r), \mu_{\tilde{z}}(s))$.

Множество таких нечетких чисел обозначим через J.

Ниже будем использовать интервальное представление нечетких чисел.

Как известно, интервалы α-уровня (α-интервалы) нечеткого числа $\tilde{z} \in J$ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{z}}(x)$ определяются соотношениями: $[\tilde{z}]_\alpha = \{x|\mu_{\tilde{z}}(x) \geqslant \alpha\}$ $(\alpha \in (0,1])$, $[\tilde{z}]_0 = cl\{x|\mu_{\tilde{z}}(x) > 0\}$, где cl обозначает замыкание множества. Согласно принятым предположениям все α-уровни нечеткого числа – замкнутые и ограниченные интервалы вещественной оси.

Обозначим левую границу α-интервала через z^-_α, а правую через z^+_α. Таким образом, $[\tilde{z}]_\alpha = [z^-_\alpha, z^+_\alpha]$. Выражения z^-_α и z^+_α называют соответственно левым и правым α-индексами (индексами) нечеткого числа.

Для нечетких чисел $\tilde{z} \in J$ выполнены следующие условия на α-индексы нечеткого числа: 1) $z^-_\alpha \leqslant z^+_\alpha$, $\forall\,\alpha \in [0,1]$; 2) Функция z^-_α ограничена, не убывает, непрерывна слева на промежутке $(0,1]$ и непрерывна справа в точке 0; 3) Функция z^+_α ограничена, не возрастает, непрерывна слева на промежутке $(0,1]$ и непрерывна справа в точке 0.

Обратно, пара функций, заданных на промежутке $[0, 1]$, для которых выполняются условия 1–3, определяют нечеткое число, α-интервал которого имеет вид $[z_\alpha^-, z_\alpha^+]$.

Ниже под суммой нечетких чисел с индексами z_α^-, z_α^+ и u_α^-, u_α^+ понимается нечеткое число с интервалами α-уровня $[z_\alpha^- + u_\alpha^-, z_\alpha^+ + u_\alpha^+]$. Умножение на положительное число c характеризуется интервалами α-уровня $[cz_\alpha^-, cz_\alpha^+]$, а умножение на отрицательное число c – интервалами α-уровня $[cz_\alpha^+, cz_\alpha^-]$. Равенство нечетких чисел понимается как равенство всех соответствующих α-индексов при $\forall\, \alpha \in [0, 1]$. Вещественное число r трактуется как нечеткое, α-индексы которого совпадают с r при $\forall\, \alpha \in [0, 1]$.

Средним значением (нечетким средним) нечеткого числа $\tilde{z}$ с α-индексами $z_\alpha^\pm$ называют вещественное число [26]

$$m_{\tilde{z}} = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \left(z_\alpha^+ + z_\alpha^- \right) d\alpha.$$

Как известно [24], модальным значением (или модой) нечеткого числа $\tilde{z}$ называют такое значение z_{Mod}, для которого $\mu(z_{Mod}) = 1$. Для унимодальных нечетких чисел, т.е. имеющих единственное модальное значение, иногда рассматривают правую и левую ширину нечеткого числа $\tilde{z}$, определяемые формулами (см., например, [27, с. 11])

$$(r_{\tilde{z}})_l = \int\limits_0^1 \left(z_\alpha^+ - z_{Mod} \right) d\alpha, \quad (r_{\tilde{z}})_r = \int\limits_0^1 \left(z_{Mod} - z_\alpha^- \right) d\alpha.$$

Определим полуразмах нечеткого числа $\tilde{z}(t)$ (нечеткий полуразмах) как вещественное число вида

$$r_{\tilde{z}} = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \left(z_\alpha^+ - z_\alpha^- \right) d\alpha.$$

Это определение позволяет не предполагать знание модального значения нечеткого числа и является естественным, как обобщение понятия радиуса в интервальном анализе. Отметим, что $r_{\tilde{z}} = \dfrac{1}{2} \left((r_{\tilde{z}})_l + (r_{\tilde{z}})_r \right)$.

Пример 1. Нечеткое треугольное число $\tilde{z}$, характеризуемое тройкой вещественных чисел (a, b, c) при $a < b < c$, определяется функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{z}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если } x \in [a, b]; \\ \dfrac{x-c}{b-c}, & \text{если } x \in [b, c]; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Как известно, в этом случае левая и правая граница α-интервала имеют соответственно вид $z_\alpha^- = (b-a)+a$, $z_\alpha^+ = -(c-b)+c$.

Легко видеть, что среднее значение треугольного числа $m_{\tilde z}$ определяется формулой $m_{\tilde z} = \frac{1}{4}(2b+a+c)$, а полуразмах $r_{\tilde z}$ – формулой $r_{\tilde z} = \frac{1}{4}(c-a)$.

Ниже используется метрика Хаусдорфа, задаваемая для нечетких чисел $\tilde z$ и $\tilde u$ равенством [28] $d(\tilde z, \tilde u) = \sup_{0\leqslant\alpha\leqslant 1}\max\{|z_\alpha^- - u_\alpha^-|,\ |z_\alpha^+ - u_\alpha^+|\}$. Здесь $z_\alpha^\pm$ и $u_\alpha^\pm$ – α-индексы нечетких чисел $\tilde z$ и $\tilde u$ соответственно.

Фиксируем промежуток $[0,T]$ числовой оси. Отображение $\tilde z : [0,T] \to J$ будем называть нечеткозначной функцией.

Пусть нечеткозначная функция $\tilde z(t)$ при $t \in [0,T]$ характеризуется функцией принадлежности $\mu_{\tilde z}(x,t)$. При фиксированном $\forall\,\alpha \in (0,1]$ рассмотрим α-интервал $[\tilde z]_\alpha(t) = \{x \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde z}(x,t) \geqslant \alpha\}$ и $z_0(\alpha) = cl\{x \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde z}(x,t) > 0\}$. Обозначим через $z_\alpha^-(t)$ и $z_\alpha^+(t)$ левую и соответственно правую границы α-интервала. Так что $[\tilde z]_\alpha(t) = [z_\alpha^-(t), z_\alpha^+(t)]$.

Непрерывность функции $\tilde z(t)$ по t будем понимать по метрике Хаусдорфа, а ограниченность – в следующем смысле: найдется постоянная $C > 0$, такая что выполнено неравенство $d(\tilde z(t), \tilde\theta) = \sup_{0\leqslant\alpha\leqslant 1}\max\{|z_\alpha^-(t)|,\ |z_\alpha^+(t)|\} \leqslant C$ $(\forall\, t \in [0,T])$. Здесь $\tilde\theta$ – нечеткое число, у которого α-индексы $\theta_\alpha^\pm = 0$ при $\forall\,\alpha \in [0,1]$; d – метрика Хаусдорфа.

Замечание 1. Сумма непрерывных по Хаусдорфу нечеткозначных функций и произведение нечеткозначной функции на вещественное число непрерывны по метрике Хаусдорфа.

Замечание 2. Индексы $z_\alpha^-(t)$ и $z_\alpha^+(t)$ непрерывной нечеткозначной функции $\tilde z(t)$ непрерывны по t при любом $\alpha \in [0,1]$. А если $\tilde z(t)$ ограничена по $t \in [0,T]$, то это влечет ограниченность $z_\alpha^\pm(t)$ по $t \in [0,T]$ при любом $\alpha \in [0,1]$.

Интегралом (Римана) по промежутку $[0,T]$ от непрерывной нечеткозначной функции $\tilde z(t)$ называют [29] нечеткое число $\tilde g$, такое что его интервалы α-уровня при любом $\alpha \in [0,1]$ имеют вид $g_\alpha = \int_0^T z_\alpha(t)\,dt$. Интеграл обозначают как $\int_0^T \tilde z(t)dt$.

С учетом замечания 2 для непрерывной функции $\tilde z : [0,T] \to J$ имеет место интервальное представление [29] $\left[\int_0^T \tilde z(t)dt\right]_\alpha = \left[\int_0^T z_\alpha^-(t)dt,\ \int_0^T z_\alpha^+(t)dt\right]$.

Дадим определение производной по Сеиккала от нечеткозначной функции.

Нечеткозначную функцию $\tilde z : [0,T] \to J$ называют дифференцируемой по Сеиккала (или S-дифференцируемой) в точке $t \in (0,T)$ [3], если ее α-индексы $z_\alpha^-(t)$ и $z_\alpha^+(t)$ дифференцируемы и их производные $(z_\alpha^-)'(t)$ и $(z_\alpha^+)'(t)$ при $\forall\,\alpha \in$ $\in [0,1]$ порождают нечеткое число с α-интервалом $[\tilde z'(t)]_\alpha = [(z_\alpha^-)'(t), (z_\alpha^+)'(t)]$.

Например, нечеткозначная функция $\tilde z(t)$ вида $\tilde z(t) = g(t)\tilde r$, где $g(t)$ – скалярная дифференцируемая функция, а $\tilde r \in J$ – заданное нечеткое число, будет S-дифференцируемой в точке t при условии $g(t)g'(t) \geqslant 0$ [5].

Замечание 3. По определению нечеткая S-производная является аддитивной и положительно однородной. То есть, для нечеткозначных S-дифференцируемых функций $\tilde{z}(t)$ и $\tilde{w}(t)$ имеем $(\tilde{z}(t)+\tilde{w}(t))' = \tilde{z}'(t)+\tilde{w}'(t)$ и $(c\tilde{z}(t))' = c\tilde{z}'(t)$ для любой вещественной постоянной $c \geqslant 0$. При этом $[(\tilde{z}(t)+\tilde{w}(t))']^{\pm}_{\alpha} = (z^{\pm}_{\alpha})'(t) + (w^{\pm}_{\alpha})'(t)$ и $[(c\tilde{z}(t))']^{\pm}_{\alpha} = c(z^{\pm}_{\alpha})'(t)$.

Вторая S-производная $\tilde{z}''(t)$ в точке $t \in (0,T)$ определяется как S-производная от первой производной. То есть, как нечеткое число $\tilde{z}''(t)$, имеющее левый α-индекс $(z^{-}_{\alpha})''(t)$ и правый α-индекс $(z^{+}_{\alpha})''(t)$ при $\forall\, \alpha \in [0,1]$.

Аналогично определяются последующие S-производные.

Определения обобщенных производных от нечеткозначных функций приводятся и используются в разделе 4.

3. Начальная задача для линейных дифференциальных уравнений с нечеткозначной неоднородностью и нечеткими начальными условиями

На промежутке $[0,T]$ рассмотрим начальную задачу для линейного неоднородного нечеткого дифференциального уравнения

$$\tilde{y}^{(n)}(t) + p_1(t)\tilde{y}^{(n-1)}(t) + \cdots + p_n(t)\tilde{y}(t) = \tilde{f}(t) \quad (t \in (0,T]), \tag{1}$$

$$\tilde{y}^{(j)}(0) = \tilde{a}_j \quad (j = 0, \ldots, n-1) \tag{2}$$

с переменными вещественными непрерывными коэффициентами $p_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$, непрерывной по Хаусдорфу нечеткозначной функцией $\tilde{f} : [0,T] \to J$ и нечеткими начальными данными $\tilde{a}_j$ $(j = 0, \ldots, n-1)$.

Сильным решением задачи (1), (2) назовем n раз непрерывно S-дифференцируемую нечеткозначную функцию $\tilde{y}(t)$, удовлетворяющую соотношениям (1), (2).

Обозначим α-индексы $\tilde{y}(t)$ при $\forall\, t \in [0,T]$ через $y^{\pm}_{\alpha}(t)$, α-индексы $\tilde{f}(t)$ через $f^{\pm}_{\alpha}(t)$, а α-индексы $\tilde{a}_j$ через $(a_j)^{\pm}_{\alpha}$ $(j = 0, \ldots, n-1)$. Тогда в соответствии с определением и свойствами S-производных задача (1), (2) в интервальной форме при $\forall\, \alpha \in [0,1]$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} &\left[(y^{-}_{\alpha})^{(n)}, (y^{+}_{\alpha})^{(n)}\right] + p_1(t)\left[(y^{-}_{\alpha})^{(n-1)}, (y^{+}_{\alpha})^{(n-1)}\right] + \cdots \\ &\qquad \cdots + p_n(t)\left[y^{-}_{\alpha}, y^{+}_{\alpha}\right] = \left[f^{-}_{\alpha}(t), f^{+}_{\alpha}(t)\right] \quad (t \in (0,T]), \end{aligned} \tag{3}$$

$$\left[(y^{-}_{\alpha})^{(j)}(0), (y^{+}_{\alpha})^{(j)}(0)\right] = \left[(a_j)^{-}_{\alpha}, (a_j)^{+}_{\alpha}\right] \quad (j = 0, \ldots, n-1). \tag{4}$$

Отметим, что $f^{\pm}_{\alpha}(t)$ (α-индексы непрерывной нечеткозначной функции $\tilde{f}(t)$) являются согласно замечанию 2 непрерывными по t вещественнозначными функциями при $\forall\, \alpha \in [0,1]$.

Назовем ультраслабым решением задачи (1), (2) непрерывную (по метрике Хаусдорфа) нечеткозначную функцию $\tilde{y} : [0,T] \to J$, α-индексы которой удовлетворяют соотношениям (3), (4) (см. [17, 18]).

На основании приведенных определений справедлива

Лемма 1. Пусть коэффициенты $p_i(t)$ $(t \in [0,T];\ i = 1,\dots,n)$ *уравнения* (1) *– непрерывные вещественнозначные функции, а нечеткозначная функция* $\tilde f : [0,T] \to J$ *непрерывна по метрике Хаусдорфа. Тогда сильное решение задачи* (1), (2) *является ультраслабым.*

При этом ультраслабое решение является сильным лишь при дополнительном предположении о существовании и непрерывности всех его нечетких производных, входящих в уравнение (1).

Отметим, как показывают примеры [6, 16], решения задачи (3), (4) $y^{\pm}_{\alpha}(t)$ при некоторых (или всех) значениях t могут не определять нечеткие числа, т.е. для них не выполняются хотя бы одно из условий 1–3 раздела 2. С другой стороны, даже если $y^{\pm}_{\alpha}(t)$ определяют нечеткозначную функцию, она может быть не дифференцируема. В связи с этим обоснована градация нечеткозначного решения задачи (1), (2) на сильные, слабые и ультраслабые, предложенная автором в работах [17, 18]. При этом слабое решение понимается как ультраслабое, которое дополнительно является решением интегрального уравнения, соответствующего задаче (1), (2). В данной работе слабые решения не рассматриваются.

Лемма 2. Пусть выполнены условия леммы 1 и дополнительно при $\forall\, t \in [0,T]$ *коэффициенты* $p_i(t) \geqslant 0$ $(i = 1,\dots,n)$. *Тогда для* α*-индексов* $y^{\pm}_{\alpha}(t)$ *сильного решения* $\tilde y(t)$ *при* $\forall\, \alpha \in [0,1]$ *справедливы следующие задачи: для правых индексов*

$$(y^{+}_{\alpha})^{(n)}(t) + p_1(t)(y^{+}_{\alpha})^{(n-1)}(t) + \dots + p_n(t)y^{+}_{\alpha}(t) = f^{+}_{\alpha}(t) \quad (t \in (0,T]), \tag{5}$$

$$(y^{+}_{\alpha})^{(j)}(0) = (a_j)^{+}_{\alpha}, \quad j = 0,\dots,n-1, \tag{6}$$

а для левых индексов

$$(y^{-}_{\alpha})^{(n)}(t) + p_1(t)(y^{-}_{\alpha})^{(n-1)}(t) + \dots + p_n(t)y^{-}_{\alpha}(t) = f^{-}_{\alpha}(t) \quad (t \in (0,T]), \tag{7}$$

$$(y^{-}_{\alpha})^{(j)}(0) = (a_j)^{-}_{\alpha}, \quad j = 0,\dots,n-1. \tag{8}$$

Это следует из линейности уравнения (1), свойств арифметических операций над нечеткими числами в интервальной форме и свойств аддитивности и положительной однородности производных (по замечанию 3).

Таким образом, в случае неотрицательности коэффициентов $p_i(t)$ $(i = 1,\dots,n)$ уравнения (1) при $\forall\, t \in [0,T]$ и α-индексы ультраслабого решения $\tilde y : [0,T] \to J$ задачи (1), (2) удовлетворяют соотношениям (5), (6) и (7), (8) соответственно. То есть, система для α-индексов распадается на две независимые задачи для правых и левых индексов соответственно.

Отметим, что согласно [30, гл. 3] в условиях леммы 2 при $\forall\, \alpha \in [0,1]$ решения линейных задач (5), (6) и (7), (8) существуют и единственны.

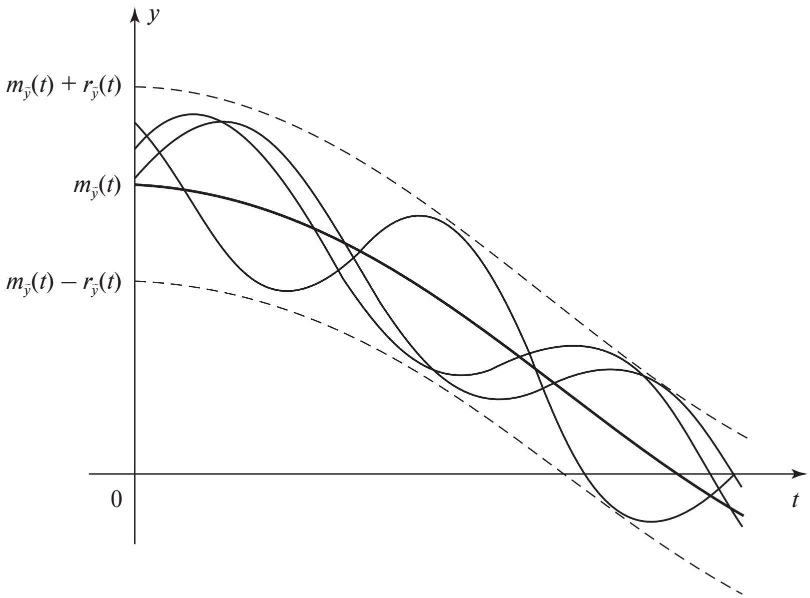

Рис. 1. Геометрический смысл среднего и полуразмаха решений.

Обозначим через

$$(9) \qquad m_{\tilde{y}}(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 (y_\alpha^+(t) + y_\alpha^-(t))d\alpha, \quad r_{\tilde{y}}(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 (y_\alpha^+(t) - y_\alpha^-(t))d\alpha$$

– среднее значение и полуразмах ультраслабого решения $\tilde{y}(t)$ задачи (3), (4) при $\forall\, t \in (0, T]$. По определению ультраслабому решению задачи (1), (2) при любом $t \in (0, T]$ и $\alpha \in [0, 1]$ соответствует α-интервал $[\tilde{y}(t)]_\alpha = [y_\alpha^-(t), y_\alpha^+(t)]$. Рассмотрим интервал $\left[\int_0^1 y_\alpha^-(t)d\alpha, \int_0^1 y_\alpha^+(t)d\alpha\right]$. Любой элемент $y(t)$ этого интервала при любом $t \in (0, T]$ лежит в полосе (рис. 1).

Рассмотрим вопрос о взаимосвязи числовых средних характеристик нечеткозначной неоднородности на входе и соответствующих числовых средних характеристик нечеткозначной функции на выходе линейной динамической системы, т.е. числовых средних характеристик ультраслабого нечеткозначного решения задачи (1), (2).

Обозначим:

$$(10) \qquad m_{\tilde{f}}(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(f_\alpha^+(t) + f_\alpha^-(t)\right) d\alpha, \quad r_{\tilde{f}}(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(f_\alpha^+(t) - f_\alpha^-(t)\right) d\alpha$$

– среднее значение и полуразмах соответственно неоднородности уравнения (1) $\tilde{f}(t)$ при $\forall\, t \in (0, T]$.

Теорема 1. Пусть имеют место условия леммы 1. Тогда среднее значение $m_{\tilde{y}}(t)$ ультраслабого решения $\tilde{y}(t)$ задачи (1), (2), *определяемое формулой* (9), *удовлетворяет уравнению*

$$(11)\qquad (m_{\tilde{y}})^{(n)}(t) + p_1(t)(m_{\tilde{y}})^{(n-1)}(t) + \cdots + p_n(t)m_{\tilde{y}}(t) = m_{\tilde{f}}(t) \quad (t \in (0,T]),$$

где $m_{\tilde{f}}(t)$ задается формулой (10). *При этом выполнены начальные условия*

$$(12)\qquad (m_{\tilde{y}})^{(j)}(0) = m_{\tilde{y}_j} = \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^1 \left((a_j)^+_\alpha + (a_j)^-_\alpha\right) d\alpha\right) \quad (j = 0, \ldots, n-1).$$

Доказательство. Предположим вначале, что все коэффициенты уравнения (1) $p_i(t) \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\forall\, t \in [0,T]$. Введем в рассмотрение среднее арифметическое $A_{\tilde{y}}(\alpha, t) = \frac{1}{2}(y^+_\alpha(t) + y^-_\alpha(t))$. Складывая левые и правые части равенств (5), (7) и деля полученное соотношение справа и слева на два с учетом линейности уравнений (5), (7), получим, что вещественнозначная функция $A_{\tilde{y}}(\alpha, t)$ при $\forall\, \alpha \in [0,1]$ и $t \in (0,T]$ удовлетворяет вещественному дифференциальному уравнению

$$(A_{\tilde{y}})^{(n)}_t(\alpha, t) + p_1(t)(A_{\tilde{y}})^{(n-1)}_t(\alpha, t) + \cdots + p_n(t)A_{\tilde{y}}(\alpha, t) = \frac{1}{2}(f^+_\alpha(t) + f^-_\alpha(t)).$$

Интегрируя обе части этого уравнения по α от 0 до 1 с учетом перестановочности интегрирования по α и дифференцирования по t для $m_{\tilde{y}}(t)$ получим дифференциальное уравнение (11).

По поводу начальных условий заметим, что согласно (6), (8)

$$(A_{\tilde{y}}(\alpha, t))^{(j)}\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}((a_j)^+_\alpha + (a_j)^-_\alpha) \quad (j = 0, \ldots, n-1).$$

Откуда следует (12).

Рассмотрим теперь случай, когда некоторые (или все) из коэффициентов уравнения (1) могут быть отрицательными. Пусть, например, $p_i(t) < 0$ при некотором i в некоторой точке $t \in (0,T]$. Остальные коэффициенты для определенности будем считать неотрицательными. Положим $p_i(t) = -q_i(t)$ и рассмотрим соответствующее выражение из соотношения (3)

$$p_i(t)\left[(y^-_\alpha)^{(n-i)}, (y^+_\alpha)^{(n-i)}\right] = \left[q_i(t)(-y^+_\alpha)^{(n-i)}, q_i(t)(-y^-_\alpha)^{(n-i)}\right] = \\ = q_i(t)\left[(-y^+_\alpha)^{(n-i)}, (-y^-_\alpha)^{(n-i)}\right].$$

Поэтому для правых α-индексов уравнение примет вид $(t \in (0,T])$

$$(13)\qquad (y^+_\alpha)^{(n)} + p_1(t)(y^+_\alpha)^{(n-1)} + \cdots + q_i(-y^-_\alpha)^{(n-i)} + \cdots + p_n(t)y^+_\alpha = f^+_\alpha(t),$$

а для левых индексов ($t \in (0, T]$)

$$(14) \qquad (y_\alpha^-)^{(n)} + p_1(t)(y_\alpha^-)^{(n-1)} + \cdots + q_i(-y_\alpha^+)^{(n-i)} + \cdots + p_n(t)y_\alpha^- = f_\alpha^-(t).$$

Сложим обе части равенств (13) и (14) и разделим на два. Интегрируя полученное соотношение по α от 0 до 1, а также используя обозначение $p_i(t) = -q_i(t)$, получим, что для среднего $m_{\tilde{y}}(t)$ выполнено уравнение (11).

Рассмотрим теперь взаимосвязь между полуразмахом неоднородности $r_{\tilde{f}}(t)$, задаваемым формулой (10), и полуразмахом ультраслабого решения $\tilde{y}(t)$ уравнения (1), (2), определяемым формулой (9).

Теорема 2. Пусть имеют место условия леммы 1. Тогда полуразмах $r_{\tilde{y}}(t)$ ультраслабого решения $\tilde{y}(t)$ задачи (1), (2), *определяемый формулой* (9), *удовлетворяет уравнению* ($t \in (0, T]$)

$$(15) \quad x^{(n)}(t) + |p_1(t)|x^{(n-1)}(t) + \cdots + |p_i(t)|x^{(n-i)}(t) + \cdots + |p_n(t)|x(t) = r_{\tilde{f}}(t),$$

где правая часть $r_{\tilde{f}}(t)$ задается формулой (10). *При этом выполнены начальные условия*

$$(16) \qquad (r_{\tilde{y}})^{(j)}(0) = r_{\tilde{a}_j} \equiv \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \left((a_j)_\alpha^+ - (a_j)_\alpha^-\right) d\alpha\right) \quad (j = 0, \ldots, n-1).$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай неотрицательности всех коэффициентов $p_i(t)$ ($i = 1, \ldots, n$). Вычтем из равенства (5) равенство (7). Воспользовавшись линейностью уравнений для полуразности $R_{\tilde{y}}(\alpha, t) = \frac{1}{2}(y_\alpha^+(t) - y_\alpha^-(t))$, получим, что при $\forall\, \alpha \in [0, 1]$ выполнено вещественное уравнение ($t \in (0, T]$)

$$(17) \qquad \begin{aligned} (R_{\tilde{y}})_t^{(n)}(\alpha, t) + p_1(t)(R_{\tilde{y}})_t^{(n-1)}(\alpha, t) + \cdots + p_n(t)R_{\tilde{y}}(\alpha, t) = \\ = \frac{1}{2}(f_\alpha^+(t) - f_\alpha^-(t)) \end{aligned}$$

при начальных условиях

$$(18) \qquad (R_{\tilde{y}}(\alpha, t))^{(j)}\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}\left((a_j)_\alpha^+ - (a_j)_\alpha^-\right) \quad (j = 0, \ldots, n-1).$$

После интегрирования по α от 0 до 1 обеих частей уравнения (17) для полуразмаха $r_{\tilde{y}}(t)$ получим вещественное уравнение ($t \in (0, T]$)

$$(19) \qquad (r_{\tilde{y}})^{(n)}(t) + p_1(t)(r_{\tilde{y}})^{(n-1)}(t) + \cdots + p_n(t)r_{\tilde{y}}(t) = r_{\tilde{f}}(t).$$

Уравнение (19) в случае неотрицательности коэффициентов $p_i(t)$ совпадает с (13).

При этом в силу (18) выполнены начальные условия (16).

Обратимся в случае полуразмахов к предположению, что $p_i(t) < 0$ для некоторого i в некоторой точке $t \in (0, T]$. При этом остальные коэффициенты для определенности будем считать неотрицательными. Вычитая из равенства (13) равенство (14) и интегрируя обе части полученного соотношения по α от 0 до 1, установим, что для полуразмахов (10) выполнено соотношение ($t \in (0, T]$)

$$x^{(n)}(t) + p_1(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + (-p_i(t))x^{(n-i)}(t) + \cdots + p_n(t)x(t) = r_{\tilde{f}}(t).$$

Следовательно, в уравнении для полуразмаха перед отрицательным коэффициентом исходного уравнения ставится знак «–». Так что этот коэффициент становится положительным. Так как в разных точках $t \in (0, T]$ $p_i(t)$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то в общей ситуации справедливо уравнение (15) при начальных условиях (16).

Отметим, что если существует ультраслабое решение $\tilde{y}(t)$ задачи (1), (2), то для его α-индексов $y^{\pm}_{\alpha}(t)$ при любом $t \in (0, T]$ выполняются условия 1–3 раздела 2 на нечеткие числа. В частности, $y^{-}_{\alpha}(t) \leqslant y^{+}_{\alpha}(t)$. Следовательно, полуразмах нечеткозначной функции $\tilde{y}(t)$, определяемый формулой (9), неотрицателен. Если решение задачи (15), (16) дает функцию, имеющую в некоторых точках отрицательное значение, то $\tilde{y}(t)$ не является ультраслабым решением в указанных точках (т.е. не существует ультраслабого решения).

4. Случай обобщенных производных

В последние десятилетия исследователи активно используют обобщенные производные нечеткозначных функций [5–8, 14–16]. Сформулируем соответствующее определение [5].

Для множеств A, B множество C называют разностью Хукухары и обозначают $C = A \ominus B$, если $A = B + C$.

Определение [5]. *Пусть* $\tilde{f} : (0, T) \to J$ *и* $t_0 \in (0, T)$. *Говорят, что нечеткозначная функция* $\tilde{f}$ *сильно обобщенно дифференцируема в точке* t_0, *если существует элемент* $\tilde{f}'(t_0) \in J$ *такой, что либо*

1) *для всех достаточно малых* $h > 0$, $\exists\, \tilde{f}(t_0 + h) \ominus \tilde{f}(t_0)$, $\tilde{f}(t_0) \ominus \tilde{f}(t_0 - h)$ *и существуют пределы* (*в метрике Хаусдорфа* d)

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\tilde{f}(t_0 + h) \ominus \tilde{f}(t_0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\tilde{f}(t_0) \ominus \tilde{f}(t_0 - h)}{h} = \tilde{f}'(t_0),$$

либо

2) *для всех достаточно малых* $h > 0$, $\exists\, f(t_0) \ominus f(t_0 + h)$, $f(t_0 - h) \ominus f(t_0)$ *и существуют пределы* (*в метрике* d)

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\tilde{f}(t_0) \ominus \tilde{f}(t_0 + h)}{(-h)} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\tilde{f}(t_0 - h) \ominus \tilde{f}(t_0)}{(-h)} = \tilde{f}'(t_0).$$

В случае (1) говорят об обобщенной (1)-дифференцируемости $\tilde{f}$ в точке t_0 и производную обозначают как $D_1^{(1)}\tilde{f}(t_0)$. В случае (2) говорят об обобщенной (2)-дифференцируемости $\tilde{f}$ в точке t_0 и производную обозначают как $D_2^{(1)}\tilde{f}(t_0)$. Как обычно, обобщенная дифференцируемость на интервале понимается как обобщенная дифференцируемость в каждой точке интервала.

Пусть функции $\tilde{f}:(0,T)\to J$ при $\forall\,\alpha\in[0,1]$ соответствуют α-интервалы $[\tilde{f}]_\alpha(t)=[f_\alpha^-(t),f_\alpha^+(t)]$. Заметим, что выражению $\tilde{f}(t_0+h)\ominus\tilde{f}(t_0)$ по определению разности Хукухары отвечает α-интервал $[\tilde{f}(t_0+h)\ominus\tilde{f}(t_0)]_\alpha=$ $=[f_\alpha^-(t_0+h)-f_\alpha^-(t_0),\,f_\alpha^+(t_0+h)-f_\alpha^+(t_0)]$. При этом предположение о существовании $\tilde{f}(t_0+h)\ominus\tilde{f}(t_0)$ означает, что указанные α-интервалы порождают нечеткое число, т.е. выполнены условия 1–3 раздела 2 на α-индексы.

Имеет место

Лемма 3 [15]. *Пусть нечеткозначная функция $\tilde{f}:(0,T)\to J$ обобщенно (1)-дифференцируема. Тогда ее производной $D_1^{(1)}\tilde{f}(t)$ при $\forall\,\alpha\in[0,1]$ соответствует α-интервал $[D_1^{(1)}\tilde{f}(t)]_\alpha=[(f_\alpha^-)'(t),(f_\alpha^+)'(t)]$. Пусть нечеткозначная функция $\tilde{f}:(0,T)\to J$ обобщенно (2)-дифференцируема. Тогда ее производной $D_2^{(1)}\tilde{f}(t)$ при $\forall\,\alpha\in[0,1]$ соответствует α-интервал $[D_2^{(1)}\tilde{f}(t)]_\alpha=$ $=[(f_\alpha^+)'(t),(f_\alpha^-)'(t)]$.*

Согласно лемме 3 справедливо

Следствие 1. Обобщенная (1)-дифференцируемость нечеткозначной функции $\tilde{f}:(0,T)\to J$ влечет дифференцируемость по Сеиккала на $(0,T)$.

Говорят, что нечеткозначная функция $\tilde{f}:(0,T)\to J$ является дважды обобщенно (n,m)-дифференцируемой (для $n,m=1,2$) в точке t_0, если первая обобщенная производная n-го типа $D_n^{(1)}\tilde{f}(t)$ существует в окрестности точки t_0 как нечеткозначная функция и она обобщенно m-дифференцируема в точке t_0. Этот факт будем обозначать как $D_{n,m}^{(2)}\tilde{f}(t_0)$. Аналогично определяются последующие обобщенные производные более высокого порядка.

В силу леммы 3 справедливо

Следствие 2. Пусть нечеткозначная функция $\tilde{f}:(0,T)\to J$ характеризуется α-интервалами $[f_\alpha^-(t),f_\alpha^+(t)]$. Тогда

1. *Если $\tilde{f}(t)$ – дважды обобщенно $(1,1)$-дифференцируемая на $(0,T)$ нечеткозначная функция, то для второй производной $D_{1,1}^{(2)}\tilde{f}(t)$ имеем $[D_{1,1}^{(2)}\tilde{f}(t)]_\alpha=$ $=[(f_\alpha^-)''(t),(f_\alpha^+)''(t)]$.*

2. *Если $\tilde{f}(t)$ – дважды обобщенно $(1,2)$-дифференцируемая на $(0,T)$ нечеткозначная функция, то для второй производной $D_{1,2}^{(2)}\tilde{f}(t)$ имеем $[D_{1,2}^{(2)}\tilde{f}(t)]_\alpha=$ $=[(f_\alpha^+)''(t),(f_\alpha^-)''(t)]$.*

3. *Если $\tilde{f}(t)$ – дважды обобщенно $(2,1)$-дифференцируемая на $(0,T)$ нечеткозначная функция, то для второй производной $D_{2,1}^{(2)}\tilde{f}(t)$ имеем $[D_{2,1}^{(2)}\tilde{f}(t)]_\alpha=$ $=[(f_\alpha^+)''(t),(f_\alpha^-)''(t)]$.*

4. *Пусть* $\tilde{f}(t)$ – *дважды обобщенно* $(2,2)$-*дифференцируемая на* $(0,T)$ *нечеткозначная функция, тогда для второй производной* $D^{(2)}_{2,2}\tilde{f}(t)$ *имеем* $[D^{(2)}_{2,2}\tilde{f}(t)]_\alpha = [(f^-_\alpha)''(t), (f^+_\alpha)''(t)]$.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда производные нечеткозначного решения задачи (1), (2) являются обобщенными производными первого или второго типа. Рассмотрение проведем для случая нечеткого дифференциального уравнения второго порядка

$$\tilde{y}''(t) + p_1(t)\tilde{y}'(t) + p_2(t)\tilde{y}(t) = \tilde{f}(t) \quad (t \in (0,T]) \tag{20}$$

с непрерывными вещественными коэффициентами $p_1, p_2 : [0,T] \to \mathbb{R}$ и непрерывной по метрике Хаусдорфа нечеткозначной функцией $\tilde{f}(t) : [0,T] \to J$ при выполнении начальных условий

$$\tilde{y}(0) = \tilde{a},\ \tilde{y}'(t) = \tilde{b} \quad (\tilde{a}, \tilde{b} \in J). \tag{21}$$

Отметим, что в данном контексте возможны четыре типа уравнений для α-индексов в соответствии с типами первых и вторых обобщенных производных.

В соответствии с леммой 3 и следствием 2 справедлива

Л е м м а 4. *Пусть коэффициенты* $p_1, p_2 : [0,T] \to \mathbb{R}$ – *непрерывные вещественные функции, неотрицательные на* $[0,T]$, *а нечеткозначная функция* $\tilde{f}(t) : [0,T] \to J$ *непрерывна по метрике Хаусдорфа. Тогда в случае обобщенной* $(1,1)$-*дифференцируемости нечеткозначного решения* $\tilde{y}(t)$ *уравнения* (20) *имеют место следующие уравнения для* α-*индексов:*

$$(y^+_\alpha)''(t) + p_1(y^+_\alpha)'(t) + p_2 y^+_\alpha(t) = f^+_\alpha(t) \quad (t \in (0,T]), \tag{22}$$

$$(y^-_\alpha)''(t) + p_1(y^-_\alpha)'(t) + p_2 y^-_\alpha(t) = f^-_\alpha(t) \quad (t \in (0,T]). \tag{23}$$

В случае обобщенной $(1,2)$-*дифференцируемости нечеткозначного решения* $\tilde{y}(t)$ *уравнения* (20) *имеют место следующие уравнения для* α-*индексов:*

$$(y^-_\alpha)''(t) + p_1(t)(y^+_\alpha)'(t) + p_2(t) y^+_\alpha(t) = f^+_\alpha(t) \quad (t \in (0,T]), \tag{24}$$

$$(y^+_\alpha)''(t) + p_1(t)(y^-_\alpha)'(t) + p_2(t) y^-_\alpha(t) = f^-_\alpha(t) \quad (t \in (0,T]). \tag{25}$$

В случае обобщенной $(2,1)$-*дифференцируемости нечеткозначного решения* $\tilde{y}(t)$ *уравнения* (20) *имеют место следующие уравнения для* α-*индексов:*

$$(y^-_\alpha)''(t) + p_1(t)(y^-_\alpha)'(t) + p_2(t) y^+_\alpha(t) = f^+_\alpha(t) \quad (t \in (0,T]), \tag{26}$$

$$(y^+_\alpha)''(t) + p_1(t)(y^+_\alpha)'(t) + p_2(t) y^-_\alpha(t) = f^-_\alpha(t) \quad (t \in (0,T]). \tag{27}$$

В случае обобщенной $(2,2)$-*дифференцируемости нечеткозначного решения* $\tilde{y}(t)$ *уравнения* (20) *имеют место следующие уравнения для* α-*индексов:*

$$(y^+_\alpha)''(t) + p_1(t)(y^-_\alpha)'(t) + p_2(t) y^+_\alpha(t) = f^+_\alpha(t) \quad (t \in (0,T]), \tag{28}$$

$$(y^-_\alpha)''(t) + p_1(t)(y^+_\alpha)'(t) + p_2(t) y^-_\alpha(t) = f^-_\alpha(t) \quad (t \in (0,T]). \tag{29}$$

При этом выполнены следующие начальные условия, отвечающие (21).

В случае (1)*-дифференцируемости* $\tilde{y}(t)$ *имеем*

$$y_\alpha^\pm(0) = a_\alpha^\pm, (y_\alpha^\pm)'(0) = b_\alpha^\pm. \tag{30}$$

В случае (2)*-дифференцируемости* $\tilde{y}(t)$ *имеем*

$$y_\alpha^\pm(0) = a_\alpha^\pm, (y_\alpha^\pm)'(0) = b_\alpha^\mp. \tag{31}$$

Нечеткозначную функцию, α-индексы которой удовлетворяют уравнениям (22), (23), (30), будем называть (1,1)-ультраслабым решением задачи (20), (21); удовлетворяющую уравнениям (24), (25), (30) будем называть (1,2)-ультраслабым решением задачи (20), (21); удовлетворяющую уравнениям (26), (27), (31) будем называть (2,1)-ультраслабым решением задачи (20), (21); удовлетворяющую уравнениям (28), (29), (31) будем называть (2,2)-ультраслабым решением задачи (20), (21).

Справедлива

Т е о р е м а 3. *Пусть выполнены условия леммы 4. Тогда, независимо от типов ультраслабых решений задачи* (20), (21), *среднее значение* (9) *удовлетворяет одному и тому же уравнению*

$$m_{\tilde{y}}''(t) + p_1(t)m_{\tilde{y}}'(t) + p_2(t)m_{\tilde{y}}(t) = m_{\tilde{f}}(t) \quad (t \in (0,T]) \tag{32}$$

при начальных условиях

$$m_{\tilde{y}}(0) = m_{\tilde{a}} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (a_\alpha^+ + a_\alpha^-)d\alpha, \quad (m_{\tilde{y}})'(0) = m_{\tilde{b}} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (b_\alpha^+ + b_\alpha^-)d\alpha. \tag{33}$$

Действительно, в каждом из случаев (n,m)-ультраслабых решений задачи (20), (21) при $n, m = 1, 2$ сложим соответствующее равенство для правых и левых α-индексов и разделим полученное соотношение на 2. После интегрирования по α от 0 до 1 обеих частей последнего получим, что для среднего $m_{\tilde{y}}(t)$ справедливо уравнение (32).

По поводу начальных условий заметим, что в случае (1)-дифференцируемости $\tilde{y}(t)$ в силу (30) согласно (12) следует, что справедливо (33).

В случае (2)-дифференцируемости $\tilde{y}(t)$ в силу (31) согласно (12) следует, что также справедливо (33).

З а м е ч а н и е 4. Результат теоремы 3 справедлив и в случае произвольных знаков коэффициентов $p_i(t)$ уравнения (20).

Рассмотрим случай полуразмахов. Справедливо

У т в е р ж д е н и е 1. *Пусть выполнены условия леммы 4. Тогда в случае обобщенного* $(1,1)$*-ультраслабого решения* $\tilde{y}(t)$ *уравнения* (20) *для его полуразмахов* (9) *справедливо уравнение* $r_{\tilde{y}}''(t) + p_1(t)r_{\tilde{y}}'(t) + p_2(t)r_{\tilde{y}}(t) = r_{\tilde{f}}(t)$

$(t \in (0,T])$. *В случае обобщенного* $(1,2)$*-ультраслабого решения* $\tilde{y}(t)$ *уравнения* (20) *для его полуразмахов* (9) *справедливо уравнение* $-r''_{\tilde{y}}(t) + p_1(t)r'_{\tilde{y}}(t) + p_2(t)r_{\tilde{y}}(t) = r_{\tilde{f}}(t)$ $(t \in (0,T])$. *В случае обобщенного* $(2,1)$*-ультраслабого решения* $\tilde{y}(t)$ *уравнения* (20) *для его полуразмахов* (9) *справедливо уравнение* $-r''_{\tilde{y}}(t) - p_1(t)r'_{\tilde{y}}(t) + p_2(t)r_{\tilde{y}}(t) = r_{\tilde{f}}(t)$ $(t \in (0,T])$. *В случае обобщенного* $(2,2)$*-ультраслабого решения* $\tilde{y}(t)$ *уравнения* (20) *для его полуразмахов* (9) *справедливо уравнение* $r''_{\tilde{y}}(t) - p_1(t)r'_{\tilde{y}}(t) + p_2(t)r_{\tilde{y}}(t) = r_{\tilde{f}}(t)$ $(t \in (0,T])$.

Это утверждение получается при вычитании соответствующих уравнений для правых и левых индексов.

При этом начальные условия имеют вид $r_{\tilde{y}}(0) = r_{\tilde{a}} = \frac{1}{2}\int_0^1 (a_\alpha^+ - a_\alpha^-)d\alpha$ и $r'_{\tilde{y}}(0) = r_{\tilde{b}} = \frac{1}{2}\int_0^1 (b_\alpha^+ - b_\alpha^-)d\alpha$ в случае обобщенной (1)-дифференцируемости решения либо второе условие заменяется на $r'_{\tilde{y}}(0) = -r_{\tilde{b}}$ в случае обобщенной (2)-дифференцируемости решения.

5. Преобразование нечеткого сигнала последовательным колебательным контуром

Поставим задачу: найти реакцию радиотехнической цепи, схема которой представлена на рис. 2, на входное нечеткое воздействие $\tilde{g}(t)$.

Здесь L – индуктивность, C – емкость, R – сопротивление, $\tilde{g}(t)$ трактуется как источник напряжения, $\tilde{z}(t)$ – напряжение, снимаемое на сопротивление. Данная цепь называется последовательным колебательным контуром. Обозначим $\tilde{y}(t) = \frac{1}{R}\tilde{z}(t)$. Тогда данная цепь описывается (см., например, [31]) дифференциальным уравнением второго порядка относительно токов $\tilde{y}(t)$ с постоянными коэффициентами

$$(34)\qquad \begin{gathered} a_0\tilde{y}''(t) + a_1\tilde{y}'(t) + a_2\tilde{y}(t) = \tilde{g}'(t), \\ a_0 = L > 0, \;\; a_1 = R > 0, \;\; a_2 = \frac{1}{C} > 0 \quad (t \in (0,T]) \end{gathered}$$

и непрерывно дифференцируемым (по Сеиккала) нечеткозначным входным сигналом $\tilde{g} : [0,T] \to J$.

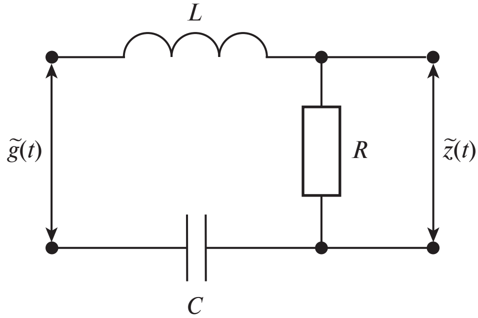

Рис. 2. Последовательный колебательный контур.

Предположим, что в начальный момент система находится в состоянии

$$\tilde{y}(0) = \tilde{a}, \quad \tilde{y}'(0) = \tilde{b}, \tag{35}$$

где $a, b \in J$ – нечеткие числа.

Разделив (34) на $a_0 > 0$, получим уравнение ($t \in (0, T]$)

$$\begin{gathered} \tilde{y}''(t) + p_1 \tilde{y}'(t) + p_2 \tilde{y}(t) = \tilde{f}(t), \\ p_1 := \frac{R}{L}, \quad p_2 := \frac{1}{LC}, \quad \tilde{f}(t) := \frac{1}{L}\tilde{g}'(t). \end{gathered} \tag{36}$$

Утверждение 2. Пусть вещественные коэффициенты p_1, p_2 положительны, а нечеткозначная функция $\tilde{f} : [0, T] \to J$ непрерывна по метрике Хаусдорфа. Пусть корни характеристического уравнения $\lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0$ вещественные, различные и отрицательные, равные $-\lambda_1$ и $-\lambda_2$, где $\lambda_1 > > \lambda_2 > 0$. Тогда $(1, 1)$-ультраслабое решение задачи (35), (36) существует, единственно и представимо в виде

$$\tilde{y}(t) = \tilde{a}\gamma_{\tilde{a}}(t) + \tilde{b}\gamma_{\tilde{b}}(t) + \int_0^t K(t-s)\tilde{f}(s)ds, \tag{37}$$

где функции $\gamma_{\tilde{a}}(t)$ и $\gamma_{\tilde{b}}(t)$ имеют вид

$$\gamma_{\tilde{a}}(t) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_1 e^{-\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{-\lambda_1 t}), \quad \gamma_{\tilde{b}}(t) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t}), \tag{38}$$

а функция Коши $K(t - s)$ определяется формулой

$$K(t-s) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(e^{-\lambda_2(t-s)} - e^{-\lambda_1(t-s)}). \tag{39}$$

Действительно, в условиях утверждения 2 α-индексы (1,1)-ультраслабого решения задачи (35), (36) удовлетворяют уравнениям

$$(y_\alpha^\pm)''(t) + p_1(y_\alpha^\pm)'(t) + p_2 y_\alpha^\pm(t) = f_\alpha^\pm(t) \quad (t \in (0, T]) \tag{40}$$

при начальных условиях

$$y_\alpha^\pm(0) = a_\alpha^\pm, \quad (y_\alpha^\pm)'(0) = b_\alpha^\pm. \tag{41}$$

Решение задачи (40), (41) при $\forall\, \alpha \in [0, 1]$ представим в виде суммы $y_\alpha^\pm(t) = = x_\alpha^\pm(t) + z_\alpha^\pm(t)$, где $x_\alpha^\pm(t)$ – решение соответствующего однородного дифференциального уравнения $(x_\alpha^\pm)''(t) + p_1(x_\alpha^\pm)'(t) + p_2 x_\alpha^\pm(t) = 0$ с начальными условиями $x_\alpha^\pm(0) = a_\alpha^\pm$, $(x_\alpha^\pm)'(0) = b_\alpha^\pm$, а $z_\alpha^\pm(t)$ – решение неоднородного дифференциального уравнения $(z_\alpha^\pm)''(t) + p_1(z_\alpha^\pm)'(t) + p_2 z_\alpha^\pm(t) = f_\alpha^\pm(t)$ с нулевыми начальными условиями $z_\alpha^\pm(0) = 0$, $(z_\alpha^\pm)'(0) = 0$. Нетрудно видеть, что $x_\alpha^\pm(t) = a_\alpha^\pm\gamma_{\tilde a}(t) + b_\alpha^\pm\gamma_{\tilde b}(t)$, а $z_\alpha^\pm(t)$ представимо с помощью функции Коши [30, гл. 3] формулой

$$z_\alpha^\pm(t) = \int\limits_0^t K(t-s) f_\alpha^\pm(s)ds.$$

Здесь функция Коши $K(t-s)$ в соответствии с определением есть решение вещественной задачи $x''(t) + p_1x'(t) + p_2x(t) = 0$, $x(s) = 0$, $x'(s) = 1$. Она дается равенством (39). Тогда имеет место формула

$$y_\alpha^\pm(t) = a_\alpha^\pm\gamma_{\tilde a}(t) + b_\alpha^\pm\gamma_{\tilde b}(t) + \int\limits_0^t K(t-s) f_\alpha^\pm(s)ds. \tag{42}$$

Отметим, что в представлении (42) вещественные функции $\gamma_{\tilde a}(t)$ и $\gamma_{\tilde b}(t)$, определенные формулой (28), непрерывны и положительны при $t \geqslant 0$. Кроме того, и функция Коши (39) непрерывна и неотрицательна при $t \geqslant s$. В силу этого для функций $y_\alpha^\pm(t)$, задаваемых (42), при $\forall\, t \in [0, T]$ выполнены условия 1–3 раздела 2 на α-индексы нечетких чисел. Поэтому они определяют нечеткозначную функцию (37). Согласно условиям утверждения 2 на основании формулы (42) и определения метрики Хаусдорфа нечеткозначная функция (37) непрерывна. Таким образом, (37) является (1,1)-ультраслабым решением задачи (35), (36).

Единственность (1,1)-ультраслабого решения задачи (35), (36) вытекает из единственности при $\forall\, \alpha \in [0, 1]$ решений задач (40), (41).

Предположим, что про неоднородность $\tilde f(t)$ уравнения(36) и про начальные условия $\tilde a$ и $\tilde b$ в (35) известны лишь их средние характеристики. Тогда справедливо следующее

Утверждение 3. *Пусть выполнены условия утверждения 2. Тогда средние характеристики $m_{\tilde y}(t)$ и $r_{\tilde y}(t)$ нечеткозначного решения задачи* (35), (36) *выражаются через средние характеристики $m_{\tilde a}$, $m_{\tilde b}$, $m_{\tilde f}$ и соответственно $r_{\tilde a}$, $r_{\tilde b}$, $r_{\tilde f}$ формулами*

$$m_{\tilde y}(t) = m_{\tilde a}\gamma_{\tilde a}(t) + m_{\tilde b}\gamma_{\tilde b}(t) + \int\limits_0^t K(t-s) m_{\tilde f}(s)ds, \tag{43}$$

$$r_{\tilde y}(t) = r_{\tilde a}\gamma_{\tilde a}(t) + r_{\tilde b}\gamma_{\tilde b}(t) + \int\limits_0^t K(t-s) r_{\tilde f}(s)ds, \tag{44}$$

где $\gamma_{\tilde a}(t)$ и $\gamma_{\tilde b}(t)$ определены равенствами (38), *а $K(t-s)$ – формулой* (39).

Действительно, рассмотрим случай средних $m_{\tilde y}(t)$. В силу (40), (41) аналогично теореме 3 среднее $m_{\tilde y}(t)$ есть решение уравнения

$$m_{\tilde y}''(t) + p_1m_{\tilde y}'(t) + p_2m_{\tilde y}(t) = m_{\tilde f}(t) \quad (t \in (0, T]) \tag{45}$$

при начальных условиях

$$(46)\qquad m_{\tilde{y}}(0) = m_{\tilde{a}} \equiv \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (a_\alpha^+ + a_\alpha^-)d\alpha, \quad m'_{\tilde{y}}(0) = m_{\tilde{b}} \equiv \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (b_\alpha^+ + b_\alpha^-)d\alpha.$$

Отсюда, аналогично рассуждениям утверждения 2, следует формула (43).

Для полуразмаха $r_{\tilde{y}}(t)$ согласно утверждению 1 справедливо уравнение

$$(47)\qquad r''_{\tilde{y}}(t) + p_1 r'_{\tilde{y}}(t) + p_2 r_{\tilde{y}}(t) = r_{\tilde{f}}(t) \quad (t \in (0, T])$$

при начальных условиях

$$(48)\qquad r_{\tilde{y}}(0) = r_{\tilde{a}} \equiv \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (a_\alpha^+ - a_\alpha^-)d\alpha, \quad r'_{\tilde{y}}(0) = r_{\tilde{b}} \equiv \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (b_\alpha^+ - b_\alpha^-)d\alpha.$$

Отсюда следует формула (44).

Отметим, что в соответствии с определением функция $r_{\tilde{y}}(t)$ должна быть неотрицательной. Фактически, это вытекает из формулы (44) в силу неотрицательности чисел $r_{\tilde{a}}$, $r_{\tilde{b}}$, функций $\gamma_{\tilde{a}}(t)$ и $\gamma_{\tilde{b}}(t)$ при $\forall\, t \geqslant 0$, а также неотрицательности функции $r_{\tilde{f}}(s)$ при $s \geqslant 0$ и $K(t-s)$ при $t \geqslant s \geqslant 0$.

Рассмотрим случай бесконечного отрезка $[0, \infty)$ вещественной оси.

Утверждение 4. Пусть выполнены условия утверждения 2 и дополнительно правая часть уравнения (36) $\tilde{f} : [0, \infty) \to J$ *непрерывна и ограничена по метрике Хаусдорфа. Тогда средние* (43) *и* (44) *ограничены при* $t \in [0, \infty)$.

Действительно, оценим, например, модуль $|m_{\tilde{y}}(t)|$ исходя из формулы (33). С учетом (28) первое слагаемое правой части (43) оценивается величиной $\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}[|m_{\tilde{a}}|(\lambda_1 - \lambda_2) + 2|m_{\tilde{b}}|]$. Чтобы оценить второе слагаемое, сделаем в интеграле замену переменных $t - s = \sigma$. Тогда $\int_0^t K(t-s) m_{\tilde{f}}(s) ds = \int_0^t K(\sigma) m_{\tilde{f}}(t-\sigma) d\sigma$. По предположению и в силу замечания 2 найдется постоянная $c_{\tilde{f}}$ такая, что $|m_{\tilde{f}}(s)| \leqslant c_{\tilde{f}}$ для $\forall\, s \geqslant 0$. Тогда в силу формулы (39) получим

$$\left|\int\limits_0^t K(\sigma) m_{\tilde{f}}(t-\sigma) d\sigma\right| \leqslant \int\limits_0^t |K(\sigma)||m_{\tilde{f}}(t-\sigma)| d\sigma \leqslant c_{\tilde{f}} \int\limits_0^t |K(\sigma)| d\sigma \leqslant \frac{c_{\tilde{f}}}{\lambda_1 \lambda_2}.$$

Откуда следует высказанное утверждение для $m_{\tilde{y}}(t)$. Аналогично для $r_{\tilde{y}}(t)$.

Замечание 5. В условиях утверждения 4 решение (43) уравнения (45), а также решение (44) уравнения (47) устойчивы по Ляпунову (по начальным данным) в соответствии с [32, гл. II]. Более того, асимптотически устойчивы. Кроме того, справедлива устойчивость при постоянно действующих возмущениях [32, гл. II].

Физически устойчивость обусловлена тем, что последовательный колебательный контур в силу положительности коэффициентов p_1, p_2 порождает пассивную (казуальную) динамическую систему [31].

Подчеркнем, что фактически в утверждениях 2–4 и замечании 5 рассмотрен случай (1,1)-обобщенного ультраслабого решения задачи (35), (36).

Обратимся к случаю обобщенных ультраслабых решений других типов в задаче (35), (36). Рассмотрим для определенности (1,2)-ультраслабое дважды обобщенно решение задачи (35), (36). Как отмечено в теореме 3, в этом случае среднее $m_{\tilde{y}}(t)$ является решением задачи (32), (33). Следовательно, имеет вид(43). Аналогично для других типов ультраслабых обобщенных решений.

По поводу полуразмаха $r_{\tilde{y}}(t)$ заметим, что в случае (1,1)-ультраслабого решения задачи (47), (48) функция (44) дает ограниченное при $t \to +\infty$ решение, устойчивое по Ляпунову.

В случае, например, (1,2)-ультраслабого решения задачи (35), (36) уравнение для $r_{\tilde{y}}(t)$ согласно утверждению 1 имеет вид $r''_{\tilde{y}}(t) - p_1 r'_{\tilde{y}}(t) - p_2 r_{\tilde{y}}(t) = r_{\tilde{f}}(t)$. Для отвечающего ему характеристического уравнения $\lambda^2 - p_1\lambda - p_2 = 0$ согласно теореме Виета корни вещественные и различных знаков. Это означает неустойчивость (т.е. физическую нереализуемость) соответствующего решения. Другие случаи рассматриваются аналогично. Другое дело было бы, если вместо исходной системы рассматривалась, например, система с обратной связью или система усиления сигналов.

Рассмотрим важный частный случай уравнения (36) – уравнение гармонического осциллятора, когда в колебательном контуре (рис. 2) отсутствует сопротивление. Имеем следующее нечеткое дифференциальное уравнение:

$$\tilde{y}''(t) + \omega^2 \tilde{y}(t) = \tilde{f}(t). \tag{49}$$

Здесь $\omega > 0$ – постоянная, определяющая частоту колебаний решений однородного уравнения

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = 0. \tag{50}$$

Как известно, общее решение однородного уравнения (50) имеет вид $c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$, где c_1, c_2 – произвольные постоянные. При этом функция Коши дается формулой $K(t-s) = \frac{1}{\omega}\sin\omega(t-s)$. Тогда аналогично утверждению 3 средние характеристики $m_{\tilde{y}}(t)$ и $r_{\tilde{y}}(t)$ задачи (49), (35) имеют вид

$$m_{\tilde{y}}(t) = m_{\tilde{a}} \cos \omega t + m_{\tilde{b}} \sin \omega t + \frac{1}{\omega}\int\limits_0^t \sin\omega(t-s) m_{\tilde{f}}(s)\, ds,$$

$$r_{\tilde{y}}(t) = r_{\tilde{a}} \cos \omega t + r_{\tilde{b}} \sin \omega t + \frac{1}{\omega}\int\limits_0^t \sin\omega(t-s) r_{\tilde{f}}(s) ds.$$

Здесь использованы обозначения, принятые в утверждении 3.

6. Заключение

В теории нечетких чисел широко распространен метод оценивания нечетких чисел вещественными числами (дефаззификация) либо вещественными интервалами. В данной работе фактически решается задача: по оценке нечеткого сигнала на входе линейной динамической системы найти соответствующую оценку нечеткого сигнала на выходе.

При этом основными параметрами оценивания являются нечеткое среднее и нечеткий полуразмах. Подчеркнем установленный в данной работе фундаментальный факт – универсальную роль нечеткого среднего (9) $m_{\tilde{y}}$ (теорема 3), которое одинаково при различных возможных типах обобщенных производных дифференциальной задачи, описывающей данную динамическую систему. Это имеет место, несмотря на различные уравнения для α-индексов при различных типах дифференцируемости.

Результаты данной работы допускают развитие в следующих направлениях: рассмотрение взаимосвязи модальных значений нечетких сигналов на входе и выходе линейной динамической системы, развитие интервального подхода при оценивании входного и выходного нечетких сигналов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kandel A., Byatt W.J.* Fuzzy processes // Fuzzy Sets and Systems. 1980. V. 4. No. 2. P. 117–152.
2. *Puri M., Ralescu D.* Differentials of fuzzy functions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1983. V. 91. No. 3. P. 552–558.
3. *Seikkala S.* On the fuzzy initial value problem // Fuzzy Sets and Systems. 1987. V. 24. No. 3. P. 319–330.
4. *Buckley J.J., Feuring T.* Fuzzy initial value problem for Nth-order fuzzy linear differential equations // Fuzzy Sets and Systems. 2001. V. 121. No. 2. P. 247–255.
5. *Barnab'as Bede, Sorin G. Gal.* Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. 2005. V. 151. No. 3. P. 581–599.
6. *Allahviranloo T., Abbasbandy S., Salahshour S., Hakimzadeh A.* A new method for solving fuzzy linear differential equations // Soft Computing. 2011. V. 92. P. 181–197.
7. *Salahshour S.* Nth-order Fuzzy Differential Equations Under Generalized Differentiability // Journal of Fuzzy Set Valued Analysis. 2011. V. 2011. P. 1–14.
8. *Abbasbandy S., Allahviranloo T., Lopez-Pouso O., Nieto J.J.* Numerical methods for fuzzy differential inclusions // Comput. Math. Appl. 2004. V. 48. No. 10–11. P. 1633–1641.
9. *Gasilov N., Amrahov S. Em., Fatullayev A.G.* Solution of linear differential equations with fuzzy boundary values // Fuzzy Sets and Systems. 2014. V. 257. No. 16. P. 169–183.
10. *Salahshour S., Allahviranloo T.* Applications of fuzzy Laplace Transforms // Soft Computing. 2013. V. 17. No. 1. P. 145–158.

11. *Ahmad L., Farooq M., Abdullah S.* Solving nth order fuzzy differential equation by fuzzy Laplace transform // Indian Journal of Pure and Applied Mathematics. 2014. P. 1–20. URL: https://arxiv.org/abs/1403.0242 (date of access: 23.11.2024)
12. *Jayakumar T., Kanagarajan K., Indrakumar S.* Numerical Solution of Nth-Order Fuzzy Differential Equation by Runge-Kutta Nystrom Method // International Journal of Mathematical Engineering and Science. 2012. V. 1. No. 5. P. 1–13.
13. *Amen S.G., Jameel A.F., Yaakob A.M.* Approximate Solution of Higher Order Fuzzy Initial Value Problems of Ordinary Differential Equations Using Bezier Curve Representation // Mathematics and Statistics. 2021. V. 9. No. 4. P. 431–438.
14. *Alavi S.M.* A method for second-order linear fuzzy two-point boundary value problems based on the Hukuhara differentiability // Computational Methods for Differential Equations. 2023. V. 11. No. 3. P. 576–588.
15. *Chalco-Cano Y., Román-Flores H.* On new solutions of fuzzy differential equations // Chaos, Solitons & Fractals. 2008. V. 38. No. 1. P. 112–119.
16. *Khastan A., Bahrami F., Ivaz K.* New Results on Multiple Solutions for Nth-Order Fuzzy Differential Equations under Generalized Differentiability // Boundary Value Problems. 2009. V. 2009. No. 7. P. 1–13.
17. *Хацкевич В.Л.* Преобразование непрерывного нечеткого сигнала линейной динамической системой // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2024. С. 34–48.
18. *Хацкевич В.Л.* Применение функции Коши в задаче о преобразовании нечеткого сигнала линейной динамической системой // Искусственный интеллект и принятие решений. 2025. № 2. С. 97–113.
19. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. 5-е изд., стер. М.: КноРус, 2014. 448 с.
20. *Деменков Н.П., Микрин Е.А., Мочалов И.А.* Нечеткое оптимальное управление линейными системами. Часть 1. Позиционное управление // Информационные технологии. 2019. Т. 25. № 5. С. 259–270.
21. *Padmapriya V., Kaliyappan M.* Solutions of non-homogeneous system of fuzzy fractional differential equations: a novel approach // Soft Computing. 2023. V. 27. No. 6. P. 14553–14569.
22. *Bhattacharyya R., Jha Br. K.* Analyzing fuzzy boundary value problems: a study on the influence of mitochondria and ER fluxes on calcium ions in neuron cells // Journal of Bioenergetics and Biomembranes. 2024. V. 56. P. 15–29.
23. *Хацкевич В.Л.* Непрерывные процессы с нечеткими состояниями и их приложения // АиТ. 2023. № 8. С. 43–60.
Khatskevich V.L. Continuous processes with fuzzy states and their applications // Autom. Remote Control. 2023. No. 8. P. 43–60.
24. *Аверкин А.Н.* Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. М.: Наука, 1986. 312 с.
25. *Пегат А.* Нечеткое моделирование и управление. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. 801 с.
26. *Dubois D., Prade H.* The mean value of fuzzy number // Fuzzy sets and systems. 1987. V. 24. No. 3. P. 279–300.
27. *Борисов В.В., Федулов А.С., Зернов М.М.* Основы нечеткой арифметики. М.: Горячая Линия – Телеком, 2019. 98 с.

28. *Diamond P., Cloeden P.* Metric Spaces of Fuzzy Sets. Theory and Applications. World Scientific. 1994. 188 p.

29. *Hsien-Chung Wu.* The fuzzy Riemann integral and its numerical integration // Fuzzy Sets and Systems. 2000. V. 110. No. 1. P. 1–25.

30. *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 256 с.

31. *Баскаков С.И.* Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высшая школа, 1988. 536 с.

32. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. 4-е изд., стер. М.: Наука, 2023. 480 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии *А.И. Кибзуном*.

Поступила в редакцию 06.03.2025

После доработки 24.06.2025

Принята к публикации 28.07.2025