Автоматика и телемеханика, № 7, 2026

Линейные системы

© 2026 г. **А.Ю. КУСТОВ, канд. физ.-мат. наук (arkadiykustov@yandex.ru),
А.В. ЮРЧЕНКОВ, канд. физ.-мат. наук (alexander.yurchenkov@yandex.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва;
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана)**

ПОДХОД К ПАРАМЕТРИЗАЦИИ СУБОПТИМАЛЬНЫХ АНИЗОТРОПИЙНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ[1]

Рассматривается задача параметризации субоптимальных и γ-оптимальных анизотропийных регуляторов в форме статической обратной связи по состоянию для линейных дискретных стационарных систем со случайным внешним возмущением с ограниченной средней анизотропией. Решение задачи основано на применении леммы Финслера к системе неравенств, характеризующей ограниченность анизотропийной нормы некоторым числом в постановке задачи синтеза регулятора. Указывается на связь решения данной задачи с решением задачи синтеза субоптимальных и γ-оптимальных анизотропийных регуляторов методами выпуклой оптимизации без проведения параметризации. Приведен пример, демонстрирующий эффективность предлагаемого подхода к параметризации анизотропийных регуляторов.

Ключевые слова: анизотропийная теория, линейные системы, дискретные системы, субоптимальные регуляторы, параметризация.

DOI: 10.7868/S2413977726070027

1. Введение

Анизотропийная теория управления и фильтрации, основу которой заложил в середине 90-х гг. И.Г. Владимиров [1–3], предоставляет математический инструментарий для анализа линейных дискретных систем управления со случайными внешними возмущениями и синтеза для них регуляторов, оптимальных по критерию среднеквадратичного коэффициента усиления при наихудшем возмущении из определенного класса. Основным отличием этой теории от известных $\mathcal{H}_2$- и $\mathcal{H}_\infty$-теорий управления является способ описания внешних возмущений, действующих на систему, – связанная с ними стохастическая неопределенность описывается в теоретико-информационных терминах, порожденных такими понятиями, как относительная энтропия и взаимная информация. Предложенный И.Г. Владимировым подход позволяет

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-20055).

считать $\mathcal{H}_2$- и $\mathcal{H}_\infty$-нормы систем частными случаями так называемой анизотропийной нормы, а $\mathcal{H}_2$- и $\mathcal{H}_\infty$-регуляторы – соответствующими версиями анизотропийных регуляторов.

На сегодняшний день в рамках анизотропийной теории решены многие задачи в разнообразных постановках: управления и фильтрации, для стационарных и нестационарных систем, в оптимальном и субоптимальном случаях, многокритериальные, для систем с мультипликативными шумами и систем с сетевой структурой и многие другие [4–9]. Наряду с этим разрабатывались и методы решения этих задач: если в первых работах результаты приводились в форме связанных уравнений Риккати и Ляпунова, характерных в первую очередь для оптимальных постановок, то чуть позже почти все решения начали приводиться в форме задачи выпуклой оптимизации с ограничениями в виде линейных матричных неравенств и одного неравенства специального вида. Тем не менее каждый из упомянутых случаев при реализации на вычислительном устройстве давал лишь одно решение, найденное численным алгоритмом. На самом же деле такой регулятор (даже оптимальный) не всегда единственный, а в субоптимальной постановке решением является континуальное множество. Параметризация регуляторов, если таковая возможна, является одним из способов описания множества решений – всего или отдельной части.

В данной работе рассматривается задача параметрического описания множества анизотропийных регуляторов в форме обратной связи по состоянию в субоптимальной и γ-оптимальной постановках. Статья организована следующим образом. В разделе 2 описаны основные понятия анизотропийной теории, необходимые для понимания изложенного далее. Раздел 3 представляет собой математическую постановку решаемой задачи. Основной результат и сопровождающие его утверждения приведены в разделе 4. Доказательство основного результата вынесено в Приложение. В разделе 5 приводится пример, заключение – в разделе 6.

2. Основные сведения

В этом разделе приведены основные сведения, необходимые читателю для понимания изложенного далее.

2.1. Условные обозначения

Пусть $L \in \mathbb{R}^{m\times n}$ – произвольная матрица над полем вещественных чисел. Транспонированную для L матрицу обозначим через L^{T}. Спектральная норма (или ∞-норма Шаттена) матрицы L определяется как $\|L\| = \sigma_{\max}(L)$, где $\sigma_{\max}(L) = \sqrt{\lambda_{\max}(L^{\mathrm{T}}L)}$ – максимальное сингулярное число матрицы L, а $\lambda_{\max}(L^{\mathrm{T}}L)$ – максимальное собственное число матрицы $L^{\mathrm{T}}L$. Для симметричной матрицы $L = L^{\mathrm{T}}$ запись $L \succ 0$ используется для обозначения ее положительной определенности. Обозначение $L^{\perp}$ использовано для левого нуль-пространства (или коядра, или ортогонального дополнения) матрицы L, и определяется как любая матрица, удовлетворяющая соотношениям $L^{\perp}L = 0$ и $L^{\perp}L^{\perp\mathrm{T}} \succ 0$, если таковая существует. Матрица L^{+} обозначает псевдообратную по Муру–Пенроузу для матрицы L.

2.2. Основные понятия анизотропийной теории

Анизотропийная теория относится к направлениям теории автоматического управления, занимающимся широким спектром вопросов управления и фильтрации для линейных дискретных стохастических систем, наличие стохастики в которых определено главным образом тем обстоятельством, что они функционируют в присутствии аддитивных случайных шумов и внешних возмущений. В предположении, что статистика этих возмущений доподлинно не известна, но возможно некоторым образом описать общую закономерность передачи информации в рассматриваемом процессе, вводится специальный функционал на множестве спектральных плотностей возмущения. Задание условия ограниченности этого функционала некоторым числом позволяет выделить из множества всех внешних возмущений определенный класс и далее исследовать влияние возмущений из этого класса на систему, а также возможности системы управления к гашению возмущений из такого класса.

Пусть $\{w_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ – стационарная эргодическая последовательность n_w-мерных случайных векторов. Тогда для нее можно определить среднюю анизотропию [10]

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = \lim_{N\to+\infty} \frac{\mathbf{A}(W_{0:N-1})}{N} = -\frac{1}{2}\ln\det\left(\frac{n_w\mathbf{E}[\widetilde{w}_0\widetilde{w}_0^{\mathrm{T}}]}{\mathbf{E}[|w_0|^2]}\right),$$

где $W_{s:t} = (w_s^{\mathrm{T}}, \ldots, w_t^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ – вектор-фрагмент последовательности, $\widetilde{w}_0 = w_0 - \mathbf{E}[w_0|\{w_k\}_{k<0}]$ – вектор ошибки предсказания на установившемся режиме, $\mathbf{A}(w)$ – анизотропия случайного вектора w, определяемая как

$$\mathbf{A}(w) = \frac{n_w}{2}\ln\left(\frac{2\pi\mathrm{e}}{n_w}\mathbf{E}[|w|^2]\right) - \mathbf{h}(w),$$

где дифференциальная энтропия $\mathbf{h}(w)$ случайного вектора w с плотностью распределения вероятности $f : \mathbb{R}^{n_w} \to \mathbb{R}_+s$ определяется как

$$\mathbf{h}(w) = -\mathbf{E}[\ln(f(w))].$$

Пусть теперь $\{z_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ – последовательность линейным образом зависящих от $\{w_j\}_{j\leqslant k}$ векторов, порожденных системой F, т.е. $Z = F * W$. Предположим, что передаточная функция системы F является аналитической внутри единичного диска на комплексной плоскости и имеет конечную $\mathcal{H}_\infty$-норму

$$\|F\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{C}:\ |z|<1} \sigma_{\max}(F(z)).$$

Тогда для системы F можно ввести анизотропийную норму как [2]

$$\|F\|_a = \sup_{G\colon V \to W,\, \overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a} \frac{\|FG\|_2}{\|G\|_2},$$

где W – стационарная гауссовская последовательность, образованная пропусканием стандартного гауссовского белого шума V через стационарную линейную систему G с передаточной функцией $G(z)$, аналитической внутри единичного диска на комплексной плоскости и имеющей конечную $\mathcal{H}_2$-норму

$$\|G\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{tr}(\widehat{G}(\omega)(\widehat{G}(\omega))^*) d\omega}.$$

3. Постановка задачи

Рассмотрим линейную дискретную стационарную систему F, заданную уравнениями

(1)
$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + B_u u_k + B_w w_k, \\ z_k \quad\ \ = Cx_k, \end{cases}$$

где $k = 0, 1, \ldots$ – индекс времени, x_k – n_x-мерный вектор состояния ($x_0 = 0$), u_k – n_u-мерный вектор управления, w_k – n_w-мерный вектор внешних возмущений, z_k – n_z-мерный вектор, подлежащий регулированию. Все матрицы A, B_u, B_w, C системы (1) имеют подходящие размерности и являются известными, пара матриц (A, B_w) является управляемой, а пара (A, B_u) – стабилизирумой. Без потери общности будем считать, что $n_u \leqslant n_x$, $\mathrm{rank}\,(C) = n_z \leqslant n_x$. Предполагается, что на систему (1) действует случайное внешнее возмущение, представленное последовательностью $W = \{w_k\}_{k \geqslant 0}$ с неопределенностью, связанной с неточно известными стохастическими характеристиками векторов w_k, количественное описание которой выражается в терминах ограничения сверху на среднюю анизотропию последовательности W некоторым числом $a > 0$: $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant a$. Пусть закон управления имеет вид статической обратной связи по состоянию

(2)
$$u_k = Kx_k,$$

где матрица $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ регулятора подлежит определению. Система F_{cl}, полученная замыканием системы (1) регулятором (2), имеет вид

(3)
$$\begin{cases} x_{k+1} = A_{cl} x_k + B_{cl} w_k, \\ z_k \quad\ \ = C_{cl} x_k, \end{cases}$$

где использованы обозначения $A_{cl} = A + B_u K$, $B_{cl} = B_w$, $C_{cl} = C$.

Стандартная задача синтеза γ-оптимального анизотропийного регулятора в форме статической обратной связи по состоянию для системы (1) состоит в нахождении такой матрицы K закона управления (2), что соответствующий регулятор является стабилизирующим, а анизотропийная норма замкнутой им системы (3) ограничена сверху минимально возможным числом $\gamma_{\min}$, т.е. выполнены условия

$$\rho(A + B_u K) < 1, \quad \|F_{cl}\|_a \leqslant \gamma, \quad \gamma \to \min\,. \tag{4}$$

Данная задача, в том числе в более общих формулировках, нашла решение в [4, 11, 12]. Отличие приведенной постановки от субоптимальной состоит в минимизации верхней границы γ: так, если γ – фиксированное число ($\gamma \geqslant \gamma_{\min}$), то имеет место субоптимальная постановка.

Задача 1. *Параметризовать множество решений стандартных задач синтеза субоптимального и γ-оптимального анизотропийных регуляторов в форме статической обратной связи по состоянию.*

Случай обратной связи по состоянию (4) выбран из простоты. Для случаев статической и динамической обратных связей по выходу при выполнении ряда дополнительных требований к системе также возможно проведение параметризации.

Практическая значимость поставленной задачи состоит в нескольких аспектах. Во-первых, решение задачи параметризации регуляторов позволяет сформировать представление об их множестве, что может оказаться полезным при исследовании возможности внесения в задачу дополнительных критериев, не приводящих к пустому множеству решений. Во-вторых, при изменении параметров задачи (например, представлений о средней анизотропии внешнего возмущения) в реальном времени стандартный путь решения состоит в пересчете регулятора, и нет гарантии, что в результате этой операции на относительно малые изменения параметров произойдет относительно малое изменение коэффициентов регулятора. Иными словами, так как задача поиска коэффициентов регулятора в классическом подходе решается численно и найденное решение может существенно отличаться от предыдущего, при переключении с одного регулятора на другой могут произойти неблагоприятные переходные процессы. Среди прочих аспектов можно привести, например, важность учета ошибок округления, которые не могут быть учтены классическим образом, но для которых можно получить соответствующие результаты в рамках решения задачи параметризации.

4. Параметризация субоптимальных анизотропийных регуляторов в форме статической обратной связи по состоянию

Как было отмечено, задача синтеза γ-оптимального анизотропийного регулятора уже решена. Ее решение (с точностью до некоторых переобозначений) описывается следующей теоремой [12, Теорема 1].

Теорема 1. При заданных $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$ для того, чтобы для системы (1) существовал стабилизирующий статический регулятор по состоянию (2), гарантирующий выполнение ограниченности анизотропийной нормы замкнутой системы (3) числом γ, достаточно, чтобы система неравенств

$$P \succ 0, \quad \Psi \succ 0, \quad \eta^2 \geqslant \gamma^2, \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix} P & \star & \star & \star \\ 0_{n_w \times n_x} & \eta^2 I_{n_w} & \star & \star \\ AP + B_u \widetilde{K} & B_w & P & \star \\ CP & 0_{n_z \times n_w} & 0_{n_z \times n_x} & I_{n_z} \end{bmatrix} \succ 0, \tag{6}$$

$$\begin{bmatrix} \eta^2 I_{n_w} - \Psi & \star \\ B_w & P \end{bmatrix} \succ 0, \tag{7}$$

$$(\det(\Psi))^{1/n_w} - e^{2a/n_w}(\eta^2 - \gamma^2) \geqslant 0 \tag{8}$$

была разрешима относительно скалярной переменной η^2 и вещественных матриц $P \succ 0_{n_x \times n_x}$, $\Psi \succ 0_{n_w \times n_w}$ и $\widetilde{K} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$. В этом случае матрица статического регулятора определяется выражением $K = \widetilde{K} P^{-1}$.

Замечание 1. Если в рамках теоремы 1 считать γ минимизируемой переменной, то получим формулировку (4) для нахождения γ-оптимального анизотропийного регулятора по состоянию.

Замечание 2. Применение численного алгоритма на основе условий теоремы 1 позволяет находить субоптимальные анизотропийные регуляторы, но не оставляет свободы выбора – результатом работы алгоритма является фиксированная точка K в пространстве матриц $\mathbb{R}^{n_u \times n_x}$.

Замечание 2 представляет собой одну из сторон мотивации проводимого исследования. Из множества регуляторов, являющихся решением некоторой задачи, выбор конкретного может быть обусловлен целым рядом вспомогательных условий, не внесенных в исходную постановку задачи, и пренебрежение свободой данного выбора (передача “права выбора” вычислительному устройству) может привести к тому, что ряд второстепенных для задачи характеристик регулятора или замкнутой системы будут выбраны не наилучшим образом. Кроме того, при внесении дополнительного условия в задачу придется заново решать ее вместо того, чтобы из уже найденного множества регуляторов выбрать подходящий. Наконец, описание границ всего множества регуляторов является более цельной математической задачей, чем нахождение какого-то одного решения.

Для формулировки основного результата понадобится следующее вспомогательное утверждение – один из вариантов леммы Финслера [13, Теорема 2.3.12] (приводится с переобозначениями, согласованными с используемыми в настоящей работе).

Теорема 2. Пусть известны матрицы $\Theta \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\Pi \in \mathbb{R}^{k\times n}$. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *существует матрица* $\widetilde{K}$, *такая что*

$$\Theta + \Lambda\widetilde{K}\Pi + (\Lambda\widetilde{K}\Pi)^{\mathrm{T}} \succ 0; \tag{9}$$

2) *выполнены следующие два условия:*

$$\Lambda^{\perp}\Theta\Lambda^{\perp\mathrm{T}} \succ 0 \quad \text{или} \quad \Lambda\Lambda^{\mathrm{T}} \succ 0, \tag{10}$$

$$\Pi^{\mathrm{T}\perp}\Theta\Pi^{\mathrm{T}\perp\mathrm{T}} \succ 0 \quad \text{или} \quad \Pi^{\mathrm{T}}\Pi \succ 0. \tag{11}$$

Предположим, что утверждения выше выполнены. Пусть матрицы Λ *и* Π *допускают факторизации* $\Lambda = \Lambda_L\Lambda_R$ *и* $\Pi = \Pi_L\Pi_R$, *где* Λ_L, Λ_R, Π_L, Π_R – *произвольные матрицы полного ранга. Тогда все матрицы-решения* $\widetilde{K}$ *неравенства* (9) *имеют вид*

$$\widetilde{K} = \Lambda_R^{+}X\Pi_L^{+} + Z - \Lambda_R^{+}\Lambda_R Z\Pi_L\Pi_L^{+}, \tag{12}$$

где Z – *произвольная матрица, и*

$$X = T\Lambda_L^{\mathrm{T}}\Phi\Pi_R^{\mathrm{T}}(\Pi_R\Phi\Pi_R^{\mathrm{T}})^{-1} + S^{1/2}Y(\Pi_R\Phi\Pi_R^{\mathrm{T}})^{-1/2}, \tag{13}$$

$$S = T - T\Lambda_L^{\mathrm{T}}(\Phi - \Phi\Pi_R^{\mathrm{T}}(\Pi_R\Phi\Pi_R^{\mathrm{T}})^{-1}\Pi_R\Phi)\Lambda_L T, \tag{14}$$

где $Y : \|Y\| < 1$ – *произвольная матрица с ограниченной спектральной нормой, а* T – *произвольная положительно определенная матрица, такая что*

$$\Phi = (\Theta + \Lambda_L T\Lambda_L^{\mathrm{T}})^{-1} \succ 0. \tag{15}$$

Содержание данной теоремы комментировать не будем. Заметим лишь, что при ее применении в задачах управления помимо степеней свободы, связанных с произволом выбора матриц Z, Y и T, будет иметь место еще одна степень свободы, обусловленная принимаемым матрицей Θ значением, зависящим, вообще говоря, от других переменных. Подробнее об этом будет изложено после основного результата, представленного ниже.

4.1. Основной результат

Теорема 3. Пусть задана система (1) *с матрицей* B_u, *причем последняя допускает факторизацию* $B_u = B_{uL}B_{uR}$ *с матрицами* $B_{uL} \in \mathbb{R}^{n_x\times r}$ *и* $B_{uR} \in \mathbb{R}^{r\times n_u}$ *полного ранга, где* $r = \operatorname{rank}(B_u)$, *а пары матриц* (A, B_w) *и* (A, B_u) *являются управляемой и стабилизирумой соответственно. Пусть* *также выбраны два числа $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$. Тогда для существования стабилизирующего регулятора в форме статической обратной связи по состоянию (2), обеспечивающего выполнение требования $|\!|\!| F_{cl} |\!|\!|_a \leqslant \gamma$, достаточно, чтобы система неравенств*

$$\begin{bmatrix} P & \star & \star & \star \\ 0_{n_w \times n_x} & \eta^2 I_{n_w} & \star & \star \\ B_u^{\perp} AP & B_u^{\perp} B_w & B_u^{\perp} P B_u^{\perp \mathrm{T}} & \star \\ CP & 0_{n_z \times n_w} & 0_{n_z \times (n_u - r)} & I_{n_z} \end{bmatrix} \succ 0, \tag{16}$$

$$\begin{bmatrix} \eta^2 I_{n_w} - \Psi & \star \\ B_w & P \end{bmatrix} \succ 0, \tag{17}$$

$$(\det(\Psi))^{1/n_w} - e^{2a/n_w}(\eta^2 - \gamma^2) \geqslant 0, \tag{18}$$

$$P \succ 0, \quad \Psi \succ 0, \quad \eta^2 \geqslant \gamma^2 \tag{19}$$

была разрешима относительно переменных P, Ψ, η^2.

При выполнении утверждений теоремы все матрицы K стабилизирующего регулятора (2), гарантирующего $|\!|\!| F_{cl} |\!|\!|_a \leqslant \gamma$, исчерпываются представлением $K = \widetilde{K} P^{-1}$, где

$$\widetilde{K} = B_{uR}^{+} X + (I_{n_u} - B_{uR}^{+} B_{uR}) Z, \tag{20}$$

$$X = T B_{uL}^{\mathrm{T}} \Phi_{31} \Phi_{11}^{-1} + S^{1/2} Y \Phi_{11}^{-1/2}, \tag{21}$$

$$S = T - T B_{uL}^{\mathrm{T}} \big(\Phi_{33} - \Phi_{31} \Phi_{11}^{-1} \Phi_{31}^{\mathrm{T}} \big) B_{uL} T, \tag{22}$$

$$\Phi = \operatorname*{block}_{i,j=\overline{1,4}}(\Phi_{ij}) = \begin{bmatrix} P & \star & \star & \star \\ 0_{n_w \times n_x} & \eta^2 I_{n_w} & \star & \star \\ AP & B_w & P + B_{uL} T B_{uL}^{\mathrm{T}} & \star \\ CP & 0_{n_z \times n_w} & 0_{n_z \times n_x} & I_{n_z} \end{bmatrix}^{-1}, \tag{23}$$

$Z \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ – произвольная матрица, $Y \in \mathbb{R}^{r \times n_x}$ – произвольная матрица, удовлетворяющая ограничению $\|Y\| < 1$, а $T \in \mathbb{R}^{r \times r}$ – любая положительно определенная матрица, такая что $\Phi \succ 0$.

Доказательство теоремы вынесено в Приложение.

Заметим, что выражения (16)–(19) теоремы 3 не зависят от матрицы K искомого регулятора, т.е. достаточные условия существования подходящего анизотропийного регулятора имеют замкнутую форму. Вторая часть теоремы, а именно формулы (20)–(23), описывают в явной параметрической форме все анизотропийные регуляторы, являющиеся решением поставленной задачи.

Можно показать, что все матрицы T из теоремы 3, связанные с матрицей $\Phi \succ 0$, заданной формулой (23), принадлежат конусу

$$T \succ B_{uL}^{+} \left(A(P^{-1} - C^{\mathrm{T}}C)^{-1}A^{\mathrm{T}} + \eta^{-2}B_w B_w^{\mathrm{T}} - P \right) B_{uL}^{+\mathrm{T}}, \tag{24}$$

т.е. граничное (в смысле отношения порядка $\succ$ на множестве симметричных матриц) значение T может быть найдено в явном виде. Обратим внимание также на тот факт, что помимо степеней свободы, обусловленных выбором матриц Z, Y и T, в условиях теоремы 3 неявно имеет место еще одна степень свободы, связанная с тем, какие значения в ходе решения неравенств (16)–(19) примут переменные P и η^2, от которых зависят матрицы в (20)–(23). А если в рамках теоремы 3 рассмотреть случай, когда B_u – матрица полного ранга, т.е. $r = n_u$, то условие (16) примет упрощенный вид

$$\begin{bmatrix} P & \star \\ CP & I_{n_z} \end{bmatrix} \succ 0.$$

Замечание 3. Если в рамках теоремы 3 число γ не задано, а является одной из переменных, и решается задача минимизации верхней границы анизотропийной нормы

$$\gamma^2 \to \min_{P \succ 0, \Psi \succ 0, \eta^2 \geqslant \gamma^2 > 0} \quad \text{при условиях (16)–(19)},$$

то имеем формулировку для параметризации γ-оптимального анизотропийного регулятора по состоянию.

Отметим еще раз, что полученная параметризация зависит от найденных на этапе решения системы неравенств (16)–(19) переменных P, Ψ, η^2 (а в рамках замечания 3 – еще и переменной γ^2). Получение параметризации этой системы неравенств является действительно актуальной задачей, но затруднительно из-за наличия условия (18), описывающего связь переменных η^2 и γ^2 со спектром матрицы Ψ.

5. Пример

В академических целях продемонстрируем полученные результаты на простом примере. Для этого рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + B_u u_k + w_k, \\ z_k = x_k \end{cases}$$

с матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}98 & 0{,}2 & 0{,}02 & 0 \\ -0{,}2 & 0{,}98 & 0{,}2 & 0{,}02 \\ 0{,}02 & 0 & 0{,}98 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}02 & -0{,}2 & 0{,}98 \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} 0{,}02 \\ 0{,}2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Будем считать, что внешнее возмущение $\{w_k\}_{k\geqslant 0}$, действующее на систему, принадлежит классу последовательностей случайных векторов с ограниченной числом $a = 0{,}1$ средней анизотропией: $\overline{\mathbf{A}}(W) \leqslant 0{,}1$. Требуется описать параметрически множество решений задачи построения стабилизирующего закона управления, обеспечивающего выполнение требования $|\!|\!|F|\!|\!|_a \leqslant \gamma$. Данную задачу рассмотрим в двух случаях: в первом случае будем считать, что γ – заданное число, которое равно $\gamma = 6$, во втором – что стоит задача синтеза γ-оптимального анизотропийного регулятора, т.е. $\gamma \to \min$. Для сравнительного анализа также будем приводить решение поставленных задач в соответствии с теоремой 1 без проведения параметризации. Расчеты проводились в Matlab, где использовался пакет Yalmip для решения задач выпуклого программирования. Альтернативно, может быть использована система решения задач выпуклого программирования CVX.

В ходе решения в соответствии с формулами теоремы 1 одна из матриц субоптимального анизотропийного регулятора, найденная численными методами при $\gamma = 6$, имеет вид (здесь и далее для различения матриц регуляторов и прочих переменных им присваивается верхний порядковый индекс, заключенный в скобки)

$$K^{(1)} \approx [-7{,}14 \quad -5{,}72 \quad 1{,}95 \quad -5{,}01],$$

а матрица γ-оптимального анизотропийного регулятора, полученного тем же методом, но в оптимальной постановке (см. замечание 1), равна

$$K^{(2)} \approx [-12{,}04 \quad -6{,}23 \quad 3{,}75 \quad -9{,}73]. \tag{25}$$

Для сравнения, значения анизотропийных норм систем, замкнутых соответствующими регуляторами, оказались равными

$$|\!|\!|F_{cl}(K^{(1)})|\!|\!|_{0,1} \approx 5{,}83, \quad |\!|\!|F_{cl}(K^{(2)})|\!|\!|_{0,1} \approx 5{,}39.$$

Далее поочередно приводится решение задач параметризации субоптимальных и γ-оптимальных анизотропийных регуляторов по состоянию, проведенных в соответствии с содержанием теоремы 3 и замечания 3. Первую из них приведем в достаточной степени подробно, для второй лишь дадим окончательный результат.

Найденным решением системы неравенств (16)–(19) относительно переменных $P \succ 0$, $\Psi \succ 0$, $\eta^2 \geqslant \gamma^2$ являются матрицы

$$P^{(3)} \approx \begin{bmatrix} 0{,}13 & \star & \star & \star \\ -0{,}09 & 0{,}93 & \star & \star \\ 0{,}05 & 0{,}01 & 0{,}07 & \star \\ -0{,}07 & -0{,}01 & -0{,}03 & 0{,}07 \end{bmatrix}, \quad \Psi^{(3)} \approx \begin{bmatrix} 213{,}52 & \star & \star & \star \\ -2{,}17 & 233{,}12 & \star & \star \\ 4{,}69 & 0{,}57 & 215{,}96 & \star \\ -19{,}68 & -2{,}1 & -3{,}7 & 197{,}32 \end{bmatrix}$$

и число $\eta^{(3)} \approx 15{,}37$. Так как некоторые из обращаемых матриц в правой части неравенства (24) являются плохо обусловленными, определение порогового значения T с высокой точностью может оказаться достаточно трудоемким. Во избежание проблем вычисления порогового значения матрицы T

в этом примере было задано для него завышенное значение: $T^{(3)} \geqslant 410$. Нужные блоки Φ_{ij} матрицы Φ будут получены подстановкой в (23) выбранной матрицы T и найденных P и η. Отметим, что в силу $B_{uR} = 1$, переменная Z в параметризации участвовать не будет, т.е. $\widetilde{K} = X$, при этом сама матрица регулятора, заданная выражением (20) и заменой $K = \widetilde{K}P^{-1}$, примет вид $K = XP^{-1}$. Поскольку визуализировать предлагаемую в рамках теоремы 3 параметризацию сложно даже в рассматриваемом (весьма простом) примере, то ограничимся лишь случаем вариации матрицы T. Для этого зафиксируем матрицу $\overline{Y} = [0{,}999 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ и рассмотрим случай $Y^{(3)} = \overline{Y}$, случай противоположной по знаку матрицы (т.е. $Y^{(3)} = -\overline{Y}$) и случай нулевой матрицы $Y^{(3)} = 0$ с целью формирования представления об области допустимых значений коэффициентов матрицы регулятора. Полученные зависимости коэффициентов регулятора от параметра T представлены на рисунке. Для точек «а» ($T^{(3)} = 410$, $Y^{(3)} = \overline{Y}$), «б» ($T^{(3)} = 820$, $Y^{(3)} = -\overline{Y}$) и «в» ($T^{(3)} = 39\,000$, $Y^{(3)} = 0$) приведем значения коэффициентов соответствующих регуляторов:

$$
\begin{aligned}
K^{(3,\text{а})} &\approx [-11{,}79 \quad -6{,}14 \quad 3{,}79 \quad -10{,}19],\\
K^{(3,\text{б})} &\approx [-15{,}23 \quad -6{,}47 \quad 4{,}23 \quad -13{,}17],\\
K^{(3,\text{в})} &\approx [-13{,}6 \quad -6{,}39 \quad 4{,}11 \quad -11{,}81].
\end{aligned}
$$

Значения анизотропийных норм замкнутых ими систем равны соответственно

$$
|\!|\!| F_{cl}(K^{(3,\text{а})}) |\!|\!|_{0,1} \approx 5{,}4, \quad |\!|\!| F_{cl}(K^{(3,\text{б})}) |\!|\!|_{0,1} \approx 5{,}45, \quad |\!|\!| F_{cl}(K^{(3,\text{в})}) |\!|\!|_{0,1} \approx 5{,}41,
$$

что удовлетворяет исходному требованию $|\!|\!| F_{cl} |\!|\!|_{0,1} \leqslant 6$.

Теперь рассмотрим решение задачи параметризации γ-оптимального анизотропийного регулятора по состоянию, как было описано в замечании 3. Для этого случая слагаемое $S^{1/2}Y\Phi_{11}^{-1/2}$ из (21) близко к нулю, т.е. регулятор «теряет» зависимость от матрицы Y, поэтому на рисунке приведена лишь одна линия, отражающая прямую зависимость $K^{(4)}$ от матрицы T. В выбранной точке «г», соответствующей значению $T^{(4)} = 4000$, матрица γ-оптимального анизотропийного регулятора имеет вид

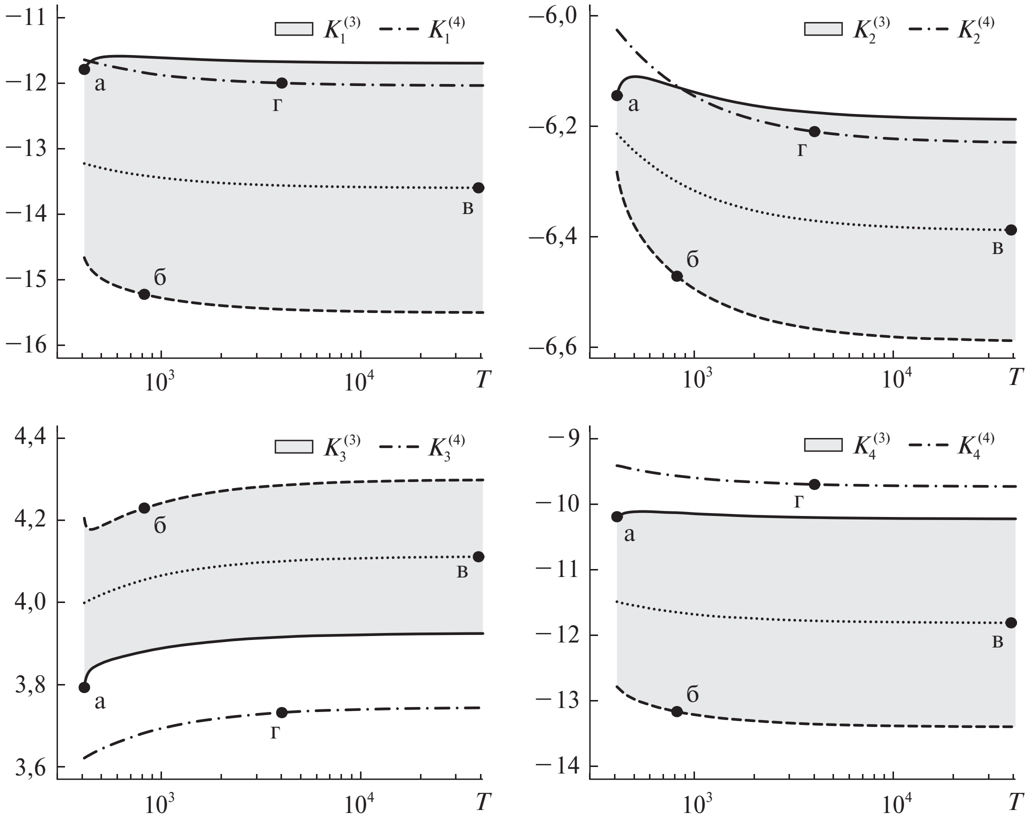
$$
K^{(4,\text{г})} \approx [-12 \quad -6{,}21 \quad 3{,}73 \quad -9,7], \tag{26}
$$

а значение анизотропийной нормы замкнутой этим регулятором системы равно

$$
|\!|\!| F_{cl}(K^{(4,\text{г})}) |\!|\!|_{0.1} \approx 5{,}39.
$$

Данная величина согласуется с полученным ранее значением для γ-оптимального регулятора $K^{(2)}$, как (с определенной точностью) и коэффициенты матриц самих регуляторов, что следует из сравнения (25) и (26). Единственным отличием является наличие возможности выбора коэффициентов регулятора из некоторого допустимого диапазона значений.

В заключении примера имеет смысл еще раз подчеркнуть, что закрашенная на рисунке область соответствует всем субоптимальным анизотропийным



Зависимость коэффициентов субоптимального и γ-оптимального анизотропийных регуляторов в примере из раздела 5 от параметра T (в логарифмическом масштабе). Сплошная линия соответствует случаю $Y = Y^{(3)}$; пунктирная линия – случаю $Y = -Y^{(3)}$; линия из точек – случаю $Y = 0$; закрашенная область отражает все возможные коэффициенты матриц регулятора для промежуточного случая $Y = (2\lambda - 1)Y^{(3)}$ при произвольном $\lambda \in [0; 1]$; штрихпунктирная линия отражает зависимость γ-оптимального регулятора $K^{(4)}$ от T. Все линии и закрашенная область являются неограниченными справа (в направлении роста T). Точками «а», «б», «в», «г» обозначены коэффициенты матриц регуляторов, рассмотренных в примере.

регуляторам, порожденным найденными на первом шаге решения матрицами $P^{(3)}$, $\Psi^{(3)}$ и числом $\eta^{(3)}$. Для другого набора решений (P, Ψ, η) это множество будет отличаться от приведенного на рисунке, а объединение *всех* таких множеств и даст *все* множество субпотимальных анизотропийных регуляторов для выбранных значений $a \geqslant 0$ и $\gamma > 0$. Это, в частности, служит объяснением того, почему линия, соответствующая γ-оптимальному случаю (см. штрихпунктирную линию на рисунке), при некоторых значениях T находится вне закрашенной области, хотя γ-оптимальные анизотропийные регуляторы при фиксированном $a \geqslant 0$ принадлежат всем возможным (но непустым) множествам субоптимальных регуляторов для того же числа a.

6. Заключение

В статье предложен подход к параметризации субоптимальных и γ-оптимальных анизотропийных регуляторов в форме статической обратной связи по состоянию для линейных дискретных стационарных систем со случайным внешним возмущением с ограниченной средней анизотропией. Указана связь решения данной задачи с решением задачи синтеза субоптимальных и γ-оптимальных анизотропийных регуляторов методами выпуклой оптимизации без проведения параметризации.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 3. Доказательство теоремы основано на «скрещивании» теорем 1 и 2 и применении одного полезного свойства. В условиях теоремы 1 неравенство (6) представимо в виде (9), где

$$\Theta = \begin{bmatrix} P & \star & \star & \star \\ 0_{n_w \times n_x} & \eta^2 I_{n_w} & \star & \star \\ AP & B_w & P & \star \\ CP & 0_{n_z \times n_w} & 0_{n_z \times n_x} & I_{n_z} \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0_{n_x \times n_u} \\ 0_{n_w \times n_u} \\ B_u \\ 0_{n_z \times n_u} \end{bmatrix}, \quad \Pi^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ 0_{n_w \times n_x} \\ 0_{n_x \times n_x} \\ 0_{n_z \times n_x} \end{bmatrix}.$$

Так как теорема 2 дает необходимые и достаточные условия существования решения неравенства (9), его аналог (6) может быть заменен на соответствующую неравенствам (10), (11) пару неравенств. Первое из них, аналогичное (10), примет вид (16). Второе неравенство, аналогичное (11), примет вид

$$\begin{bmatrix} \eta^2 I_{n_w} & \star & \star \\ B_w & P & \star \\ 0_{n_z \times n_w} & 0_{n_z \times n_x} & I_{n_z} \end{bmatrix} \succ 0,$$

что позволяет не учитывать его ввиду требования выполнения (7) для положительно определенной матрицы $\Psi \succ 0_{n_w \times n_w}$.

Поскольку добавление ограничений в систему уже заданных условий может привести лишь к сужению соответствующего множества решений, добавление к (10), (11) неравенств (5), (7), (8) способно лишь сузить множество решений в терминах переменных P, Ψ, η^2, но не изменить того факта, что параметризация решений, приведенная во второй части теоремы 2, остается верной. Действительно, все матрицы $\widetilde{K}$, заданные через (12), зависят от Θ ввиду (15) – именно эта зависимость (наряду с ограничениями на выбираемые матрицы Y и T) и гарантирует выполнение исходного неравенства (9).

Аккуратно проводя необходимые выкладки с учетом того, что матрица B_u допускает факторизацию $B_u = B_{uL} B_{uR}$ с матрицами полного ранга B_{uL} и B_{uR}, получаем, что выражения (20)–(23) являются полными аналогами выражений (12)–(15) соответственно.

В завершении доказательства обратная замена $K = \widetilde{K} P^{-1}$ мотивирована содержанием теоремы 1. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Semyonov A.V., Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P.* Stochastic approach to H_∞-optimization // Proc. 1994 33rd IEEE Conf. on Decision and Control. 1994. V. 3. P. 2249–2250.
2. *Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V.* On computing the anisotropic norm of linear discrete-time-invariant systems // IFAC Proceedings Volumes. 1996. V. 29. Is. 1. P. 3057–3062.
3. *Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V.* State-space solution to anisotropy-based stochastic H_∞-optimization problem // IFAC Proceedings Volumes. 1996. V. 29. Is. 1. P. 3816–3821.
4. *Tchaikovsky M.* Static output feedback anisotropic controller design by LMI-based approach: General and special cases // American Control Conference. 2012. P. 5208–5213.
5. *Тимин В.Н., Чайковский М.М., Курдюков А.П.* Решение задачи анизотропийной субоптимальной фильтрации методом выпуклой оптимизации // ДАН. 2012. Т. 444. № 6. С. 612–615.
6. *Тимин В.Н.* Субоптимальная анизотропийная фильтрация линейных дискретных стационарных систем // АиТ. 2013. № 11. С. 3–18.
7. *Timin V.N., Kurdyukov A.P.* Finite horizon anisotropy-based multicriteria filtering // IFAC-PapersOnLine. 2015. V. 48. Is. 14. P. 192–197.
8. *Тимин В.Н., Курдюков А.П.* Субоптимальная анизотропийная фильтрация на конечном горизонте // АиТ. 2016. № 1. С. 5–29.
9. *Чайковский М.М., Тимин В.Н.* Синтез анизотропийного субоптимального управления для линейных нестационарных систем на конечном временном интервале // АиТ. 2017. № 7. С. 39–56.
10. *Владимиров И.Г., Даймонд Ф., Клоеден П.* Анизотропийный анализ робастного качества линейных нестационарных дискретных систем на конечном временном интервале // АиТ. 2006. № 8. С. 92–111.
11. *Чайковский М.М.* Синтез субоптимального анизотропийного стохастического робастного управления методами выпуклой оптимизации. М.: ИПУ РАН: дисс. ... д-ра техн. наук: 05.13.01 // 2012. 193 с.
12. *Чайковский М.М.* Синтез анизотропийных регуляторов методами выпуклой оптимизации и полуопределенного программирования // УБС. 2013. № 42. С. 100–152.
13. *Skelton R.E., Iwasaki T., Grigoriadis K.M.* A unified algebraic approach to control design // Routledge. 1998. 304 p.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Бобцовым.

Поступила в редакцию 15.05.2025

После доработки 06.11.2025

Принята к публикации 11.11.2025