

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2026 г. И.В. ПЕТРОВ (ivpetrov@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва,
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Москва)

ИГРЫ НА СЕТЯХ С ЛИНЕЙНЫМ НАИЛУЧШИМ ОТВЕТОМ: МОДЕЛИ И МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ

Системам связанных агентов и сетевому управлению посвящено большое число отечественных и зарубежных исследований. Исторически, наибольший интерес в теории управления возникал к усредняющим системам и, в частности, к задаче консенсуса. Однако сетевое взаимодействие может характеризоваться более специфическими функциями, отражающими зависимость от действий соседей по сети, что особенно явно проявляется в моделях стратегического взаимодействия на сети, которое является предметом теории игр. В данной работе проводится обзор теоретико-игровых моделей сетевого взаимодействия из класса игр с линейным наилучшим ответом. Представлено формальное описание моделей, рассматриваются постановки задач управления в данном классе игр. Особое внимание уделено связи с моделями консенсуса и известными для них задачами управления, которые могут быть сформулированы в терминах стратегического взаимодействия агентов. Несмотря на общую схожесть с известными в теории управления моделями линейных систем, данный класс игр позволяет отразить качественные аспекты стратегического взаимодействия связанных агентов и подчеркнуть роль структурных характеристик.

Ключевые слова: сетевые эффекты, игры на сетях, линейные системы, сетевое управление.

DOI: 10.7868/S2413977726060066

1. Введение

Научный интерес к вопросам управления сетевым взаимодействием агентов разной природы начал возникать в середине XX в. с появлением концепции сетей. Сети были призваны описывать системы взаимодействующих агентов, при этом – в отличие от графа как математического объекта, строго формализующего характер связи – не конкретизируя механизмы взаимодействия. В работах исследователей в области социологии [1, 2], экономики [3, 4] и права [5, 6] сетевой характер взаимодействия подразумевает наличие формальных и неформальных связей между агентами, которые не всегда возможно описать математически, но которые приводят к взаимозависимости

в процессах принятия решений, распространения (например, информации, активности, заболеваний) и др.

Спецификой многих социальных систем является наличие индивидуальных стимулов участников взаимодействия, что нашло отражение в возникновении – в примерно то же время – теории игр как инструмента описания конфликтных ситуаций. С конца XX в. эти два подхода – сетевой и теоретико-игровой – начали использоваться совместно. Игры, в которых агенты связаны между собой сетевой структурой (или сетевая структура является результатом их взаимодействия), используют результаты теории графов и сетевого анализа для определения влияния структуры сети на стратегическое поведение.

Одновременно с этим развивались и формальные методы анализа и управления сетевыми системами. В теории автоматического управления и ее приложениях огромную популярность среди исследователей получили так называемые усредняющие системы и модели консенсуса [7–11], в особенности, классическая модель ДеГроота [12], в которой изучается динамика формирования мнений в сетевой структуре. При этом математические методы описания систем агентов, взаимодействующих стратегически, обладают специфическими особенностями, а результат взаимодействия зачастую отличен от консенсуса. Решения, принимаемые агентами под влиянием взаимодействия с другими, порождают неэффективность, что делает актуальными разработку и исследование различных методов управления.

С начала 2000-х гг. было предложено несколько подходов к управлению, основанных на сетевых характеристиках агентов в социально-экономических системах. Особую популярность обрели подходы к управлению взаимодействием агентов в экономике: модели конкуренции и сотрудничества компаний, межбанковское взаимодействие, модели потребления общественных благ. Возник ряд теоретико-игровых моделей, тесно связанных с эконометрическими моделями идентификации влияния окружения агента на его поведение, в которых исследователи моделируют взаимосвязь между выбором агента и выбором его соседей. Наибольший интерес исследователей вызвали игры, в которых наилучший ответ игрока зависит от действий его соседей линейно; возникли формальные постановки задач управления в таких моделях. Именно этим моделям и методам управления в них посвящен данный обзор.

1.1. Терминология

Отправной точкой в математических моделях взаимосвязи действий агентов между собой является концепция «эндогенных социальных эффектов» (англ. *endogenous social effects*)¹ [13]. В зависимости от контекста в работах по социологии и социальной психологии в качестве примеров употребляются

¹ Для многих терминов в литературе на русском языке не возникло устоявшихся переводов – в этом случае термины взяты в кавычки.

«влияние окружения» (англ. peer influences), социальные нормы (англ. social norms), «эффект соседей» (англ. neighborhood effects), «социальное взаимодействие» (англ. social interactions), «стадное поведение» (англ. herd behavior), конформность (англ. conformity) и др. Иными словами, агенты (люди, организации и др.) под влиянием взаимодействия друг с другом начинают учиться, подражать или имитировать поведение своего окружения.

В исследованиях в области микроэкономики и эконометрики влияние такого взаимодействия на индивидуальное поведение принято называть «эффектами окружения» (англ. peer effects)² [16]. Эффекты окружения определяются как корреляция действий среди представителей одной референтной группы. Для идентификации таких эффектов была предложена модель Linear-in-Means (LIM) [13], изучающая влияние социальных взаимодействий на поведение и результаты индивидов в группе. Модель используется для анализа того, как поведение или характеристики группы (в исходной постановке – средние значения) влияют на поведение отдельного ее члена.

Исторически под группами понимали части одной популяции (например, жители одной общины, одноклассники, коллеги, компании, конкурирующие на одном рынке), что в эконометрических моделях эффектов окружения отражалось в объясняющей переменной, характеризующей поведение одной из непересекающихся групп. С появлением и развитием концепции сетей возникла возможность учитывать индивидуальные связи между людьми – «сетевые эффекты»³, что позволило уточнить существующие модели, а также разрешить ряд технических проблем их идентификации [16]. Вопросы идентификации таких моделей рассмотрены в [13, 16, 22, 23], в обзорах [24, 25], посвященных результатам эконометрических исследований, а также в [26, 27], посвященных идентификации эффектов окружения в полевых и лабораторных экспериментах.

Игры с линейным наилучшим ответом можно рассматривать как генеративные модели эффектов окружения/сетевых эффектов: если в центре внимания авторов эконометрических моделей находится задача идентификации этих эффектов и выявления причинно-следственных связей на основе реальных данных, то игры на сетях предоставляют теоретическую основу для объяснения того, как формируются эффекты окружения, моделируя страте-

² Несмотря на обилие прикладных исследований (например, [14, 15]), в литературе встречаются разрозненные варианты перевода, такие как «эффекты сообучения/сверстников», реже – «эффекты окружения/среды».

³ В работе [17], посвященной теории отраслевых рынков, авторы предложили использовать термин «сетевые эффекты» к рынкам с возрастающей отдачей от масштаба (см., например, [18]), а термин «сетевые экстерналии» – к рынкам, на которых действия агентов порождают неэффективные равновесия. Некоторые из приведенных ниже моделей действительно отражают взаимодействие фирм на рынках [19, 20], тем не менее в понимании [17] термины не всегда уместны. Принимая это во внимание, ниже термин «сетевые эффекты» будет применяться и как синоним «peer effects», и в более широком смысле: к ситуациям зависимости действий одного участника от действий тех, с кем он связан сетью, как, например, в [21].

гическое поведение агентов. В теоретико-игровых моделях фокус внимания направлен на роль структуры взаимодействия: как структура влияет на равновесие в игре; к чему, с точки зрения агрегированных характеристик, приводят локальные эффекты взаимодействия узлов; какие узлы и связи играют ключевую роль. А интерес к линейным моделям главным образом мотивирован ключевой ролью сети в анализе влияния узлов друг на друга, равновесия и задач управления.

1.2. Сетевые интервенции

За последние десятилетия было получено множество результатов в рамках изучения структуры реальных сетей, механизмов их формирования и того, как сети влияют на поведение их участников. Появились примеры использования структуры сетей для разработки экономической политики [28]; предложены инструменты для оценки эффектов воздействия (англ. treatment) для случаев взаимосвязанных индивидов [29].

В исследованиях сетевых моделей стратегического взаимодействия авторы изучают, каким образом следует учитывать информацию о сети при решении задач управления в таких моделях.

Сетевые эффекты являются примерами «внешних эффектов» или «экстерналий» (англ. externalities) – ситуации, в которой благополучие человека зависит от действий других людей без взаимно согласованной компенсации [30]. В этом ключе можно сказать, что игры с линейным наилучшим ответом описывают влияние линейных внешних эффектов в действиях игроков, связанных с их окружением. С точки зрения теоретико-игровых моделей взаимодействия это означает, что равновесие при наличии экстерналий неэффективно (см. раздел 2.1).

В экономической науке внешние эффекты всегда рассматривались как источник неэффективности, а классическим способом использования или противодействия внешним эффектам является прямое вмешательство в экономический процесс (или экономический интервенционизм). Аналогично, возникло понятие «сетевых интервенций» или « сетевого вмешательства» (англ. network interventions) – процесс использования данных сетей социального взаимодействия для изменения результатов деятельности участников сети⁴. В англоязычной литературе термин «сетевые интервенции» обрел особую популярность после публикации статьи [31] с одноименным названием, в которой формулировался скорее в контексте социологических исследований. Существуют различные стратегии сетевых интервенций, и интерес представляет оценка применимости и эффективности этих методов. Как будет показано ниже, в рассмотренных теоретико-игровых моделях равновесие всегда неэффективно, что мотивирует исследователей к разработке методов управления.

⁴ Сетевые интервенции можно рассматривать в качестве аналога термина «сетевое управление», используемого для технических систем.

В методах статистического причинно-следственного вывода (англ. causal inference) оценка среднего эффекта воздействия (англ. average treatment effect) традиционно предполагает независимость влияния воздействия на разных индивидов [32]. В условиях сетевого взаимодействия агенты могут влиять друг на друга, нарушая это предположение. В практических ситуациях исходы взаимодействия акторов зависят от поведения их соседей в сети, наличие взаимосвязей влияет на средний эффект воздействия, что принято описывать термином «сетевая интерференция» (англ. network interference): при наличии эффектов сетевого взаимодействия средний эффект для подвергшихся воздействию и общий эффект расходятся, а игнорирование этих факторов занижает итоговую оценку воздействия [29].

1.3. Приложения

Существует множество примеров количественной оценки влияния группового поведения на индивидуальные результаты. Всюду далее решение, принимаемое агентом i , будет обозначаться переменной x_i . В большинстве случаев под x_i понимается усилие или действие агента (англ. effort или action), которые он совершает в интересующем исследователей процессе. Стандартными примерами в литературе служат следующие:

- образовательные процессы – наверное, наиболее популярная область приложений [14, 15, 33, 34]. В качестве переменной x_i могут использоваться средний балл студента или результаты социологических опросов. Если эконометрические модели изучают, как успеваемость студентов зависит от их окружения, то теоретико-игровая постановка формализует стратегический характер усилий: например, студенты выбирают затрачиваемое на обучение время или участие в дополнительных активностях, при этом учитывая выбор своих одноклассников и друзей.
- социальные нормы и девиантное поведение – существует множество ситуаций, в которых неэтичное поведение распространяется в социальных сетях. Например, некоторые корпоративные культуры поощряют слабые этические нормы [35], а наличие неэтичных одноклассников в академическом контексте повышает соблазн студентов к мошенничеству [36, 37]. В этом случае модели теоретико-игрового взаимодействия позволяют исследовать, какую роль социальные нормы играют в выборе усилий отдельных участников и их позицию в структуре сети. В этом случае в качестве переменной x_i используют индикаторную функцию, характеризующую совершение определенного действия;
- сети преступников (англ. crime networks) [38] – исторически первый пример⁵, послуживший основой для модели «линейно-квадратичной игры» [39] (см. раздел 2.2.3) и задачи выявления ключевого игрока (см.

⁵ <https://lens.monash.edu/2019/08/06/1375976/network-science-identifying-key-players-in-collective-dynamics>

раздел 3.2), x_i – профиль преступника (англ. crime effort profile). Эконометрические модели оценивают, как связи между агентами влияют на проявление девиантного поведения [40]. Игры на сетях показывают, как эффекты стратегической дополнителности (или заменимости, см. раздел 2.1) усилий взаимодействующих агентов распространяются через сеть.

- конкуренция и сотрудничество фирм [19]. В данном случае x_i – объем выпуска (нормированный объем продаж). Авторы исследуют влияние коллаборации в рамках научно-исследовательских и опытно-конструкторских разработок (НИОКР, англ. Research and development, R&D). В общем случае исследователей интересует вопрос о роли межфирменных отношений в экономическом развитии: влиянии экзогенного расширения деловых сетей на производительность фирм и о механизмах, лежащих в их основе [41].

Основная критика эконометрических моделей идентификации сетевых эффектов связана с проблемой эндогенности [13, 23], а именно корреляции между признаками агентов и их действиями, а также между окружением и ошибкой модели. Для борьбы с эндогенностью предложены различные методы, такие как двухшаговый метод наименьших квадратов с использованием инструментальных переменных, модели нелинейной регрессии и др. (см. обзоры [24, 25]).

Целью данной статьи является обзор моделей и методов управления, которые были предложены для случая линейной зависимости функции наилучшего ответа игроков от действий соседей в рамках теоретико-игрового взаимодействия на сети. Работа состоит из следующих разделов: во введении кратко описана история развития сетевых моделей стратегического взаимодействия и задач управления, отмечена значительная роль моделей идентификации сетевых эффектов (эффектов окружения); в разделе 2 описаны игры с линейным наилучшим ответом – классификация игр, инструменты их анализа, а также примеры игр и задачи управления, решаемые в сравнительной статике. В разделе 3 приводится описание задачи центра, стремящегося изменить равновесный исход игры: классификация методов управления, примеры задач, а также описание решения ряда задач управления сетевым взаимодействием агентов, взаимодействующих стратегически. В заключении указаны примеры из актуальных направлений дальнейших исследований.

2. Игры с линейным наилучшим ответом

2.1. Выигрыш игроков и линейный наилучший ответ

Рассмотрим некооперативную одношаговую игру на сети с полной информацией. Множество агентов $N = \{1, \dots, n\}$ на сети, заданной симметричной матрицей смежности $G = \{g_{ij}\} \in \{0, 1\}^{n \times n}$, $g_{ii} = 0$, взаимодействуют стратегически: пытаются получить наибольшую выгоду, учитывая действия других игроков. Каждый участник i выбирает некоторое неотрицательное действие x_i и получает выигрыш v_i от принятого решения. Функция выигрыша v_i

(или функция платежа/полезности, англ. payoff/utility function)

$$(1) \quad v_i(x) = f(x_i, z(x_{-i}, G))$$

включает в себя зависимость от собственного действия x_i игрока i , а именно – выгоды и издержки, которые он получает от выбранного действия, и зависимость от сетевых эффектов – действий других игроков $x_{-i} = \{x_j\}_{j \neq i}$ – которая представлена в виде функции окружения игрока $z(x_{-i}, G)$, учитывающей структуру сети (подробнее о характере этой зависимости ниже). Помимо этих двух компонент, в модель могут входить так называемые чистые экстерналии (англ. pure externalities) – зависимость выигрыша агента от других, экзогенных параметров, которые не связаны с действиями игроков.

Агенты максимизируют собственный выигрыш, для чего каждому агенту i необходимо наилучшим образом отвечать на действия других агентов x_{-i} :

$$(2) \quad BR_i(x_{-i}, G) = \underset{x_i \geq 0}{\text{Argmax}} v_i(x_i, z(x_{-i}, G)).$$

Функция $BR_i(x_{-i})$ носит название функции наилучших ответов игроков (англ. best response/reply function): она не зависит от действий самого игрока i и является его оптимальным ответом на действия других участников. Исход $x^* = \{x_i^*\}_{i \in N}$ называется равновесием Нэша в чистых стратегиях в такой игре, если для всех i

$$(3) \quad x_i^* = BR_i(x_{-i}^*, G).$$

Каждый агент подвержен влиянию прямых (англ. direct) и косвенных (англ. indirect) сетевых эффектов. Прямой эффект на агента i оказывают его соседи по сети (вершины, смежные с вершиной i). Косвенные эффекты возникают в силу сетевого характера взаимодействия: на агента оказывают опосредованное влияние соседи его соседей, соседи соседей его соседа и т.д. Аналогичные рассуждения справедливы и для влияния связей в сети на действия агентов: прямой эффект от ребра графа G получают вершины, соединенные этим ребром, а косвенный – другие вершины, связанные с исходной парой вершин.

Ключевым аспектом игры является характер зависимости игрока i от действий его соседей по сети: в играх с линейным наилучшим ответом функция наилучшего ответа линейно зависит от его окружения $z_i(x_{-i}, G)$, и тогда равновесие в такой игре – это решение системы линейных алгебраических уравнений, являющихся наилучшими ответами игроков при условии $x \geq 0$. В данный момент распространена следующая классификация функций окружения игрока:

- локальное агрегирование (англ. local aggregate):

$$z(x_{-i}, G) = \beta \sum_{j=1}^n g_{ij} x_j,$$

при котором выигрыш каждого игрока зависит от суммы действий его соседей по сети;

- локальное усреднение (англ. local average):

$$z(x_{-i}, G) = \beta \sum_{j=1}^n \frac{g_{ij}}{d_i} x_j,$$

где d_i – степень узла i ; выигрыш каждого игрока зависит от среднего действий его соседей по сети.

Параметр $\beta \in \mathbb{R}$ оказывает мультипликативный эффект и характеризует силу сетевого взаимодействия (или «социальный мультипликатор» [42]). При отсутствии сетевой компоненты (т.е. при $g_{ij} = 1$ для всех i, j) оба класса сводятся к играм с аддитивным агрегированием, см. [43, 44], в которых на каждого агента влияет одна и та же совокупность стратегий других агентов, в то время как в играх на сетях эта совокупность зависит от агента и сети.

Различие между классами состоит в том, как агент i учитывает (или наблюдает) активность своих соседей по сети. В отличие от локального агрегирования, при котором изменение действия агента j напрямую влияет на агента i , в случае усреднения агент i ориентируется на среднюю характеристику своего окружения вне зависимости от того, каким высоким или низким является вклад агента j . Иными словами, модели локального агрегирования призваны описывать так называемые «эффекты перетока» (англ. spillover effect) – распространения вклада одних участников на других, в то время как модели локального усреднения отражают поведенческие аспекты, связанные с ролью окружения в выборе агента. Как показано в [45, 46], модели локального агрегирования и усреднения⁶ различны как с точки зрения свойств функции выигрыша, так и в сравнительной статике и решениях задач управления. В частности, различна и роль параметра β : в играх локального агрегирования увеличение силы сетевого взаимодействия монотонно увеличивает предельный выигрыш игроков, в то время как в модели локального усреднения это не так (см. раздел 2.2.2).

Другим основанием классификации, предложенным в [48] (в том числе и для не сетевых моделей), является знак перед функцией окружения, в зависимости от которого теоретико-игровые модели получают различную интерпретацию:

- модели с эффектом «стратегической дополнителности» (англ. strategic complementarity, [49]) и, соответственно, положительный сетевой эффект, при котором вклад соседа j игрока i увеличивает предельный выигрыш игрока i (примерами служат модели из [39, 45]);

⁶ В этой связи стоит отметить модели ресурсных сетей [47]: по существу, в этих моделях оба механизма – агрегирование и усреднение – используются одновременно, но не в теоретико-игровой постановке.

- модели с эффектом «стратегической заменимости» (англ. strategic substitutability) и, соответственно, отрицательный сетевой эффект, при котором усилие соседа j игрока i снижает предельный выигрыш игрока i (примерами служат модели из [50, 51]).

Формально речь идет о знаке второй смешанной производной выигрыша игрока по собственному действию и действию его соседей: если $g_{ij} = 1$, то для игр с эффектом стратегической дополнителности $\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial x_j} > 0$, а для игр с эффектом стратегической заменимости $\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial x_j} < 0$. Иными словами, в действиях агентов проявляются положительные (отрицательные) локальные сетевые экстерналии: для игр со стратегической дополнителностью (заменимостью) увеличение усилий других игроков (x_{-i}) приводит к тому, что более высокие действия игрока i приносят относительно большую (меньшую) выгоду по сравнению с более низкими усилиями этого игрока. Примеры моделей и наилучшие ответы игроков представлены в табл. 1.

Таблица 1. Модели игр с линейным наилучшим ответом

	Стратегическая дополнителность (англ. strategic complementarity)	Стратегическая заменимость (англ. strategic substitutability)
Локальное агрегирование (англ. local aggregate)	«Линейно-квадратичная игра» $BR_i = b_i + \beta \sum_j g_{ij} x_j$	«Игра локального общественного блага» $BR_i = b_i - \beta \sum_j g_{ij} x_j$
Локальное усреднение (англ. local average)	«Социальные нормы в сети» $BR_i = (1 - \beta)b_i + \beta \sum_{j=1}^n \frac{g_{ij}}{d_i} x_j$	«Модель антиконформизма» $BR_i = (1 - \beta)b_i - \beta \sum_{j=1}^n \frac{g_{ij}}{d_i} x_j$

В рамках любой экономической модели обычно выделяют идеальное состояние системы, характеризующееся максимальным общественным благосостоянием. В случае задач управления речь идет о так называемом «первом по предпочтительности исходе» (англ. first-best outcome/contract, или social optimum), по аналогии с задачами агент-принципал теории контрактов [52]. В работах, посвященных задачам управления в играх с линейным наилучшим ответом, под общественным благосостоянием почти всегда понимается сумма выигрышей всех агентов (подробнее об этом – в разделе 3.1):

$$W = \sum_{i=1}^n v_i,$$

а социальный оптимум (т.е. решение задачи $\max_x W$ и соответствующие ему равновесные исходы x^O и выигрыши W^O) исследуется в рамках сравнительной статики, подразумевающей, что агенты стремятся максимизировать не собственные функции выигрыша, а благосостояние всех агентов в сумме. Как

будет показано ниже на примере отдельных игр, равновесие Нэша в них никогда не является социальным оптимумом: сетевой эффект приводит либо к заниженным, либо к завышенным действиям агентов, тем самым делая актуальными разработку методов управления в таких играх.

2.2. Математические модели сетевых эффектов: координация, конкуренция, сотрудничество и информированность

2.2.1. Игра координации

Классическая модель социального влияния и динамики мнений в сети [53, 54], являющаяся частным случаем задачи консенсуса, имеющей важные приложения в задачах управления в технических системах [8], может рассматриваться и как микроэкономическая модель стратегического принятия решений агентами [55].

А именно, пусть n агентов стремятся максимизировать свой индивидуальный выигрыш, характеризующийся функцией

$$(4) \quad v_i = - \sum_{j=1}^n \frac{g_{ij}}{d_i} (x_i - x_j)^2.$$

Иными словами, агенту невыгодно делать выбор (например, выбор технологии или языка), который отличается от выбора соседей. Функция $v_i(x)$ вогнута, и условий первого порядка достаточно для получения системы наилучших ответов игроков – оптимальный ответ игрока i на действия своих соседей по сети,

$$(5) \quad BR(x_{-i}) = \sum_{j=1}^n \frac{g_{ij}}{d_i} x_j,$$

совпадает с моделью динамики мнений. Так, модель ДеГроота можно интерпретировать как игру, в которой участники хотят продемонстрировать поведение, похожее на поведение своих соседей по сети, для чего они наилучшим образом реагируют на их действия.

В такой игре любой профиль действий, в котором все агенты совершают одно и то же действие, представляет собой равновесие Нэша. Помимо этого, агенты не обладают индивидуальными характеристиками, отличающими их друг от друга. В силу этого большую популярность получила модель, отражающая взаимодействие агентов, находящихся под влиянием индивидуальных навыков и усредненного поведения своего окружения.

2.2.2. Социальные нормы в сети

С точки зрения теоретико-игрового взаимодействия интерес представляет другой вариант модели ДеГроота, предложенный в [56] (модель Фридкина-Джонсена описывает динамику наилучших ответов игроков, анализу динамики посвящена, например, работа [57]), где каждый узел i дополнительно

поддерживает постоянное внутреннее мнение. Существует несколько популярных вариантов данной модели в теоретико-игровой постановке, в частности модель с неполной информацией, в которой агенты пытаются определить некоторое состояние мира [58]. В этом случае интерпретация модели близка к известной игре «конкурса красоты» (англ. «beauty contest») [59].

Ниже будет рассмотрена модель локального усреднения, или модель социальных норм (англ. social-norm model) [46]. Каждый игрок получает выигрыш⁷

$$(6) \quad v_i = b_i x_i - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{1 - \beta} \right) \left(x_i - \sum_{j=1}^n \frac{g_{ij}}{d_i} x_j \right)^2 - \frac{1}{2} x_i^2,$$

где $b_i > 0$ отражает индивидуальную продуктивность агента i , а $\beta > 0$ – склонность к конформизму (англ. *taste for conformity*). Агенты совершают затратные действия ($-x_i^2/2$), получают предельный выигрыш $b_i x_i$, не зависящий от усилий соседей, и при этом сравнивают свой индивидуальный вклад x_i со средним вкладом своих соседей по сети, стараясь минимизировать различие между своим действием и средним действием своей группы. В силу большой роли слагаемого $\sum_{j=1}^n \frac{g_{ij}}{d_i} x_j = \bar{x}_i$ в других публикациях, в которых оно фигурирует в контексте социологических исследований, авторы называют его *социальной нормой* агента i .

Из условий первого порядка $\partial v_i / \partial x_i = 0$ находим наилучшие ответы игроков:

$$(7) \quad x_i = (1 - \beta) b_i + \beta \bar{x}_i,$$

или в матричном виде

$$(8) \quad x = (1 - \beta) b + \beta \hat{G} x,$$

где $\hat{G} = \{\hat{g}_{ij} = g_{ij}/d_i\}^{n \times n}$. При $\beta < 1$ равновесие Нэша в чистых стратегиях существует и единственно:

$$(9) \quad x^* = (1 - \beta)(I - \beta \hat{G})^{-1} b.$$

⁷ Можно рассмотреть другие функции выигрыша игроков, например

$$v_i = b_i x_i - \frac{\theta}{2} \sum_j \frac{g_{ij}}{d_i} (x_i - x_j)^2 - \frac{x_i^2}{2},$$

или

$$v_i = b_i x_i - \theta x_i \sum_j \frac{g_{ij}}{d_i} x_j - \frac{1 + \theta}{2} x_i^2,$$

где $\theta = \frac{\beta}{1 - \beta}$. Наблюдение авторов [46] состоит в том, что перечисленные функции выигрышей объединяет функция наилучших ответов, однако, даже если равновесные усилия x^* одинаковы, анализ благосостояния и его сравнительная статика могут отличаться, поскольку равновесные полезности и, следовательно, благосостояние различны.

Первое, что необходимо отметить, это эффект индивидуальной продуктивности. Хотя влияние b_i на v_i^* всегда положительно, взаимовлияние продуктивности агентов может иметь разнонаправленный характер:

$$(10) \quad \frac{\partial v_i^*}{\partial b_j} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \iff x_i^* \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \bar{x}_i^*,$$

т.е. равновесная полезность агента i возрастает (убывает) в ответ на небольшое изменение продуктивности b_j агента j тогда и только тогда, когда равновесный ответ игрока i больше (меньше) его равновесной социальной нормы. Основным интерес представляет зависимость исхода игры от параметра β . Авторы показывают, что в общем случае эта зависимость немонотонна, и переходят к рассмотрению двух крайних случаев:

- чистый индивидуализм ($\beta = 0$): равновесный ответ каждого игрока равен его индивидуальной продуктивности

$$\sum_{j=1}^n x_j^* = \sum_{j=1}^n b_j;$$

- полный конформизм ($\beta \rightarrow 1$): все агенты выбирают одинаковый уровень усилий, равный средневзвешенной индивидуальной продуктивности,

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} \sum_{j=1}^n x_j^* = n \sum_{j=1}^n \bar{d}_j b_j,$$

где \bar{d} – вектор нормализованных степеней вершин, $\bar{d}_i = d_i / \sum_{j=1}^n d_j$. Будет ли совокупный вклад $\sum_j x_j^*$ выше при чистом индивидуализме ($\beta = 0$) или при полном конформизме ($\beta \rightarrow 1$), зависит от корреляции между продуктивностью b и распределением по степеням вершин в графе G :

$$(11) \quad \lim_{\beta \rightarrow 1} \sum_{j=1}^n x_j^* \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \sum_{j=1}^n x_j^*(\beta = 0) \iff \text{Corr}(\bar{d}, b) \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0.$$

Когда b и \bar{d} положительно (отрицательно) коррелируют, т.е. агенты с более высокой производительностью занимают более (менее) центральные позиции в сети, тогда полный конформизм увеличивает (уменьшает) совокупные усилия.

Социальный оптимум в модели, т.е. решение задачи

$$(12) \quad \max_x \quad b^T x - \frac{1}{2} x^T H(\beta) x,$$

где $H(\beta) := I + \frac{\beta}{1-\beta} (I - \hat{G})^T (I - \hat{G})$, достигается решением следующей системы наилучших ответов игроков:

$$(13) \quad x_i = (1 - \beta)b_i + \beta \bar{x}_i + \beta \sum_{j=1}^n \frac{g_{ij}}{d_i} (x_j - \bar{x}_j).$$

Отличием оптимума от равновесия Нэша в игре является наличие в системе наилучших ответов игроков в случае социального оптимума последнего слагаемого – влияния собственного действия агента на социальную норму своих соседей. В равновесии Нэша, принимая решение о своих индивидуальных усилиях, агенты не учитывают этот фактор, что создает экстерналию, которая может быть как положительной, так и отрицательной: если i и j соседи, то

$$(14) \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0 \iff x_i \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} \bar{x}_i.$$

Другими словами, когда агент j прилагает усилия x_j , он оказывает положительное (отрицательное) внешнее воздействие на своего соседа i тогда и только тогда, когда усилия i выше (ниже) социальной нормы i . Оптимум достигается в том случае, когда равновесные ответы игроков соответствуют их индивидуальной продуктивности

$$(15) \quad x^O = b.$$

В этом случае выделяется класс регулярных сетей: для них совокупные усилия в сети всегда оптимальны: $x^* = x^O = b$. Это происходит потому, что в регулярных сетях положительные и отрицательные внешние эффекты, оказываемые агентами на своих соседей, в точности уравниваются, так что совокупный эффект оптимален.

Ключевую роль индивидуальная продуктивность играет и в задаче добавления и удаления связей между агентами – центр принимает во внимание только продуктивность агентов, при этом информация о структуре сети не играет роли:

1. добавление ключевых связей (англ. key-link adding): в любой сети добавление связи между двумя агентами с высокой (низкой) продуктивностью не только увеличивает (уменьшает) усилия этих двух агентов, но и увеличивает (уменьшает) усилия всех остальных агентов в сети;
2. удаление ключевых связей (англ. key-link removing): независимо от структуры сети центр должен удалить связь между двумя наиболее продуктивными агентами .

Решение задачи стимулирования будет рассмотрено ниже, при анализе управления в линейно-квадратичной игре в разделе 3.2.

2.2.3. Линейно-квадратичная игра

Линейно-квадратичная игра на сети, предложенная в [39], является одной из наиболее известных моделей игры на сети. Функция выигрыша игрока i

$$(16) \quad v_i = x_i \left(b_i + \beta \sum_{j=1}^n g_{ij} x_j \right) - \frac{x_i^2}{2}$$

включает выгоду от собственного действия, $x_i b_i$, и действий соседей, $\beta \sum_j g_{ij} x_j x_i$, а также квадратичные издержки от принятого решения, $x_i^2/2$.

Параметр $b_i > 0$ является предельным выигрышем игрока i , не зависящим от действий соседей (англ. standalone marginal return). Параметр β отражает характер зависимости от действий соседей по сети: при $\beta > 0$ действия игроков комплементарны (англ. strategic complements), а при $\beta < 0$ действия соседей взаимозаменяют друг друга (англ. strategic substitutes).

В случае линейно-квадратичной игры условия первого порядка

$$(17) \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = b_i + \beta \sum_{j=1}^n g_{ij} x_j - x_i = 0$$

приводят к следующим функциям наилучшего ответа:

$$(18) \quad BR_i(x_{-i}) = b_i + \beta \sum_{j=1}^n g_{ij} x_j.$$

В матричном виде систему наилучших ответов можно представить как

$$(I - \beta G)x = b,$$

где I – единичная матрица. Если матрица $(I - \beta G)$ обратима (подробнее об этом в разделе 2.3), то равновесие Нэша существует и единственно: равновесные ответы игроков в матричном виде

$$(19) \quad x^* = (I - \beta G)^{-1}b.$$

Идея авторов модели [39] заключалась в создании связи между концепцией равновесия Нэша и мерами центральности узлов на сети: рассмотрим сеть с матрицей смежности G и скаляр $\beta \geq 0$. Тогда вектор центральностей [60] параметра β

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \beta^k G^k \mathbf{1} = (I - \beta G)^{-1} \mathbf{1}$$

отражает общее число путей в G , которые начинаются в вершине i . Параметр β – коэффициент затухания, который снижает относительный вес путей наибольшей длины. Таким образом, равновесие Нэша в линейно-квадратичной игре на графе в точности совпадает с вектором центральностей Каца–Боначича.

В [61] была рассмотрена более общая модель: авторы рассмотрели произвольную взвешенную сеть, множество допустимых действий агента $x_i \in [0, L]$ и наилучший ответ игроков

$$(20) \quad BR_i(x_{-i}) = \min \left(b_i + \beta \sum_{j=1}^n g_{ij} x_j, L \right),$$

тогда при $L = \infty$ получается исходная модель.

В [62] была исследована сравнительная статика модели: социальный оптимум, т.е. решение задачи $\max_x \sum v_i$, приводит к следующей системе наилучших ответов игроков:

$$(21) \quad b_i - x_i + 2\beta \sum_{j=1}^n g_{ij}x_j = 0,$$

или

$$(22) \quad x_i^O = BR_i(x_{-i}) + \beta \sum_{j=1}^n g_{ij}x_j,$$

т.е. равновесные усилия слишком малы, потому что каждый агент игнорирует положительное влияние (или положительную экстерналию, возникающую вследствие эффекта комплементарности) своего действия на выбор своих соседей. В результате равновесие в игре оказывается неэффективным. В силу этого эффекта действия агентов всегда занижены, а центр в задаче стимулирования всегда выбирает однонаправленные вмешательства: либо все агенты получают дополнительные субсидии, либо, наоборот, облагаются штрафами/налогом (подробнее об этом см. в разделе 3.2).

Очевидно также, что и структура сети монотонно влияет на равновесный исход: для случая симметричных матриц в [63] показано, что для двух матриц Σ и Σ' , таких что $\Sigma = -I + \beta G$, а $\Sigma' > \Sigma$ если $\sigma'_{ij} > \sigma_{ij}$ для всех i, j , то

$$(23) \quad x^*(\Sigma') > x^*(\Sigma).$$

В [64] была предложена модель формирования сети, в которой агенты выбирают себе тех, с кем создавать связь, исходя из максимизации собственной выгоды по формуле (16). Из указанных свойств функции следует, что наибольшую выгоду будут получать агенты с наибольшим показателем центральности, а другие агенты будут стремиться создать с ними связь.

2.2.4. Игра локального общественного блага

Игры на сетях с эффектом стратегической заменимости описывают ситуацию, в которой действия одного агента снижают стимулы для соседей увеличивать свои усилия. Такие игры моделируют конкурентные сценарии, например конкуренцию за ограниченные ресурсы, рынки или выгоды, где игроки связаны через сеть взаимодействия, а их стратегии взаимозаменяемы. Этот эффект противоположен эффекту стратегической дополнительности, при котором действия одного агента стимулируют увеличение усилий соседей.

В модели локального общественного блага на сети агенты принимают решения о своих индивидуальных вкладах в производство некоторого неисключаемого блага (агентов нельзя исключить из его потребления), которое приносит пользу как им самим, так и их соседям по сети. Во многих исследованиях данная модель получила интерпретацию модели теории отраслевых рынков [65], в частности олигополии [66], а некоторые версии получили развитие

в области деловых игр и поведенческих экспериментов [67]. Эта модель тесно связана с теорией олигополии, поскольку в обеих рассматриваются стратегическое взаимодействие между игроками, чьи действия обладают эффектом стратегической заменимости.

Пусть фирма i производит некоторое количество товара x_i , а ее прибыль равна $v_i(x) = x_i p(\sum_j x_j) - c x_i$, где $p(\sum_j x_j)$ – обратная функция спроса, c – издержки. В случае, когда обратная функция спроса линейна, прибыль фирмы i можно записать как

$$(24) \quad v_i = x_i \left(b - \left(x_i + \beta \sum_{j=1}^n g_{ij} x_j \right) \right) - c x_i,$$

где $g_{ij} = g_{ji} = 1$ означает, что продукция фирмы i и товары фирмы j являются взаимозаменяемыми, β – степень заменимости товаров, а b – размер рынка. Более общие сетевые модели рассмотрены в [19, 68]. Похожие модели рассматривались в [69, 70], где они дополнялись параметром r_i агента, характеризующим тип i -го агента – эффективность или квалификацию его деятельности. Функция выигрыша игроков

$$(25) \quad v_i = x_i \left(b - \sum_{j=1}^n x_j \right) - \frac{x_i^2}{2r_i},$$

а наилучший ответ на произвольном графе G можно представить как

$$(26) \quad (I_r + \beta G) x = b,$$

где I_r – диагональная матрица с элементами $1/r_i$ на диагонали.

В [19] была сформулирована модель, учитывающая эффекты стратегической дополнительной и заменимости одновременно: фирмы конкурируют на рынках, при этом сотрудничая в рамках научно-исследовательских разработок (англ. Cournot oligopoly game with spillover effect of R&D collaborations). Наилучший ответ игрока в данной модели принимает вид:

$$(27) \quad x_i = b_i - \rho \sum_{j=1}^n b_{ij} x_j + \beta \sum_{j=1}^n g_{ij} x_j,$$

где $B = \{b_{ij}\}$ – матрица конкуренции между фирмами (связь между фирмами возникает в том случае, если они конкурируют на одном рынке), а $G = \{g_{ij}\}$ – матрица сотрудничества в рамках НИОКР. Равновесие, при достаточно нетривиальных условиях, существует и единственно:

$$(28) \quad x^* = (I + \rho B - \beta G)^{-1} b.$$

Всюду выше рассматривался случай общего знания – ситуация, при которой каждый агент обладает полной информацией об индивидуальных характеристиках других агентов, структуре связей и т.д. Одним из подходов к

анализу асимметрии информации являются модели рефлексивных игр. Рефлексивная игра [71] – модель принятия агентами решений на основании иерархии их представлений о поведении оппонентов. Если структура информированности агентов в такой игре имеет конечную сложность (так называемая точечная структура информированности [50]), то можно построить граф рефлексивной игры \overline{G} , наглядно демонстрирующий взаимосвязь между действиями агентов, участвующих в равновесии. В случае линейного наилучшего ответа игроков⁸:

$$(30) \quad BR_i(x_{-i}) = b_i - \beta \sum_{j=1}^n \overline{g}_{ij} x_j,$$

информационное равновесие может быть найдено по формуле [72]:

$$(31) \quad x^* = (I + \beta \overline{G})^{-1} b,$$

где вектор b отражает информированность агентов, а \overline{G} – граф рефлексивной игры. Вершины графа \overline{G} соответствуют реальным и фантомным агентам, участвующим в рефлексивной игре, а дуги графа \overline{G} отражают взаимную информированность агентов.

Решения многих задач управления (в том числе в сравнительной статике) в описанной модели близки к решениям задач в линейно-квадратичной игре на сети. Для случая, когда равновесие в модели единственно, авторы [73] рассмотрели задачу стимулирования – ее описанию посвящен раздел 3.2.

2.3. Анализ равновесия в играх с линейным наилучшим ответом

Доказательство существования и единственности равновесия в описанных выше примерах обычно осуществляется двумя способами: через теоремы о существовании решения системы линейных алгебраических уравнений (как, например, в [39]) или через доказательства существования потенциальной функции игры.

Впервые концепция потенциальных игр была предложена в [74]. Основная идея заключается в доказательстве существования функции, которая позволяет описать результат стратегического взаимодействия игроков с помощью скалярной функции⁹. Функция φ является потенциальной функцией игры

⁸ В оригинальной статье была рассмотрена модель

$$(29) \quad v_i = x_i \left(b - \sum_{j=1}^n \hat{g}_{ij} x_j \right) - \frac{x_i^2}{2}$$

и $g_{ii} = 1$.

⁹ В [75] показано, что для некоторых классов игр потенциальная функция является функцией Ляпунова динамики игры, что позволяет использовать метод функций Ляпунова для анализа равновесия [76].

(англ. potential function/best-reply potential), если для любых x_i, x'_i, x_{-i} и для всех $i \in N$ верно

$$(32) \quad \varphi(x_i, x_{-i}) - \varphi(x'_i, x_{-i}) = v_i(x_i, x_{-i}) - v_i(x'_i, x_{-i}).$$

Игры с линейным наилучшим ответом обладают потенциальной функцией (в общем случае она может быть не единственной): например [77], в матричном виде ее можно записать как

$$(33) \quad \varphi(x) = x^T 1 - \frac{1}{2} x^T (I \pm \beta G) x.$$

Максимум потенциальной функции соответствует равновесию Нэша. Достаточным условием существования единственного решения является вогнутость потенциальной функции. Матрица вторых производных $\nabla^2 \varphi(x) = -(I \pm \beta G)$, и $\varphi(x)$ строго вогнута тогда и только тогда, когда матрица $I \pm \beta G$ положительно определена: для любого $y \neq 0$

$$(34) \quad y^T (I \pm \beta G) y > 0.$$

Для игр локального агрегирования в зависимости от знака перед βG необходимым и достаточным условием существования и единственности равновесия является либо $\beta \lambda_{\max}(G) < 1$ в случае игр с эффектом стратегической дополнителности (-), либо $\beta |\lambda_{\min}(G)| < 1$ в случае игр с эффектом стратегической заменимости (+), где $\lambda_{\max}(G)$ и $\lambda_{\min}(G)$ – наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы G соответственно. В играх локального усреднения этих условий не требуется: в качестве G выступает строчно-частичная матрица, для которой $\lambda_{\max}(G) = 1$, и тогда условием существования будет являться $\beta < 1$.

Существенным отличием игр с эффектом стратегической заменимости является существование углового решения (англ. corner equilibrium) [78]: потенциальная функция перестает быть вогнутой, и из свойства игры иметь неотрицательные стратегии x возникает ситуация, в которой одни игроки – пассивные агенты – бездействуют, $x_i^* = 0$, а другие – активные агенты – выбирают максимально допустимое действие – $x_j^* = b_j$. В этой ситуации условие существования равновесия связано с наличием в графе G максимального независимого множества, которое, как и число равновесий, может быть не единственным: активные игроки не должны быть связаны между собой.

В случае несимметричной матрицы G достаточным условием для существования равновесия является положительная определенность эрмитовой компоненты матрицы $G = \frac{G+G^T}{2}$ и, следовательно, $1 + \delta \lambda_{\max(\min)}(\frac{G+G^T}{2}) > 0$. Однако в случае игр с эффектом стратегической заменимости анализ динамики наилучших ответов сложнее (см. ниже).

В [63, 100] показано, что равновесие в игре с линейным наилучшим ответом является решением линейной задачи о дополнителности (англ. linear

complementarity problem, LCP). В [76] показано, что задача LCP является подклассом задач вариационного неравенства¹⁰ – анализу игр в этом ключе (в том числе в случае нелинейного наилучшего ответа) посвящены работы [76, 79, 80] и ссылки в них. В [76] авторы, используя формулировку равновесия Нэша в терминах решения задачи вариационного неравенства, исследуют связь между параметризацией игры и матрицей частных производных оператора наилучших ответов (матрицей Якоби, англ. Jacobian of the game), а также влияние свойств матрицы Якоби на существование и единственность равновесия, сходимость динамики наилучших ответов в дискретном и непрерывном времени.

2.4. Динамика наилучших ответов

Выше взаимодействие между агентами сформулировано в виде одношаговой некооперативной игры, однако описанное взаимодействие можно представить альтернативным образом. В [81] систему (18) сформулировали как линейную аффинную динамическую систему в непрерывном времени:

$$(35) \quad \dot{x} = Ax + b,$$

где $A = \beta G - I$. Или для каждого агента i

$$(36) \quad \dot{x}_i = b_i + \beta \sum_{j=1}^n g_{ij} x_j - x_i.$$

Решением системы или установившимся значением состояния системы является величина

$$(37) \quad \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &= -A^{-1}b \\ &= -(\beta G - I)^{-1}b \\ &= (I - \beta G)^{-1}b. \end{aligned}$$

Интерес представляет и разностная аппроксимация уравнения (35)¹¹, которая позволяет установить взаимосвязь между шагом дискретизации δ и сетевым эффектом β . Конкретное значение множителя перед матрицей взаимодействия связано как с непосредственным влиянием окружения на выбор агента, так и с шагом дискретизации в модели. Помимо этого, наилучшие ответы игроков могут быть ограничены в силу специфики анализа различных жизненных ситуаций: в большинстве случаев (уровень усилий в моделях коллективного поведения, кол-во продукции в моделях производства товаров или услуг

¹⁰ Формулировка равновесия Нэша в терминах решения вариационного неравенства является обобщением свойства игры быть потенциальной [74].

¹¹ В совокупности, у формулы (19) имеется как минимум три интерпретации: это равновесие теоретико-игровой модели, равновесие линейной аффинной динамической системы, а также показатель центральности узлов сети.

и др.) наилучший ответ не может быть отрицательным; в популярном кейсе исследования образовательных процессов агенты выбирают уровень усилий, как правило измеряющийся в часах: наилучшие ответы ограничены нулем и некоторым значением сверху, а также предполагаются быть целочисленными. Все эти аспекты влекут за собой ограничения в выборе инструментов для анализа динамики в таких играх [82]. Обсуждению взаимосвязи между теоретико-игровой интерпретацией и теорией динамических систем, в том числе для модели выше, посвящена книга [83].

В теоретико-игровой терминологии процедура поиска равновесия игроками носит название «нащупывание» (франц. *tatonnement*) равновесия, например «нащупывания по Нэшу/Курно» (франц. *Nash/Cournot tatonnement*). В играх с эффектом стратегической заменимости равновесие, стабильное относительно дискретного нащупывания по Нэшу, влечет стабильность равновесия относительно непрерывной динамики наилучших ответов, однако обратное неверно [78]. Сходимость непрерывной динамики наилучшего ответа к равновесию Нэша в таких играх была показана в [84], случай влияния дальновидных агентов рассмотрен в [85].

В случае игры на ориентированном графе G динамика наилучших ответов может заикливаться. В [86] авторы ввели два класса направленных сетей, для которых динамика наилучших ответов сходится к единственному равновесию: один из классов определяется возможностью изменить параметры игры специальным образом так, чтобы динамика новой игры совпадала с динамикой исходной; другой класс сетей тесно связан с критерием Колмогорова обратимости цепи Маркова¹².

2.5. Связь с другими областями

В [7, 8] рассматриваются основные задачи и приложения сетевого управления («control of networks»), изучающего вопросы управления в сетях (в частности, такими задачами, как групповое, кооперативное, мультиагентное/многоагентное управление). Пусть $x_i(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния в момент времени t узлов сети, $i = 1, \dots, n$, состоящей из элементов g_{ij} , отражающих связь между вершинами i и j в графе G . Авторами отмечается, что широкий класс сетевых мультиагентных систем описывается в непрерывном времени моделями вида

$$(38) \quad \dot{x}_i = F_i(t, x_i, u_i) + \sum_{j=1}^n g_{ij}(t) f_{ij}(x_i, x_j),$$

где функции $F_i(\cdot)$ и $f_{ij}(\cdot)$ характеризуют локальную динамику агента и его взаимодействие с другими агентами соответственно. При этом наиболее распространёнными являются сети, в которых взаимодействия агентов зависят

¹² О связи между ориентированными графами и критерием Колмогорова см. также в [87, 88].

только от их разногласий (расхождения их состояний) и наиболее полно исследованы в настоящий момент линейные сетевые системы с функцией f_{ij} вида

$$(39) \quad f_{ij}(x_i, x_j) = x_i - x_j.$$

В дальнейшем обзор посвящен именно таким моделям. В то же время подобная (38) постановка справедлива не только для моделей консенсуса, но и для теоретико-игровых моделей взаимодействия, при этом функция $f_{ij}(x_i, x_j)$ носит особую специфику (см. разделы 2.1 и 2.4 данного обзора).

С описанными выше моделями тесно связаны и модели межотраслевого баланса [89, 90]; схожая проблематика исследовалась в работах, посвященных динамическим моделям межотраслевого баланса [91–93] и оптимального планирования [94]. А именно, пусть x_i – объем выпуска i -й отрасли, G – матрица прямых затрат, элементы которой отражают затраты продукции i -й отрасли на производство единицы продукции j -й отрасли. Тогда матрица полных затрат будет

$$\Lambda = (I - G)^{-1},$$

элементы которой отражают количество продукции отрасли i , необходимое для обеспечения единицы конечного выпуска продукта отрасли j . В англоязычной литературе рассматривают более общий случай матрицы Λ , зависящий от параметра β (англ. Leontief inverse) [89]: $\Lambda = (I - \beta G)^{-1}$.

Различным способам описания теоретико-игрового взаимодействия на сети посвящены работы [95, 96], задачам управления в случае стратегического формирования сетей – [97, 98] и в моделях ограниченной рациональности – [50, 71] (подробнее в разделе 2.2.4). При этом в данном обзоре совсем не рассмотрены кооперативные игры [99], хотя несколько вариантов кооперативного решения для описанных выше игр предложены в [100–102].

Отдельно стоит отметить работы, посвященные задачам управления в моделях социальных сетей [12, 103], в моделях смешанного социального влияния (механизмов ассимилятивного/диссимилятивного влияния и ограниченного доверия) [104]. Как было показано выше, подобные модели также можно рассматривать в качестве моделей стратегического взаимодействия.

3. Задачи управления

3.1. Целевые функции и бюджетные ограничения центра

Управляющий орган (или центр/центральный планировщик, англ. central planner) получает информацию о выигрышах участников и может повлиять на их действия, вообще говоря, в разные моменты времени и различными способами. Вследствие этого результаты взаимодействия агентов меняются, становятся более желательными для центра. Предметом управления могут являться различные элементы системы – действия агентов, их стимулы, структура взаимодействия и другие характеристики.

В случае игр с линейным наилучшим ответом управление формулируется в виде задачи оптимизации, которую в общем виде можно представить как

$$(40) \quad \max_u W(x, u)$$

при ограничениях

$$(41) \quad x \geq 0, \quad x = BR(x, u), \quad K(u, u_0) \leq C,$$

где u – параметр игры, на который оказывается воздействие в процессе управления, u_0 – исходное значение параметра, $K(u, u_0)$ – функция затрат, характеризующая ограничения на изменение относительно исходного значения параметра, C – константа. Как было показано выше, в случае анализа сравнительной статики и социального оптимума, в качестве управляющего воздействия может рассматриваться и сам вектор x наилучших ответов игроков. Таким образом, рассматривается двухшаговая игра, в которой на первом шаге центр осуществляет управление, а на втором агенты разыгрывают равновесие.

Хотя одна и та же функция наилучших ответов может соответствовать различным функциям выигрыша, решение задачи управления может различаться в зависимости от того, какую функцию стремится максимизировать центральный планировщик:

- увеличение/снижение агрегированных результатов игроков:

$$W = \sum_{i=1}^n x_i \longrightarrow \max,$$

- увеличение суммы выигрышей участников – социальный оптимум по Бен-тану:

$$W = \sum_{i=1}^n v_i \longrightarrow \max,$$

- увеличение выигрышей наименее «обеспеченных» участников – социальный оптимум по Роулзу:

$$W = \min_i v_i \longrightarrow \max.$$

Проблеме выбора целевых функций центра в таких задачах на данный момент уделено мало внимания (см., например, [105]), а наиболее популярным выбором служит функция общественного благосостояния – сумма выигрышей агентов.

Существует несколько классификаций задач управления, применимых к рассматриваемым моделям [31, 95, 106, 107]. В [31] приведены следующие стратегии сетевых интервенций, каждая из которых имеет различные тактические альтернативы:

- индивидуальные (англ. individual) – идентификация ключевых участников сети, выбранных на основе некоторых сетевых характеристик, см. табл. 2;

- групповые (англ. segmentation) – сегментация сети, при которой вмешательство направлено на отдельные группы узлов;
- структурные (англ. alteration), при которых изменениям подвергаются связи между участниками и сеть взаимодействий в целом, см. табл. 2;
- индукционные (англ. induction), при которых происходит возбуждение сети таким образом, что активируются новые взаимодействия между участниками – так называемые каскады, которые могут носить информационный/поведенческий и др. характер (подробнее см., например, [108]).

Таблица 2. Задачи управления в играх с линейным наилучшим ответом

Тип задачи	Описание	Работы
Индивидуальные	Идентификация ключевых участников сети, выбранных на основе некоторых сетевых характеристик	Galeotti, Goyal, 2009 [109]; Candogan, Bimpikis, Ozdaglar, 2012 [110]; Bloch, Querou, 2013 [111]; Fainmesser, Galeotti, 2016 [112]; Demange, 2017 [113]; Galeotti, Golub, Goyal, 2020 [73]; Kor, Zhou, 2023 [114]; Belhaj, Deroian, Safi, 2023 [116]; Jeong, Shin, 2024 [115]; Dasaratha, Golub, Shah, 2024 [117]
Структурные	Изменениям подвергаются связи между участниками и сеть взаимодействия в целом	Borgatti, 2006 [118]; Ballester, Calvo-Armengol, Zenou, 2006 [39]; Corbo, Calvo-Armengol, Parkes, 2006 [119]; Corbo, Calvo-Armengol, Parkes, 2007 [63]; Golub, Lever, 2010 [120]; Konig, Tessone, Zenou, 2014 [64]; Belhaj, Bervoets, Deroian, 2016 [121]; Матвеевко, Королев, 2016 [122]; Hiller, 2017 [123]; Harkins, 2020 [124]; Li, 2023 [125]; Sun, Zhao, Zhou, 2023 [126]

Ряд авторов [95, 106] выделяют институциональные интервенции, подчеркивая специфику вмешательства, направленного на изменение правил взаимодействия. Помимо этого, в [95] задача управления составом участников выделяется в отдельный класс, в то время как в [31] этот класс задач отнесен к задачам управления структурой взаимодействия.

В работах, посвященных управлению в играх с линейным наилучшим ответом, в качестве u может быть выбран состав игроков $i \in N$, стимулы b или структура взаимодействия G . Ниже описаны решения некоторых задач, а в табл. 2 представлены работы в соответствии с приведенной классификацией.

3.1.1. Управление стимулами агентов

В этих работах рассматриваются задачи управления, в которых центр изменяет индивидуальные характеристики деятельности агентов. Задачи стимулирования, в которых центр стремится максимизировать общественное благосостояние в моделях с эффектом стратегической дополнителности, рассмотрены в [73, 113] (в том числе для игры координации [115]). Задачи определения цен монополистом при наличии локальных экстерналий потребления рассмотрены в [110, 111], где исследовалась взаимосвязь между центральностью потребителей в сети и ценами и объемами, которые им предлагает монополист.

3.1.2. Управление структурой

Управление структурой корректирует уровень активности путем изменения структуры сети. Создание или удаление связей при таком управлении влияет на центральность агентов, что приводит к изменению равновесия. Исследователи изучают оптимальные сети с точки зрения центра. Авторы [64] показали, что среди простых сетей, максимизирующих вогнутую функцию центра, выделяется класс «вложенных расщепляемых графов» (англ. *nested split graph, NSG*). В [121] показано, что любая сеть, не являющаяся NSG, допускает создание связей между агентами, улучшающее благосостояние в линейно-квадратичной игре на сети.

3.1.3. Управление в условиях неопределенности

Многие авторы прибегают к анализу устойчивости предложенных методов управления относительно внешних возмущений или вероятностной неопределенности (например, [73, 78, 127, 128] и др.). Важно, что данные о самой структуре сети зачастую труднодоступны (см. например, [129, 130]), в связи с чем возник ряд работ, моделирующих как вероятностную, так и игровую неопределенность о сетевой структуре.

Так, в [112] центр выбирает оптимальный уровень цен для агентов, располагая информацией только о распределении по степеням вершин сети. Другой случай: структура сети является наблюдаемой, но местоположение или личность агентов – это частная информация [131]. Иными словами, центр не в состоянии отличить сети, идентичные с точностью до перестановки вершин. Существенным в данном дизайне игры является то, что вектор x^* равновесных ответов игроков теперь является контрактом, который центр предлагает агентам. Авторы предъявляют классы сетевых структур, для которых оптимальные контракты центра совместимы со стимулами агентов и их коалиций.

3.1.4. Идентификация сети

Одной из важнейших задач является задача идентификации сети. Существует несколько методов, позволяющих решить эту задачу на основе данных о серии исходов игры, основанных на статистическом подходе (графовые методы регуляризации) [132], методах оптимизации [133] и методах машинного обучения [134]. Отдельное направление исследований – решение задач двух-

уровневой оптимизации¹³ [136], в которой предполагается, что наблюдаемые равновесные ответы игроков возникают в результате оптимизации агентами структуры взаимодействия с точки зрения функции общественного благосостояния.

Другой подход идентификации сети основан на информации о динамике наилучших ответов игроков и решении задачи управления [137]. Центр не знает структуры сети в игре, но имеет возможность наблюдать за наилучшими ответами игроков и манипулировать действиями некоторых из них. Авторы показывают, что критерий идентифицируемости структуры сети эквивалентен ранговому критерию управляемости системы, приведенной к специальному виду, и применяют алгоритм [138], разработанный для идентификации устойчивых линейных систем.

3.2. Управление в линейно-квадратичной игре на сети

Возможно, первой и наиболее исследованной с точки зрения задач управления является линейно-квадратичная игра на сети, для которой существует множество постановок задач управления (см. [39, 118] и ссылки выше). Ниже для данной игры будет рассмотрено несколько задач, решение которых наглядно демонстрирует особенности и специфику задач управления в играх с линейным наилучшим ответом. Выигрыш игроков в модели:

$$(42) \quad v_i = x_i \left(b_i + \beta \sum_{j=1}^n g_{ij} x_j \right) - \frac{x_i^2}{2},$$

а равновесие в игре:

$$x^* = (I - \beta G)^{-1} b.$$

Исторически первой задачей была задача выявления ключевого игрока (англ. key player problem). Ключевой игрок – это игрок, удаление которого оказывает наибольшее влияние на совокупный результат. Пусть G – исходная (симметричная) матрица смежности, G^{-i} – новая матрица, полученная из матрицы G путем заполнения нулями строки и столбца, соответствующих i -ой вершине. Тогда задача центра: $\max_{i \in N} \left[\sum_j x_j^*(G) - \sum_j x_j^*(G^{-i}) \right]$ или, что эквивалентно,

$$(43) \quad \min_{i \in N} \sum_{j=1}^n x_j^*(G^{-i}).$$

Пусть $M = \{m_{ij}\} = (I - \beta G)^{-1}$, а $k = \{k_i\} = (I - \beta G)^{-1} \mathbf{1}$. Авторами вводится специальный показатель центральности (англ. intercentrality measure), учи-

¹³ Исследование задачи двухуровневой оптимизации восходит к исследованию игр Штакельберга, где внешняя (или внутренняя) задача оптимизирует действия лидера (или последователя) [135].

тывающий и индивидуальную центральность игроков, и вклад в центральность других:

$$c_i = \frac{k_i^2}{m_{ii}}.$$

Авторы показали, что вершина с наибольшим значением c_i решает задачу (43).

Другая задача была рассмотрена в [73], это задача стимулирования (англ. incentive-targeting problem): центр стремится максимизировать функцию общественного благосостояния в равновесии:

$$(44) \quad W = \sum_{i=1}^n v_i = \frac{1}{2} x^T x \longrightarrow \max_b.$$

Таким образом, центр вносит изменения в предельный выигрыш игроков, не зависящий от действий соседей $\hat{b} \rightarrow b$, что интерпретируется как изменение стимулов игроков (например, денежные субсидии фирмам). Бюджетное ограничение центра:

$$(45) \quad K(b, \hat{b}) = \sum_{i=1}^n (b_i - \hat{b}_i)^2 \leq C \sim n.$$

Решением (44) является эффективная сетевая эвристика (англ. network heuristic):

$$(46) \quad \hat{b}_{nh} = b + \sqrt{C} \mu_{1(n)},$$

где $\mu_{1(n)}$ – собственный вектор матрицы G , соответствующий максимальному (минимальному) собственному значению для случая положительных (отрицательных) значений коэффициента β .

Как было указано выше, выбор целевой функции центра оказывает значительное влияние на результат. Если в данной задаче вместо максимизации суммы выигрышей (44) перейти к максимизации агрегированного результата участников

$$W = \sum_{i=1}^n x_i \longrightarrow \max_b,$$

решением будет распределение бюджета, пропорциональное индивидуальному вкладу игроков:

$$\hat{b}_{nh} = b + \sqrt{C} x^*.$$

Разница между функциями состоит в том, что сумма выигрышей учитывает и сами действия, и их различия: $\sum_i v_i = \frac{1}{n} \sum_i x_i^2 = \hat{x}^2 + \sigma^2$, где \hat{x} – среднее, σ^2 – дисперсия.

Предложенная функция затрат (45) обладает рядом свойств, позволяющих авторам распространить полученные результаты на некоторые другие функции [139]. Одним из выделяющихся случаев является пример линейных затрат центра:

$$K(b, \hat{b}) = \sum_{i=1}^n |b_i - \hat{b}_i| \leq C \sim n.$$

В этой ситуации решение – передать весь бюджет единственному игроку i^* , $\hat{b}_{i^*} = b_{i^*} + C$, который выбирается исходя из вклада игроков в результат вмешательства центра.

Интересно провести сравнение решений задачи стимулирования для моделей локального агрегирования и усреднения. Для достижения социального оптимума без ограничений на бюджет в линейно-квадратичной игре

$$(47) \quad \sum_{i=1}^n v_i = \sum_{i=1}^n \left[(b_i + s_i)x_i + \beta \sum_{j=1}^n g_{ij}x_i x_j - \frac{x_i^2}{2} \right] \rightarrow \max_s$$

центру необходимо выбрать $s_i^O = \beta \sum_j g_{ij}x_j$. Исходя из свойств игры эта величина будет всегда положительна, а центр будет субсидировать более центральных игроков в сети.

Как было показано ранее, в модели социальных норм агенты создают как положительные, так и отрицательные экстерналии для своих соседей. Как результат, в задаче стимулирования [46] агентов

$$(48) \quad \sum_{i=1}^n v_i = \sum_{i=1}^n \left[(b_i + s_i)x_i - \frac{\theta}{2} \left(x_i - \sum_{j=1}^n \frac{g_{ij}}{d_i} x_j \right)^2 - \frac{x_i^2}{2} \right] \rightarrow \max_s,$$

решением которой является вектор s^O , состоящий из компонент

$$(49) \quad s_i^O = \beta \sum_{j=1}^n \frac{g_{ij}}{d_i} \left(x_j - \sum_{k=1}^n \frac{g_{jk}}{d_j} x_k \right),$$

центр субсидирует (облагает налогом) тех агентов, чьи соседи прилагают усилия выше (ниже) своих социальных норм (в отличие от линейно-квадратичной игры, в которой центр вынужден всегда стимулировать агентов из-за создаваемых ими положительных экстерналий). Другими словами, центру необходимо субсидировать агентов, прилагающих усилия ниже, чем в среднем прилагают их соседи, и облагать налогом тех, кто прилагает усилия выше, чем их соседи.

Важно отметить, что изменение исходного вектора b индивидуальных характеристик до последнего момента подразумевалось как задача с ненулевым бюджетом, в то время как в реальных приложениях имеет место ситуация, в

которой центр перераспределяет ресурсы между агентами без дополнительных ресурсов. Условию сбалансированного бюджета т.е. корректирующим субсидиям и налогам (англ. Pigouvian tax) посвящена работа [20].

В [63, 119] рассматривается задача нахождения структуры взаимодействия, максимизирующей целевую функцию центра. С ростом β решения задач центра по максимизации агрегированных результатов и суммы выигрышей совпадают, а среди всех сетей максимум доставляют те, чей спектральный радиус принимает наибольшее значение. Случай задачи управления комбинацией нескольких активностей (когда x_i становится вектором) рассмотрен в [114]. Случаи одновременного использования нескольких различных стратегий управления рассмотрены, например, в [140, 141].

4. Заключение

В представленной работе подробно рассматриваются вопросы управления стратегическим взаимодействием агентов на сети в случае, когда зависимость агента от действий других описывается линейной функцией наилучших ответов. Равновесие Нэша в таких играх не является социальным оптимумом из-за наличия экстерналий, что мотивирует разработку механизмов управления, таких как выявление ключевых агентов, стимулирование агентов, создание или удаление связей, направленных на увеличение эффективности коллективного взаимодействия.

Некоторые из направлений дальнейших исследований, активно развивающихся в данный момент, заслуживают отдельного внимания.

4.1. Нелинейный наилучший ответ

Задачам управления в играх с нелинейным наилучшим ответом посвящены работы [142–144]. В [34] предложена общая модель сетевых эффектов, нелинейный наилучший ответ в которой включает в себя модель локального усреднения в качестве частного случая. Нелинейность реализована в виде CES-функции с параметром эластичности β :

$$(50) \quad \bar{x} = \left(\sum_{j=1}^n \frac{g_{ij}}{d_i} x_j^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}},$$

а наилучший ответ игрока принимает вид:

$$(51) \quad BR_i = (1 - \lambda_2)b_i + (\lambda_1 + \lambda_2) \left(\sum_{j=1}^n \frac{g_{ij}}{d_i} x_j^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}},$$

где λ_1 соответствует интенсивности эффекта перетока, а λ_2 – эффекта конформизма. При $\beta = 1$ возникает модель ЛИМ. Когда β очень велико, возникает

модель $\bar{x}_{-i} = \max_j \{x_j\}$, в которой агент ориентируется только на того своего соседа по сети, который прилагает наибольшие усилия, а когда β принимает высокие отрицательные значения, преобладает модель $\bar{x}_{-i} = \min_j \{x_j\}$, в которой агент ориентируется на соседа, демонстрирующего наименьшие усилия.

4.2. Игры на мультиплексных сетях

Во многих случаях ранее рассматривалась взаимосвязь агентов в рамках одной сети. Однако зачастую агенты поддерживают множество типов взаимоотношений, таких как сотрудничество, взаимопомощь, заимствование и др. [145]. Одним из способов описания такого взаимодействия являются мультиплексные сети: многослойные сети, в которых запрещена связь между вершинами из разных слоев, и которые призваны описывать сосуществование различных типов отношений между агентами [146]. Анализу таких игр посвящены работы [147, 148].

4.3. Сети с большим числом вершин и графовые функции

Некоторые сети, встречающиеся в прикладных исследованиях, настолько велики, что анализ становится затруднительным или невозможным [149]. В [150] был предложен инструмент для анализа больших сетей и асимптотического поведения последовательности графов с растущим числом вершин. Графовая функция (англ. graph function, graphon) – объект, который обобщает дискретные графы на случай больших сетей, представленных в непрерывном пределе. В [151] предложены меры центральности для таких объектов, а в [127] описанные выше игры были перенесены на случай предельного объекта: игроки теперь представлены как популяция на интервале $[0, 1]$, а вероятность связи между ними описывается через графовую функцию $W(i, j)$, определенную на единичном квадрате. Динамика в таких играх исследуется в [152], задачи управления рассмотрены в [141, 153].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Asch S.E.* Social psychology. Oxford University Press, 1987.
2. *Merton R.K.* Social theory and social structure. Free Press, 1968.
3. *Katz M.L., Shapiro C.* Network externalities, competition, and compatibility // The American Economic Review. 1985. V. 75. No. 3. P. 424–440.
4. *Farrell J., Saloner G.* Standardization, compatibility, and innovation // RAND J. Econom. 1985. P. 70–83.
5. *Klausner M.* Corporations, corporate law, and networks of contracts // Va. L. Rev. 1995. V. 81. P. 7–57.
6. *Lemley M.A., McGowan D.* Legal implications of network economic effects // Calif. L. Rev. 1998. V. 86. P. 4–79.
7. *Амелина Н.О., Ананьевский М.С., Андриевский Б.Р. и др.* Проблемы сетевого управления. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2015. 392 с.

8. *Проскурников А.В., Фрадков А.Л.* Задачи и методы сетевого управления // *АиТ.* 2016. № 10. С. 3–39.
9. *Козьякин В.С., Кузнецов Н.А., Чеботарев П.Ю.* Консенсус в асинхронных мультиагентных системах. I // *АиТ.* 2019. № 4. С. 3–40.
10. *Козьякин В.С., Кузнецов Н.А., Чеботарев П.Ю.* Консенсус в асинхронных мультиагентных системах. II // *АиТ.* 2019. № 5. С. 3–31.
11. *Козьякин В.С., Кузнецов Н.А., Чеботарев П.Ю.* Консенсус в асинхронных мультиагентных системах. III // *АиТ.* 2019. № 6. С. 3–27.
12. *Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства. 3-е изд., перераб. и дополн. М.: МЦНМО, 2018. 224 с.
13. *Manski C.F.* Identification of endogenous social effects: The reflection problem // *Rev. Econom. Stud.* 1993. V.60. No. 3. P. 531–542.
14. *Poldin O., Yudkevich M.* Peer-effects in higher education: a review of theoretical and empirical approaches // *Voprosy obrazovaniya/Educational Studies Moscow.* 2011. No. 4. P. 106–123.
15. *Dokuka S., Valeeva D., Yudkevich M.* How academic achievement spreads: The role of distinct social networks in academic performance diffusion // *Plos one.* 2020. V. 15. No. 7. e0236737
16. *Bramouille Y., Djebbari H., Fortin B.* Identification of peer effects through social networks // *Journal of econometrics.* 2009. V. 150. No. 1. P. 41–55.
17. *Liebowitz S.J., Margolis S.E.* Network externality: An uncommon tragedy // *J. Econom. Perspect.* 1994. V. 8. No. 2. P. 133–150.
18. *Полтерович В.М.* Интернет, гражданская культура и эволюция механизмов координации // *Вестник ЦЭМИ РАН.* 2018. Т. 1. № 1.
19. *Konig M.D., Liu X., Zenou Y.* R&D networks: Theory, empirics, and policy implications // *Review of Economics and Statistics.* 2019. V. 101. No. 3. P. 476–491.
20. *Galeotti A., Golub B., Goyal S., Talam'as E., Tamuz O.* Taxes and market power: A principal components approach // *arXiv preprint arXiv:2112.08153.* 2021.
21. *Zenou Y.* Peer vs. Network Effects: Microfoundations, Identification, and Beyond // Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=5705542>. 2025.
22. *Moffitt R.A.* Policy Interventions, Low-Level Equilibria, and Social Interactions // *Social Dynamics.* 2001. V. 4. P. 45.
23. *Angrist J.D.* The perils of peer effects // *Labour Economics.* 2014. V. 30. P. 98–108.
24. *Bramouille Y., Djebbari H., Fortin B.* Peer effects in networks: A survey // *Annual Review of Economics.* 2020. V. 12. P. 603–629.
25. *Advani A., Malde B.* Methods to identify linear network models: a review // *Swiss journal of economics and statistics.* 2018. V. 154. P. 1–16.
26. *Villeval M.C.* Performance Feedback and Peer Effects // *Handbook of Labor, Human Resources and Population Economics.* 2020. 38 p.
27. *Krupka E.L., Weber R.A.* Identifying social norms using coordination games: Why does dictator game sharing vary? // *Journal of the European Economic Association.* 2013. V. 11. No. 3. P. 495–524.

28. *Elliott M.L., Goyal S., & Teytelboym A.* Networks and economic policy // Oxford Review of Economic Policy. 2019. V. 35. No. 4. C. 565–585.
29. *Bhadra S., Schweinberger M.* Causal Inference Under Network Interference // arXiv preprint arXiv:2508.06808. 2025.
30. *Jackson M.O., Rogers B.W., Zenou Y.* Networks: An economic perspective // arXiv preprint arXiv:1608.07901. 2016.
31. *Valente T.W.* Network interventions // Science. 2012. V. 337. No. 6090. P. 49–53.
32. *Sokolov B.* Causal Estimands for Policy Evaluation and Beyond // SocArXiv. 2025.
33. *Sacerdote B.* Peer effects with random assignment: Results for Dartmouth roommates // Quart. J. Econom. 2001. V. 116. No. 2. P. 681–704.
34. *Boucher V., Rendall M., Ushchev P., Zenou Y.* Toward a general theory of peer effects // Econometrica. 2024. V. 92. No. 2. P. 543–565.
35. *Dimmock S.G., Gerken W.C., Graham N.P.* Is fraud contagious? Coworker influence on misconduct by financial advisors // The Journal of Finance. 2018. V. 73. No. 3. P. 1417–1450.
36. *Carrell S.E., Malmstrom F.V., West J.E.* Peer effects in academic cheating // J. Human Res. 2008. V. 43. No. 1. P. 173–207.
37. *Крезовец Е.В., Польдин О.В.* Социальные сети студентов: факторы формирования влияния на учебу // Вопросы образования. 2013. № 4. С. 121–138.
38. *Calvo-Armengol A., Zenou Y.* Social networks and crime decisions: The role of social structure in facilitating delinquent behavior // International Economic Review. 2004. V. 45. No. 3. P. 939–958.
39. *Ballester C., Calvo-Armengol A., Zenou Y.* Who's who in networks. Wanted: The key player // Econometrica. 2006. V. 74. No. 5. P. 1403–1417.
40. *Dimant E.* Contagion of pro-and anti-social behavior among peers and the role of social proximity // Journal of Economic Psychology. 2019. V. 73. P. 66–88.
41. *Cai J., Szeidl A.* Interfirm relationships and business performance // Quart. J. Econom. 2018. V. 133. No. 3. P. 1229–1282.
42. *Glaeser E.L., Sacerdote B.I., Scheinkman J.A.* The social multiplier // J. Eur. Econom. Associat. 2003. V. 1. No. 2/3. P. 345–353.
43. *Кужушкин Н.* Равновесие по Нэшу в играх с аддитивным агрегированием // Экономика и математические методы (ЭММ). 2000. Т. 36. № 4.
44. *Jensen M.K.* Aggregative games // Handbook of Game Theory and Industrial Organization. V. I. Edward Elgar Publishing, 2018. P. 66–92.
45. *Patacchini E., Zenou Y.* Juvenile delinquency and conformism // The Journal of Law, Economics, & Organization. 2012. V. 28. No. 1. P. 1–31.
46. *Ushchev P., Zenou Y.* Social norms in networks // Journal of Economic Theory. 2020. V. 185. P. 104969.
47. *Жулякова Л.Ю., Кузнецов О.П.* Теория ресурсных сетей. М.: Издательский Центр РИОР, 2017. 283 с.
48. *Bulow J.I., Geanakoplos J.D., Klemperer P.D.* Multimarket oligopoly: Strategic substitutes and complements // Journal of Political economy. 1985. V. 93. No. 3. P. 488–511.

49. *Vives X., Vravosinos O.* Strategic complementarity in games // Journal of Mathematical Economics. 2024. P. 103005.
50. *Новиков Д.А., Чартишвили А.Г.* Информационное равновесие: точечные структуры информированности // *АиТ.* 2003. № 10. С. 111–122.
51. *Bramouille Y., Kranton R.* Public goods in networks // Journal of Economic theory. 2007. V. 135. No. 1. P. 478–494.
52. *Юджевич М., Подколзина Е., Рябина А.* Основы теории контрактов: модели и задачи. М.: ГУ ВШЭ, 2002. 352 с.
53. *French Jr. J.R.* A formal theory of social power // Psychological review. 1956. V. 63. No. 3. P. 1–81.
54. *DeGroot M.H.* Reaching a consensus // Journal of the American Statistical association. 1974. V. 69. No. 345. P. 118–121.
55. *Golub B., Jackson M.O.* How homophily affects the speed of learning and best-response dynamics // The Quarterly Journal of Economics. 2012. V. 127. No. 3. P. 1287–1338.
56. *Friedkin N.E., Johnsen E.C.* Social influence and opinions // Journal of mathematical sociology. 1990. V. 15. No. 3/4. P. 193–206.
57. *Ghaderi J., Srikanth R.* Opinion dynamics in social networks with stubborn agents: Equilibrium and convergence rate // Automatica. 2014. V. 50. No. 12. P. 3209–3215.
58. *Golub B., Morris S.* Expectations, networks, and conventions // arXiv preprint arXiv:2009.13802. 2020.
59. *Morris S., Shin H.S.* Social value of public information // Amer. Econom. Rev. 2002. V. 92. No. 5. P. 1521–1534.
60. *Bonacich P.* Power and centrality: A family of measures // Amer. J. Soc. 1987. V. 92. No. 5. P. 1170–1182.
61. *Belhaj M., Bramouille Y., Deroian F.* Network games under strategic complementarities // Games and Economic Behavior. 2014. V. 88. P. 310–319.
62. *Helsley R.W., Zenou Y.* Social networks and interactions in cities // Journal of Economic Theory. 2014. V. 150. P. 426–466.
63. *Corbo J., Calvo-Armengol A., Parkes D.C.* The Importance of Network Topology in Local Contribution Games // Lecture Notes in Computer Science. 2007. P. 388–395.
64. *Konig M.D., Tessone C.J., Zenou Y.* Nestedness in networks: A theoretical model and some applications // Theoretical Economics. 2014. V. 9. No. 3. P. 695–752.
65. *Singh N., Vives X.* Price and quantity competition in a differentiated duopoly // Rand J. Econom. 1984. P. 546–554.
66. *Гераськин М.И.* Обзор новейших достижений в теории игр олигополии // *АиТ.* 2023. № 6. С. 325.
67. *Korgin N.* Introduction to theory of control in organizations for kids via interactive games // IFAC-PapersOnLine. 2015. V. 48. No. 29. P. 289–294.
68. *Bimpikis K., Ehsani S., Ilklic R.* Cournot competition in networked markets // Management Science. 2019. V. 65. No. 6. P. 2467–2481.
69. *Губко М.В., Новиков Д.А.* Теория игр в управлении организационными системами. М.: СИНТЕГ, 2002.

70. *Федянин Д.Н., Чхартишвили А.Г.* Об одной модели информационного управления в социальных сетях // Управление большими системами: сборник трудов. 2010. № 31. С. 265–275.
71. *Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Рефлексия и управление М.: Изд-во физико-математической литературы, 2012.
72. *Петров И.В., Чхартишвили А.Г.* Задача стимулирования в рефлексивной игре с точечной структурой информированности // Проблемы управления. 2024. № 5. С. 42–48.
73. *Galeotti A., Golub B., Goyal S.* Targeting interventions in networks // *Econometrica*. 2020. V. 88. No. 6. P. 2445–2471.
74. *Monderer D., Shapley L.S.* Potential games // *Games and economic behavior*. 1996. V. 14. No. 1. P. 124–143.
75. *Sandholm W.H.* Population games and evolutionary dynamics. MIT press, 2010.
76. *Parise F., Ozdaglar A.* A variational inequality framework for network games: Existence, uniqueness, convergence and sensitivity analysis // *Games and Economic Behavior*. 2019. V. 114. P. 47–82.
77. *Jackson M.O., Zenou Y.* Games on networks / *Handbook of game theory with economic applications*. V. 4. Elsevier, 2015. P. 95–163.
78. *Bramouille Y., Kranton R., D'amours M.* Strategic interaction and networks // *Amer. Econom. Rev.* 2014. V. 104. No. 3. P. 898–930.
79. *Melo E.* A variational approach to network games. 2018. No. 2018.05.
80. *Zenou Y., Zhou J.* Sign-equivalent transformations and equilibrium systems: Theory and applications // Unpublished manuscript, Monash University. 2024.
81. *Sharkey K.J.* A control analysis perspective on Katz centrality // *Scientific reports*. 2017. V. 7. No. 1. P. 17247.
82. *Bramouille Y., Kranton R.* Games Played on Networks // *Oxford Handbook on the Economics of Networks*. 2016. Chap-5.
83. *Опоицев В.И.* Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. М.: Наука, 1977.
84. *Bervoets S., Faure M.* Stability in games with continua of equilibria // *Journal of Economic Theory*. 2019. V. 179. P. 131–162.
85. *Bayer P., Herings P.J.-J., Peeters R.* Farsighted manipulation and exploitation in networks // *Journal of Economic Theory*. 2021. V. 196. P. 105311.
86. *Bayer P., Kozics G., Sz'oke N.G.* Best-response dynamics in directed network games // *Journal of Economic Theory*. 2023. V. 213. P. 105720.
87. *Альпин Ю.А.* Теорема Харари о знаковых графах и обратимость цепей Маркова // *Записки научных семинаров ПОМИ*. 2013. Т. 419. С. 5–15.
88. *Альпин Ю.А., Башкин И.В.* Неотрицательные цепные матрицы и условие Колмогорова // *Записки научных семинаров ПОМИ*. 2021. Т. 504. С. 5–20.
89. *Acemoglu D., Carvalho V.M., Ozdaglar A., Tahbaz-Salehi A.* The network origins of aggregate fluctuations // *Econometrica*. 2012. V. 80. No. 5. P. 1977–2016.
90. *Acemoglu D., Ozdaglar A., Tahbaz-Salehi A.* Networks, shocks, and systemic risk : tech. rep. / National Bureau of Economic Research. 2015.

91. Дюкалов А.Н., Илютович А.Е. Асимптотические свойства оптимальных траекторий экономической динамики // *АиТ*. 1973. Т. 34. № 3. С. 423–434.
92. Дюкалов А.Н., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Теория управления и экономические системы. I. Проблема описания // *АиТ*. 1974. Т. 35. № 5. С. 797–810.
93. Дубовский С.В., Уздемир А. Критерии оптимальности и вариационные подходы в динамических моделях экономики // *АиТ*. 1974. Т. 35. № 6. С. 951–958.
94. Дубовский С.В., Дюкалов А.Н., Иванов Ю.Н., и др. О построении оптимального экономического плана // *АиТ*. 1972. Т. 33. № 8. С. 1336–1349.
95. Новиков Д.А. Игры и сети // *Математическая теория игр и ее приложения*. 2010. Т. 2. № 1. С. 107–124.
96. Goyal S. *Connections: an introduction to the economics of networks*. Princeton University Press, 2012.
97. Губко М.В. Управление организационными системами с сетевым взаимодействием агентов. I // *АиТ*. 2004. № 8. С. 115–132.
98. Губко М.В. Управление организационными системами с сетевым взаимодействием агентов. II // *АиТ*. 2004. № 9. С. 131–148.
99. Мазалов В., Чиркова Ю. *Сетевые игры*. СПб.: Лань, 2018.
100. Naghizadeh P., Liu M. Provision of public goods on networks: on existence, uniqueness, and centralities // *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*. 2017. V. 5. No. 3. P. 225–236.
101. Elliott M., Golub B. A network centrality approach to coalitional stability // Preprint, available at <http://www.mit.edu/bgolub/papers/centrality.pdf>. 2012.
102. Yan C. Cooperative solutions for network games with quadratic utilities // *Contributions to Game Theory and Management*. 2023. V. 16. No. 0. P. 282–294.
103. Дорофеева Ю.А. Теоретико-игровые модели динамики мнений // Автореферат. Петрозаводск, 2021. 30с.
104. Kozitsin I.V. Optimal control in opinion dynamics models: diversity of influence mechanisms and complex influence hierarchies // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2024. V. 181. P. 114728.
105. Jackson M.O. Inequality's economic and social roots: the role of social networks and homophily // Available at SSRN 3795626. 2021.
106. Siciliano M.D., Whetsell T.A. Strategies of network intervention: A pragmatic approach to policy implementation and public problem resolution through network science // arXiv preprint arXiv:2109.08197. 2021.
107. Robins G., Lusher D., Broccatelli C., et al. Multilevel network interventions: Goals, actions, and outcomes // *Social networks*. 2023. V. 72. P. 108–120.
108. Kempe D., Kleinberg J., Tardos E. Maximizing the spread of influence through a social network // *Proceedings of the ninth ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining*. 2003. P. 137–146.
109. Galeotti A., Goyal S. Influencing the influencers: a theory of strategic diffusion // *The RAND Journal of Economics*. 2009. V. 40. No. 3. P. 509–532.
110. Candogan O., Bimpikis K., Ozdaglar A. Optimal pricing in networks with externalities // *Operations Research*. 2012. V. 60. No. 4. P. 883–905.

111. *Bloch F., Qu'eron N.* Pricing in social networks // Games and economic behavior. 2013. V. 80. P. 243–261.
112. *Fainmesser I.P., Galeotti A.* Pricing network effects // The Review of Economic Studies. 2016. V. 83. No. 1. P. 165–198.
113. *Demange G.* Optimal targeting strategies in a network under complementarities // Games and Economic Behavior. 2017. V. 105. P. 84–103.
114. *Kor R., Zhou J.* Multi-activity influence and intervention // Games and Economic Behavior. 2023. V. 137. P. 91–115.
115. *Jeong D., Shin E.* Optimal influence design in networks // Journal of Economic Theory. 2024. V. 220. P. 105877.
116. *Belhaj M., Deroian F., Safi S.* Targeting in networks under costly agreements // Games and Economic Behavior. 2023. V. 140. P. 154–172.
117. *Dasaratha K., Golub B., Shah A.* Incentive Design With Spillovers // Available at SSRN 4853054. 2024.
118. *Borgatti S.P.* Identifying sets of key players in a social network // Computational & Mathematical Organization Theory. 2006. V. 12. P. 21–34.
119. *Corbo J., Calvo-Armengol A., Parkes D.* A study of nash equilibrium in contribution games for peer-to-peer networks // ACM SIGOPS Operating Systems Review. 2006. V. 40. No. 3. P. 61–66.
120. *Golub B., Lever C.* The leverage of weak ties: How linking groups affects inequality // Preprint, available at <http://www.stanford.edu/?bgolub/papers/intergroup.pdf>. 2010.
121. *Belhaj M., Bervoets S., Deroian F.* Efficient networks in games with local complementarities // Theoretical Economics. 2016. V. 11. No. 1. P. 357–380.
122. *Матвеевко В.Д., Королев А.В.* Равновесия в сетевой игре с производством и с экстерналиями знаний // Математическая теория игр и ее приложения. 2016. Т. 8. № 1. С. 106137.
123. *Hiller T.* Peer effects in endogenous networks // Games and Economic Behavior. 2017. V. 105. P. 349–367.
124. *Harkins A.* Network Comparative Statics // Available at SSRN 3847211. 2020.
125. *Li X.* Designing weighted and directed networks under complementarities // Games and Economic Behavior. 2023. V. 140. P. 556–574.
126. *Sun Y., Zhao W., Zhou J.* Structural interventions in networks // Int. Econom. Rev. 2023. V. 64. No. 4. P. 1533–1563.
127. *Parise F., Ozdaglar A.* Graphon games: A statistical framework for network games and interventions // Econometrica. 2023. V. 91. No. 1. P. 191–225.
128. *Galeotti A., Golub B., Goyal S., et al.* Robust Market Interventions // arXiv preprint arXiv:2411.03026. 2024.
129. *Breza E., Chandrasekhar A.G., McCormick T.H., et al.* Using aggregated relational data to feasibly identify network structure without network data // American Economic Review. 2020. V. 110. No. 8. P. 2454–2484.
130. *Viviano D.* Policy targeting under network interference // Review of Economic Studies. 2024. rdae041.

131. *Bloch F., Shabayek S.* Targeting in social networks with anonymized information // Games and Economic Behavior. 2023. V. 141. P. 380–402.
132. *Lake B., Tenenbaum J.* Discovering structure by learning sparse graphs // Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society. V. 32. 2010.
133. *Leng Y., Dong X., Wu J., Pentland A.* Learning quadratic games on networks // International Conference on Machine Learning. PMLR. 2020. P. 5820–5830.
134. *Rossi E., Monti F., Leng Y., et al.* Learning to infer structures of network games // International Conference on Machine Learning. PMLR. 2022. P. 18809–18827.
135. *Hong M., Wai H.-T., Wang Z., Yang Z.* A two-timescale stochastic algorithm framework for bilevel optimization: Complexity analysis and application to actor-critic // SIAM Journal on Optimization. 2023. V. 33. No. 1. P. 147–180.
136. *Zhang C., Liu S., Wai H.-T., et al.* Network Games Induced Prior for Graph Topology Learning // arXiv preprint arXiv:2410.24095. 2024.
137. *Ding K., Chen Y., Wang L., Ren X., Shi G.* Network learning in quadratic games from best-response dynamics // IEEE/ACM Transactions on Networking. 2024.
138. *Jongeneel W., Sutter T., Kuhn D.* Efficient learning of a linear dynamical system with stability guarantees // IEEE Transactions on Automatic Control. 2022. V. 68. No. 5. P. 2790–2804.
139. *Galeotti A., Golub B., Goyal S.* Supplement to “Targeting interventions in networks” // Econometrica. 2020. V. 88. No. 6. P. 2445–2471.
140. *Kor R., Zhou J.* Welfare and distributional effects of joint intervention in networks // arXiv preprint arXiv:2206.03863. 2022.
141. *Petrov I.* Structural Interventions in Linear Best-Response Games on Random Graphs // IFAC-PapersOnLine. 2023. V. 56. No. 2. P. 2830–2833.
142. *Belhaj M., Deroian F.* Competing activities in social networks // The BE Journal of Economic Analysis & Policy. 2014. V. 14. No. 4. P. 1431–1466.
143. *Allouch N.* On the private provision of public goods on networks // Journal of Economic Theory. 2015. V. 157. P. 527–552.
144. *Cai J., Zhang C., Wai H.-T.* Optimal Pricing for Linear-Quadratic Games With Nonlinear Interaction Between Agents // IEEE Control Systems Letters. 2024.
145. *Chandrasekhar A.G., Chaudhary V., Golub B., Jackson M.O.* Multiplexing in Networks and Diffusion // arXiv preprint arXiv:2412.11957. 2024.
146. *Cheng C., Huang W., Xing Y.* A theory of multiplexity: Sustaining cooperation with multiple relations // Available at SSRN 3811181. 2021.
147. *Ebrahimi R., Naghizadeh P.* United We Fall: On the Nash Equilibria of Multiplex and Multilayer Network Games // arXiv preprint arXiv:2402.06108. 2024.
148. *Zenou Y., Zhou J.* Games on Multiplex Networks // Available at SSRN 4772575. 2024.
149. *D’Souza R.M., di Bernardo M., Liu Y.-Y.* Controlling complex networks with complex nodes // Nature Reviews Physics. 2023. V. 5. No. 4. P. 250–262.
150. *Lovasz L.* Large networks and graph limits // Amer. Math. Soc. 2012. V. 60.
151. *Avella-Medina M., Parise F., Schaub M.T., Segarra S.* Centrality measures for graphons: Accounting for uncertainty in networks // IEEE Transactions on Network Science and Engineering. 2018. V. 7. No. 1. P. 520–537.

152. *Al Taha F., Rokade K., Parise F.* Gradient dynamics in linear quadratic network games with time-varying connectivity and population fluctuation // 62nd IEEE Conference on Decision and Control (CDC). IEEE. 2023. P. 1991–1996.
153. *Parise F., Ozdaglar A.* Analysis and interventions in large network games // Annual Review of Control, Robotics, and Autonomous Systems. 2021. V. 4. No. 1. P. 455-486.

Статъа представена к публикации членом редколлегии А.Г. Чхртишвили.

Поступила в редакцию 11.02.2025

После доработки 20.11.2025

Принята к публикации 25.11.2025