

© 2026 г. Я.Г. САПУНКОВ, канд. физ.-мат. наук (iptmuran@san.ru),
А.В. МОЛОДЕНКОВ, д-р техн. наук (molalexei@yandex.ru)
(Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов)

КВАЗИОПТИМАЛЬНОЕ ПО ЭНЕРГИИ УГЛОВОЕ УСКОРЕНИЕ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА, ПОЛУЧЕННОЕ В РАМКАХ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ПУАНСО

Рассматривается кинематическая задача поиска оптимального по энергии программного углового ускорения космического аппарата при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости космического аппарата. В рамках классической кинематической интерпретации Пуансо углового движения твердого тела как обобщенного конического движения и на основе принципа максимума Понтрягина получено квазиоптимальное аналитическое решение задачи, которое доведено до алгоритма. Приводятся подтверждающие аналитические и числовые примеры, показывающие в зависимости от граничных условий либо близость квазиоптимального решения к оптимальному решению, либо их полное совпадение.

Ключевые слова: космический аппарат, твердое тело, угловое ускорение, кинематическая интерпретация Пуансо, оптимальное и квазиоптимальное управление, аналитическое решение, алгоритм.

DOI: 10.7868/S2413977726060026

1. Введение

При решении многих задач наведения и управления космическими аппаратами требуется знать оптимальное в том или ином смысле программное угловое ускорение космического аппарата (КА) при произвольных заданных граничных условиях [1–5]. Как правило, в литературе такое ускорение ищется либо численно, либо строится аналитически (например, [5]) на основе полиномов (сплайнов) посредством представления кватерниона ориентации КА полиномами и выражения вектора угловой скорости через этот кватернион. Однако никаких обоснований (доказанных теорем или соображений из теоретической механики), что на всей совокупности угловых движений КА, при любых граничных условиях эти аналитические решения будут достаточно хорошо аппроксимировать оптимальную траекторию углового движения КА, не приводится.

В настоящей статье рассматривается кинематическая задача поиска оптимального в смысле энергетических затрат программного углового ускорения КА при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА. Получить оптимальное аналитическое решение этой

задачи при произвольных граничных условиях затруднительно, так как точное решение задачи нахождения ориентации твердого тела по его известной угловой скорости (задачи Дарбу) в общем случае не известно [6, 7]. Соответственно классической кинематической интерпретации Пуансо углового движения твердого тела как обобщенного конического движения задача поиска оптимального углового ускорения КА переформулирована в этом классе движений. Траектория КА задана явными выражениями, которые содержат произвольные кватернионные и скалярные постоянные и две произвольные скалярные функции, которые являются параметрами обобщенного конического движения. Применительно к этим параметрам и их производным ставится и решается оптимизационная задача, в которой в качестве управлений выступают вторые производные от этих параметров. При этом общность исходной задачи практически не нарушается, так как известное точное решение классической задачи поиска оптимального углового ускорения в случае плоского поворота КА [4] или в новом частном случае регулярной прецессии, который приводится в статье, и аналогичные решения задачи в рамках рассматриваемой концепции полностью совпадают; в других случаях в числовых расчетах решения исходной задачи и предлагаемого аналитического решения относительная погрешность между значениями функционала оптимизации, который является определяющей характеристикой задачи, составляет не более одного процента, включая повороты КА на большие углы. В связи с этим предлагаемое аналитическое решение задачи может интерпретироваться как квазиоптимальное по отношению к классической задаче поиска оптимального углового ускорения КА. Приведены явные выражения для кватерниона ориентации и вектора угловой скорости КА, посредством дифференцирования выражения вектора угловой скорости получена явная формула углового ускорения КА; записан аналитический алгоритм решения задачи, который может быть использован на борту КА.

Предлагаемый в статье аналитический метод решения ранее был успешно применен в динамических задачах оптимальных разворотов КА произвольной конфигурации с различными критериями оптимизации [8, 9], а также при построении квазиоптимального по быстродействию углового ускорения КА при произвольных граничных условиях [10].

2. Постановка классической задачи

Угловое движение КА как твердого тела вокруг центра масс описывается системой дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме:

$$(2.1) \quad 2 \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_0 \\ \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 & -\lambda_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix},$$

$$(2.2) \quad [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T = [\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3]^T,$$

которой эквивалентна краткая запись [4]:

$$(2.3) \quad 2\dot{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{\Lambda} \circ \boldsymbol{\omega},$$

$$(2.4) \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\varepsilon},$$

где $\mathbf{\Lambda}(t) = [\lambda_0(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)]^T$ или $\mathbf{\Lambda}(t) = \lambda_0(t) + \lambda_1(t)i_1 + \lambda_2(t)i_2 + \lambda_3(t)i_3$ – нормированный кватернион, описывающий угловое положение КА ($\|\mathbf{\Lambda}\| = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$); $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t)]^T$ или $\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_1(t)\mathbf{i}_1 + \omega_2(t)\mathbf{i}_2 + \omega_3(t)\mathbf{i}_3$ – вектор его угловой скорости, который может рассматриваться как кватернион с нулевой скалярной частью $\boldsymbol{\omega}(t) = [0, \omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t)]^T$; $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t), \varepsilon_3(t)]^T$ – вектор углового ускорения КА; мнимые единицы Гамильтона i_1, i_2, i_3 соответствуют ортам трехмерного векторного пространства $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$, символ “ \circ ” означает произведение кватернионов; “ T ” – знак транспонирования векторов. Фазовые координаты $\mathbf{\Lambda}, \boldsymbol{\omega}$ положены непрерывными функциями, а угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}$ (рассматриваемое как управление) – кусочно-непрерывной функцией КА [11].

Произвольные начальное и конечное состояния КА:

$$(2.5) \quad \mathbf{\Lambda}(0) = \mathbf{\Lambda}_0, \quad \mathbf{\Lambda}(T) = \mathbf{\Lambda}_T,$$

$$(2.6) \quad \boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0, \quad \boldsymbol{\omega}(T) = \boldsymbol{\omega}_T.$$

Необходимо найти оптимальное управление $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{опт}}(t)$, доставляющее минимум функционалу энергозатрат с фиксированным временем T :

$$(2.7) \quad J = \int_0^T \|\boldsymbol{\varepsilon}\| dt,$$

где время T произвольно и зафиксировано.

Постановка задачи (2.1)–(2.7) является кинематической, так как не учитывает динамическую конфигурацию КА. Следует отметить, что оптимальное угловое ускорение КА можно искать как производную от оптимальной угловой скорости КА и в полной динамической задаче оптимального разворота КА, где вместо векторного уравнения (2.4) используются динамические уравнения Эйлера, а функцией управления является приложенный к КА вектор внешнего управляющего момента [8, 9].

3. Безразмерные переменные

Переформулируем задачу, заменяя исходные размерные переменные на безразмерные:

$$t^{\text{безраз}} = t^{\text{раз}}/T, \quad \boldsymbol{\omega}^{\text{безраз}} = \boldsymbol{\omega}^{\text{раз}}T, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{безраз}} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{раз}}T^2, \quad J^{\text{безраз}} = J^{\text{раз}}T^3;$$

при этом все выражения постановки задачи, кроме функционала оптимизации

$$(3.1) \quad J = \int_0^1 \|\boldsymbol{\varepsilon}\| dt,$$

не изменятся. Ниже будем решать задачу (2.3)–(2.6), (3.1) в безразмерных переменных при $T = 1$, где верхние индексы в постановке задачи убраны.

4. Переход к краевой задаче оптимизации

Следуя принципу максимума Л.С. Понтрягина [4, 11], введем кватернион $\Psi(t)$, сопряженный кватерниону ориентации КА $\Lambda(t)$, и вектор $\varphi(t)$, сопряженный вектору угловой скорости КА $\omega(t)$. Функция Гамильтона–Понтрягина равна

$$(4.1) \quad H = -(\varepsilon, \varepsilon) + (\Psi, \Lambda \circ \omega) / 2 + (\varphi, \varepsilon),$$

где “ (\cdot, \cdot) ” – скалярное произведение векторов.

Сопряженная система уравнений имеет вид

$$(4.2) \quad \begin{cases} 2\dot{\Psi} = \Psi \circ \omega, \\ \dot{\varphi} = -\text{vect}(\tilde{\Lambda} \circ \Psi) / 2, \end{cases}$$

где “ $\text{vect}(\cdot)$ ” – векторная часть кватерниона, а символ “ \sim ” означает сопряжение кватерниона. Линейные дифференциальные системы уравнений для переменных Ψ и Λ совпадают, следовательно, их решения различаются на кватернионную константу \mathbf{C} :

$$(4.3) \quad \Psi = \mathbf{C} \circ \Lambda.$$

В силу этого и с учетом обозначения [4]

$$(4.4) \quad \mathbf{p} = \text{vect}(\tilde{\Lambda} \circ \Psi) = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_v \circ \Lambda,$$

где \mathbf{c}_v – векторная часть кватерниона \mathbf{C} , выражения (4.2) примут вид:

$$(4.5) \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{p}} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_v \circ \Lambda, \\ \dot{\varphi} = -\mathbf{p} / 2. \end{cases}$$

Таким образом, в силу самосопряженности линейной дифференциальной системы уравнений (2.1) (или (2.3)) размерность краевой задачи принципа максимума понижается на четыре [4]. Из условия максимума (3.1) получим непрерывную структуру оптимального управления:

$$(4.6) \quad \varepsilon^{\text{опт}} = \varphi / 2.$$

Из формул (2.3), (2.4), (4.4), (4.5) следует, что $\dot{\omega} = \varphi / 2$, $\ddot{\omega} = -\mathbf{p} / 4$, $\ddot{\omega} = -\dot{\mathbf{p}} / 4 = \ddot{\omega} \times \omega$, где знак “ \times ” есть векторное произведение, или, записывая одним уравнением,

$$(4.7) \quad \ddot{\omega} = \ddot{\omega} \times \omega.$$

В итоге нахождение оптимального углового ускорения КА приведено к решению краевой задачи (2.3), (4.7), (2.5), (2.6).

Используя выражение (4.4), функцию Гамильтона–Понтрягина (4.1) можно записать так:

$$(4.8) \quad H = -(\varepsilon, \varepsilon) + (\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega})/2 + (\varphi, \varepsilon).$$

На основе формул (2.3), (2.4), (4.5) также укажем векторный первый интеграл [12], связывающий фазовые и сопряженные переменные задачи: $\mathbf{p}/4 + \varphi \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{const}, \forall t \in [0, T]$.

Несмотря на то, что в статье рассматривается задача без ограничения на управление (ограничение на величину углового ускорения в задаче косвенно реализуется при минимизации интегрального квадратичного по управлению функционала), на основе выражений (4.4)–(4.6) можно получить оценку модуля вектора оптимального углового ускорения. Для непрерывно дифференцируемой вектор–функции оптимального управления $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{опт}}$ имеем:

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{опт}}(t)| &= \left| \int_0^t \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{опт}}(\tau) d\tau + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{опт}}(0) \right| \leq \int_0^t |\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{опт}}(\tau)| d\tau + |\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{опт}}(0)| = \\ &= \int_0^t |\mathbf{p}(\tau)| d\tau/4 + |\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{опт}}(0)| = |\mathbf{c}_v| t/4 + |\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{опт}}(0)|, \end{aligned}$$

т.е. величина вектор–функции $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{опт}}(t)$ в любой момент времени $\forall t \in [0, 1]$ должна находиться внутри шара переменного радиуса

$$(4.9) \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{опт}}(t)\| \leq (|\mathbf{c}_v| t/4 + |\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{опт}}(0)|)^2, \forall t \in [0, 1].$$

Аналогично с другой стороны получим:

$$(4.10) \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{опт}}(t)\| \leq (|\mathbf{c}_v| (1-t)/4 + |\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{опт}}(1)|)^2, \forall t \in [0, 1].$$

Следовательно, значение оптимального вектора углового ускорения должно принадлежать пересечению множеств, определяемых неравенствами (4.9), (4.10), т.е.

$$(4.11) \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{опт}}(t)\| \leq \gamma^2(t), \forall t \in [0, 1],$$

$$\gamma^2(t) = \min_t \left\{ (|\mathbf{c}_v| t/4 + |\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{опт}}(0)|)^2, (|\mathbf{c}_v| (1-t)/4 + |\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{опт}}(1)|)^2 \right\},$$

где векторная неопределенная постоянная \mathbf{c}_v находится из заданных постоянных условия задачи.

Следует отметить, что в частном случае граничных условий по угловой скорости (2.6), соответствующих плоскому эйлерову повороту, когда известно точное решение задачи, $|\mathbf{c}_v|$ в (4.11) явно выражается через заданные граничные условия по угловому положению КА (2.5)

$$(4.12) \quad |\mathbf{c}_v| = |\text{vect}(\mathbf{\Lambda}_T \circ \tilde{\mathbf{\Lambda}}_0) / \sin(\arccos(\text{scal}(\mathbf{\Lambda}_T \circ \tilde{\mathbf{\Lambda}}_0)))|,$$

где “scal(.)” – скалярная часть кватерниона, а величина вектор–функции $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{опт}}(t)$ может выходить на границу области (4.11), (4.12).

5. Частное решение задачи в элементарных функциях

В классе регулярных конических движений получим новое аналитическое частное решение задачи поиска оптимального углового ускорения КА, выраженное в элементарных функциях. Оптимальная угловая скорость КА в этом классе движений имеет вид

$$(5.1) \quad \omega(t) = \tilde{\mathbf{Q}} \circ (\mathbf{i}_1 \beta \sin \gamma t + \mathbf{i}_2 \beta \cos \gamma t + \mathbf{i}_3 \gamma) \circ \mathbf{Q},$$

где \mathbf{Q} (кватернион) и β, γ – произвольные постоянные; при этом

$$(5.2) \quad \|\mathbf{K}\| = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1.$$

Кватернион \mathbf{Q} задает поворот вектора $\mathbf{i}_1 \beta \sin \gamma t + \mathbf{i}_2 \beta \cos \gamma t + \mathbf{i}_3 \gamma$ вокруг некоторой постоянной оси, проходящей через неподвижную точку КА. Покажем, что угловая скорость (5.1) удовлетворяет уравнению (4.7). Последовательно дифференцируя выражение (5.1) три раза по переменной t , получим: $\dot{\omega}(t) = \beta \gamma \tilde{\mathbf{Q}} \circ (\mathbf{i}_1 \cos \gamma t - \mathbf{i}_2 \sin \gamma t) \circ \mathbf{Q}$, $\ddot{\omega}(t) = -\beta \gamma^2 \tilde{\mathbf{Q}} \circ (\mathbf{i}_1 \sin \gamma t + \mathbf{i}_2 \cos \gamma t) \circ \mathbf{Q}$, $\dddot{\omega}(t) = \beta \gamma^3 \tilde{\mathbf{Q}} \circ (-\mathbf{i}_1 \cos \gamma t + \mathbf{i}_2 \sin \gamma t) \circ \mathbf{Q}$. Подставляя (5.1) и полученные выражения производных в (4.7), можно убедиться в выполнении равенства, при этом $\ddot{\omega} = \ddot{\omega} \times \omega = (\ddot{\omega} \circ \omega - \omega \circ \ddot{\omega}) / 2$.

Исходя из (2.3), (5.1), получим явное выражение траектории КА в виде регулярной прецессии:

$$(5.3) \quad \Lambda(t) = \Lambda_0 \circ \tilde{\mathbf{Q}} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 \beta t / 2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 \gamma t / 2\} \circ \mathbf{Q},$$

где “ $\exp\{\cdot\}$ ” обозначает кватернионную экспоненту [4].

В выражения (5.1)–(5.3) входят пять произвольных постоянных $\beta, \gamma, q_i, i = 0, 1, 2$ (константа q_3 связана с условием (5.2)). Выполним граничные условия (2.5), (2.6). Из-за недостаточного количества произвольных констант в (5.1) на величины $|\omega_0|$ и ω_T наложим требования по ходу решения задачи, при этом единичный вектор $\omega_0^e = \omega_0 / |\omega_0|$ произволен и задан. В точке $t = 0$ по формуле (5.1):

$$(5.4) \quad \omega_0 = |\omega_0| \omega_0^e = \tilde{\mathbf{Q}} \circ (\mathbf{i}_2 \beta + \mathbf{i}_3 \gamma) \circ \mathbf{Q},$$

$$(5.5) \quad \|\omega_0\| = \left\| \tilde{\mathbf{Q}} \circ (\mathbf{i}_2 \beta + \mathbf{i}_3 \gamma) \circ \mathbf{Q} \right\| = \left\| \tilde{\mathbf{Q}} \right\| \|\mathbf{i}_2 \beta + \mathbf{i}_3 \gamma\| \|\mathbf{Q}\| = \beta^2 + \gamma^2,$$

на правом конце траектории КА при $t = T = 1$ из (5.3) имеем

$$(5.6) \quad \Lambda_T = \Lambda_0 \circ \tilde{\mathbf{Q}} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 \beta / 2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 \gamma / 2\} \circ \mathbf{Q},$$

при этом

$$(5.7) \quad \text{scal}(\tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda_T) = \text{scal}(\exp\{\mathbf{i}_2 \beta / 2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 \gamma / 2\}),$$

где “ $\text{scal}(\cdot)$ ” обозначает скалярную часть кватерниона. Исходя из (5.2), (5.4)–(5.6), найдем $|\omega_0|, \beta, \gamma, \mathbf{Q}$.

Представим (5.4), (5.6) в виде

$$\begin{aligned} & (\mathbf{i}_2\beta + \mathbf{i}_3\gamma) \circ \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \circ \gamma_0 = 0, \\ & \exp\{\mathbf{i}_2\beta/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3\gamma/2\} \circ \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \circ \tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda_T = 0, \end{aligned}$$

или та же запись на основе \mathbf{m} - и \mathbf{n} -матриц, изоморфных кватернионам [13]:

$$(5.8) \quad \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\beta & -\gamma \\ 0 & 0 & -\gamma & \beta \\ \beta & \gamma & 0 & 0 \\ \gamma & -\beta & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{01} & -\omega_{02} & -\omega_{03} \\ \omega_{01} & 0 & \omega_{03} & -\omega_{02} \\ \omega_{02} & -\omega_{03} & 0 & \omega_{01} \\ \omega_{03} & \omega_{02} & -\omega_{01} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(5.9) \quad \left(\begin{bmatrix} \mu_0 & -\mu_1 & -\mu_2 & -\mu_3 \\ \mu_1 & \mu_0 & -\mu_3 & \mu_2 \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_0 & -\mu_1 \\ \mu_3 & -\mu_2 & \mu_1 & \mu_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \nu_0 & -\nu_1 & -\nu_2 & -\nu_3 \\ \nu_1 & \nu_0 & \nu_3 & -\nu_2 \\ \nu_2 & -\nu_3 & \nu_0 & \nu_1 \\ \nu_3 & \nu_2 & -\nu_1 & \nu_0 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где матрица коэффициентов линейной алгебраической системы (5.9) определяется компонентами кватернионов $\boldsymbol{\mu}$ и $\boldsymbol{\nu}$:

$$(5.10) \quad \begin{cases} \boldsymbol{\mu} = \exp\{\mathbf{i}_2\beta/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3\gamma/2\}, \\ \mu_0 = \cos(\beta/2) \cos(\gamma/2), \quad \mu_1 = \sin(\beta/2) \sin(\gamma/2), \\ \mu_2 = \sin(\beta/2) \cos(\gamma/2), \quad \mu_3 = \cos(\beta/2) \sin(\gamma/2), \end{cases}$$

$$(5.11) \quad \boldsymbol{\nu} = \tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda_T,$$

нормы которых равны $\|\boldsymbol{\mu}\| = 1$, $\|\boldsymbol{\nu}\| = 1$; при этом ранги матриц коэффициентов систем (5.8), (5.9) равны 2. Выбирая в (5.8), (5.9) по два линейно независимых уравнения, получим однородную систему

$$(5.12) \quad \begin{bmatrix} 0 & \omega_{01} & \omega_{02} - \beta & \omega_{03} - \gamma \\ -\omega_{01} & 0 & -(\omega_{03} + \gamma) & \omega_{02} + \beta \\ \mu_1 - \nu_1 & 0 & -(\mu_3 + \nu_3) & \mu_2 + \nu_2 \\ 0 & \nu_1 - \mu_1 & \nu_2 - \mu_2 & \nu_3 - \mu_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} K_0 \\ K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Нетривиальное решение системы уравнений (5.12) обуславливается равенством 0 определителя ее матрицы коэффициентов. Используя это и формулы (5.4), (5.5), (5.10), (5.11), получим

$$(5.13) \quad |\boldsymbol{\omega}_0| = (\mu_2\beta + \mu_3\gamma)/(\nu_1\omega_{01}^e + \nu_2\omega_{02}^e + \nu_3\omega_{03}^e).$$

На основе (5.5), (5.7), (5.10), (5.13) запишем систему из двух нелинейных уравнений для определения постоянных β , γ :

$$(5.14) \quad \begin{cases} (\beta^2 + \gamma^2) (\nu_1\omega_{01}^e + \nu_2\omega_{02}^e + \nu_3\omega_{03}^e)^2 - (\mu_2\beta + \mu_3\gamma)^2 = 0, \\ \text{scal}(\tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda_T) - \cos(\beta/2) \cos(\gamma/2) = 0. \end{cases}$$

Из (5.3) и на основе решения системы (5.4) находится величина $|\boldsymbol{\omega}_0|$.

Компоненты кватерниона \mathbf{Q} определяются по формулам:

$$(5.15) \quad \begin{aligned} q_3 &= \pm \left[1 + (B_0/G)^2 + (B_1/G)^2 + (B_2/G)^2 \right]^{-1/2}, & q_0 &= B_0 q_3 / G, \\ q_1 &= B_1 q_3 / G, & q_2 &= B_2 q_3 / G, \end{aligned}$$

где

$$(5.16) \quad \begin{cases} B_0 = -(\mu_2 + \nu_2)(\omega_{03} + \gamma) + (\mu_3 + \nu_3)(\omega_{02} + \beta), \\ B_1 = (\mu_1 - \nu_1)\omega_{01} + (\mu_3 + \nu_3)(\gamma - \omega_{03}) + (\mu_2 + \nu_2)(\beta - \omega_{02}), \\ B_2 = (\mu_1 - \nu_1)(\omega_{02} + \beta) + (\mu_2 + \nu_2)\omega_{01}, \\ G = (\mu_1 - \nu_1)(\omega_{03} + \gamma) + (\mu_3 + \nu_3)\omega_{01}. \end{cases}$$

Краевое условие по угловой скорости КА при $t = T = 1$ должно выглядеть так:

$$(5.17) \quad \boldsymbol{\omega}(T) = \boldsymbol{\omega}_T = \tilde{\mathbf{Q}} \circ (\mathbf{i}_1 \beta \sin \gamma + \mathbf{i}_2 \beta \cos \gamma + \mathbf{i}_3 \gamma) \circ \mathbf{Q}.$$

В итоге, если краевые условия по угловой скорости КА $\boldsymbol{\omega}$ удовлетворяют требованиям (5.13), (5.17), траектория углового движения КА находится в классе регулярных конических движений и определяется явными выражениями (5.1), (5.2) ($\boldsymbol{\omega}(t) \forall t \in [0, T]$) принадлежит конической поверхности, которая определяется в пространстве произвольными заданными граничными условиями по положению $\mathbf{\Lambda}_0, \mathbf{\Lambda}_T$ и произвольным заданным направлением вектора своего начального значения $\boldsymbol{\omega}_0^e$.

Оптимальное угловое ускорение из (2.4), (5.1) будет

$$(5.18) \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \beta \gamma \tilde{\mathbf{Q}} \circ (\mathbf{i}_1 \cos \gamma t - \mathbf{i}_2 \sin \gamma t) \circ \mathbf{Q},$$

$$(5.19) \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}\| = \beta^2 \gamma^2 = \text{const}.$$

Оптимальная величина безразмерного функционала оптимизации (3.1):

$$(5.20) \quad J = \int_0^1 \|\boldsymbol{\varepsilon}\| dt = \beta^2 \gamma^2.$$

По формулам (5.18), (4.5) определяются сопряженные переменные $\boldsymbol{\varphi}$ и \mathbf{p} . Задача при введенных ограничениях полностью решена.

Приведем алгоритм построения оптимального по энергии углового ускорения КА в классе регулярных конических движений:

1) по заданным постоянным условиям задачи $T = 1$, $\mathbf{\Lambda}_0, \mathbf{\Lambda}_T$ (2.5), $\boldsymbol{\omega}_0^e = \boldsymbol{\omega}_0 / |\boldsymbol{\omega}_0|$ и формулам (2.6), (5.10), (5.11), (5.15), (5.16) определяются неизвестные $\beta, \gamma, |\boldsymbol{\omega}_0|$;

2) $\mathbf{\Lambda}_0, \mathbf{\Lambda}_T, \beta, \gamma, T = 1, |\boldsymbol{\omega}_0|$ по формулам (5.15), (5.16) находится кватернион \mathbf{Q} ;

3) с использованием выражений $\boldsymbol{\omega}_0^{\text{выч}} = |\boldsymbol{\omega}_0| \boldsymbol{\omega}_0^e$, $\boldsymbol{\omega}_T^{\text{выч}} = \tilde{\mathbf{Q}} \circ (\mathbf{i}_1 \beta \sin \gamma + \mathbf{i}_2 \beta \cos \gamma + \mathbf{i}_3 \gamma) \circ \mathbf{Q}$ находятся условия на концах траектории $\boldsymbol{\omega}_0^{\text{выч}}, \boldsymbol{\omega}_T^{\text{выч}}$;

4) найденные величины $\boldsymbol{\omega}_0^{\text{выч}}, \boldsymbol{\omega}_T^{\text{выч}}$ сравниваются с заданными (2.6);

5) если в п. 4 алгоритма выполняется равенство, то оптимальное решение задачи находится в классе регулярных конических движений; угловая

скорость КА, траектория и вектор углового ускорения КА вычисляются по формулам (5.1), (5.3), (5.18) и п. 1, оптимальное значение функционала определяется на основе (5.10);

б) с использованием (4.4), (4.5), (5.18) определяются сопряженные переменные φ и \mathbf{p} .

Полученное в классе регулярных конических движений оптимальное решение задачи и известное ранее [4] точное решение в классе плоских эйлеровых разворотов (при условии $\omega_0 \omega_T \parallel \text{vect}(\tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda_T)$) для частных случаев граничных условий по угловой скорости КА будут использованы как аналитические подтверждения при построении квазиоптимального решения задачи поиска углового ускорения КА в классе обобщенных конических движений. Также приведем наводящие соображения, которые получены на основе численного решения задачи поиска оптимального углового ускорения КА при произвольных граничных условиях.

6. Обоснование предлагаемого подхода исходя из числовых решений задачи

Численно решается краевая задача принципа максимума, полученная в разделе 4 статьи для исходной кинематической задачи поиска оптимального ускорения КА (2.3)–(2.6), (3.1):

$$(6.1) \quad \begin{cases} 2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \omega, \\ \dot{\omega} = \varepsilon, \\ \dot{\varphi} = -\mathbf{p}/2, \\ \mathbf{p} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_v \circ \Lambda, \quad \mathbf{c}_v = \text{const}, \end{cases}$$

$$(6.2) \quad \Lambda(0) = \Lambda_0, \quad \omega(0) = \omega_0,$$

$$(6.3) \quad \Lambda(T) = \Lambda_T, \quad \omega(T) = \omega_T,$$

$$(6.4) \quad \varepsilon^{\text{опт}} = \varphi/2,$$

откуда необходимо найти $\varepsilon^{\text{опт}}$, $T^{\text{опт}}$, $\Lambda^{\text{опт}}$, $\omega^{\text{опт}}$, \mathbf{c}_v . Условия в конечный момент времени (6.3) целесообразно записать в фазовом пространстве $\Lambda \times \omega$ размерности 7 [8, 9]:

$$(6.5) \quad \text{vect}(\Lambda(T) \circ \tilde{\Lambda}_T) = 0, \quad \omega(T) = \omega_T.$$

Метод численного решения подобных задач описан в [8, 9]. Также для сравнения приводятся кинематические характеристики по результатам расчетов в полной динамической задаче оптимального в смысле минимума энергетических затрат разворота КА как твердого тела различных динамических конфигураций [9] в безразмерных переменных ($T = 1$) при тех же граничных условиях:

$$(6.6) \quad \Lambda_0 = (0,7951, 0,2981, -0,3975, 0,3478), \quad \omega_0 = (0,2739, -0,2388, -0,3),$$

$$(6.7) \quad \Lambda_T = (0,8443, 0,3984, -0,3260, 0,1485), \quad \omega_T = (0,0, 0,0, -0,59).$$

Задача 1. Произвольный КА $I_1 = 0,9869$, $I_2 = 1,1843$, $I_3 = 0,7895$.

Задача 2. Произвольный КА $I_1 = 0,9506$, $I_2 = 1,3308$, $I_3 = 0,5704$.

Задача 3. Международная космическая станция (МКС) в своей ранней версии [14] $I_1 = 4\,853\,000$ кг · м², $I_2 = 23\,601\,000$ кг · м², $I_3 = 26\,278\,000$ кг · м² или безразмерные величины $I_1 = 0,2358$, $I_2 = 1,1466$, $I_3 = 1,2766$.

Задача 4. КА “Спейс Шаттл”, у которого характеристики, почти как у динамически-симметричного твердого тела: $I_1 = 3\,400\,648$ кг · м², $I_2 = 21\,041\,672$ кг · м² или $I_1 = 0,1967$, $I_2 = 1,2168$, $I_3 \approx I_2$.

Задача 5. Произвольный КА $I_1 = 0,9116$, $I_2 = 1,3674$, $I_3 = 0,5470$.

В табл. 1 показаны значения кватерниона ориентации и вектора угловой скорости КА, полученные при решении задачи поиска оптимального углового ускорения (6.1)–(6.5) и при решении динамической задачи оптимального разворота [9] для задач 1–4 в середине отрезка времени $t = 0,5$. При этом для сравнения в нижней строке табл. 1 приводятся данные, которые получены при решении квазиоптимальной задачи поиска углового ускорения КА, рассматриваемой в разделах 6–7 статьи.

Таблица 1. Величины кватерниона ориентации и вектора угловой скорости

| Задача | λ_0 | λ_1 | λ_2 | λ_3 | ω_1 | ω_2 | ω_3 |
|-------------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|------------|------------|------------|
| 1 | 0,8095 | 0,3628 | -0,3766 | 0,2670 | -0,0499 | -0,0115 | -0,4941 |
| 2 | 0,8093 | 0,3631 | -0,3765 | 0,2674 | -0,0496 | -0,0116 | -0,4949 |
| 3 | 0,8077 | 0,3654 | -0,3773 | 0,2678 | -0,0506 | -0,0159 | -0,4949 |
| 4 | 0,8086 | 0,3634 | -0,3780 | 0,2668 | -0,0519 | -0,0137 | -0,4948 |
| Краевая задача (6.1)–(6.5) | 0,8096 | 0,3625 | -0,3768 | 0,2668 | 0,0502 | -0,0114 | -0,4937 |
| Модифицированная задача | 0,8099 | 0,3627 | -0,3756 | 0,2673 | -0,0488 | -0,0098 | -0,4938 |

В табл. 2 для тех же задач показаны компоненты векторов углового ускорения $\varepsilon = [\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t), \varepsilon_3(t)]^T$ для каждого из случаев в точках $t = 0$, $t = 0,5$, $t = T = 1$ процесса оптимального управления КА.

Таблица 2. Величины углового ускорения

| Задача | $\varepsilon_1(0)$ | $\varepsilon_2(0)$ | $\varepsilon_3(0)$ | $\varepsilon_1(0,5)$ | $\varepsilon_2(0,5)$ | $\varepsilon_3(0,5)$ | $\varepsilon_1(1)$ | $\varepsilon_2(1)$ | $\varepsilon_3(1)$ |
|-------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|----------------------|----------------------|----------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 2 | -0,9649 | 0,7262 | -0,4736 | -0,3051 | 0,2053 | -0,2902 | 0,5357 | -0,1154 | -0,0965 |
| 3 | -0,9399 | 0,7235 | -0,4449 | -0,3207 | 0,2039 | -0,2942 | 0,5681 | -0,1076 | -0,0940 |
| 4 | -0,9262 | 0,6536 | -0,4422 | -0,3182 | 0,2586 | -0,2978 | 0,5591 | -0,2446 | -0,0886 |
| 5 | -0,7914 | 0,6537 | -0,4345 | -0,3968 | 0,2549 | -0,3002 | 0,7341 | -0,2381 | -0,0875 |
| Краевая задача (6.1)–(6.5) | -0,9854 | 0,7259 | -0,4892 | -0,2917 | 0,2087 | -0,2878 | 0,5077 | -0,1272 | -0,0985 |
| Модифиц. задача | -0,9647 | 0,7634 | -0,4932 | -0,3103 | 0,1687 | -0,2847 | 0,5350 | -0,0220 | 0,1024 |

Также опишем кинематические характеристики оптимального движения для случая, когда начальное состояние КА определяется соотношением (6.6), а конечное состояние – соотношением

$$(6.8) \quad \Lambda_T = (0,79368, 0,49375, -0,26823, 0,23309), \quad \omega_T = (0,2, 0,3, -0,2).$$

В табл. 3 применительно к задаче (6.1)–(6.5) и при решении динамической задачи оптимального разворота [9] для КА 3–5 представлены компоненты кватерниона положения и вектора угловой скорости при $t = 0,5$, а в табл. 4 приводятся компоненты векторов углового ускорения при $t = 0, t = 0,5, t = T = 1$.

Таблица 3. Кватернион ориентации и вектор угловой скорости

| Задача | λ_0 | λ_1 | λ_2 | λ_3 | ω_1 | ω_2 | ω_3 |
|----------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|------------|------------|------------|
| 3 | 0,79080 | 0,41371 | -0,35618 | 0,27679 | 0,31768 | -0,01578 | -0,52304 |
| 4 | 0,79103 | 0,41317 | -0,35664 | 0,27635 | 0,31932 | -0,01491 | -0,52314 |
| 5 | 0,78999 | 0,41442 | -0,35860 | 0,27492 | 0,32414 | -0,01453 | -0,52402 |
| Краевая задача (6.1)–(6.5) | 0,78995 | 0,41434 | -0,35808 | 0,28583 | 0,32168 | -0,01522 | -0,52451 |

Таблица 4. Угловое ускорение

| Задача | $\varepsilon_1(0)$ | $\varepsilon_2(0)$ | $\varepsilon_3(0)$ | $\varepsilon_1(0,5)$ | $\varepsilon_2(0,5)$ | $\varepsilon_3(0,5)$ | $\varepsilon_1(1)$ | $\varepsilon_2(1)$ | $\varepsilon_3(1)$ |
|----------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|----------------------|----------------------|----------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 3 | 0,36496 | 0,53821 | -1,00244 | -0,07017 | 0,44837 | 0,10585 | -0,54722 | 0,88317 | 1,18497 |
| 4 | 0,28551 | 0,51819 | -1,00680 | -0,04259 | 0,45769 | 0,10771 | -0,55803 | 0,86381 | 1,18517 |
| 5 | 0,19271 | 0,34271 | -1,05149 | -0,05270 | 0,54857 | 0,12304 | -0,41047 | 0,70409 | 1,16712 |
| Краевая задача (6.1)–(6.5) | 0,26547 | 0,38677 | -1,00250 | -0,06733 | 0,52385 | 0,10458 | -0,43888 | 0,74958 | 1,18404 |

Такие же вычисления проводились и для других граничных условий. Из табл. 1–4 и других расчетов следует, что в динамической задаче оптимального разворота кинематические характеристики оптимального движения КА существенно зависят от его начального и конечного состояний, менее существенно зависят от его конфигурации и достаточно близки к результатам кинематической задачи поиска оптимального углового ускорения КА. Отсюда следует, что кинематическая задача поиска оптимального углового ускорения (2.3)–(2.7), вообще говоря, носит общий характер для КА произвольных конфигураций. При этом в кинематической задаче выражения для кватерниона ориентации и вектора угловой скорости можно построить аналитически в явном виде на основе решения так называемой модифицированной задачи оптимальной переориентации КА в классе обобщенных конических движений. Управляющее угловое ускорение КА определяется посредством дифференцирования вектора его угловой скорости. Изложим это более подробно.

7. Модифицированная задача поиска оптимального углового ускорения КА

Общее решение фундаментальной задачи определения ориентации твердого тела по его известной угловой скорости (2.1), (2.3), называемой задачей Дарбу, не известно. Поэтому получим решение задачи в классе обобщенных конических движений, для этого определим вектор угловой скорости $\omega(t)$ как

$$(7.1) \quad \omega(t) = \tilde{\mathbf{Q}} \circ (\mathbf{i}_1 \dot{B}(t) \sin \Gamma(t) + \mathbf{i}_2 \dot{B}(t) \cos \Gamma(t) + \mathbf{i}_3 \dot{\Gamma}(t)) \circ \mathbf{Q},$$

где функции $B(t)$ и $\Gamma(t)$ (параметры обобщенного конического движения) произвольны. В этом случае уравнение (2.3) имеет точное решение [8, 9], удовлетворяющее начальному условию (2.5):

$$(7.2) \quad \Lambda = \Lambda_0 \circ \tilde{\mathbf{Q}} \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 \Gamma(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 (B(t) - B(0))/2\} \circ \\ \circ \exp\{\mathbf{i}_3 \Gamma(t)/2\} \circ \mathbf{Q}.$$

Как видно, формулы (7.1), (7.2) включают в себя выражения для угловой скорости и траектории КА во всех известных точных решениях задачи поиска оптимального углового ускорения КА, когда вектор его угловой скорости сохраняет постоянное направление на всем интервале времени движения (плоский эйлеров разворот КА [4]) или совершает регулярную прецессию (раздел 5 настоящей статьи). При этом формулы (7.1), (7.2), содержащие произвольные функции $B(t)$, $\Gamma(t)$, являются прямым обобщением формул (5.1), (5.3), которые содержат линейные функции βt , γt соответственно. Также следует отметить, что с помощью взаимно однозначных замен переменных (описано в [8, 9]) задачу Дарбу в общем случае можно свести к решению уравнения типа (2.3), где угловая скорость примет вид $\omega^*(t) = -\omega(t)$ и находится в классе подобных движений (кватернионное дифференциальное уравнение (2.3) с угловой скоростью $\omega^*(t)$ по-прежнему не имеет явного решения). Таким образом, вид вектора угловой скорости типа (7.1) соответствует классической кинематической интерпретации Пуансо углового движения твердого тела как обобщенного конического движения [7].

Пусть вторые производные от функций B и Γ рассматриваются как управления. Вводя обозначения

$$(7.3) \quad \dot{B} = B_1, \quad \dot{\Gamma} = \Gamma_1,$$

можно составить управляемую систему:

$$(7.4) \quad \dot{B} = B_1, \quad \dot{\Gamma} = \Gamma_1, \quad \dot{B}_1 = u_1, \quad \dot{\Gamma}_1 = u_2,$$

где B, B_1, Γ, Γ_1 есть фазовые координаты этой задачи, а u_1, u_2 – управления. Кватернион \mathbf{Q} зададим так:

$$(7.5) \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_2 \circ \mathbf{Q}_1, \quad \mathbf{Q}_1 = \exp\{\mathbf{i}_1 \alpha_1/2\}, \quad \mathbf{Q}_2 = \exp\{\mathbf{i}_2 \alpha_2/2\},$$

где α_1, α_2 – произвольные константы. Следует отметить, кватернионы \mathbf{Q}_1 и \mathbf{Q}_2 поворачивают вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ (7.1) вокруг осей $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$. За счет аддитивной постоянной, входящей в функцию $\Gamma(t)$, поворот вокруг оси \mathbf{i}_3 уже учтен в выражении (7.1). Спряжение кватерниона $\tilde{\mathbf{Q}}$ выглядит так:

$$(7.6) \quad \tilde{\mathbf{Q}} = \tilde{\mathbf{Q}}_1 \circ \tilde{\mathbf{Q}}_2, \quad \tilde{\mathbf{Q}}_1 = \exp\{-\mathbf{i}_1\alpha_1/2\}, \quad \tilde{\mathbf{Q}}_2 = \exp\{-\mathbf{i}_2\alpha_2/2\}.$$

Удовлетворение краевым условиям (2.5), (2.6) функций $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Lambda}$ (7.1), (7.2) с учетом (7.5), (7.6) запишется так:

$$(7.7) \quad \tilde{\mathbf{Q}}_1 \circ \tilde{\mathbf{Q}}_2 \circ (\mathbf{i}_1 B_1(0) \sin \Gamma(0) + \mathbf{i}_2 B_1(0) \cos \Gamma(0) + \mathbf{i}_3 \Gamma_1(0)) \circ \mathbf{Q}_2 \circ \mathbf{Q}_1 = \boldsymbol{\omega}_0,$$

$$(7.8) \quad \tilde{\mathbf{Q}}_1 \circ \tilde{\mathbf{Q}}_2 \circ (\mathbf{i}_1 B_1(T) \sin \Gamma(T) + \mathbf{i}_2 B_1(T) \cos \Gamma(T) + \mathbf{i}_3 \Gamma_1(T)) \circ \mathbf{Q}_2 \circ \mathbf{Q}_1 = \boldsymbol{\omega}_T,$$

$$(7.9) \quad \boldsymbol{\Lambda}_0 \circ \tilde{\mathbf{Q}}_1 \circ \tilde{\mathbf{Q}}_2 \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 \Gamma(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 (B(T) - B(0))/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 \Gamma(T)/2\} \circ \mathbf{Q}_2 \circ \mathbf{Q}_1 = \boldsymbol{\Lambda}_T.$$

Оптимизационная задача для управляемой системы (7.4) выглядит так: найти оптимальные управления $u_1(t), u_2(t)$, переводящие систему (7.4) из состояния

$$(7.10) \quad B = B(0), \quad B_1 = B_1(0), \quad \Gamma = \Gamma(0), \quad \Gamma_1 = \Gamma_1(0)$$

в состояние

$$(7.11) \quad B = B(T), \quad B_1 = B_1(T), \quad \Gamma = \Gamma(T), \quad \Gamma_1 = \Gamma_1(T),$$

которые удовлетворяют соотношениям (7.7)–(7.9), где параметры α_1, α_2 подлежат определению, и исполняют критерий оптимальности

$$(7.12) \quad J = \int_0^T (u_1^2 + u_2^2) dt.$$

Выражения (7.7)–(7.9) запишем так:

$$(7.13) \quad (\mathbf{i}_1 B_1(0) \sin \Gamma(0) + \mathbf{i}_2 B_1(0) \cos \Gamma(0) + \mathbf{i}_3 \Gamma_1(0)) = \mathbf{Q}_2 \circ \mathbf{Q}_1 \circ \boldsymbol{\omega}_0 \circ \tilde{\mathbf{Q}}_1 \circ \tilde{\mathbf{Q}}_2,$$

$$(7.14) \quad (\mathbf{i}_1 B_1(T) \sin \Gamma(T) + \mathbf{i}_2 B_1(T) \cos \Gamma(T) + \mathbf{i}_3 \Gamma_1(T)) = \\ = \mathbf{Q}_2 \circ \mathbf{Q}_1 \circ \boldsymbol{\omega}_T \circ \tilde{\mathbf{Q}}_1 \circ \tilde{\mathbf{Q}}_2,$$

$$(7.15) \quad \exp\{-\mathbf{i}_3 \Gamma(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 (B(T) - B(0))/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 \Gamma(T)/2\} = \\ = \mathbf{Q}_2 \circ \mathbf{Q}_1 \circ \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_0 \circ \boldsymbol{\Lambda}_T \circ \tilde{\mathbf{Q}}_1 \circ \tilde{\mathbf{Q}}_2.$$

Из уравнения (2.4) путем дифференцирования определяется управляющее угловое ускорение КА

$$(7.16) \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Поставленную задачу назовем модифицированной задачей поиска оптимального углового ускорения КА, ее точное решение допустимо как приближенное или квазиоптимальное решение классической оптимальной задачи (2.3)–(2.6), (3.1).

8. Решение модифицированной задачи поиска углового ускорения КА

Функция Гамильтона–Понтрягина задачи (7.4)–(7.12):

$$(8.1) \quad H = -(u_1^2 + u_2^2) + \psi_1 B_1 + \psi_2 \Gamma_1 + \psi_3 u_1 + \psi_4 u_2,$$

где сопряженные переменные удовлетворяют дифференциальной системе

$$(8.2) \quad \dot{\psi}_1 = 0, \quad \dot{\psi}_2 = 0, \quad \dot{\psi}_3 = -\psi_1, \quad \dot{\psi}_4 = -\psi_2.$$

Система (8.2) имеет общее решение

$$(8.3) \quad \psi_1 = c_1, \quad \psi_2 = c_2, \quad \psi_3 = -c_1 t + c_3, \quad \psi_4 = -c_2 t + c_4,$$

где c_1, \dots, c_4 – неопределенные константы.

Условие максимума функции Гамильтона–Понтрягина (8.2) дает структуру оптимальных управлений:

$$(8.4) \quad u_1 = \psi_3/2 = (-c_1 t + c_3)/2, \quad u_2 = \psi_4/2 = (-c_2 t + c_4)/2.$$

Подставляя формулы (8.4) в уравнения (7.4), находим их общее решение, которое содержит 8 неопределенных констант c_1, \dots, c_8 :

$$(8.5) \quad \begin{aligned} B &= -c_1 t^3/12 + c_3 t^2/4 + c_5 t + c_6, & \Gamma &= -c_2 t^3/12 + c_4 t^2/4 + c_7 t + c_8, \\ B_1 &= -c_1 t^2/4 + c_3 t/2 + c_5, & \Gamma_1 &= -c_2 t^2/4 + c_4 t/2 + c_7. \end{aligned}$$

Исходя из (8.4) в выражении для функции В (8.5) положим константу c_6 равной 0. Для определения девяти неизвестных постоянных задачи $c_1, \dots, c_5, c_7, c_8$ и α_1, α_2 служат 9 уравнений системы (7.13)–(7.15) (из-за требования $\|\mathbf{\Lambda}\| = 1$ 3 скалярных уравнения независимы в кватернионной записи (7.15)). Следует отметить, что эти уравнения можно решать модифицированным методом Ньютона, где в качестве начальных приближений будут выступать значения констант $c_1, \dots, c_5, c_7, c_8$ и α_1, α_2 из точного решения задачи в частном случае по разделу 5 статьи.

На основе (7.1), (7.2), (8.5) получим явные зависимости, определяющие законы изменения угловой скорости и траектории КА в задаче поиска оптимального углового ускорения в классе обобщенных конических движений. Формула (7.16) с учетом (7.1), (8.4) и (8.5) дает аналитическое выражение для вектора углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$(8.6) \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \tilde{\mathbf{Q}} \circ (\mathbf{i}_1(u_1 \sin \Gamma + B_1 \Gamma_1 \cos \Gamma) + \mathbf{i}_2(u_1 \cos \Gamma - B_1 \Gamma_1 \sin \Gamma) + \mathbf{i}_3 u_2) \circ \mathbf{Q}.$$

С учетом (7.3), (7.5), (7.6) компоненты векторов ω и ε (7.1), (8.6) имеют явный вид:

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= B_1 \sin \Gamma \cos \alpha_2 - \Gamma_1 \sin \alpha_2, \\
 \omega_2 &= B_1 (\sin \Gamma \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - \cos \Gamma \cos \alpha_1) + \Gamma_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2, \\
 \omega_3 &= B_1 (\sin \Gamma \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \cos \Gamma \sin \alpha_1) + \Gamma_1 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2, \\
 \varepsilon_1 &= u_1 (\sin \Gamma + B_1 \Gamma_1 \cos \Gamma) \cos \alpha_2 - u_2 \sin \alpha_2, \\
 \varepsilon_2 &= u_1 (\sin \Gamma \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + \cos \Gamma \cos \alpha_1) + \\
 &\quad + B_1 \Gamma_1 (\cos \Gamma \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - \sin \Gamma \cos \alpha_1) + u_2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2, \\
 \varepsilon_3 &= u_1 (\sin \Gamma \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \cos \Gamma \sin \alpha_1) + \\
 &\quad + f_1 \Gamma_1 (\cos \Gamma \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + \sin \Gamma \sin \alpha_1) + u_2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2.
 \end{aligned}$$

Норма вектора управляющего углового ускорения КА, входящая в функционал (2.7) (или (3.1)) исходной задачи, выражается через элементы модифицированной задачи так:

$$(8.7) \quad \|\varepsilon\| = u_1^2 + B_1^2 \Gamma_1^2 + u_2^2.$$

Модифицированная задача поиска оптимального углового ускорения КА полностью решена.

Если в классической и модифицированной задаче поиска оптимального углового ускорения КА граничные условия по угловой скорости КА положить такими же, как в разделе 5, то решения этих задач полностью совпадут. То же самое можно сказать, когда $\omega_0 \ \omega_T \parallel \text{vect}(\tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda_T)$ (плоский эйлеров поворот КА [4]), в этом случае $B_1^2 \Gamma_1^2 = 0$ в (8.7) и критерий (7.12) соответствует критерию оптимизации (2.7) (или (3.1)) классической задачи. Для произвольных граничных условий, полагая, что $\int_0^1 B_1^2 \Gamma_1^2 dt$ мало по сравнению с величиной $\int_0^1 \|\varepsilon\| dt$, в (8.7) можно опустить последнее слагаемое. Тогда модифицированная задача оптимального управления в переменных $B, \Gamma, B_1, \Gamma_1, u_1, u_2$ с функционалом (7.12) и выражениями (7.1), (7.2), (7.13)–(7.15), (8.4)–(8.6) будет соответствовать классической задаче поиска оптимального углового ускорения КА в классе обобщенных конических движений. На основании рассуждений разделов 5, 6 статьи модифицированная задача может рассматриваться в качестве квазиоптимальной задачи поиска углового ускорения КА при произвольных граничных условиях.

Подобно классической задаче (формулы (4.11), (4.12)) величина $\|\varepsilon\|$ в модифицированной задаче в любой момент времени находится внутри переменной области ограничения, определяемой постоянными условия задачи. На основе (8.4), (8.7) при сделанных выше допущениях получим:

$$(8.8) \quad \|\varepsilon(t)\| \leq ((c_1^2 + c_2^2)t^2 + 2 |c_1 c_3 + c_2 c_4| t + c_3^2 c_4^2) / 4, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Приведем квазиоптимальный алгоритм решения задачи поиска минимального по энергии углового ускорения КА.

1. По имеющимся краевым условиям Λ_0, Λ_T (2.5), ω_0, ω_T (2.6) и $T = 1$ по формулам (7.5), (7.6), девяти скалярным уравнениям из (7.13)–(7.15), принимая во внимание (8.3)–(8.5), находятся 9 произвольных констант $c_1, \dots, c_5, c_7, c_8$ и α_1, α_2 и определяются функции $B(t), B_1(t), \Gamma(t), \Gamma_1(t)$;

2. Вычисляется кватернион \mathbf{Q} по формуле (7.5);

3. Закон изменения угловой скорости КА по (7.1):

$$\omega(t) = \tilde{\mathbf{Q}} \circ \left(\mathbf{i}_1 \dot{B}(t) \sin \Gamma(t) + \mathbf{i}_2 \dot{B}(t) \cos \Gamma(t) + \mathbf{i}_3 \dot{\Gamma}(t) \right) \circ \mathbf{Q};$$

4. Закон изменения траектории углового движения КА по (7.2):

$$\Lambda(t) = \Lambda_0 \circ \tilde{\mathbf{Q}} \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 \Gamma(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 (B(t) - B(0))/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 \Gamma(t)/2\} \circ \mathbf{Q};$$

5. Вектор углового ускорения КА строится по формуле (8.6):

$$\varepsilon = \tilde{\mathbf{Q}} \circ (\mathbf{i}_1 (u_1 \sin \Gamma + B_1 \Gamma_1 \cos \Gamma) + \mathbf{i}_2 (u_1 \cos \Gamma - B_1 \Gamma_1 \sin \Gamma) + \mathbf{i}_3 u_2) \circ \mathbf{Q}.$$

9. Числовые примеры

Сравниваются результаты численного решения исходной (классической) задачи поиска оптимального углового ускорения КА и квазиоптимального решения этой задачи по аналитическому алгоритму раздела 8 статьи. Величины $\alpha_1, \alpha_2, c_1, \dots, c_5, c_7, c_8$ в квазиоптимальном решении задачи при развороте КА с граничными условиями (6.6), (6.7):

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -0,0421, & \alpha_2 &= -0,2226, & c_1 &= 3,2902, & c_2 &= -1,4885, & c_3 &= 2,2113, \\ c_4 &= -1,45, & c_5 &= -0,4156, & c_6 &= 0, & c_7 &= -0,2221, & c_8 &= -0,9216. \end{aligned}$$

Результаты решений двух задач оказались близки. Значение функционала (3.1) исходной задачи в рассматриваемом примере составляет 0,4782. Значение (3.1), вычисленное на основе решения модифицированной задачи, составляет 0,4797. Таким образом, в рассматриваемом примере относительная погрешность между значениями функционала (3.1) для классической и модифицированной задачи составляет 0,3%. На рис. 1, 2 приведены графики изменения в зависимости от t проекций вектора угловой скорости КА $\omega_i(t)$, компонент кватерниона поворота КА $\Lambda_i(t)$ и проекций вектора углового ускорения КА $\varepsilon_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, которые для двух задач достаточно похожи.

Также проводились численные решения задачи поиска оптимального по энергии углового ускорения КА для случаев, когда начальное состояние КА определялось соотношениями (6.6). Конечное положение КА задавалось поворотом КА из начального положения на некоторый угол вокруг эйлеровой оси, единичный вектор которой определялся координатами

$$(9.1) \quad (0,04500, -0,07519, -0,99615).$$

$T = 1$

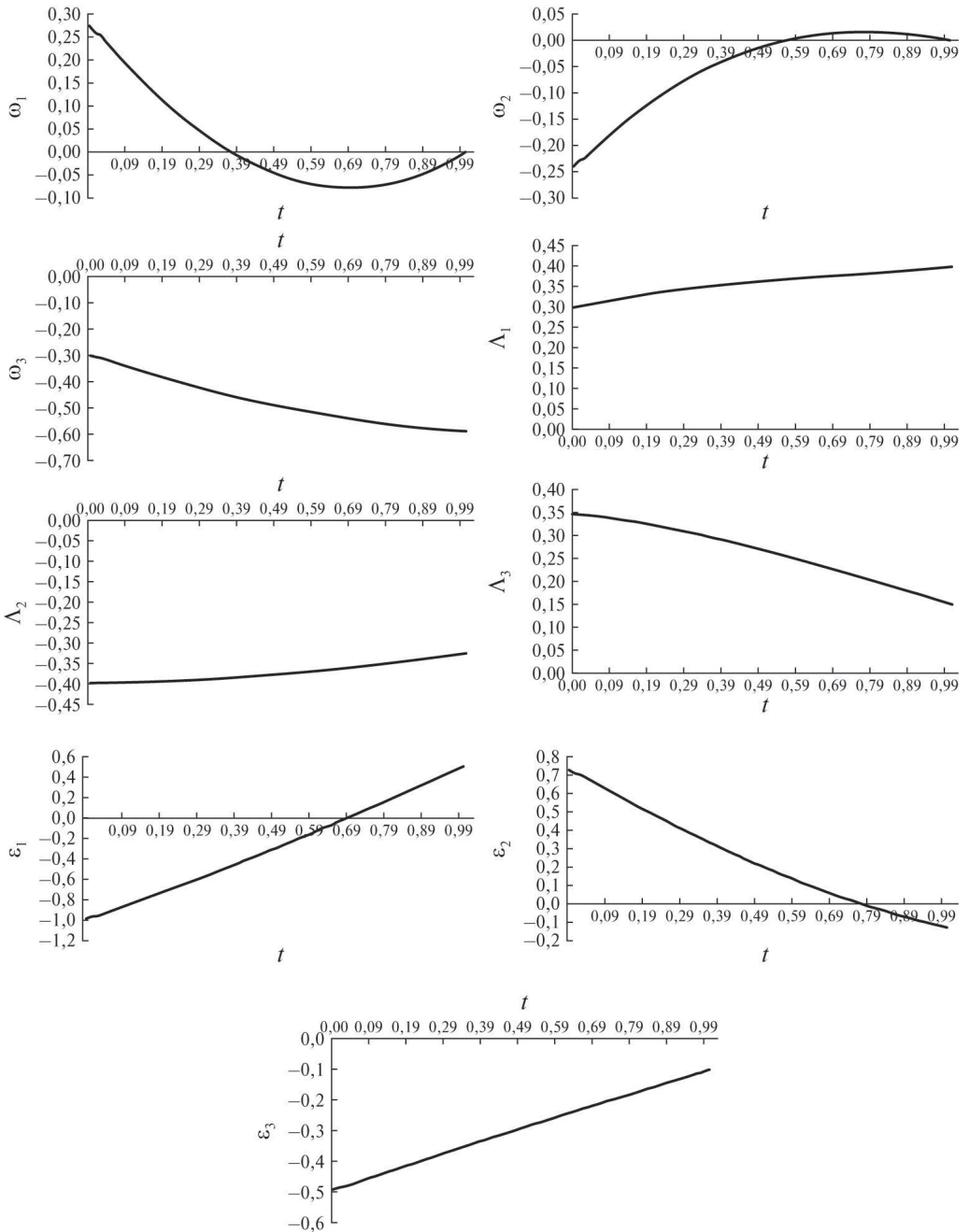


Рис. 1. Результаты решения классической задачи при произвольных граничных условиях.

В табл. 5 приводятся компоненты кватернионов конечного положения твердого тела (КА) для поворотов на различные величины эйлера угла φ в градусах вокруг вектора (9.1).

$$T = 1$$

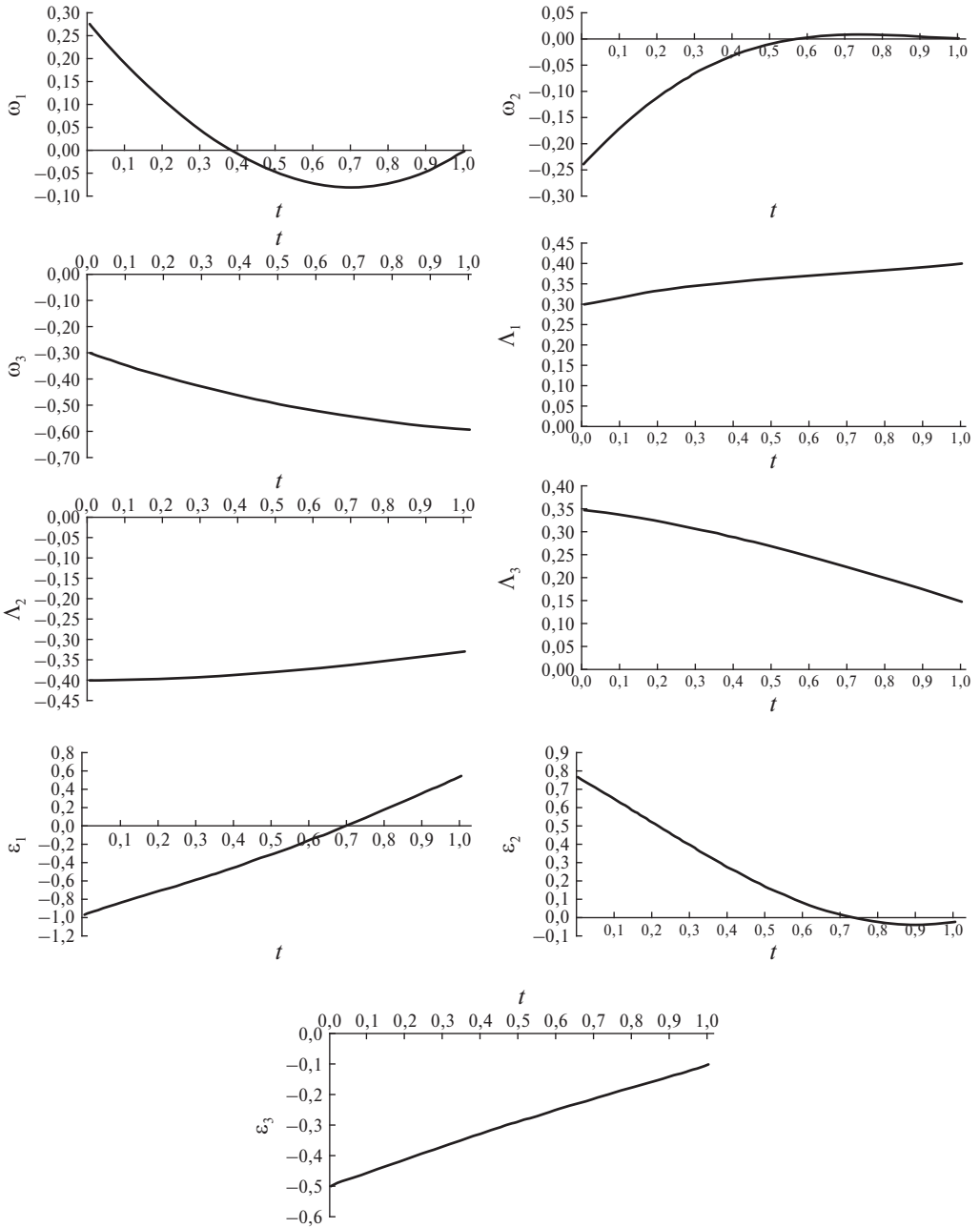


Рис. 2. Результаты решения модифицированной задачи при произвольных граничных условиях.

В табл. 6 представлены значения функционала (3.1) в классической и модифицированной задачах поиска оптимального углового ускорения при переводе КА из начального состояния (6.6) в конечные состояния Λ_T

Таблица 5. Формирование кватернионов конечной ориентации КА

| φ° | $\lambda_0(T)$ | $\lambda_1(T)$ | $\lambda_2(T)$ | $\lambda_3(T)$ |
|-----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 30,0 | 0,84643 | 0,40650 | -0,31853 | 0,12982 |
| 60,0 | 0,84013 | 0,48716 | -0,21783 | -0,09703 |
| 90,0 | 0,77657 | 0,53461 | -0,10229 | -0,31727 |
| 120,0 | 0,66009 | 0,54564 | 0,02023 | -0,51589 |
| 150,0 | 0,49863 | 0,51948 | 0,14136 | -0,67935 |
| 180,0 | 0,30318 | 0,45792 | 0,25286 | -0,79652 |

по табл. 5 и при $\omega_T = (0,0, 0,0, -0,59)$ с указанием разности между значениями этих функционалов $\Delta J = J_{\text{модиф}} - J_{\text{классич}}$ и процентного расхождения $(\Delta J / J_{\text{классич}}) \cdot 100\%$.

Таблица 6. Величины функционалов и их расхождения

| Функционалы и расхождения их величин | $\varphi = 30,0^\circ$ | $\varphi = 60,0^\circ$ | $\varphi = 90,0^\circ$ | $\varphi = 150,0^\circ$ | $\varphi = 180,0^\circ$ |
|--------------------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|-------------------------|-------------------------|
| $J_{\text{классич}}$ | 0,52385 | 4,63277 | 15,31437 | 56,39081 | 86,78094 |
| $J_{\text{модиф}}$ | 0,52510 | 4,63724 | 15,32882 | 56,52086 | 87,51533 |
| ΔJ | 0,00125 | 0,00447 | 0,01445 | 0,13005 | 0,73439 |
| % | 0,24 | 0,10 | 0,09 | 0,23 | 0,85 |

В табл. 7 приводятся такие же данные для случаев, когда конечная угловая скорость КА определяется вектором $\omega_T = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$, т.е. при переводе КА в состояние покоя.

Таблица 7. Величины функционалов и их расхождения

| Функционалы и расхождения их величин | $\varphi = 90,0^\circ$ | $\varphi = 120,0^\circ$ | $\varphi = 150,0^\circ$ | $\varphi = 180,0^\circ$ |
|--------------------------------------|------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| $J_{\text{классич}}$ | 24,25074 | 45,17597 | 72,66431 | 106,71186 |
| $J_{\text{модиф}}$ | 24,28745 | 45,19513 | 72,77169 | 107,40843 |
| ΔJ | 0,03672 | 0,01916 | 0,10738 | 0,69657 |
| % | 0,15 | 0,04 | 0,15 | 0,65 |

Из других расчетов для различных краевых условий следует близость решений классической и модифицированной задач поиска углового ускорения КА; это позволяет рассматривать решение модифицированной задачи как квазиоптимальное по отношению к классической задаче поиска оптимального углового ускорения КА.

10. Заключение

Аналитический квазиоптимальный алгоритм решения кинематической задачи поиска программного оптимального по энергии углового ускорения КА при произвольных краевых условиях достаточно теоретически обоснован и с допустимой точностью решает оптимальную кинематическую задачу определения углового ускорения КА. Предложенный алгоритм не требует численного решения краевой задачи принципа максимума или иного сложного численного решения и является готовыми аналитическими законами квазиоптимального программного управления и изменения программной траектории, которые могут быть установлены на борт КА. В связи с этим полученные результаты могут быть применены для КА нанокласса, имеющих ограничения на вычислительные мощности. Кроме этого, на основе полученных результатов с использованием принципа перенесения Котельникова–Штуди [13], позволяющего распространить кватернионные формулы, описывающие управление угловым движением, на бикватернионные формулы, описывающие управление общим пространственным движением твердого тела, может быть получен аналитический квазиоптимальный по энергии алгоритм программного управления пространственным движением (маневрированием) КА.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Scrivener S.L., Thompson R.C.* Survey of Time-Optimal Attitude Maneuvers // *J. Guidance, Control Dynam.* 1994. V. 17. No. 2. P. 225–233.
2. *Junkins J.L., Turner J.D.* Optimal Spacecraft Rotational Maneuvers. N. Y.: Elsevier, 1986.
3. *Crassidis J.L., Markley F.L.* Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control. N.Y.: Springer, 2014.
4. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973.
5. *Сомов Е.И., Бутырин С.А., Сомова Т.Е.* Автономное наведение и управление миниспутниками в низкоорбитальной группировке при площадной сканирующей съемке // Сб. тр. XXX Юбил. С.-Петербург. междунар. конф. по интегрир. навигац. сист. СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2023.
6. *Иванова Е.А.* Об одном подходе к решению задачи Дарбу // *Изв. РАН. МТТ.* 2000. № 1. С. 45–52.
7. *Molodenkov A.V., Perehlyayev S.E.* Solution of Approximate Equation for Modified Rodrigues Vector and Attitude Algorithm Design // *J. Guidance, Control Dynam.* 2021. V. 44. No. 6. P. 1224–1227.
8. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Аналитическое квазиоптимальное решение задачи минимального по времени поворота космического аппарата // *Изв. РАН. ТиСУ.* 2021. № 4. С. 142–156.
9. *Sapunkov Ya.G., Molodenkov A.V.* Quasioptimal Spacecraft Attitude Control Constructed According to the Poinot Concept // *Aerospace.* 2023. V. 10. No. 5. P. 402–417.

10. Молоденков А.В., Сапунков Я.Г. Квазиоптимальное по быстрдействию угловое ускорение космического аппарата, полученное на основе концепции Пуансо // *АиТ*. 2025. № 3. С. 38–59.
11. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.
12. Молоденков А.В., Сапунков Я.Г. Решение задачи оптимальной переориентации сферически симметричного вращающегося космического аппарата с импульсным управлением // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2007. № 10. С. 78–84.
13. Челноков Ю.Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. М.: Физматлит, 2006.
14. Банит Ю.Р., Беляев М.Ю., Добринская Т.А. и др. Определение тензора инерции международной космической станции по телеметрической информации // *Препринт № 57*. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2002.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галеевым.

Поступила в редакцию 27.12.2024

После доработки 17.10.2025

Принята к публикации 27.10.2025