

© 2026 г. А.В. ЮРЧЕНКОВ, канд. физ.-мат. наук
(alexander.yurchenkov@yandex.ru),

Р.Р. РЯХИМОВ (ryakhimov.rinat@gmail.com)

(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ПОСТРОЕНИЕ ОЦЕНИВАТЕЛЯ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ С НЕИДЕАЛЬНЫМИ ИЗМЕРЕНИЯМИ ПО КРИТЕРИЮ МИНИМИЗАЦИИ АНИЗОТРОПИЙНОЙ НОРМЫ¹

Рассмотрена стационарная система с набором неидеальных измерений, полезная составляющая которых в отдельные моменты времени может быть недоступна. Вводятся виртуальные объекты, дублирующие состояние исходного объекта наблюдения, и для каждого из таких объектов строится оценка выхода. С помощью векторизации выводится расширенная модель системы в виде линейной дискретной стационарной системы с мультипликативными шумами. Внешнее возмущение выбрано из класса последовательностей случайных векторов с ограниченным уровнем средней анизотропии. Для системы, описывающей динамику ошибок оценивания, получены условия ограниченности анизотропийной нормы, при выполнении которых выбранный вид оценщика существует. Указана обратимая линеаризующая замена переменных, позволяющая свести задачу поиска матриц оценщика к проверке разрешимости специальной системы линейных матричных неравенств с выпуклым ограничением.

Ключевые слова: анизотропийная теория, системы с мультипликативными шумами, сеть датчиков с отказами, выпуклая оптимизация.

DOI: 10.7868/S2413977726060016

1. Введение

Задачи подавления внешних возмущений, рассматриваемые в теории управления, были сформулированы еще в первой половине прошлого века [1] и постепенно переходили от детерминированных [2] и ограниченных возмущений [3] к стохастическим [4, 5], интерес к которым сохраняется до сих пор [6]. Стоит отметить, что наиболее часто описываемыми классами возмущений являются гауссовские возмущения [7] или квадратично интегрируемые (суммируемые в случае выбора дискретного времени) [8]. Связанные с указанными классами возмущений задачи подавления возмущения с \mathcal{H}_2 - или \mathcal{H}_∞ -оптимальным критерием имеют как преимущества, так и недостатки. С одной стороны, при известных стохастических характеристиках возмущения \mathcal{H}_2 -оптимальные оценщики и регуляторы хорошо себя зарекомендовали, однако решения таких задач не обладают свойствами робастности, присущими \mathcal{H}_∞ -оптимальной теории управления. С другой стороны,

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 24-21-20055).

\mathcal{H}_∞ -оптимальная теория требует большой ресурс для решения задач синтеза управления и оценивания, поскольку ориентирована на парирование так называемого «наихудшего случая», который зачастую не может быть реализован.

Анизотропийная теория управления предлагает посмотреть на задачу подавления влияния внешнего возмущения как на стохастическую модификацию \mathcal{H}_∞ -оптимальной теории, поскольку внешнее возмущение уже выбирается из класса случайных, а не квадратично суммируемых [9–11], что расширяет границы применения анизотропийной теории по сравнению с \mathcal{H}_∞ -теорией, поскольку для детерминированных и ограниченных по норме возмущений средняя анизотропия будет стремиться к бесконечности, а предельное значение анизотропийной нормы стремиться к \mathcal{H}_∞ -норме. При случайных внешних возмущениях анизотропийная теория будет давать промежуточные результаты между \mathcal{H}_∞ - и \mathcal{H}_2 -теориями с точки зрения значения функционала качества, в зависимости от значения информационного критерия. Результаты, полученные за тридцать лет существования анизотропийной теории, охватывают задачи анализа робастной устойчивости стационарных и нестационарных систем, синтеза управления и фильтрации [11–13]. Позднее появились работы, посвященные системам, состояние которых не может быть описано детерминированными уравнениями [14–16]. В частности, системы с мультипликативными шумами являются удачной формой записи динамики для систем, описывающих механические, биологические, экологические, финансовые и гибридные объекты [17]. В рамках текущей работы будет рассмотрена задача построения оценки выхода для системы с неидеальными измерениями. Под неидеальным измерением понимается такой измеряемый выход системы, который в произвольный момент времени может не содержать полезной информации об объекте наблюдения, а быть полностью случайным. Оказывается, что система с одним или сразу несколькими (возможно, дублирующими друг друга) неидеальными измеряемыми выходами может описываться разностными уравнениями с мультипликативными шумами, для которых в анизотропийной теории уже получены некоторые результаты для нестационарных систем.

Анизотропийная теория позволяет сочетать в себе особенности как \mathcal{H}_2 -, так и \mathcal{H}_∞ -оптимальных теорий управления, а в предельных случаях даже обеспечивать идентичные результаты, являясь с этой точки зрения обобщающей теорией. Поэтому при построении оценки выхода или формировании управления имеет смысл выбирать анизотропийный подход в том случае, когда стохастические характеристики внешнего возмущения не заданы. Если же матожидание и ковариационная матрица внешнего возмущения известны, то стоит остановиться на \mathcal{H}_2 -оптимальных законах синтеза оценок состояния и управления, поскольку применение более сложного с точки зрения вычислений анизотропийного подхода не будет гарантировать более высокого качества. По сравнению с \mathcal{H}_∞ -оптимальной теорией анизотропийная теория

обладает меньшим консерватизмом, поскольку не рассчитана на так называемый «наихудший случай» возмущения.

Статья устроена следующим образом: раздел 2 содержит предварительные сведения – необходимый минимум понятий из анизотропийной теории, раздел 3 – постановку задачи, в разделе 4 выводится основной результат, в разделе 5 приведены результаты моделирования, в разделе 6 – краткое заключение.

2. Предварительные сведения

Перечислим основные определения из анизотропийной теории, касающиеся непосредственно рассматриваемой задачи. Более подробный материал можно найти в [18, 19].

2.1. Анизотропия случайного вектора

Определение 1 [19]. Анизотропией случайного вектора w со значениями из \mathbb{R}^m называют величину, равную

$$(1) \quad \mathbf{A}(w) = \min_{\lambda > 0} \mathbf{D}(f || p_{m,\lambda}) = \frac{m}{2} \ln \left(\frac{2\pi e}{m} \mathbf{E} [|W|^2] \right) - h(W),$$

где f – плотность распределения вероятностей вектора w относительно лебеговой меры в \mathbb{R}^m , $h(w) = -\mathbf{E} [\ln f(w)] = -\int_{\mathbb{R}^m} f(u) \ln f(u) du$ – дифференциальная энтропия, λ – положительный параметр, определяющий плотность

$$p_{m,\lambda}(x) = (2\pi\lambda)^{-m/2} \exp \left(-\frac{|x|^2}{2\lambda} \right), \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

изотропного гауссовского распределения в \mathbb{R}^m с нулевым средним и скалярной ковариационной матрицей λI_m , где I_m – единичная матрица порядка m , $\mathbf{E}[\cdot]$ – оператор математического ожидания.

Это определение связано с относительной энтропией и характеризует минимальную меру отличия случайного вектора от множества центрированных гауссовских векторов со скалярной ковариационной матрицей.

2.2. Средняя анизотропия последовательности случайных векторов

Определение 2 [9]. Для стационарной эргодической последовательности $W = \{w_k\}$ гауссовских векторов вводится понятие средней анизотропии, равное величине

$$(2) \quad \overline{\mathbf{A}}(W) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{A}(W_{0:N-1})}{N},$$

где $W_{0:N-1} = [w_0^T, \dots, w_{N-1}^T]^T$ – расширенный вектор.

Средняя анизотропия используется для описания свойств внешнего возмущения в рамках неопределенности в стохастических параметрах при анализе робастной устойчивости линейных дискретных стационарных систем,

поскольку расширенный вектор любого распределения, отличающегося от эталонного – центрированного гауссовского со скалярной ковариационной матрицей, будет иметь растущую анизотропию при увеличении временного горизонта.

2.3. Анизотропийная норма стационарной системы

Рассмотрим линейную систему F с входом $W \in \mathbb{L}_2^m$ и выходом $Z \in \mathbb{L}_2^p$, где \mathbb{L}_2^* обозначает пространство Лебега векторов с конечной нормой. Последовательность W сгенерирована при помощи формирующего фильтра G из стандартного гауссовского белого шума V :

$$w_j = \sum_{k=0}^{\infty} g_k v_{j-k}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

где $g_k \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Обозначим через $G(z)$ передаточную функцию формирующего фильтра:

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k, \quad |z| < 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Пусть множество формирующих фильтров, генерирующих последовательности случайных векторов с ограниченной средней анизотропией, обозначается следующим образом [20]:

$$\mathcal{G}_a = \{G \in \mathcal{H}_2^{m \times m} : W = GV, \overline{\mathbf{A}}(W) \leq a\},$$

где $V = \{v_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ – стандартный гауссовский белый шум с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей.

Определение 3 [10]. *Анизотропийной нормой $\|F\|_a$ линейной системы F называют величину*

$$(3) \quad \|F\|_a = \sup_G \left\{ \frac{\|FG\|_2}{\|G\|_2} : G \in \mathcal{G}_a \right\},$$

где

$$\|G\|_2 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \text{tr}(g_k g_k^T) \right)^{1/2}$$

– \mathcal{H}_2 -норма передаточной функции $G(z)$.

3. Постановка задачи

Рассмотрим линейную дискретную стационарную систему с набором неидеальных измерителей

$$(4) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B_w w_k, \\ z_k &= C_z x_k + D_z w_k, \\ y_{j,k} &= \lambda_{j,k} C_j x_k + D_j w_k, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

где $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$, $u_k \in \mathbb{R}^{m_u}$, $w_k \in \mathbb{R}^{m_w}$, $z_k \in \mathbb{R}^{p_z}$, $y_{j,k} \in \mathbb{R}^{p_y}$, $\lambda_{j,k}$ – случайные величины, имеющие распределение Бернулли с заданными параметрами

$$P(\lambda_{j,k} = 1) = p_j, \quad j = \overline{1, n},$$

характеризующие вероятность содержания в текущем измерении $y_{j,k}$ информации о векторе состояния. В случае $\lambda_{j,k} = 1$ в измеряемом выходе содержатся полезные данные, в противном случае $\lambda_{j,k} = 0$ – только вектор возмущения $D_j w_k$. Матрицы A , B_w , C_z , D_z , C_j , D_j , $j = \overline{1, n}$, системы (4) известны и имеют согласованные с векторами x_k , w_k , z_k , $y_{j,k}$ размерности. Внешнее возмущение представляет собой стационарную гауссовскую последовательность случайных векторов $W = \{w_k\}_{k \geq 0}$, для которой известно ограничение на среднюю анизотропию всей последовательности $\mathbf{A}(W) \leq a$, $a \geq 0$. При этом считается, что все элементы последовательности W и случайные величины $\lambda_{j,k}$ независимы между собой.

Задача 1. Для выбранной модели оценителя

$$(5) \quad \begin{aligned} \hat{x}_{j,k+1} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_{ji} (A \hat{x}_{i,k} + H_{ji} (y_{i,k} - \hat{y}_{i,k})), \\ \hat{z}_{j,k} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_{ji} C_z \hat{x}_{i,k}, \\ \hat{y}_{j,k} &= p_j C_j \hat{x}_{j,k}, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{a}_{ji} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица смежности, характеризующая обмен информации между измерителями, требуется найти такие значения параметров H_{ji} , для которых анизотропийная норма системы F от внешнего возмущения к вектору ошибок оценивания была бы ограничена минимальным значением γ :

$$\|F\|_a \leq \gamma.$$

Здесь стоит оговориться, что матрица смежности \mathbf{a} не обязательно является симметричной. Эта матрица описывает ориентированный граф, вершинами которого служат измерители (датчики/сенсоры или любые доступные измерения), а направленным ребрам соответствует обмен данными между вершинами, связанными этими ребрами. В результате этого оценку можно строить не на основе каждого отдельного измерителя, а собирать консенсусный вариант оценки, где вклад каждого измерителя учтен с помощью поправочного коэффициента матрицы \mathbf{a} . Таким образом, коэффициенты матрицы смежности имеют простой физический смысл, заключающийся в уровне «доверия» информации, поступающей с других измерителей к тому, который формирует оценку. Естественным требованием является поэлементная неотрицательность и равенство единице суммы элементов каждой строки:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{a}_{ji} = 1, \quad \forall j = \overline{1, n}.$$

4. Основной результат

В этом разделе приводится решение задачи 1. Идея заключается в преобразовании модели объекта к виду системы с мультипликативными шумами и последующей проверке достаточного условия ограниченности анизотропийной нормы такой системы в терминах решения задачи выпуклой оптимизации.

4.1. Построение моделей в терминах ошибок оценивания

На первом этапе определим виртуальные модели следующим образом: для каждого существующего оцениваемого выхода $y_{j,k}$ введем состояние $x_{j,k} \in \mathbb{R}^{n_x}$, дублирующее состояние x_k объекта (4):

$$(6) \quad \begin{aligned} x_{j,k+1} &= Ax_{j,k} + B_w w_k, \\ z_{j,k} &= C_z x_{j,k} + D_z w_k, \\ y_{j,k} &= \lambda_{j,k} C_j x_{j,k} + D_j w_k, \end{aligned}$$

где $j = \overline{1, n}$. В моделях вида (6) каждый объект имеет только один измеряемый выход. Для состояний $x_{j,k}$ и выходов $z_{j,k}$ введем векторы ошибок

$$\tilde{x}_{j,k} = x_{j,k} - \hat{x}_{j,k}, \quad \tilde{z}_{j,k} = z_{j,k} - \hat{z}_{j,k},$$

которые будут иметь следующие уравнения динамики:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{j,k+1} &= Ax_{j,k} - \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_{ji} Ax_{i,k} + \left(B_w - \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_{ji} H_{ji} D_i \right) w_k - \\ &- \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_{ji} H_{ji} (\lambda_{j,k} - p_i) C_i x_{i,k} + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_{ji} (A - p_i H_{ji} C_i) \tilde{x}_{i,k}, \\ \tilde{z}_{j,k} &= C_z \left(x_{j,k} - \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_{ji} x_{i,k} \right) + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_{ji} C_z \tilde{x}_{i,k} + D_z w_k. \end{aligned}$$

4.2. Преобразование модели к виду системы с мультипликативными шумами

Составим расширенные векторы состояния, ошибок состояния и оценки из всех векторов $x_{j,k}, \tilde{x}_{j,k}, \tilde{z}_{j,k}, j = \overline{1, n}$:

$$\bar{x}_k = (x_{1,k}^T, \dots, x_{n,k}^T)^T, \quad \tilde{x}_k = (\tilde{x}_{1,k}^T, \dots, \tilde{x}_{n,k}^T)^T, \quad \tilde{z}_k = (\tilde{z}_{1,k}^T, \dots, \tilde{z}_{n,k}^T)^T.$$

Определим комбинированное состояние из векторов \bar{x}_k и \tilde{x}_k :

$$\zeta_k = (\bar{x}_k^T, \tilde{x}_k^T)^T.$$

Теперь возможно выписать уравнение динамики в терминах ошибок в зависимости от внешнего возмущения:

$$(7) \quad \begin{aligned} \zeta_{k+1} &= \left(\mathcal{A}_0 + \sum_{i=1}^n \xi_{i,k} \mathcal{A}_i \right) \zeta_k + \mathcal{B} w_k, \\ \tilde{z}_k &= \mathcal{M} \zeta_k + \mathcal{N} w_k, \end{aligned}$$

где приняты следующие обозначения:

$$(8) \quad \begin{aligned} \mathcal{A}_0 &= \begin{bmatrix} \overline{A} & 0_{nn_x \times nn_x} \\ \overline{A} - \overline{A}^\alpha & \overline{A}^\alpha - \overline{H}^\alpha \overline{C}^p \end{bmatrix}, & \mathcal{A}_i &= \begin{bmatrix} 0_{nn_x \times nn_x} & 0_{nn_x \times nn_x} \\ \overline{H}^\alpha \overline{C}_i & 0_{nn_x \times nn_x} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{B} &= \begin{bmatrix} \overline{B} \\ \overline{B} - \overline{H}^\alpha \overline{D} \end{bmatrix}, & \mathcal{M} &= [\overline{M} - \overline{M}^\alpha \quad \overline{M}^\alpha], & \mathcal{N} &= \overline{N}, \end{aligned}$$

причем случайные величины $\xi_{i,k} = \lambda_{i,k} - p_i$, $i = \overline{1, n}$, уже центрированы, а матрицы, входящие в выражения (8), имеют вид:

$$\begin{aligned} \overline{A} &= I_n \otimes A, & \overline{A}^\alpha &= \mathbf{a} \otimes A, \\ \overline{B} &= \text{col}(n) \otimes B, & \overline{H}^\alpha &= \text{block}_{j,i=\overline{1,n}}(\mathbf{a}_{ji} H_{ji}), \\ \overline{C}^p &= \text{diag}_{i=\overline{1,n}}(p_i C_i), & \overline{C}_j &= \text{diag}_{i=\overline{1,n}}(\delta_{ij} C_i), \\ \overline{D} &= \text{col}_{j=\overline{1,n}}(D_j), & \overline{M} &= I_n \otimes C_z, \\ \overline{M}^\alpha &= \mathbf{a} \otimes C_z, & \overline{N} &= \text{col}(n) \otimes D_z, \end{aligned}$$

здесь и далее выражение $\text{col}(n)$ обозначает вектор-столбец длины n , состоящий из единиц; $\text{col}_{j=\overline{1,n}}(X_j)$ – матрица, полученная из матриц X_j , $j = \overline{1, n}$, записанных в столбец; матрица $\text{block}_{j,i=\overline{1,n}}(X_{ji})$ – блочная и состоит из соответствующих блоков; $\text{diag}_{i=\overline{1,n}}(X_i)$ является диагональной матрицей с блоками в виде матриц X_i , $i = \overline{1, n}$, на главной диагонали, все внедиагональные блоки – нулевые; \otimes – кронекерово произведение.

4.3. Условие ограниченности анизотропийной нормы

Теорема 1 [15]. Для системы F вида (7) при известном ограничении уровня a на среднюю анизотропию последовательности внешнего возмущения $\{w_k\}$ и выполнении условия

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho \left(\left(E \left[\mathcal{A}^k \right] \right)^{\frac{1}{k}} \right) < 1,$$

где $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \sum_{i=1}^n \xi_{i,k} \mathcal{A}_i$, анизотропийная норма будет ограничена числом γ , если для системы неравенств

$$(9) \quad R \succ \sum_{i=0}^n \sigma_i^2 \mathcal{A}_i^\top R \mathcal{A}_i + q \mathcal{M}^\top \mathcal{M} + L^\top S^{-1} L,$$

$$(10) \quad \begin{aligned} S &= (I_{m_w} - q \mathcal{N}^\top \mathcal{N} - \mathcal{B}^\top R \mathcal{B})^{-1}, \\ L &= S(\mathcal{B}^\top R \mathcal{A} + q \mathcal{N}^\top \mathcal{M}) \end{aligned}$$

с выпуклым ограничением

$$(11) \quad -\frac{1}{2} \ln \det \left((1 - q\gamma^2)S \right) \geq a$$

существует решение относительно матриц R , S и скалярного параметра $q \in \left[0, \|F\|_\infty^{-2} \right)$, $\sigma_i = p_i(1 - p_i)$; выражение $X \succ 0$ следует понимать в смысле положительной определенности матрицы X .

Теорема 1 содержит достаточные условия ограниченности анизотропийной нормы системы в виде неравенств для системы с мультипликативными шумами (7). Однако неравенство (9) является нелинейным вследствие зависимости матриц \mathcal{B} , \mathcal{A}_i , $i = \overline{1, n}$, от матриц оценщика H_{ji} , $j = \overline{1, n}$, и их умножения на матрицу R решения этого неравенства. Для того чтобы уйти от этой проблемы и остаться в рамках ограничений в виде линейных матричных неравенств, сформулируем решение поставленной задачи как условия разрешимости системы неравенств специального вида.

Теорема 2. Пусть для системы (4) известно ограничение a на уровень средней анизотропии возмущающей последовательности $W = \{w_k\}_{k \geq 0}$. Оценщик вида (5) будет гарантировать ограничение сверху числом γ для анизотропийной нормы системы в ошибках оценивания, если следующая система неравенств

$$(12) \quad \begin{bmatrix} \mathcal{R} - \mathcal{M}^T \mathcal{M} & * & * & * & * & \cdots & * \\ \mathcal{N}^T \mathcal{M} & \eta I_{m_w} - \mathcal{N}^T \mathcal{N} & * & * & * & \cdots & * \\ \mathcal{R} \mathcal{A}_{00} + X \mathcal{A}_{01} & -\mathcal{R} \mathcal{B}_{00} - X \mathcal{B}_{01} & \mathcal{R} & * & * & \cdots & * \\ \sigma_1 X \mathcal{A}_{11} & 0 & 0 & \mathcal{R} & * & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_n X \mathcal{A}_{1n} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathcal{R} \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$(13) \quad \begin{bmatrix} \eta I_{m_w} - \Psi - \mathcal{N}^T \mathcal{N} & * \\ \mathcal{R} \mathcal{B}_{00} + X \mathcal{B}_{01} & \mathcal{R} \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$(14) \quad \ln \det \Psi \geq 2a + m_w \ln(\eta - \gamma^2)$$

имеет решение относительно матриц $\mathcal{R} = \mathcal{R}^T \succ 0$, $X \in \mathcal{R}^{4n_x \times 4n_{p_y}}$ и скалярного параметра $\eta > 0$, где $\sigma_i = p_i(1 - p_i)$,

$$\mathcal{A}_{00} = \begin{bmatrix} \overline{A} & 0 \\ \overline{A} - \overline{A}^a & \overline{A}^a \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_{01} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\overline{C}^p \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{A}_{j1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\overline{C}_j & 0 \end{bmatrix}, \quad j = \overline{1, n},$$

$$\mathcal{B}_{00} = \begin{bmatrix} \overline{B} \\ \overline{B} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_{01} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\overline{N} \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Применим лемму Шура [21] к неравенству (9), это приводит к появлению неравенства следующего вида:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{R} - \mathcal{M}^T \mathcal{M} & * & * & * & * & \cdots & * \\ \mathcal{N}^T \mathcal{M} & \eta I_{m_w} - \mathcal{N}^T \mathcal{N} & * & * & * & \cdots & * \\ \mathcal{R} \mathcal{A}_0 & -\mathcal{R} \mathcal{B} & \mathcal{R} & * & * & \cdots & * \\ \sigma_1 \mathcal{R} \mathcal{A}_1 & 0 & 0 & \mathcal{R} & * & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_n \mathcal{R} \mathcal{A}_n & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathcal{R} \end{bmatrix} \succ 0,$$

где учтена замена $\mathcal{R} = q^{-1}R$. Как можно видеть, последнее неравенство пока является нелинейным. Для приведения его к линейному виду введем следующую замену переменных:

$$X = \mathcal{R}U = \mathcal{R} \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & \overline{H}^a \end{bmatrix},$$

где Y – некоторая матрица (заранее стоит оговориться, что эта матрица не влияет на решение поставленной задачи, а именно на значения матриц оценителя H_{ji} , $j, i = \overline{1, n}$). Учитывая последнюю замену матричных переменных, получаем неравенство (12).

Для вывода неравенства (10) определим дополнительную положительно определенную матрицу Ψ , связанную с матрицей S следующим образом:

$$0 \prec \frac{1}{\eta} \Psi \prec S^{-1},$$

где $\eta^{-1} = q$. Учитывая положительную определенность матрицы Ψ , замену переменных $X = \mathcal{R}U$ и применяя лемму Шура, получаем неравенство (13). Выпуклое ограничение (14) следует из неравенства (11) после соответствующих замен переменных. Теорема доказана.

Здесь стоит упомянуть, что среди всего множества матриц решений \mathcal{R} системы (12)–(14) будем выбирать только блочно-диагональные, поскольку это будет необходимо для реализации численного решения поставленной задачи стандартными средствами.

4.4. Вычисление параметров матрицы оценителя

В случае успешного поиска решения матричных неравенств (12)–(14) набор матриц оценителя H_{ji} , $j, i = \overline{1, n}$, можно вычислить согласно обратной замене

$$(15) \quad \overline{H}^a = [0_{2nn_x \times 2nn_x} \ I_{2nn_x}] \mathcal{R}^{-1} X \begin{bmatrix} 0_{2np_y \times 2np_y} \\ I_{2np_y} \end{bmatrix}.$$

Кроме того, можно поставить задачу оптимизации по параметру γ^2 , что будет обеспечивать поиск наименьшей верхней границы анизотропийной нормы для системы в ошибках оценивания:

$$(16) \quad \gamma^2 \xrightarrow{(12)-(14), \mathcal{R}, \Psi, \eta, \gamma^2} \min.$$

Вычисление матриц H_{ji} , $j, i = \overline{1, n}$, напрямую производить не обязательно, поскольку пространственная реализация оценщика (5) зависит от блоков матрицы (15). Решение выпуклой задачи оптимизации (16) будет соответствовать минимальному ограничению на анизотропийную норму системы в ошибках оценивания.

5. Моделирование

В качестве примера рассмотрим модель, состоящую из четырехвинтового летального объекта, фиксированного на гироскопическом стенде. Объект может свободно вращаться вокруг трех осей. Необходимо оценить угол его крена с помощью имеющихся на объекте гироскопа и камеры, расположенной фронтально перед объектом. Считаем, что объект замкнут стабилизирующим управлением на основе LQG-регулятора. Дискретная модель такой системы, согласно уравнениям динамики (4), в пространстве состояний имеет следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0,9988 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0095 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,9999 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0099 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0100 \\ -0,2411 & 0,0000 & 0,0000 & 0,8926 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & -0,0141 & 0,0000 & 0,0000 & 0,9763 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & -0,0009 & 0,0000 & 0,0000 & 0,9957 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0028 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0027 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0008 \end{bmatrix}, \quad C_z = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0], \quad D_z = 0,$$

$$C_1 = [I_3 \ 0_{3 \times 3}], \quad C_2 = C_z, \quad D_1 = D_2 = 0,05 \cdot I_3,$$

параметры $p_1 = 0,9$, $p_2 = 0,95$. Первый измеряемый выход соответствует данным с бортового гироскопа, второй – с фронтальной камеры. Считается, что значения углов восстанавливаются из измерений угловых скоростей путем интегрирования, в начальный момент оценки считаются нулевыми.

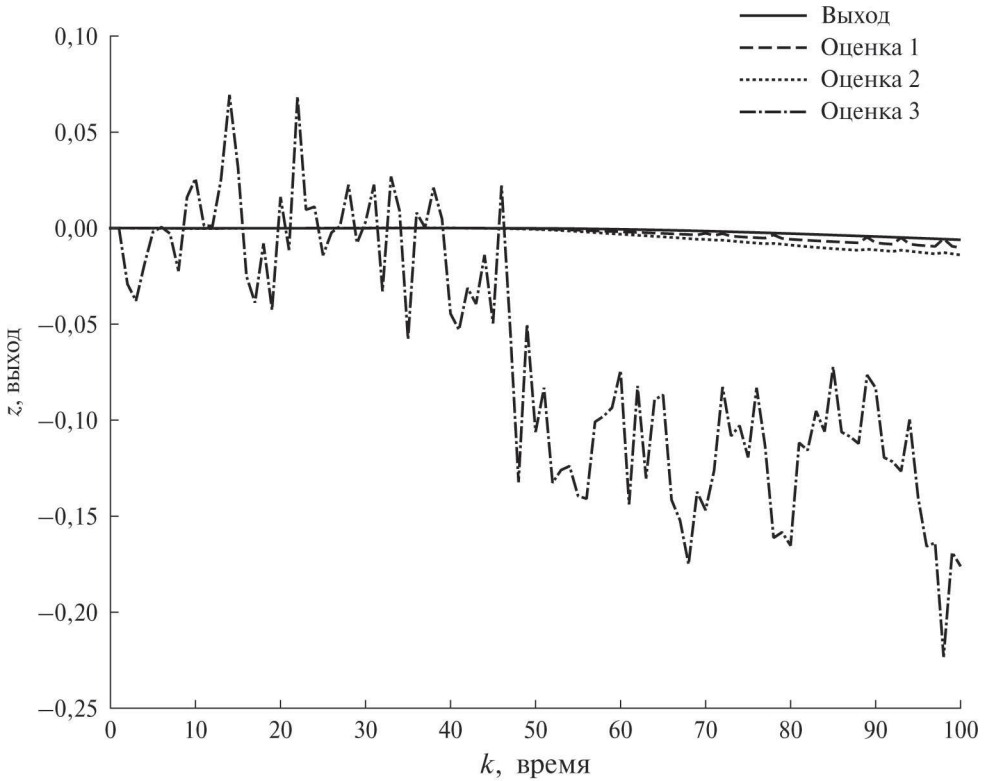


Рис. 1. Оцениваемый выход.

На рис. 1 представлены результаты моделирования для уровня средней анизотропии, равной 30. Сплошная линия соответствует оцениваемому выходу. Оценки 1 и 2 соответствуют случаю, когда при построении результирующей оценки использовались показания с другого измеряемого выхода с весовым коэффициентом, равным 0,2, в этом случае матрица смежности имеет следующий вид:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix}.$$

Оценка 3 соответствует случаю, когда для построения оценки использовался только первый измеряемый выход.

Для сравнения приведем значения евклидовых норм оцениваемого выхода $\|z\| = 0,0221$ и трех полученных оценок: $\|\hat{z}_1\| = 0,0385$, $\|\hat{z}_2\| = 0,0598$, $\|\hat{z}_3\| = 1,0222$.

На рис. 2 представлены результаты моделирования под воздействием внешнего возмущения с фиксированным уровнем средней анизотропии, равным 30. В данном случае сравним только консенсусную оценку, полученную на основе двух измерений. Штрих-пунктирная линия обозначает оценку угла крена на основе оценивателя, использующего анизотропийный подход, сплошная — \mathcal{H}_∞ -оптимальную оценку. Хотя значения евклидовых норм анизо-

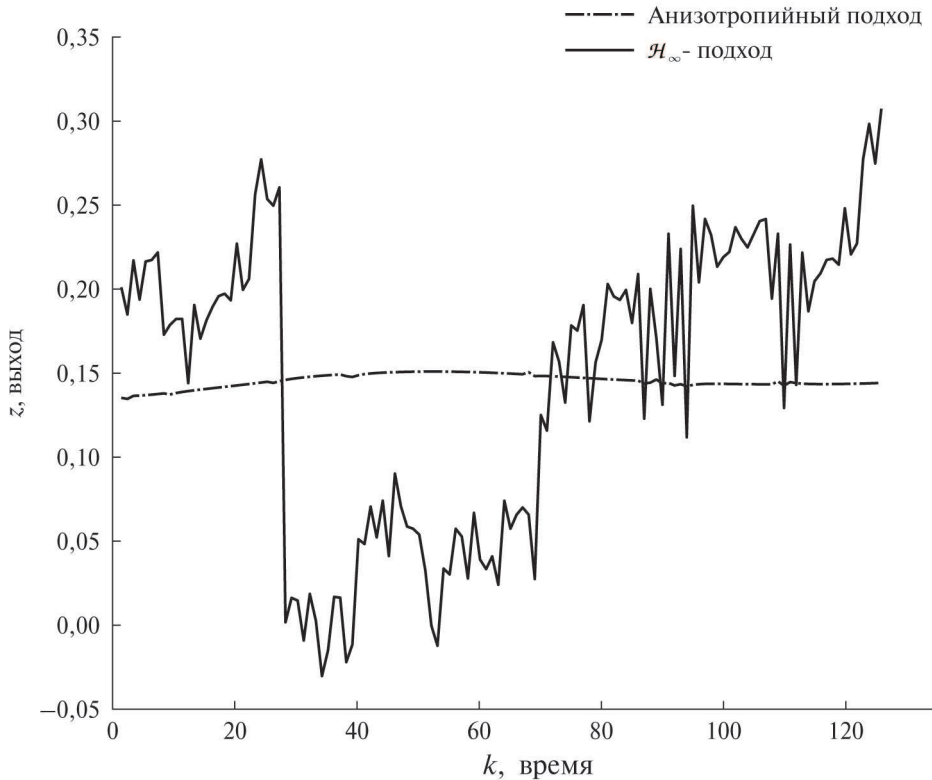


Рис. 2. Оцениваемый выход.

тропийной оценки $\|\hat{z}_{AB}\| = 1,6308$ и \mathcal{H}_∞ -оценки $\|\hat{z}_{\mathcal{H}_\infty}\| = 1,9165$ различаются на 15%, по графикам заметно, что в рассмотренном примере с неидеальными измерениями характер полученных оценок существенно отличается, что говорит о преимуществе использования анизотропного оценщика в данном случае.

6. Заключение

В статье решена задача построения оценки для системы, измеряемые выходы которой в произвольный момент времени могут быть недоступны. Для этого предлагается дублировать такие выходы и строить консенсусную оценку для выхода объекта наблюдения. Поскольку решение поставленной задачи может быть получено с помощью стандартных пакетов прикладных программ для вычислений, возможным представляется использование синтезируемого оценщика, например, для построения управления по выходу для динамических объектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булгаков Б.В. О накоплении возмущений в линейных колебательных системах с постоянными параметрами // ДАН СССР. 1946. Т. 5. С. 339–342.

2. *Vidyasagar M.* Optimal Rejection of Persistent Bounded Disturbances // IEEE Trans. Automat. Control. 1986. V. 31. P. 527–535.
3. *Якубович Е.Д.* Решение задачи оптимального управления для линейных дискретных систем // АиТ. 1975. № 9. С. 73–79.
4. *Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A.* State-space Solutions to Standard \mathcal{H}_2 - and \mathcal{H}_∞ -Control Problems // IEEE Trans. Autom. Control. 1989. V. 34. No. 8. P. 831–847.
5. *Saberi A., Sanutti P., Chen B.M.* \mathcal{H}_2 -optimal control. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1995.
6. *Lee H., Park J.* Quantitative Controllability Metric for Disturbance Rejection in Linear Unstable Systems // Mathematics. 2025. V. 13. No. 6. P. 1–24.
7. *Kalman R.E.* A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems // J. Basic Engineering. 1960. V. 82. No. 1. P. 35–45.
8. *Zames G.* Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses // IEEE Trans. Autom. Control. 1981. V. 26. No. 2. P. 301–320.
9. *Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В.* Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем // Доклады РАН. 1995. Т. 342. № 5. С. 583–585.
10. *Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V.* On Computing the Anisotropic Norm of Linear Discrete-time-invariant Systems // Proc. 13 IFAC World Congr. 1996. P. 179–184.
11. *Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V.* State-space Solution to Anisotropy-based Stochastic \mathcal{H}_∞ -Optimization Problem // Proc. 13 IFAC World Congr. 1996. P. 427–432.
12. *Тимин В.Н., Курдюков А.П.* Субоптимальная анизотропийная фильтрация на конечном горизонте // АиТ. 2016. № 1. С. 5–29.
13. *Чайковский М.М., Тимин В.Н., Кустов А.Ю., Курдюков А.П.* Численные процедуры анизотропийного анализа стационарных систем и синтез субоптимальных регуляторов и фильтров // АиТ. 2018. № 1. С. 162–182.
14. *Kustov A.Yu.* State-Space Formulas for Anisotropic Norm of Linear Discrete Time Varying Stochastic System // Proc. of the 15th Int. Conf. on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control. 2018. P. 1–6.
15. *Юрченков А.В.* Условие ограниченности анизотропийной нормы для стационарных систем с мультипликативными шумами // Проблемы управления. 2022. № 5. С. 16–24.
16. *Yurchenkov A.V., Kustov A.Yu., Timin V.N.* The sensor network estimation with dropouts: Anisotropy-based approach // Automatica. 2023. V. 151. P. 110924 (1–8).
17. *Shen B., Wang Z., Hung Y.S.* Distributed \mathcal{H}_∞ -consensus Filtering in Sensor Networks with Multiple Missing Measurements: The Finite-horizon Case // Automatica. 2010. V. 46. P. 1682–1688.
18. *Diamond P., Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V.* Anisotropy-based performance analysis of linear discrete time invariant control systems // Int. J. Control. 2001. V. 74. No. 1. P. 28–42.

19. *Владимиров И.Г., Даймонд Ф., Клоеден П.* Анизотропийный анализ робастного качества линейных нестационарных дискретных систем на конечном временном интервале // *АиТ.* 2006. № 8. С. 92–111.
20. *Semyonov A.V., Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P.* Stochastic approach to \mathcal{H}_∞ -optimization // *Proc. of the 33rd Conf. on Decision and Control.* 1994. V. 3. P. 2249–2250.
21. *Boyd, S., Vandenberghe L.* *Convex Optimization.* Cambridge: Cambridge University Press, 2004. 730 p.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В. Назиньм.

Поступила в редакцию 29.04.2025

После доработки 30.10.2025

Принята к публикации 05.11.2025