

© 2026 г. В.И. КРУЖКОВ (kruzhkov@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

**МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ТОЧЕК ВНУТРИ ОБЛАСТИ
ДОСТИЖИМОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ
МОДЕЛИ ОБЪЕКТА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА
С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ¹**

Предложен метод для нахождения реализуемых значений выходного вектора с учетом ограничений на управляющие и выходные сигналы в процессе управления. Разработанный алгоритм позволяет преодолеть вычислительные ограничения традиционных подходов при работе с моделями высокого порядка. Метод основан на последовательном анализе компонент выходного вектора сведением к задачам линейного программирования. Применение метода продемонстрировано на примере модели плазмы сферического токамака Глобус-М2, где показана возможность определения достижимых конфигураций плазмы при ограничениях на напряжения и токи в обмотках управления.

Ключевые слова: линейные системы, цифровые системы, системы с переменными параметрами, область достижимости, плазма, токамак.

DOI: 10.7868/S2413977726070018

1. Введение

Проблема определения областей достижимости (ОД) для динамических систем занимает центральное место в теории управления [1–3]. Классические подходы к определению ОД для систем с управлениями, принадлежащими заданной области, описанные в [1, 4–8], сталкиваются с существенными вычислительными трудностями при анализе моделей систем высокого порядка, характерных для современных приложений, включая системы управления плазмой в токамаках. Основные ограничения традиционных методов связаны с экспоненциальным ростом вычислительной сложности, необходимостью построения выпуклых оболочек в пространствах высокой размерности, ограниченной применимостью к системам с переменными параметрами и ограничениями на выходные сигналы, что делает точное определение ОД вычислительно сложным для моделей объектов высокого порядка. В данной работе предлагается итеративный подход, позволяющий эффективно находить точки внутри ОД для систем с десятками переменных состояния, учитывать

¹ Работа выполнена при поддержке РНФ (грант № 21-79-20180-П), <https://rscf.ru/project/21-79-20180/>

параметрические изменения модели, получать практически полезные оценки для инженерных приложений.

Метод вычисления множества достижимости в постановке задачи, описанной далее в (6), предложен в [4–6], где показано, что с помощью динамического программирования многошаговая оценка ОД может быть сведена к рекуррентному вычислению одношаговых оценок. Последние, в свою очередь, сводятся к построению выпуклой оболочки множества точек в пространстве размерности n , соответствующей размерности вектора состояний.

В [4–6] для построения выпуклой оболочки используются модификации симплекс-метода. Альтернативный подход основан на разделении пространства, аналогично алгоритму быстрой сортировки [9]. Хотя этот метод не имеет принципиальных ограничений на класс моделей, он требует значительных вычислительных ресурсов [4] при высокой размерности вектора состояний. Это происходит из-за того, что количество гиперграней d -политопы с N вершинами может достигать [9, 10]:

$$(1) \quad F(d, N) = \begin{cases} \frac{2N}{d} C_{N-d/2-1}^{d/2-1}, & \text{для четных } d, \\ 2C_{N-\lfloor d/2 \rfloor - 1}^{\lfloor d/2 \rfloor - 1}, & \text{для нечетных } d, \end{cases}$$

где $\lfloor \cdot \rfloor$ – округление вниз, $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сочетаний. Таким образом, $F(d, N) = O(N^{\lfloor d/2 \rfloor})$, что свидетельствует об экспоненциальном росте сложности с увеличением числа вершин.

Метод [1, 7, 8] основывается на аппроксимации ОД множествами простой структуры, а именно эллипсоидами. Такое описание эффективно при малых размерностях фазового пространства ($n = 2, 3$), но при больших размерностях фазового пространства этот способ трудоемок и при этом дает весьма неполное представление о достижимом множестве [1, 7, 11].

Такая вычислительная сложность делает непрacticalным применение алгоритма для моделей с десятками переменных состояния, включая модели токамаков и их систем управления [12–14]. В данной работе предложен подход, позволяющий преодолеть это ограничение путем последовательного оценивания ОД по компонентам выходного вектора с помощью симплекс-метода для решения задачи линейного программирования [15–17]. Хотя симплекс-метод в худшем случае имеет экспоненциальную сложность, на практике он демонстрирует полиномиальную сходимость в среднем [17]. Ценой повышения эффективности является получение не полной информации об ОД, а лишь ее сечений. Однако данный метод позволяет находить достижимые точки при заданных ограничениях на управление.

В [18, 19] применен другой подход, состоящий из двух идей: оценка области достижимости в установившемся режиме и разделение многомерной ОД на верхнюю и нижнюю оценки. Методика, основанная на рассмотрении установившегося режима, применима к стационарным и квазистационарным объектам, в которых характерное время изменения параметров на порядки

выше, чем характерное время переходных процессов. Подход разделения ОД на верхнюю и нижнюю оценки нагляден и эффективен для многомерных объектов. Верхняя оценка ОД описана около реальной области достижимости, а нижняя – вписана. Таким образом, все точки внутри нижней оценки достижимы, а никакие точки вне верхней – нет. Однако в случае сильной связи между каналами и несимметричных ограничений по управлению и/или начальным состояниям такой подход приводит к расширению «серой зоны» между верхней и нижней оценками для точек, про которые нельзя сказать, достижимы они или нет. Это проиллюстрировано в разделе 4 на рис. 1.

Далее в разделе 2 приводится постановка задачи. В разделе 3 описаны предварительные вычисления, позволяющие получить матричную связь между выходами системы, зная входы и начальные условия. В разделе 4 приводится последовательная верхняя оценка области достижимости на основе предыдущих результатов и сравнение последовательной оценки с верхней и нижней оценками из [18, 19]. В разделе 5 применена последовательная оценка для модельного примера, показано, что результаты согласуются с результатами применения метода [4–6]. В разделе 6 найдена динамика областей достижимости по форме плазмы для моделей токамака Глобус-М2 с переменными параметрами и проверка этих результатов в численных экспериментах. В Заключение приводятся основные итоги работы.

2. Постановка задачи

Рассмотрим дискретную модель объекта в пространстве состояний размерности n , у которой p входов и две группы выходов размерности m и r , с переменными параметрами:

$$(2) \quad \begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k, \\ y_k = C_k x_k + D_k u_k, \\ \tilde{y}_k = \tilde{C}_k x_k + \tilde{D}_k u_k, \end{cases}$$

где $k \in [1, T]$, матрицы $A_k, B_k, C_k, \tilde{C}_k, D_k, \tilde{D}_k$ имеют соответствующие размерности, x_k – вектор состояний, u_k – вектор управления, y_k и \tilde{y}_k – выходные векторы. Рассматриваются ограничения следующего вида:

- на вектор начальных состояний

$$(3) \quad X_1 = \left\{ x : x \in \mathbb{R}^n, x_{\min}^{(i)} \leq x^{(i)} \leq x_{\max}^{(i)}, i \in [1, n] \right\}, \quad x_1 \in X_1;$$

- на управления на каждом шаге

$$(4) \quad P = \left\{ u : u \in \mathbb{R}^p, u_{\min}^{(i)} \leq u^{(i)} \leq u_{\max}^{(i)}, i \in [1, p] \right\}, \quad u_k \in P;$$

- на вторую группу выходных векторов на каждом шаге

$$(5) \quad F = \left\{ \tilde{y} : \tilde{y} \in \mathbb{R}^r, \tilde{y}_{\min}^{(i)} \leq \tilde{y}^{(i)} \leq \tilde{y}_{\max}^{(i)}, i \in [1, r] \right\}, \quad \tilde{y}_k \in F.$$

Верхний индекс $x^{(i)}$ означает i -й элемент вектора x .

Областью достижимости состояний в системе (2) с ограничениями (3), (4), (5) на конец T -го шага аналогично [2–4] будем называть множество

$$(6) \quad G(x_{\min}, x_{\max}, u_{\min}, u_{\max}, \tilde{y}_{\min}, \tilde{y}_{\max}, T) = \left\{ x_T : x_T \in \mathbb{R}^n \quad \forall k \in [1, T-1], \right. \\ \left. x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k, \tilde{y}_k = \tilde{C}_k x_k + \tilde{D}_k u_k, x_1 \in X_1, u_k \in P, \tilde{y} \in F \right\}.$$

Областью достижимости выходов будем называть множество

$$(7) \quad Y(x_{\min}, x_{\max}, u_{\min}, u_{\max}, \tilde{y}_{\min}, \tilde{y}_{\max}, T) = \left\{ y_T : y_T \in \mathbb{R}^m, \right. \\ \left. y_T = C_T x_T + D_T u_T, x_T \in G(x_{\min}, x_{\max}, u_{\min}, u_{\max}, \tilde{y}_{\min}, \tilde{y}_{\max}, T), u_T \in P \right\}.$$

В [4] показано, что множество (6) при ограничениях вида (3, 4) представляет собой выпуклый многогранник с конечным числом вершин. Проводя аналогичные рассуждения можно показать, что и (7) при ограничениях такого же вида – также выпуклый многогранник с конечным числом вершин.

3. Получение матричной связи вход–выход

Найдем матричное соотношение между векторами начальных состояний x_1 , управляющих воздействий u_i и вектором состояний на k -м шаге для модели (2). Поскольку $x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k$, то вектор состояний может быть вычислен согласно формуле:

$$(8) \quad \begin{aligned} x_2 &= A_1 x_1 + B_1 u_1, \\ x_3 &= A_2 x_2 + B_2 u_2 = A_2(A_1 x_1 + B_1 u_1) + B_2 u_2, \\ &\dots \\ x_k &= A_{k-1} \cdots A_1 x_1 + A_{k-1} \cdots A_2 B_1 u_1 + A_{k-1} \cdots A_3 B_2 u_2 + \dots + B_{k-1} u_{k-1}. \end{aligned}$$

Используя соотношение $y_k = C_k x_k + D_k u_k$, получим значения выходного вектора

$$(9) \quad \begin{aligned} y_1 &= C_1 x_1 + D_1 u_1, \\ y_2 &= C_2 x_2 + D_2 u_2 = C_2(A_1 x_1 + B_1 u_1) + D_2 u_2, \\ &\dots \\ y_k &= C_k(A_{k-1} \cdots A_1 x_1 + A_{k-1} \cdots A_2 B_1 u_1 + \dots + B_{k-1} u_{k-1}) + D_k u_k. \end{aligned}$$

Объединяя векторы начальных значений и управляющих сигналов на всех шагах до k -го включительно в вектор-столбец

$$(10) \quad U_k = [x_1^\top, u_1^\top, \dots, u_k^\top]^\top$$

и введя обозначение

$$(11) \quad M_k = [C_k A_{k-1} \cdots A_1, C_k A_{k-1} \cdots A_2 B_1, C_k A_{k-1} \cdots A_3 B_2, \dots, C_k B_{k-1}, D_k],$$

получаем матричную связь между всеми управляющими сигналами, начальным состоянием и вектором выхода на k -м шаге:

$$(12) \quad y_k = M_k U_k,$$

где $M_k \in \mathbb{R}^{m \times (kp+n)}$, $U_k \in \mathbb{R}^{(kp+n)}$. Аналогично найдем значение второй группы выходных сигналов на протяжении шагов $[1, k]$

$$(13) \quad \begin{aligned} \tilde{y}_1 &= \tilde{C}_1 x_1 + \tilde{D}_1 u_1, \\ \tilde{y}_2 &= \tilde{C}_2 x_2 + \tilde{D}_2 u_2 = \tilde{C}_2 (A_1 x_1 + B_1 u_1) + \tilde{D}_2 u_2, \\ &\dots \\ \tilde{y}_k &= \tilde{C}_k (A_{k-1} \dots A_1 x_1 + A_{k-1} \dots A_2 B_1 u_1 + \dots + B_{k-1} u_{k-1}) + \tilde{D}_k u_k. \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$(14) \quad \begin{aligned} \tilde{M}_k &= [\tilde{C}_k A_{k-1} \dots A_1, \tilde{C}_k A_{k-1} \dots A_2 B_1, \tilde{C}_k A_{k-1} \dots A_3 B_2, \dots, \tilde{C}_k B_{k-1}, \tilde{D}_k], \\ H_k &= \begin{bmatrix} \tilde{M}_1, 0_{r \times p(k-1)} \\ \tilde{M}_2, 0_{r \times p(k-2)} \\ \dots \\ \tilde{M}_{k-1}, 0_{r \times p} \\ \tilde{M}_k \end{bmatrix}, \quad \tilde{Y}_k = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \dots \\ \tilde{y}_{k-1} \\ \tilde{y}_k \end{bmatrix} = H_k U_k, \end{aligned}$$

где $0_{r \times p}$ – нулевая матрица соответствующей размерности.

При расчетах динамики ОД удобно также рекуррентное представление формул для вычисления матричной связи:

$$(15) \quad \begin{aligned} M_1 &= D_1, \quad H_1 = \tilde{M}_1 = \tilde{D}_1, \\ M_k &= [C_k Q_k, D_k], \quad \tilde{M}_k = [\tilde{C}_k Q_k, \tilde{D}_k], \quad k \in [2, T], \\ H_k &= \begin{bmatrix} H_{k-1}, 0_{r(k-1) \times p} \\ \tilde{M}_k \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где Q_k – вспомогательная матрица, вычисляемая итерационно

$$(16) \quad \begin{aligned} Q_2 &= [A_1, B_1], \\ Q_k &= [A_{k-1} Q_{k-1}, B_{k-1}], \quad k \in [3, T]. \end{aligned}$$

4. Последовательная оценка области достижимости по каналам

Зная матричную связь (12), можно провести многомерную оценку области достижимости. Одним из способов является разделение области достижимости на верхнюю и нижнюю оценки, как показано в [18]. При таком разделении верхняя оценка представляет собой гиперпрямоугольник, описанный около

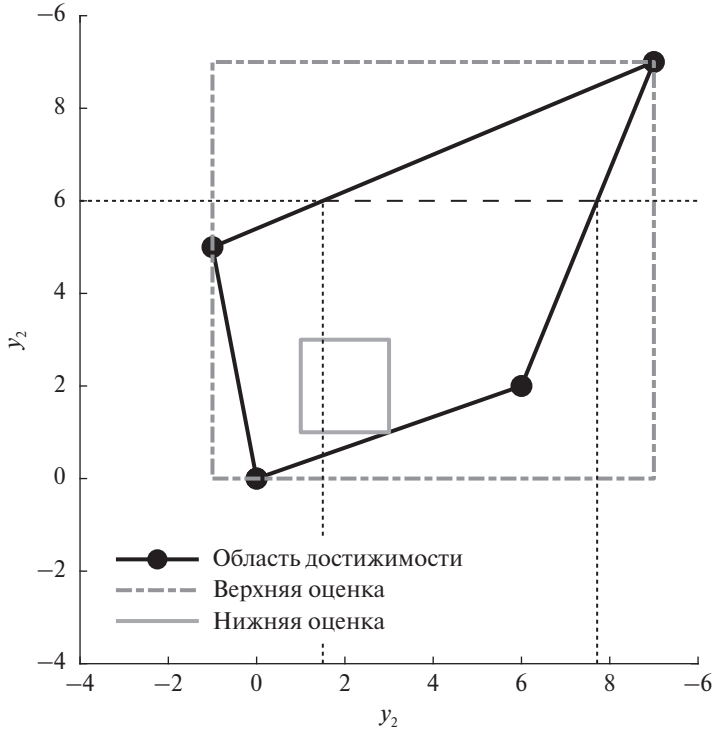


Рис. 1. Иллюстрация нижней и верхней оценок области достижимости в двумерном случае. Пунктирная линия $y_2 = 4$ показывает фиксацию значения одного из выходов, тогда штриховая линия соответствует области достижимости по координате y_1 .

множества (7), а нижняя – гиперкуб с центром в начале координат, вписанный в множество (7) в пространстве размерности m . Такой подход нагляден, однако в общем случае между верхней и нижней оценкой возникает большая разница, что приводит к существенной неопределенности при оценке области достижимости. Это наглядно показано на рис. 1 для двумерного случая.

Более информативной может быть последовательное нахождение верхней оценки с последующей фиксацией значения одного из выходов в допустимом диапазоне, после чего снова может быть найдена верхняя оценка уже с учетом фиксированного выхода. Такая процедура может быть повторена столько раз, сколько выходов в рассматриваемой системе.

Рассмотрим подробнее процесс построения последовательной оценки области достижимости. Первый шаг алгоритма поиска последовательной оценки области достижимости – нахождение верхней оценки области достижимости по всем компонентам выходного вектора. Эту оценку можно найти, решая m задач для максимума

$$(17) \quad \max \left\{ y_T^{(i)} = M_T^{(i)} U_T : \tilde{Y}_T = H_T U_T, \right. \\ \left. x_1 \in X_1, u_k \in P, \tilde{y}_k \in F, k \in [1, T], i \in [1, m] \right\}$$

и минимума

$$(18) \quad \min \left\{ y_T^{(i)} = M_T^{(i)} U_T : \tilde{Y}_T = H_T U_T, \right. \\ \left. x_1 \in X_1, u_k \in P, \tilde{y}_k \in F, k \in [1, T], i \in [1, m] \right\},$$

где $M_k^{(i)}$ – строка матрицы M_k . Задачи (17), (18) являются задачами линейного программирования, которые могут быть решены симплекс-методом [15], методом внутренней точки [20] и др. Вообще говоря, системы уравнений (17), (18) могут быть несовместными, рассмотрим условия существования решения.

Решение существует, если выполнено одно из двух утверждений: заданы ограничения только на начальное состояние и управления (3), (4), $r = 0$ или верхние и нижние ограничения на начальные условия, управления и выходы разных знаков. В первом случае системы (17), (18) всегда имеют хотя бы одно решение, поскольку нет ограничений на выходные сигналы, а хотя бы один входной сигнал, например $u_k^{(i)} = u_{\min}^{(i)}$, $i \in [1, n]$, реализуем и, как следствие, хотя бы один выходной сигнал реализуем. При наличии ограничений на часть выходов (5) и при $r \neq 0$ достаточным (но не необходимым) для существования решения условием является

$$(19) \quad \begin{cases} x_{\min}^{(i)} \leq 0 \leq x_{\max}^{(i)}, & i \in [1, n], \\ u_{\min}^{(i)} \leq 0 \leq u_{\max}^{(i)}, & i \in [1, p], \\ \tilde{y}_{\min}^{(i)} \leq 0 \leq \tilde{y}_{\max}^{(i)}, & i \in [1, r]. \end{cases}$$

Это несложно проверить подстановкой нулевого вектора в качестве управляющего сигнала на каждом шаге. Такое дополнительное условие на ограничения является естественным для линейных систем.

Таким образом, для каждой составляющей выходного вектора найден интервал, в котором она может изменяться $y_T^{(i)} \min 1 \leq y_T^{(i)} \leq y_T^{(i)} \max 1$, $i \in [1, m]$. Пользователю предлагается выбрать одну из компонент и зафиксировать ее значение. Не нарушая общности, будем считать, что зафиксировано значение первой компоненты: $y_T^{(1)} = y^{(1)}$. Рассмотрим второй шаг алгоритма. Для нахождения верхней оценки по оставшимся $(m - 1)$ -й компонентам необходимо решить следующие задачи: для максимума

$$(20) \quad \begin{cases} y_T^{(1)} = M_T^{(1)} U_T, \\ \max \left\{ y_T^{(i)} = M_T^{(i)} U_T : \tilde{Y}_T = H_T U_T, \right. \\ \left. x_1 \in X_1, u_k \in P, \tilde{y} \in F, k \in [1, T], i \in [2, m] \right\} \end{cases}$$

и для минимума

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_T^{(1)} = M_T^{(1)} U_T, \\ \min \left\{ y_T^{(i)} = M_T^{(i)} U_T : \tilde{Y}_T = H_T U_T, \right. \\ \left. x_1 \in X_1, u_k \in P, \tilde{y} \in F, k \in [1, T], i \in [2, m] \right\}. \end{array} \right.$$

Таким образом на втором шаге будут найдены новые оценки $y_T^{(i)} \min_2 \leq y_T^{(i)} \leq y_T^{(i)} \max_2, i \in [2, m]$. Продолав оставшиеся этапы алгоритма аналогично, после m шагов получим задачу

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_T = M_T U_T, \\ \tilde{Y}_T = H_T U_T, x_1 \in X_1, u_k \in P, \tilde{y}_k \in F, k \in [1, T], \end{array} \right.$$

где $y_T \in Y(x_{\min}, x_{\max}, u_{\min}, u_{\max}, \tilde{y}_{\min}, \tilde{y}_{\max}, T)$ – реализуемое значение выходного вектора. Задачи (20), (21), (22) – также задачи линейного программирования, и они имеют решение, поскольку добавляющееся на каждом шаге ограничение на выходной сигнал типа равенства является совместным с остальными уравнениями, так как оно удовлетворяет ограничениям аналогичной задачи на предыдущем шаге. Решением задачи (22) является вектор $U_T^* \in \mathbb{R}^{(kp+n)}$, содержащий начальные условия $x_1^* \in X_1$ и программное управление $u_k^* \in P, j \in [1, T]$, реализующие выход y_T .

5. Пример

Продемонстрируем работу алгоритма на примере, рассмотренном в [6]. Модель объекта:

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0,8877 & -0,012 \\ 0,0258 & 0,4215 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{18}(k-1) & \sin \frac{\pi}{36}(k-1) \\ -\sin \frac{\pi}{36}(k-1) & \cos \frac{\pi}{18}(k-1) \end{bmatrix} x_k + \\ + \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u_k; \\ y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k; \end{array} \right.$$

ограничение на управляющие воздействия и вектор начальных состояний:

$$(24) \quad |x_1^{(1)}| \leq 5, |x_1^{(2)}| \leq 5, |u^{(1)}| \leq 1, |u^{(2)}| \leq 1,5.$$

В [6] рассматривается область достижимости по состоянию, а в текущей статье – по выходу. Для возможности сравнения в модели (23) рассмотрена единичная матрица выхода. Таким образом, вектор состояний равен вектору выхода. В данном примере нет ограничений на выходные сигналы, $r = 0$.

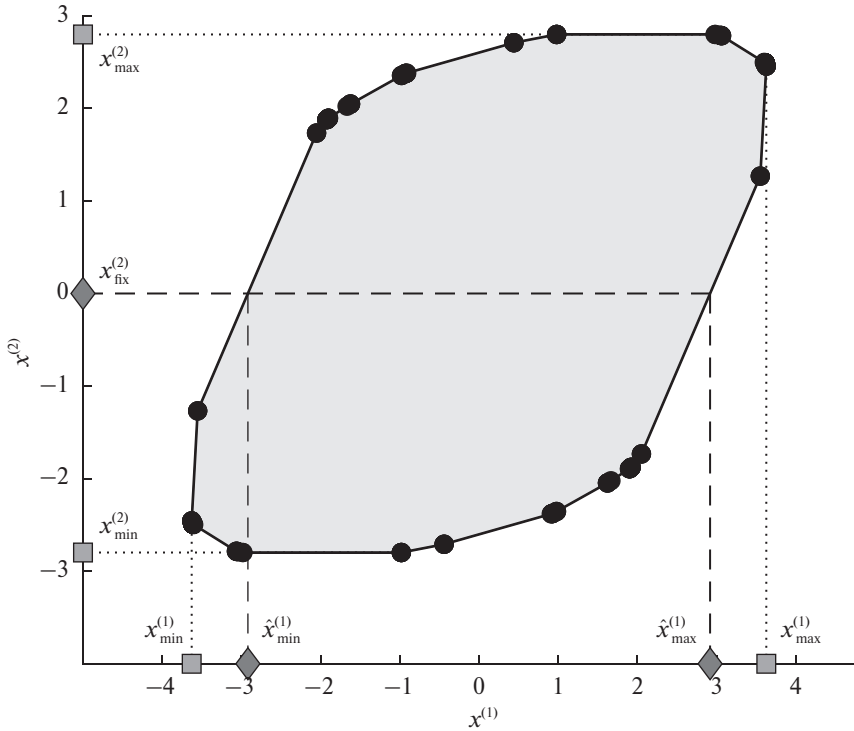


Рис. 2. Область достижимости, полученная методом [6] (темные кружки) и методом, описанным в текущей статье (квадраты и ромбы).

После семидесяти временных шагов область достижимости вектора состояний, найденная методом [4, 6], показана на рис. 2 круглыми маркерами и заливкой. Предложенный в данной статье алгоритм на первом шаге дает оценку области достижимости по каждой из составляющих: $x_{\min}^{(i)} \leq x^{(i)} \leq x_{\max}^{(i)}$, $i \in [1, 2]$, таким образом получается прямоугольник, описанный вокруг области достижимости. Первый шаг нахождения области достижимости показан на рис. 2 квадратными маркерами, $-3,6276 \leq x^{(1)} \leq 3,6276$, $-2,7982 \leq x^{(2)} \leq 2,7982$. На втором шаге пользователь фиксирует одну из составляющих вектора, например: $x^{(2)} = x_{\text{fix}}^{(2)} = 0$, а алгоритм позволяет найти изменившуюся оценку области достижимости по оставшейся составляющей вектора состояний (равного вектору выхода в данном примере). На рис. 2 второй шаг показан ромбовидными маркерами, $-2,9178 \leq x^{(1)} \leq 2,9178$. На заключительном шаге пользователь может задать корректное значение оставшейся составляющей, и алгоритм вычислит одно из возможных программных управлений, реализующих полученный вектор выхода на заданном временном шаге.

Таким образом путем последовательных приближений по каждой составляющей вектора выхода (состояний) была найдена точка внутри области достижимости и программное управление, реализующее достижение этой точки.

6. Оценка ОД для токамака Глобус-М2

Описанный выше метод получения области достижимости был применен для нахождения возможных конфигураций формы плазмы в токамаке Глобус-М2 (ФТИ им. А.Ф. Иоффе, Санкт-Петербург). Были рассмотрены линейные модели с переменными параметрами и ограничения на входные и выходные сигналы.

6.1. Экспериментальные сигналы

На токамаке Глобус-М2 [21, 22] проводится измерение напряжений и токов в управляющих обмотках, а также сигналов с петель магнитной диагностики во время плазменного разряда. Временной шаг измерений 0,1 мс. Управляющие обмотки представляют собой центральный соленоид, обмотки горизонтального и вертикального управляющих полей, две полоидальные и корректирующую обмотки. Магнитная диагностика состоит из двадцати одной петли, установленных на поверхности камеры токамака, и измеряет магнитный полоидальный поток. По сигналам с обмоток и магнитной диагностики восстановлена форма плазмы на диверторной фазе разряда с тем же временным шагом 0,1 мс [23]. Под формой плазмы подразумевается 24 зазора между стенкой-лимитером токамака и границей плазмы вдоль направлений с шагом 15° (рис. 3).

Таким образом получены с шагом 0,1 мс экспериментальные сигналы с управляющих обмоток на интервале времени 0,15–0,24 с:

$$\begin{aligned} U_{PF,k} &= [U_{HFC,k}, U_{VFC,k}, U_{CS,k}, U_{CC,k}, U_{PF1,k}, U_{PF3,k}]^\top, \\ I_{PF,k} &= [I_{HFC,k}, I_{VFC,k}, I_{CS,k}, I_{CC,k}, I_{PF1,k}, I_{PF3,k}]^\top \end{aligned}$$

и восстановленные по магнитным измерениям зазоры между границей плазмы и лимитером токамака $G_k = [g_{1,k}, \dots, g_{24,k}]^\top$, а также вертикальное положение центра плазменного шнура Z . Далее будем называть эти сигналы экспериментальными или сценарными.

6.2. Модель

Для оценки возможностей токамака получать конфигурации плазмы построена его линейная модель. Модели токамака Глобус-М2 [12, 13] построены по экспериментальным данным разрядов №№ 41805, 41835 и 41867 в отклонениях от экспериментальных сигналов в дискретном времени с переменными параметрами:

$$(25) \quad \begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k \delta u_k, \\ \delta y_k = C_k x_k, \\ \delta \tilde{y}_k = \tilde{C}_k x_k, \end{cases}$$

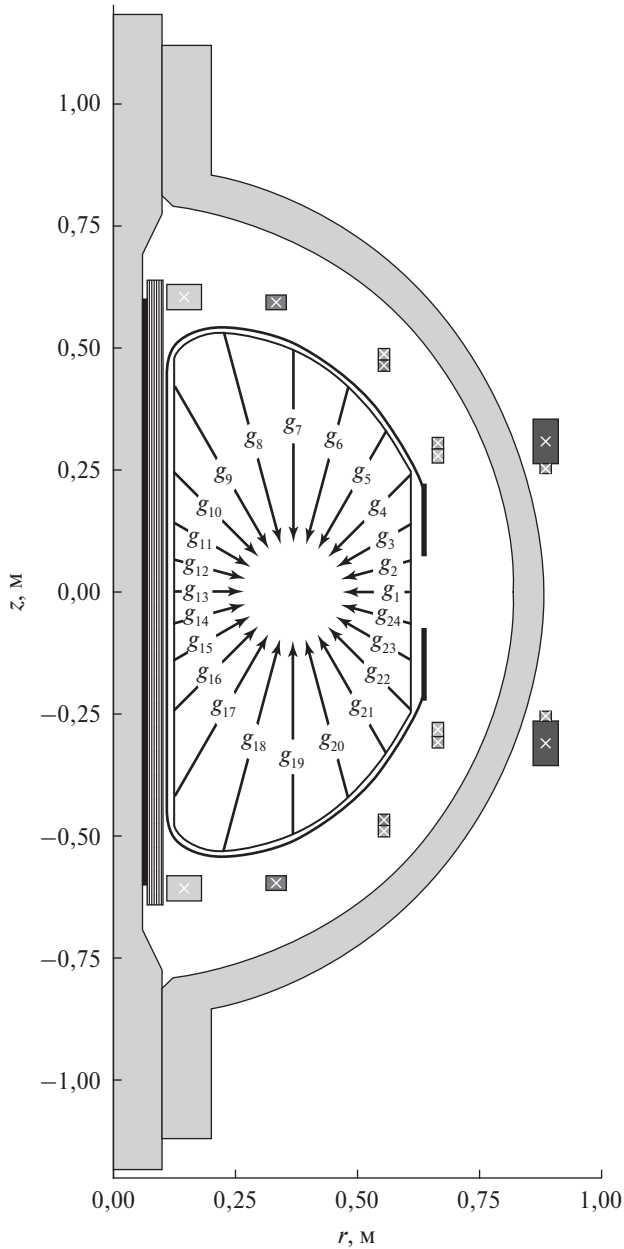


Рис. 3. Вертикальное сечение токамака Глобус-М2. Стрелками показаны 24 направления, вдоль которых измеряются 24 зазора g_1 - g_{24} между лимитером токамака и границей плазмы.

где $x \in \mathbb{R}^{17}$, $\delta u = [\delta U_{HFC}, \delta U_{VFC}, \delta U_{CS}, \delta U_{CC}, \delta U_{PF1}, \delta U_{PF3}]^T \in \mathbb{R}^6$ – отклонения от сценарных напряжений в управляющих обмотках, $\delta y = [\delta g_1, \dots, \delta g_{24}]^T \in \mathbb{R}^{24}$ – изменения формы относительно сценарных сигналов, $\delta \tilde{y} = [\delta Z, \delta I_{HFC}, \delta I_{VFC}, \delta I_{CS}, \delta I_{CC}, \delta I_{PF1}, \delta I_{PF3}]^T \in \mathbb{R}^7$ – изменения верти-

кального положения плазмы и токов в управляющих обмотках. Матрицы стационарных линейных моделей \hat{A}_i , \hat{B}_i , \hat{C}_i вычислены на интервале времени с 0,13 по 0,24 с с шагом 1 мс и интерполируются по линейному закону:

$$(26) \quad A_k = \frac{10 - (k-1)\%10}{10} \hat{A}_{\lfloor \frac{k-1}{10} \rfloor + 1} + \frac{(k-1)\%10}{10} \hat{A}_{\lfloor \frac{k-1}{10} \rfloor + 2},$$

где $\lfloor \cdot \rfloor$ – округление вниз, $\%$ – остаток от деления. Аналогично вычисляются матрицы B и C .

6.3. Ограничения на управляющие сигналы

Рассмотрим отклонения от управляющих сигналов при следующих ограничениях:

- нулевые начальные условия $x_1^{(j)} = 0$, $j \in [1, 17]$;
- отклонения на напряжения в управляющих обмотках $|\delta u^{(j)}| \leq 100$ В, $j \in [1, 6]$;
- отклонения по неустойчивому вертикальному положению центра плазменного шнура $|\delta Z| \leq 1$ см;
- отклонения по токам в управляющих обмотках $|\delta I_{HFC}| \leq 500$ А, $|\delta I_{VFC}| \leq 500$ А, $|\delta I_{CS}| \leq 5$ кА, $|\delta I_{CC}| \leq 500$ А, $|\delta I_{PF1}| \leq 500$ А, $|\delta I_{PF3}| \leq 500$ А.

Напряжения в управляющих обмотках меняются в диапазоне $\pm 1,6$ кВ, типичные значения токов в обмотках HFC, VFC, CC – 0,5 кА, PF1 – 1,5 кА, PF3 – 3 кА, ток в обмотке CS изменяется от 0,5 до 2,5 кА. Типичные величины вертикального смещения порядка 1 см (рис. 4). Поэтому можно считать отклонения от сценарных значений малыми и применять линейные модели плазмы для последующих вычислений.

Таким образом, уравнения модели (25) и ограничения на каждом шаге удовлетворяют постановке задачи (2), (3), (4), (5) и условию (19). При этом для данных моделей неприменим подход к вычислению ОД, описанный в [4–6], так как он требует вычисления выпуклой оболочки точек в пространстве, размерность которого равна числу состояний модели, в данном случае: 17. В таком пространстве точки образуют d -политоп, у которого по меньшей мере $N = 2^d$ вершин, согласно (1) $F(d) \sim 2^{3d/2}$ гиперграней и на каждом шаге это число увеличивается пропорционально числу входов. Таким образом, становится актуальным метод, описанный в разделах 2, 3, 4.

6.4. Область достижимости по форме

Проанализируем возможность изменения составляющих формы g_7 и g_{19} – верхней и нижней точки плазмы. Изменяя эти величины можно влиять на вытянутость плазмы по вертикали. Уменьшение зазоров между плазмой и стенкой вакуумной камеры соответствует увеличению вытянутости. Начальное значение вектора состояний будем считать нулевым.

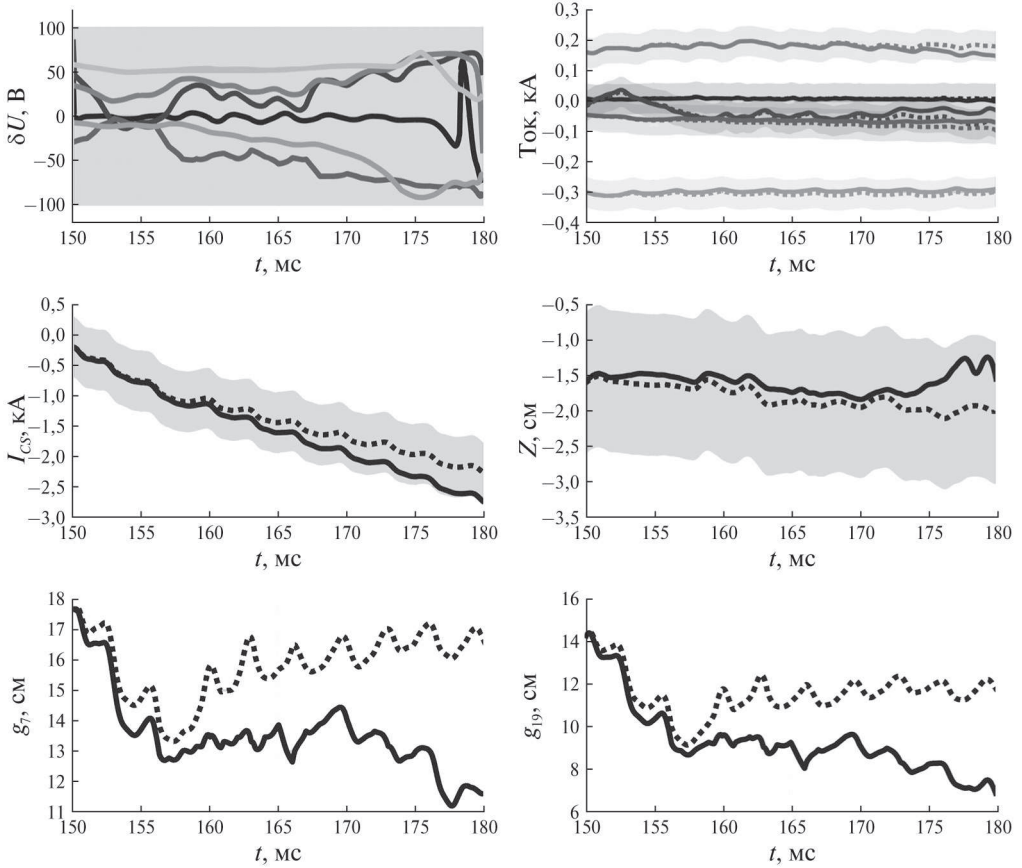


Рис. 4. Результат моделирования плазмы с измененным управлением, реализующим через 30 мс отклонения по составляющим формы $\delta g_7 = 5$ см, $\delta g_{19} = 5$ см, дополнительно вытягивающие плазму по вертикали при ограничениях на смещение плазмы по вертикали, напряжения и токи в управляющих обмотках. Пунктирные линии – сценарий, сплошные – отклоненные сигналы, полутона – допустимые отклонения. Разряд № 41805.

Используя предложенный алгоритм, получаем для модели разряда № 41805, что по прошествии 30 мс (300 временных шагов) выходы системы δg_7 и δg_{19} ограничены на интервалах:

$$(27) \quad -7,9 \leq \delta g_7 \leq 7,9; \quad -8,6 \leq \delta g_{19} \leq 8,6,$$

где значения отклонений выражены в сантиметрах. На втором шаге зафиксируем $\delta g_7 = -5,0$ см, тогда получим:

$$(28) \quad \delta g_7 = -5,0; \quad -8,6 \leq \delta g_{19} \leq -2,9.$$

На последнем шаге можно зафиксировать значение $\delta g_{19} = -5,0$ см и получить программное управление, значения отклонения выходов на 5 см. Динамика системы с найденным программным управлением показана на рис. 4.

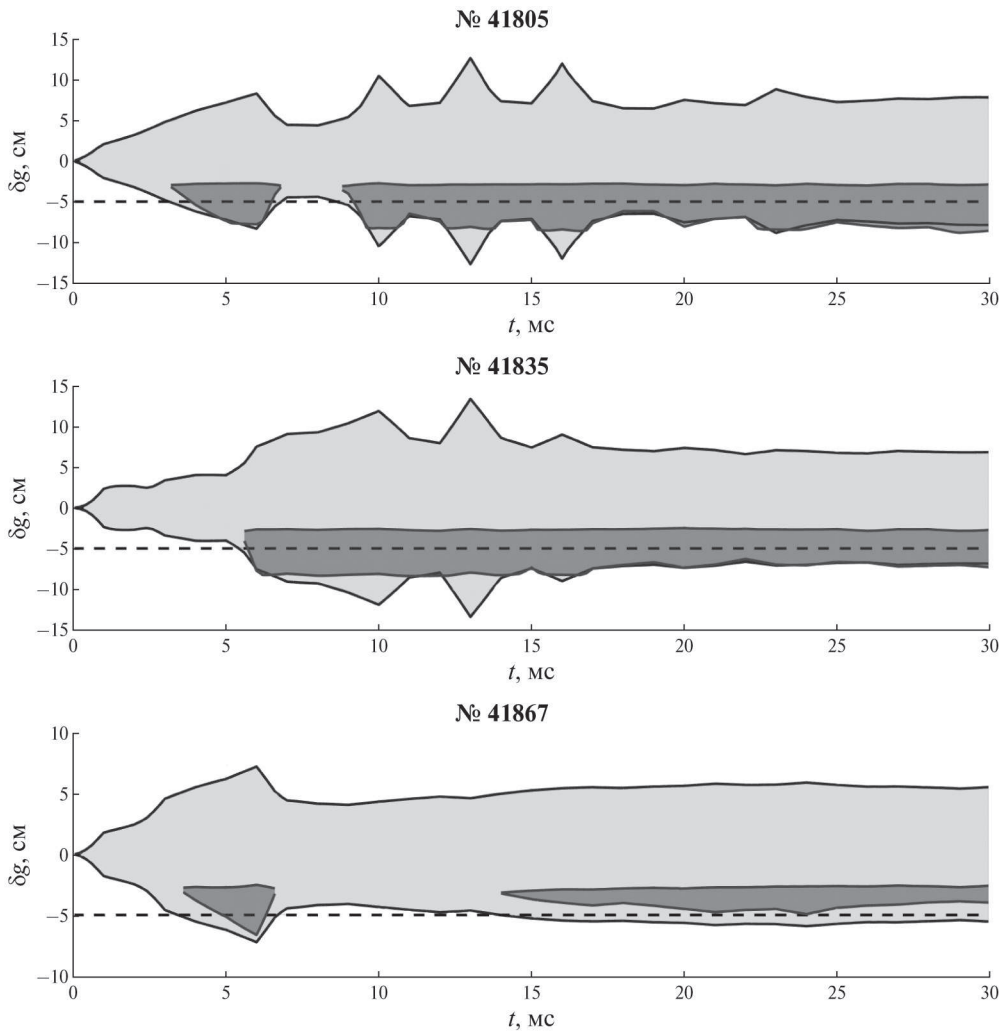


Рис. 5. Изменение области достижимости на протяжении диверторной фазы разряда. Светло-серым показана область достижимости по отклонению для зазора δg_7 , темно-серым – для зазора δg_{19} , при условии $\delta g_7 = -0,05$ см, в те моменты времени, где такое условие осуществимо. Время указано с начала диверторной фазы.

Таким образом показано, что используя обмотки полоидального поля можно увеличить вытянутость плазмы по вертикали в существующей конфигурации токамака Глобус-М2.

Проанализируем изменение областей достижимости по этим составляющим формы во времени. Рассмотрим плазменные разряды №№ 41 805, 41 835, 41 867. Вычислим возможное отклонение по δg_7 . В случае, если отклонение по δg_7 может быть равно -5 см, фиксируем его и находим область достижимости по δg_{19} . Результат показан на рис. 5, время указано от начала диверторной

фазы. Видна сильная связь между противоположными зазорами, отклонение составляющей δg_7 неизбежно приводит к отклонению составляющей δg_{19} в том же направлении.

7. Заключение

В работе предложен метод нахождения точек, лежащих внутри многомерной области достижимости, для линейных дискретных систем с переменными параметрами. Разработан вычислительно эффективный алгоритм, позволяющий последовательно оценивать сечения области достижимости по компонентам выходного вектора, находить точки внутри ОД с помощью задач линейного программирования. Метод применен к задаче управления плазмой в токамаке Глобус-М2, что позволило найти достижимые конфигурации плазмы при заданных ограничениях на управление, показать возможность увеличения вертикальной вытянутости плазмы, проанализировать изменение ОД в ходе плазменного разряда. Проведенные численные эксперименты демонстрируют согласованность результатов с известными методами для низкоразмерных случаев, практическую применимость подхода для систем с десятками переменных состояния, возможность учета переменных параметров.

Предложенный подход открывает новые возможности для анализа и синтеза систем управления сложными динамическими объектами, где традиционные методы построения ОД оказываются неприменимыми из-за высокой вычислительной сложности. Разработанный алгоритм может быть полезен как для теоретических исследований свойств управляемости динамических систем, так и для решения прикладных задач управления сложными техническими объектами.

Автор благодарит коллектив токамака Глобус-М2 за предоставленные экспериментальные данные, П.С. Коренева за предоставленные модели плазмы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях (техника линейных матричных неравенств). М.: ЛЕНАНД, 2014.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
3. Афанасьев В.Н. Теория оптимального управления непрерывными динамическими системами. Аналитическое конструирование. М.: Изд-во физического факультета МГУ, 2011.
4. Тюлюкин В.А., Шориков А.Ф. Алгоритм решения задачи терминального управления для линейной дискретной системы // АиТ. 1993. № 4. С. 115–127.
5. Булаев В.В., Шориков А.Ф. Модификация общего рекуррентного алгебраического метода построения областей достижимости линейных дискретных управляемых систем // Информационные технологии и системы: Труды Шестой Международной научной конференции. 2017. С. 47–52.

6. Булаев В.В., Осипов И.О. Модифицированный алгоритм построения областей достижимости линейных дискретных динамических систем // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». 2018. Т. 18. № 1. С. 56–62.
7. Щербakov П.С. Множества достижимости линейных систем: определения, основные свойства, аппроксимации // Труды 11-й Всероссийской школы-конференции молодых ученых УБС. 2014. С. 15–19.
8. Хлебников М.В. Внешняя оценка множества достижимости линейной динамической системы // Стохастическая оптимизация в информатике. 2016. Т. 12. С. 112–122.
9. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия: Введение: пер. с англ. М.: Мир, 1989.
10. Klee V. Convex polytopes and linear programming // Proc. IBM Sci. Comput. Symp. Combinatorial Problems, IBM, White Plains, USA. 1966. P. 123–158.
11. Балашов М.В. Тремба А.А. Некоторые теоретико-множественные операции с множеством достижимости линейной управляемой системы // Материалы Международной конференции «Дифференциальные уравнения и оптимальное управление», посвященной 100-летию со дня рождения академика Е.Ф. Мищенко. 2022. С. 20–22.
12. Корнев П.С., Митришкин Ю.В., Патров М.И. Реконструкция равновесного распределения параметров плазмы токамака по внешним магнитным измерениям и построение линейных плазменных моделей // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Т. 17. № 4. С. 254–265.
13. Коньков А.Е., Корнев П.С., Митришкин Ю.В. и др. Система магнитного управления плазмой реального времени с алгоритмом восстановления равновесия в обратной связи для токамака Глобус-М2 // Физика плазмы. 2023. Т. 49. № 12. С. 1348–1356.
14. Корнев П.С., Коньков А.Е., Чектыбаев Б.Ж. и др. Оценка области управляемости вертикальным положением плазмы в токамаке КТМ с катушкой НФС // ВАНТ. Сер. Термоядерный синтез. 2024. Т. 47. № 3. С. 49–59.
15. Карманов В.Г. Математическое программирование: Учеб. пособие. 5-е изд., М.: ФИЗМАТЛИТ, 2024.
16. Юдин Д.Б., Гольцштейн Е.Г. Задачи и методы линейного программирования. М.: Сов. радио, 1964.
17. Borgwardt K. The simplex method: A probabilistic analysis (Algorithms and Combinatorics (Study and Research Texts)). Berlin: Springer-Verlag, 1987.
18. Mitrishkin Y.V., Kruzhkov V.I., Korenev P.S. Methodology of Plasma Shape Reachability Area Estimation in D-Shaped Tokamaks // Mathematics, MDPI. 2022. No. 10(23).
19. Mitrishkin Y.V., Kruzhkov V.I., Patrov M.I. Estimation of controllability region of unstable vertical plasma position and plasma separatrix multivariable reachability area of a spherical tokamak. EPS2019 // Proceedings of the 46th European Physical Society Conference on Plasma Physics Milan: European Physical Society, 2019. P. 4.1095.
20. Дикин И.И. Итеративное решение задачи линейного и квадратичного программирования // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174. № 4. С. 747–748.

21. *Minaev V.B., Gusev V.K., Sakharov N.V., et al.* Spherical tokamak Globus-M2: Design, integration, construction // Nuclear Fusion. 2017. V. 57. P. 066047.
22. *Mitrishkin Y.V., Korenev P.S., Prokhorov A.A., et al.* Plasma Control in Tokamaks. Part 1. Controlled thermonuclear fusion problem. Tokamaks. Components of control systems // Advanc. Syst. Sci. Appl. 2018. V. 18. No. 2. P. 26–52.
23. *Корнев П.С., Коньков А.Е., Митришкин Ю.В. и др.* Усовершенствованный алгоритм FCDI для восстановления равновесия плазмы в токамаке // Письма в ЖТФ. 2023. Т. 49. № 4. С. 36–39.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 06.06.2025

После доработки 11.11.2025

Принята к публикации 14.11.2025