

Управление в технических системах

© 2026 г. А.Ю. ГОЛУБИН, канд. физ.-мат. наук (agolubin@hse.ru)

(Национальный исследовательский университет

“Высшая школа экономики”, Москва;

Центр информационных технологий в проектировании РАН,

Московская обл., Одинцово)

В.Н. ГРИДИН, д-р техн. наук (info@ditc.ras.ru)

(Центр информационных технологий в проектировании РАН,

Московская обл., Одинцово)

ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ СТРАХОВАНИЯ И ИНВЕСТИРОВАНИЯ В МОДЕЛИ ИНДИВИДУАЛЬНОГО РИСКА С ФОНОВЫМИ РИСКАМИ¹

Изучена одношаговая задача оптимального выбора страховщиком дележа риска между ним и группой клиентов при одновременном выборе портфеля инвестиций на рынке из n рискованных активов, имеющих случайные доходности, и одного безрискового актива. Предполагается наличие «фоновых рисков» (background risks), т.е. внешних случайных факторов, влияющих на ущербы страхователей, и систематических рисков, влияющих на доходности активов. Целевой функционал есть функционал типа Марковица, т.е. зависящий лишь от первых двух моментов финального капитала страховщика. Показано, что оптимальное страхование принадлежит классу stop-loss страхований. Найдены уравнения для определения значений параметров в функции дележа риска и в оптимальном инвестиционном портфеле. Решен численный пример.

Ключевые слова: оптимальное страхование, оптимальное инвестирование, функционал Марковица, фоновый риск.

DOI: 10.7868/S241397726060046

1. Введение

Один из первых результатов [1] исследования моделей с фоновыми рисками показал, что без предположения о наличии фоновых рисков возникает расхождение между теоретическими и эмпирическими данными при решении различных задач финансовой математики. Позже появился целый ряд работ по выбору инвестиционного портфеля, максимизирующего ожидаемую полезность финального капитала при наличии фоновых рисков. В качестве примера можно привести статью [2], где показано, что «несправедливый» (unfair) внешний риск (с отрицательным средним) увеличивает неприятие риска в функции полезности инвестора. Характерная черта таких постановок задач – отсутствие зависимости между фоновыми рисками и доходностями активов.

¹ Исследование выполнено в рамках государственного задания, (проект FFNR-2024-0003).

Однако в [3] показано наличие существенной корреляции доходностей активов и определенных фоновых рисков.² Авторы [4] исследовали влияние фонового риска на выбор портфеля и эффективную границу в рамках критериев «среднее-дисперсия». В обзоре [5] описаны существующие результаты в рамках подходов: «среднее-дисперсия» и ожидаемая полезность при наличии аддитивных внешних рисков.

Страхование как инструмент уменьшения ущерба от фоновых рисков было использовано в динамических моделях с непрерывным временем. В [6] изучены решения по формированию портфеля из рискованных активов и управлению потреблением при фоновом риске. С помощью метода динамического программирования было найдено, что оптимальное страхование хеджирует риски инвестирования и устанавливает баланс между ростом и волатильностью потребления. В [7] была исследована задача выбора страхования, уменьшающего ущерб от внешнего кусочно-постоянного процесса фонового риска; найдена характеристика функции, двойственной к функции Беллмана, как решения уравнения Гамильтона–Беллмана–Якоби. В близкой постановке авторы [8] изучали с использованием метода динамического программирования задачу выбора фирмой стратегии страхования от скачкообразного процесса сбоя в продуктивности и от природных бедствий, но без возможности инвестирования.

В представленной статье исследуется одношаговая задача выбора страховщиком оптимального страхования для группы страхователей (клиентов) – так называемая модель индивидуального риска. При этом одновременно страховщик выбирает инвестиционный портфель для рынка ценных бумаг с имеющимся безрисковым активом. Максимизируемым функционалом является функционал типа Марковица [9], т.е. зависящий лишь от первых двух моментов финального капитала, который складывается из капитала, полученного от страховой сделки, и капитала, заработанного на инвестициях. Предполагается наличие фонового риска, влияющего на размер ущерба клиентов, и фонового риска, влияющего на общую доходность инвестиций. Полученные результаты отличаются от предыдущих в нескольких отношениях. Во-первых, вместо страхования только фоновых рисков здесь найдена оптимальная функция дележа риска для группы клиентов. Во-вторых, исследована задача выбора как страхования, так и инвестиционного портфеля. В-третьих, широко используемая в финансовой математике нормальная аппроксимация риска здесь не используется, и, таким образом, полученные результаты являются в этом смысле «точными».

В разделе 2 описаны рынки страхования и инвестирования без фоновых рисков и при наличии фоновых рисков. Сформулирована оптимизационная задача с дисперсией в качестве меры риска. Раздел 3 посвящен нахождению

² Применительно к портфельной теории термин «систематические риски активов» более уместен, чем «фоновые риски». Но следуя сложившейся в большинстве статей практике, ниже будем использовать прилагательное «фондовый» для страховых и систематических инвестиционных рисков.

ее решения, причем оптимальное страхование и оптимальный портфель находятся как решения отдельных задач в силу особенностей целевого функционала. В разделе 4 дана формулировка аналогичной оптимизационной задачи, но с использованием стандартного отклонения как меры риска. Получены необходимые условия оптимальности. Разделы 5 и 6 содержат соответственно численный пример и заключительные замечания.

2. Формулировка задачи

2.1. Описание рынков инвестирования и страхования

Сначала рассмотрим инвестиционный рынок из $n + 1$ активов (см., например, [10]), где вектор доходностей равен $\bar{R} = (R_0, \dots, R_n)$ и фоновый риск отсутствует. Пусть $R_0 = m_0$ почти наверное (п.н.), т.е. это безрисковый актив. Отметим, что наличие такого актива позволяет не тратить весь начальный капитал $w > 0$ на рискованные инвестиции, например, при $m_0 = 1$ можно не инвестировать сумму wa_0 , а положить ее «в карман» (без учета инфляции). Обозначим через $\bar{a} = (a_0, \dots, a_n) \in R^{n+1}$ инвестиционный портфель, где a_i – доля в процентах от начального капитала $w > 0$, вкладываемая в i -ый актив. Типичным бюджетным ограничением является $\sum_{i=0}^n a_i = 1$. Это означает самофинансирование инвестора-страховщика и его возможность «коротких продаж», т.е. заимствование одних активов по текущим ценам с целью вложить деньги в другие с возмещением затем по ценам следующей котировки. Общая доходность есть $X_{\bar{a}} = w \sum_{i=0}^n a_i R_i \equiv w(\sum_{i=1}^n a_i (R_i - m_0) + m_0)$, где $w > 0$ – начальный капитал. После подстановки $a_0 = 1 - \sum_{i=1}^n a_i$ имеем среднюю общую доходность и дисперсию

$$\mu(a) = w \left(\sum_{i=1}^n a_i \Delta m_i + m_0 \right), \quad \text{где } \Delta m_i = m_i - m_0, \quad m_i = E R_i, \quad a \in R^n,$$

$$\sigma^2(a) = w^2 a C a^T,$$

где a^T обозначает транспонированную вектор-строку a . Введем естественные ограничения:

$$0 < m_0 < \min_{i=1, \dots, n} m_i,$$

ковариационная матрица рисков доходностей C размерности $n \times n$ положительно определена.

Перейдем к описанию рынка страхования. Пусть группа из l клиентов однородна, т.е. их ущербы X_1, \dots, X_l – независимые неотрицательные одинаково распределенные случайные величины (с.в.) с функцией распределения $F_1(x)$. Страховщик выбирает измеримую по Борелю функцию дележа $I(x) : 0 \leq I(x) \leq x, x \in [0, \infty)$, тогда доля ущерба i -го клиента, оплачиваемая страховщиком, равна $I(X_i)$. Начальный капитал страховщика $w > 0$; премия, т.е. взнос от клиента, определяется (см., например, [11]) по известному принципу среднего значения $d = (1 + \alpha) E I(X_1)$, где $\alpha > 0$ – заданный коэффициент накрутки.

2.2. Модель с фоновыми рисками

Теперь рассмотрим модель страхования и инвестирования с учетом фоновых рисков. Страховщик направляет свой начальный капитал w на инвестиции,³ и его финальный капитал складывается из дохода от страхования $S_1 = l(1 + \alpha)E I(X_1 + Z) - \sum_1^l I(X_j + Z)$ и дохода от инвестиций $S_2 = w(\sum_1^n a_i(R_i - m_0) + m_0) + V$. Здесь: Z – фоновый страховой риск такой, что $X_j^Z \stackrel{\text{def}}{=} X_j + Z \geq 0$ п.н.; V – инвестиционный фоновый риск, $0 < \sigma^2(V) < \infty$.

Замечание 1. В этой постановке ущербы клиентов X_j^Z , $j = 1, \dots, l$, оказываются одинаково распределенными, но не являются независимыми, поскольку с.в. Z входит в выражение для каждого ущерба. Более того, X_j и Z считаются, вообще говоря, зависимыми. Такая модель является нетипичной для задач «классической» актуарной математики (см., например, [11]), в которых предполагается независимость ущербов. Отметим, что одинаковые распределения с.в. X_j^Z , $j = 1, \dots, l$, предполагают одинаковые ковариации $cov(X_j, Z)$ для всех $j = 1, \dots, l$, поскольку $\sigma^2(X_j + Z) = \sigma^2(X_j) + \sigma^2(Z) + 2cov(X_j, Z)$. Следовательно, $cov(X_j^Z, X_i^Z) = cov(X_1^Z, X_2^Z)$ для всех $j \neq i$. Фоновые риски Z и V , влияющие соответственно на ущербы страхователей и общую доходность от инвестирования рискованных активов, рассматриваются как независимые. Это условие представляется обоснованным, поскольку здесь рынки страхования и инвестирования имеют разную природу и не связаны между собой.

Исследуемая задача максимизации функционала Марковица имеет вид

$$(1) \quad J[I, a] \equiv E(S_1 + S_2) - \beta\sigma^2(S_1 + S_2) \rightarrow \max_{I, a}, \quad 0 \leq I(x) \leq x, \quad a \in R^n.$$

Здесь $\beta > 0$ имеет смысл коэффициента осторожности инвестора-страховщика: чем больше β , тем осторожнее страховщик. Подставляя выражения для S_1 и S_2 , получаем

$$(2) \quad \begin{aligned} J[I, a] = & l\alpha E I(X_1^Z) + w(a\Delta m^T + m_0) + EV - \beta(l\sigma^2[I(X_1^Z)] + \\ & + l(l-1)cov(I(X_1^Z), I(X_2^Z))) + w^2aCa^T + 2waQ^T + \sigma^2(V), \end{aligned}$$

где $Q^T = cov(R, V)$ – вектор-столбец с компонентами $cov(R_i, V)$, $i = 1, \dots, n$.

3. Основные результаты

Вернемся к задаче (1) и рассмотрим вспомогательную задачу

$$(3) \quad J[I, a] \rightarrow \max_I, \quad 0 \leq I(x) \leq x,$$

³ Здесь допускается возможность выплаты суммарного взноса ld частями вплоть до окончания страхового периода, поэтому доступный для инвестирования капитал в начале периода, т.е. в момент принятия решения на страхование и инвестирование, равен w .

при фиксированном $a \in R^n$, выражение для $J[I, a]$ приведено в (2). Следующее утверждение дает необходимые условия оптимальности в (3), устанавливая: вид оптимальной $I^*(x) = x \wedge k^*$ (stop loss страхование с так называемым уровнем удержания страховщика k^*), где $x \wedge y \stackrel{\text{def}}{=} \min\{x, y\}$, и уравнение для нахождения параметра k^* .

Утверждение 1. Задача (3) имеет решение, $I^(x) = x \wedge k^*$, где $0 < k^* < \infty$ – единственный корень уравнения оптимальности*

$$(4) \quad \xi(k) = 0, \quad \text{где} \quad \xi(k) = \alpha - 2l\beta \left(k - \int_0^k (1 - F_1^Z(x)) dx \right).$$

Доказательство.

Лемма 1. Существует решение задачи (3).

Доказательство леммы приведено в Приложении.

Обозначим через $I_\rho(x) = \rho I^*(x) + (1 - \rho)I(x)$, где $\rho \in [0, 1]$, функция I^* есть решение (3) и I – произвольная функция дележа. Найдем производную $\left. \frac{d}{d\rho} J[I_\rho, a] \right|_{\rho=1}$. Учтем, что

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\rho} E I_\rho(X_1^Z) \right|_{\rho=1} &= \int_0^\infty (I^*(x) - I(x)) dF_1^Z(x), \\ \left. \frac{d}{d\rho} \sigma^2(I_\rho(X_1^Z)) \right|_{\rho=1} &= 2 \int_0^\infty (I^*(x) - E I^*(X_1^Z))(I^*(x) - I(x)) dF_1^Z(x) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\rho} \text{cov}(I_\rho(X_1^Z), I_\rho(X_2^Z)) \right|_{\rho=1} &= 2 \int_0^\infty \int_0^\infty I^*(y)(I^*(x) - I(x)) dG(x, y) - \\ &\quad - 2 \int_0^\infty E I^*(X_1^Z)(I^*(x) - I(x)) dF_1^Z(x), \end{aligned}$$

где $F_1^Z(x) = P(X_1^Z \leq x)$ и $G(x, y) = P(X_1^Z \leq x, X_2^Z \leq y)$ – функции распределения, последняя очевидно симметрична по аргументам. Поскольку множество функций дележа выпукло, необходимое условие оптимальности I^* в (3) есть неравенство

$$\left. \frac{d}{d\rho} J[I_\rho, a] \right|_{\rho=1} \geq 0$$

для любой функции дележа I . Принимая во внимание выражение (2), переформулируем это условие: I^* максимизирует интеграл

$$(5) \quad \max_I \int_0^\infty \int_0^\infty I(x) \phi(x, y) dG(x, y),$$

где $\phi(x, y) = \alpha - 2\beta[I^*(x) - EI^*(X_1^Z) + (l-1)(I^*(y) - EI^*(X_1^Z))]$. Согласно лемме Неймана–Пирсона (см., например, [12]) функция дележа I^* доставляет максимум в (5) тогда и только тогда, когда

$$(6) \quad I^*(x) = \begin{cases} x, & \phi(x, y) > 0, \\ 0, & \phi(x, y) < 0 \end{cases}$$

с точностью до множества нулевой меры G . Рассмотрим (6) не для всех $(x, y) \in R_+^2$, а лишь на подмножестве $\{(x, y) : x = y, x \geq 0, y \geq 0\}$, причем интеграл в (5) берется, как и прежде, по функции распределения $G(x, y)$, при этом $\int_0^\infty \int_0^\infty I(x)\phi(x, x)dG(x, y) = \int_0^\infty I(x)\phi(x, x)dF_1^Z(x)$. Тогда необходимое условие выполнения (6) есть

$$(7) \quad I^*(x) = \begin{cases} x, & \psi(x) > 0, \\ 0, & \psi(x) < 0 \end{cases}$$

с точностью до множества нулевой меры F_1^Z .

$$(8) \quad \text{Здесь } \psi(x) \stackrel{def}{=} \phi(x, x) = \alpha - 2l\beta[I^*(x) - EI^*(X_1^Z)].$$

Значение $\psi(0) = \alpha + 2l\beta EI^*(X_1^Z) > 0$. При возрастании x от 0 функция $I^*(x) = x$ согласно (7), поэтому $\psi(x)$ убывает (см. (8)) вплоть до точки $x = k^*$ касания оси абсцисс. При увеличении x от k^* функция $\psi(x)$ не может ни убывать, ни возрастать. Действительно, при убывании $\psi(x)$ от нуля получаем противоречие с (7), поскольку $I^*(x) = 0$ для таких x . Предположим, что $\psi(x)$ возрастает от нуля, тогда (см. (7)) $I^*(x) = x$ и $\psi(x)$ должна убывать. Таким образом, $I^*(x) = x \wedge k^*$, $k^* \in (0, \infty)$. Получим уравнение для нахождения k^* , для этого подставим в выражение (8) вместо $I^*(x)$ переменную k и $E X_1^Z \wedge k = \int_0^k (1 - F_1^Z(x))dx$ вместо $E I^*(X_1^Z)$. В результате получаем уравнение оптимальности (4) в утверждении 1.

Отметим, что найденное оптимальное stop loss страхование отлично от франшизы (deductible), полученной в [13] для модели страхования от фоновых рисков с непрерывным временем и случайным горизонтом.

Замечание 2. Обозначим через $0 < IS \leq \infty$ максимально возможное значение X_1^Z или, более точно, $IS = \sup \text{supp} F_1^Z$ – верхняя грань носителя распределения F_1^Z . Случай, когда уровень удержания $k^* \geq IS$, означает полное возмещение ущерба клиенту.

В завершение анализа (1) изучим задачу

$$(9) \quad \max_a J[I, a], \quad a \in R^n$$

при фиксированной функции дележа $I(x)$. Целевая функция имеет вид

$$E S_1 + w(a\Delta m^T + m_0) + EV - \beta[\sigma^2(S_1) + w^2 a C a^T + 2waQ^T + \sigma^2(V)].$$

Найдем градиент и приравняем его к нулю, $J'_a[I, a] = w\Delta m - 2w^2\beta aC - 2w\beta Q = 0$. Отсюда

$$(10) \quad a^* = w^{-1} \left(\frac{\Delta m}{2\beta} - Q \right) C^{-1}.$$

В силу положительной определенности матрицы C функция $J[I, a]$ строго вогнута по a . Поэтому найденный вектор a^* является единственным решением (9). Таким образом, доказано

Утверждение 2. Единственным решением задачи (9) является портфель a^ , определенный в (10).*

Учитывая, что доход от страхования S_1 зависит только от I и доход от инвестирования S_2 зависит только от a , получаем из утверждений 1–2: оптимальными в задаче (1) максимизации функционала Марковица с фоновыми рисками являются: stop loss страхование $I^*(x) = x \wedge k^*$, где k^* определено в (4), и портфель $\bar{a}^* = (a_0^*, a^*) \in R^{n+1}$, в котором $a_0^* = 1 - \sum_{i=1}^n a_i^*$.

4. Оптимальные страхование и инвестирование в модели со стандартным отклонением доходности

Пусть в качестве меры риска в функционале Марковица используется не дисперсия $\sigma^2(S_1+S_2)$, а стандартное отклонение $\sigma(S_1+S_2)$ (его использование в финансовых моделях см., например, в [10, 11]). Выражения для $S_1 = S_1^I$ и $S_2 = S_2^a$ приведены в разделе 2.2. Исследуемая задача:

$$(11) \quad J[I, a] \equiv E(S_1 + S_2) - \beta\sigma(S_1 + S_2) \rightarrow \max_{I, a}, \quad 0 \leq I(x) \leq x, \quad a \in R^n.$$

Преимущество такого подхода заключается в том, что оба слагаемых в (11) имеют одинаковую размерность, например рубли. Детальное выражение для целевого функционала имеет вид (см. (2))

$$(12) \quad J[I, a] = l\alpha E I(X_1^Z) + w(a\Delta m^T + m_0) + EV - \beta \sqrt{l\sigma^2[I(X_1^Z)] + l(l-1)cov(I(X_1^Z), I(X_2^Z)) + w^2aCa^T + 2waQ^T + \sigma^2(V)}.$$

Близкие по постановке задачи, но без фонового риска, были исследованы в [14].

Изучим вспомогательную задачу

$$(13) \quad J[I, a] \rightarrow \max_I, \quad 0 \leq I(x) \leq x.$$

Утверждение 3. Задача (13) имеет решение $I_a^(x) = x \wedge k_a^*$, где $0 < k_a^*$ – минимальный корень уравнения*

$$(14) \quad \xi_a(k) = 0, \quad \text{где } \xi_a(k) = \alpha - l\beta[k - E I^k(X_1^Z)] / (\sigma^2(S_1^{I^k}) + \sigma^2(S_2^a))^{1/2}$$

с функцией дележа $I^k(x) = x \wedge k$.

Доказательство. Доказательство существования решения (13) дословно повторяет рассуждения в доказательстве леммы 1.

Как и ранее, обозначим: $I_\rho(x) = \rho I^*(x) + (1 - \rho)I(x)$, где $\rho \in [0, 1]$ и $I^*(x) = I_a^*(x)$ максимизирует $J[I, a]$. Необходимое условие оптимальности I^* в (13)

$$\left. \frac{d}{d\rho} J[I_\rho, a] \right|_{\rho=1} \geq 0 \text{ для любой функции дележа } I.$$

Это неравенство можно переписать, учитывая уже найденные выражения для производных $E I_\rho(X_1^Z)$, $\sigma^2(I_\rho(X_1^Z))$ и $cov(I_\rho(X_1^Z), I_\rho(X_2^Z))$ в точке $\rho = 1$ (см. доказательство утверждения 1): $I^*(x) = I_a^*(x)$ есть решение задачи максимизации интеграла

$$\max_I \int_0^\infty \int_0^\infty I(x) \phi_a(x, y) dG(x, y),$$

где $\phi_a(x, y) = \alpha - \beta[I^*(x) - E I^*(X_1^Z) + (l - 1)(I^*(y) - E I^*(X_1^Z))]/(\sigma^2(S_1^{I^*} + \sigma^2(S_2^a))^{1/2}$. Согласно лемме Неймана–Пирсона функция дележа $I^*(x)$ доставляет максимум тогда и только тогда, когда

$$(15) \quad I^*(x) = \begin{cases} x, & \phi_a(x, y) > 0, \\ 0, & \phi_a(x, y) < 0 \end{cases}$$

с точностью до множества нулевой меры G . Как и в доказательстве утверждения 1, рассмотрим (15) не для всех $(x, y) \in R_+^2$, а лишь на подмножестве $\{(x, y) : x = y, x \geq 0, y \geq 0\}$, тогда необходимое условие выполнения (15) будет

$$(16) \quad I^*(x) = \begin{cases} x, & \psi_a(x) > 0, \\ 0, & \psi_a(x) < 0 \end{cases}$$

с точностью до множества нулевой меры F_1^Z . Здесь

$$(17) \quad \psi_a(x) \stackrel{def}{=} \phi_a(x, x) = \alpha - l\beta[I^*(x) - E I^*(X_1^Z)]/(\sigma^2(S_1^{I^*}) + \sigma^2(S_2^a))^{1/2}.$$

Отметим, что знаменатель в (17) всегда положителен, так как $\sigma^2(S_2^a) > 0$. Значение $\psi_a(0) > 0$, и при увеличении x от 0 выполнено $I^*(x) = x$ согласно (16), поэтому $\psi_a(x)$ убывает (см. (17)) вплоть до точки $x = k_a^*$ касания оси абсцисс. При возрастании x от k_a^* функция $\psi_a(x)$ не убывает и не возрастает. Действительно, при убывании $\psi_a(x)$ от нуля получаем противоречие с (16), поскольку $I^*(x) = 0$ для таких x . Предположим, что $\psi_a(x)$ возрастает от нуля, тогда (см. (16)) $I^*(x) = x$ и $\psi_a(x)$ должна убывать, а не возрастать. Таким образом, $I^*(x) = x \wedge k_a^*$, где $k_a^* > 0$.

Получим уравнение для нахождения уровня удержания k_a^* , для этого подставим в (17) вместо $I^*(x)$ переменную k , а в выражения для $E I^*(X_1^Z)$ и $\sigma^2(S_1^{I^*})$ подставим вместо $I^*(x)$ функцию $I^k(x) = x \wedge k$. В результате получаем уравнение оптимальности (14) в утверждении 3.

Заметим, что не исключен случай, когда $k_a^* = \infty$, т.е. (см. (14)) функция $\xi(k) > 0$ на $[0, \infty)$. Это означает, что страховщик погашает весь ущерб клиента.

Изучим теперь задачу оптимального инвестирования при фиксированной функции дележа риска I ,

$$(18) \quad \max_a J[I, a], \quad a \in R^n.$$

Утверждение 4. Пусть a_I^* есть решение задачи (18). Тогда этот вектор является корнем уравнения

$$(19) \quad \Delta m - \beta[waC + Q] / (\sigma^2(S_1^I) + w^2aCa^T + 2waQ^T + \sigma^2(V))^{1/2} = 0.$$

Доказательство. Целевая функция имеет вид

$$E S_1^I + w(a\Delta m^T + m_0) + EV - \beta\sqrt{\sigma^2(S_1^I) + w^2aCa^T + 2waQ^T + \sigma^2(V)}.$$

Найдем градиент по a и приравняем его к нулю:

$$J'_a[I, a] = w\Delta m - \beta(w^2aC + wQ) / (\sigma^2(S_1^I) + w^2aCa^T + 2waQ^T + \sigma^2(V))^{1/2} = 0.$$

Это уравнение очевидно эквивалентно (19). Если a_I^* – решение (18), то, принимая во внимание отсутствие ограничений на a , получаем, что a_I^* удовлетворяет (19).

Учитывая результаты, полученные в утверждениях 3–4, имеем следующие условия оптимальности в исходной задаче $J[I, a] \rightarrow \max$, где максимум берется по I, a .

Утверждение 5. Пусть (I^{**}, a^{**}) есть решение задачи (11). Тогда $I^{**}(x) = x \wedge k^{**}$, где (k^{**}, a^{**}) является решением системы $n + 1$ нелинейных уравнений: (19), где вместо $I(x)$ подставлена функция $I^k(x) = x \wedge k$, и (14).

5. Примеры

Пример 1

Приведем иллюстративный численный пример решения задачи (1) с дисперсией как мерой риска, который не претендует на практическую значимость. Пусть численность группы клиентов страховщика $l = 10$, количество рисков активов $n = 2$, вектор средних доходностей $E \bar{R} = (m_0; m_1; m_2) = (1; 1,1; 1,15)$, вектор ковариаций доходностей рисков активов и фонового риска $Q = (-0,3; -0,25)$ и матрица ковариаций

$$C = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

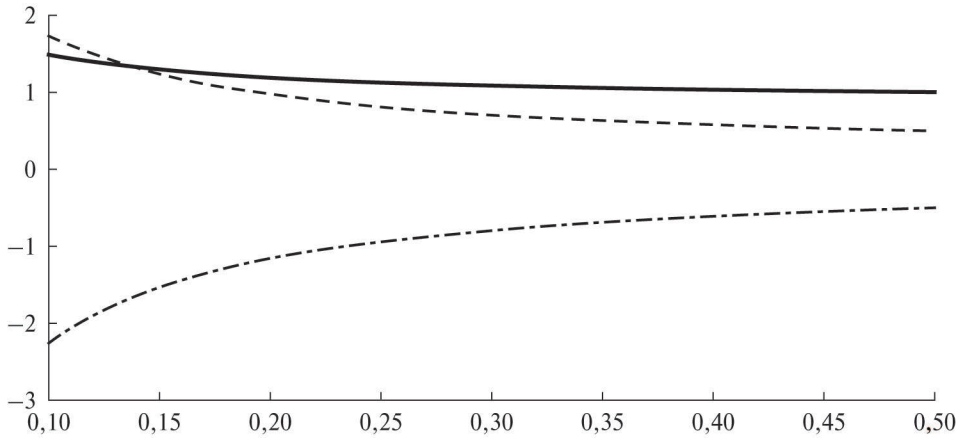


Рис. 1. Графики зависимостей компонент оптимального портфеля от β : a_1^* – сплошная линия, a_2^* – пунктирная линия, вложение в безрисковый актив $a_0^* = 1 - a_1^* - a_2^*$ – штрихпунктирная линия.

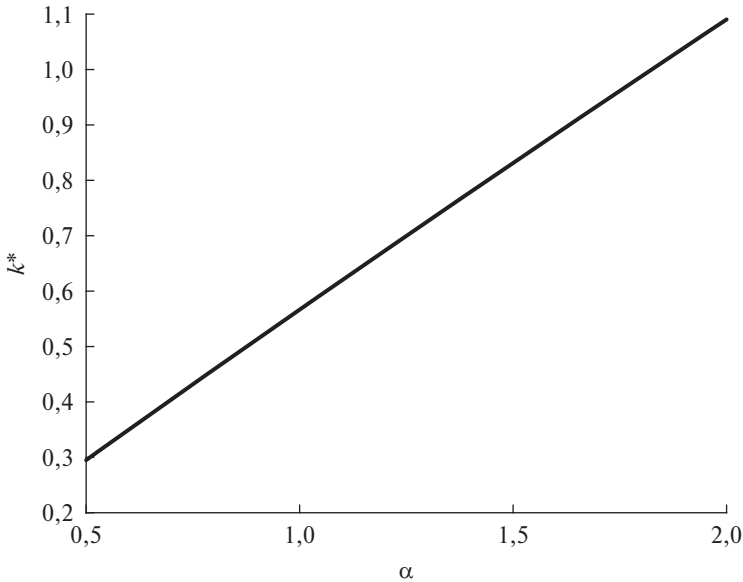


Рис. 2. График зависимости уровня k^* от α .

Начальный капитал $w = 1$, функция распределения ущерба клиента с учетом фонового риска равна $F_1^Z(x) = 1 - p + p(1 - \exp(-2x))$, $x \geq 0$, где вероятность страхового случая $p = P(X_1^Z > 0) = 0,2$. Коэффициент осторожности β и коэффициент нагрузки α – варьируемые параметры. Найдём параметр k^* в функции дележа $I^*(x) = x \wedge k^*$ и портфель вложений в рискованные активы $a^* = (a_1^*; a_2^*)$, применяя утверждения 1–2. Результаты численных расчетов приведены на рис. 1 (при фиксированном $\alpha = 0,5$) и рис. 2 (при фиксированном $\beta = 0,1$).

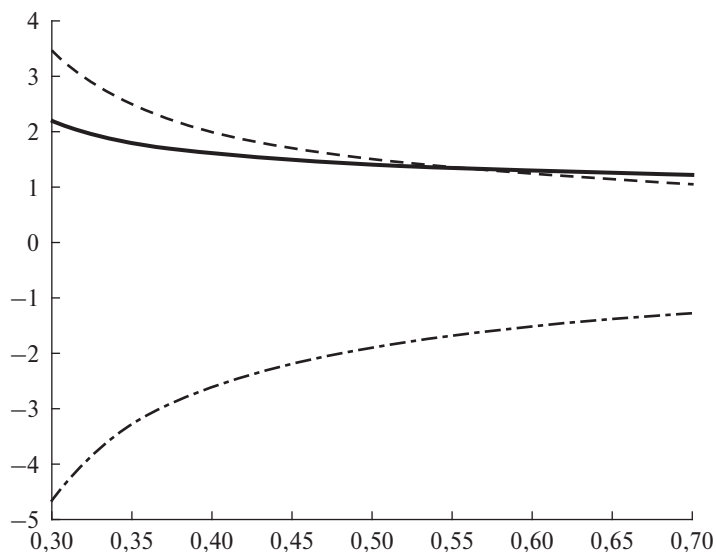


Рис. 3. Графики зависимостей компонент оптимального портфеля от β : a_1^* – сплошная линия, a_2^* – пунктирная линия, вложение в безрисковый актив $a_0^* = 1 - a_1^* - a_2^*$ – штрихпунктирная линия.

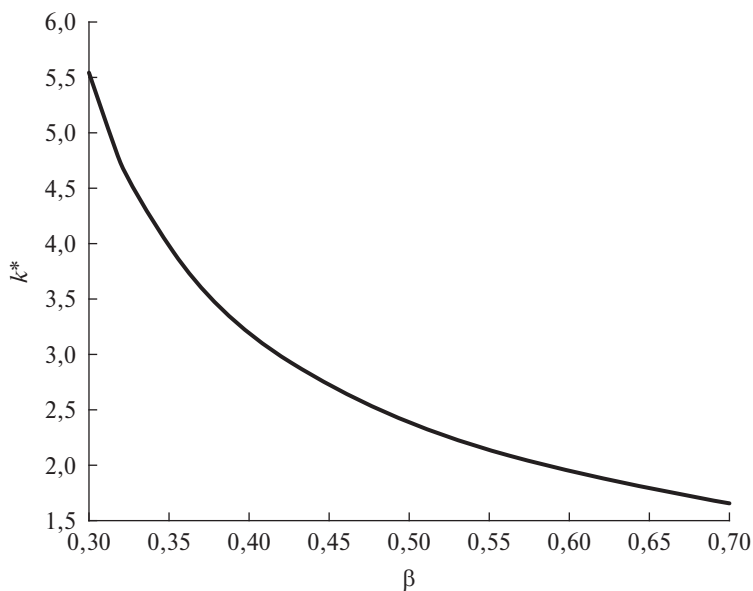


Рис. 4. График зависимости уровня k^* от β .

Из рис. 1 видно, что с ростом коэффициента осторожности β вложения в рисковые активы $a_1^*(\beta)$ и $a_2^*(\beta)$ убывают, а функция $a_0^*(\beta)$ возрастает, оставаясь отрицательной. Последнее означает, что инвестор заимствует средства из безрискового актива, но эта сумма убывает с увеличением β .

Рисунок 2 показывает, что уровень k^* в stop loss страховании $I^*(x) = x \wedge k^*$ возрастает с увеличением коэффициента нагрузки α – при возрастании стоимости полиса страховщик увеличивает долю покрытия риска клиента. Функция $k^*(\alpha)$ близка к линейной, что объясняется малостью нелинейной части в уравнении (4), определяющем k^* .

Пример 2

В отличие от предыдущего примера, приведем численный пример решения задачи (11) со стандартным отклонением как мерой риска, используя утверждение 5. Входные параметры те же, что и в примере 1, но здесь приходится учитывать и дисперсию инвестиционного фонового риска $\sigma^2(V) = 1,2$, входящую под знак квадратного корня. Коэффициент нагрузки фиксирован $\alpha = 0,5$, а коэффициент осторожности $\beta \in [0,3; 0,7]$ – варьируемый параметр. Численные результаты приведены на рис. 3 и рис. 4.

Как и на рис. 1, инвестор заимствует средства из безрискового актива, и эта сумма убывает вместе с вложениями в рисковые активы при увеличении β . Здесь имеет место более высокая сумма заимствования, как и суммы вложений в рисковые активы, что объясняется относительно медленным возрастанием стандартного отклонения по сравнению с другой мерой риска – дисперсией финального капитала.

Согласно рис. 4 при возрастании коэффициента осторожности β уровень собственного удержания страховщика k^* падает, т.е. страховщик не соглашается брать на себя большие риски.

6. Заключение

В данной статье исследована одношаговая задача выбора страховщиком инвестором оптимального страхования, т.е. функции дележа риска, для группы клиентов и оптимального инвестиционного портфеля при наличии аддитивных фоновых рисков. Рассмотрены два типа максимизируемых функционалов Марковица: с дисперсией и стандартным отклонением в качестве меры риска. В первом случае найдены явные выражения для функции дележа и портфеля, во втором случае найдены необходимые условия оптимальности в виде системы нелинейных уравнений. Решены численные примеры, показывающие применение полученных теоретических результатов. Представляются перспективными следующие направления исследований по этой тематике: использование в качестве начального инвестиционного капитала не только начального капитала страховщика, но также и полученных от клиентов страховых премий; применение иных целевых функционалов, например ожидаемой полезности финального капитала; изучение оптимизационной многошаговой задачи с аддитивными и мультипликативными фоновыми рисками.

Доказательство леммы 1. Пусть $\{I_m\}$ – максимизирующая последовательность дележей риска в задаче (3), т.е.

$$J[I_m, a] \rightarrow J^* = \sup_I J[I, a].$$

Применяя теорему Хэлли к последовательности случайных векторов $\{I_m(X_1^Z), I_m(X_2^Z)\}$ (см. выражение в (2) для $J[I, a]$), получаем, что существует подпоследовательность $\{I_s(X_1^Z), I_s(X_2^Z)\}$, слабо сходящаяся к некоторому пределу (ξ, η) . Для доказательства того, что ξ и η есть собственные случайные величины, т.е. $P(\xi < \infty) = 1$ и $P(\eta < \infty) = 1$, достаточно заметить, что в силу определения функций дележа выполняется $I_m(X_i^Z) \leq X_i^Z$ п.н., $i = 1, 2$. Поскольку X_1^Z и X_2^Z одинаково распределены и измеримы относительно борелевской сигма-алгебры, то предел может быть представлен как $(\xi, \eta) = (I^*(X_1^Z), I^*(X_2^Z))$ для некоторой измеримой функции $I^*(x)$, причем $0 \leq I^*(x) \leq x$.

Равенство $J^* = J[I^*, a]$ теперь следует из слабой сходимости $\{I_s(X_1^Z), I_s(X_2^Z)\}$ к $\{I^*(X_1^Z), I^*(X_2^Z)\}$ и непрерывности целевого функционала в (2) по $E I(X_1^Z)$, $E I^2(X_1^Z)$ и $cov(I(X_1^Z), I(X_2^Z))$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bodie Z., Merton R.C., Samuelson W.F.* Labour supply flexibility and portfolio choice in a life cycle model // *Journal of Economic Dynamics and Control*. 1992. No. 16. P. 427–449.
2. *Gollier C., Pratt J.W.* Risk vulnerability and the tempering effect of background risk // *Econometrica: Journal of the Econometric Society*. 1996. V. 64. No. 5. P. 1109–1123.
3. *Heaton J., Lucas D.* Portfolio choice in the presence of background risk // *The Economic Journal*. 2000. V. 110. No. 460. P. 1–26.
4. *Jiang C.H., Ma Y.K., An Y.B.* An analysis of portfolio selection with background risk // *Journal of Banking and Finance*. 2010. V. 34. P. 3055–3060.
5. *Guo X., Wagener A., Wong W.K., Zhu L.X.* The two-moment decision model with additive risks // *Risk Management*. 2018. V. 20. No. 1. P. 77–94.
6. *Lin W., Lu J.* Risky asset allocation and consumption rule in the presence of background risk and insurance markets // *Insurance: Mathematics and Economics*. 2012. V. 50. No. 1. P. 150–158.
7. *Mnif M.* Optimal risk control under marked point processes shocks: A dynamic programming duality approach // *International Journal of Theoretical and Applied Finance*. 2013. V. 16. No. 7. P. 350–360.
8. *Hong H., Wang N., Yang J.* Mitigating disaster risks in the age of climate change // *Technical report, National Bureau of Economic Research*. 2020.
9. *Markowitz H.* Portfolio Selection // *Journal of Finance*. 1952. V. 7. P. 77–91.

10. *Alexander G.J., Baptista A.M.* Economic implications of using a mean-VaR model for portfolio selection: A comparison with mean-variance analysis // *Journal of Economic Dynamics and Control*. 2002. V. 26. P. 1159–1193.
11. *Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., et al.* *Actuarial Mathematics*. Itaca, Illinois: The Society of Actuaries, 1986.
12. *Леман Э.* Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1964.
13. *Moore K.S., Young V.R.* Optimal insurance in a continuous-time model // *Insurance: Mathematics and Economics*. 2006. V. 39. No. 1. P. 47–68.
14. *Голубин А.Ю., Гридин В.Н.* Оптимальная стратегия страхования в модели индивидуального риска при вероятностном ограничении на величину финального капитала // *АиТ*. 2019. № 4. С. 144–155. <https://doi.org/10.1134/S0005231019040081>

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Поступила в редакцию 10.08.2025

После доработки 25.09.2025

Принята к публикации 05.11.2025