

© 2026 г. И.В. БУРКОВА, д-р техн. наук (irbur27@mail.ru),
А.В. ЩЕПКИН, д-р техн. наук (av_shch@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

УЧЕТ МЯГКИХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ПРИ НАЛИЧИИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОЕКТОВ ПРОГРАММЫ

Рассматриваются задачи управления программой, состоящей из нескольких проектов при наличии мягких зависимостей между некоторыми из них. Использование мягких зависимостей позволяет уменьшить время или затраты на выполнение непосредственно следующего проекта, что приводит к уменьшению времени выполнения всей программы и/или затрат на ее выполнение. Приведен пример, который показывает, как редко можно свести работу с мягкими зависимостями к простым схемам без потери сути. Вводится учет стохастической неопределенности реализации проектов. Делается вывод, что получение эффекта от учета мягких зависимостей зависит от вероятности их реализации.

Ключевые слова: программа, проект, жесткие зависимости, мягкие зависимости, стохастическая неопределенность реализации мягких зависимостей.

DOI: 10.7868/S2413977726050035

1. Введение

В программе, состоящей из взаимосвязанных проектов, при ее реализации часто возникает ситуация, когда результаты одного проекта могут быть использованы при выполнении других, что зачастую позволяет сократить время выполнения или затрат на выполнение (или и то и другое). Такие зависимости между проектами – не требующие обязательного выполнения, но положительно влияющие на параметры программы – получили название «мягкие зависимости».

Задачи с мягкими зависимостями рассматривались в [1–4], причем в работах [1, 2] были изучены достаточно простые закономерности, например, эффект от учета нескольких мягких зависимостей предполагался аддитивным, никак не учитывались вероятностные характеристики [5–9] эффекта от мягких зависимостей, который безусловно присутствует. Чтобы показать, что не всегда эта практика применима, рассмотрим пример.

2. Пример оценки мягких зависимостей в программе

Пусть имеется программа, состоящая из пяти проектов, данные о которых приведены в табл. 1.

Таблица 1. Данные о проектах программ

Проект	Окончание min t_{\min}/p	Окончание max t_{\max}/p	Влияние на проекты	Сокраще- ние t_c/r_c
1. Запуск линии по производству бетона Б1	12/0,5	20/1	2,5	7/20; 5/100
2. Запуск линии по производству бетона Б15	15/0,6	22/1	5	8/150
3. Запуск линии по производству арматуры А0	7/0,8	11/1	4,5	4/15 6/120
4. Запуск линии по производству арматуры А15 (может использоваться только с бетоном Б15, при использовании вместе $t_c = 2$, $r_c = 5$)	9/0,7	12/1	5	7/180
5. Строительство жилого комплекса	400/0,75	500/0,95	–	–

В таблице введены следующие обозначения: t_{\min} – минимальное время на реализацию проекта (в днях), t_{\max} – максимальное время на реализацию проекта (в днях), p – вероятность завершения проекта за это время, t_c – время, на которое сокращается реализация соответствующего последующего проекта (в днях), r_c – сокращение ресурсов соответствующего последующего проекта (в млн. руб.).

Для проекта строительства жилого комплекса 500 дней – это дедлайн. Это единственный в данном примере проект, вероятность реализации которого в максимальный срок меньше единицы. Такая ситуация возможна, когда максимальный срок окончания проекта задается «извне», например, заказчиком, а далее делается все возможное, чтобы календарный план позволил выполнить работы к указанному сроку.

Поясним приведенную таблицу. Строительство жилого комплекса можно начать независимо от запуска производственных линий. Тогда и бетон, и арматуру, которые потребуются сразу (предполагается, что котлован уже вырыт), придется закупать у поставщиков, что, естественно, требует и времени на ожидание поставки, и денег. Сейчас это все заложено в проект по строительству. Очевидно, что стоимость комплектующих, закупленных «на стороне» окажется выше, чем при собственном производстве. Поэтому, учитывая планы на организацию линий по производству бетона и арматуры, есть смысл рассмотреть вариант самостоятельного обеспечения строительного проекта этими материалами. Финансово такой подход для исполнителя безусловно выгоден, осталось понять, насколько он возможен по времени, ведь производственные линии придется сначала ввести в эксплуатацию.

Можно запустить линию по производству бетона. При этом выпускать бетон марки Б1 или улучшенный (модифицированный) Б15. Например, использование Б15 позволит не добавлять некоторые присадки, сократит сроки за-

стывания конструкции и т.п. Производство В15 можно наладить независимо или на основе уже запущенной линии В1. Во втором варианте время запуска производственной линии сокращается на 7 дней, но начать эту работу возможно только после ввода в эксплуатацию линии В1, которая с вероятностью 100% будет запущена через 20 дней. Т.е. при экономии и времени, и ресурса, производство В15 точно запускается через 35 дней. При этом, если очень повезет и все удастся выполнить в кратчайшие сроки, это время снизится до 20 дней с вероятностью

$$p_{12\min} = p_{1\min} \times p_{2\min} = 0,5 \times 0,6 = 0,3,$$

где $p_{1\min}$, $p_{2\min}$, $p_{12\min}$ – вероятности завершения первого, второго или первого и второго проекта с учетом мягкой зависимости за минимальное время.

Аналогично можно рассмотреть ситуацию с арматурой. Арматура А15 более прочная, легкая, надежная, но может использоваться только вместе с бетоном В15, зато их совместное использование добавляет 5 к экономии ресурсов и 2 к экономии времени. Арматура А0 может использоваться с бетоном любой марки. Если запускать линию по производству А15 на основе линии по производству А0 с вероятностью

$$p_{34\min} = p_{3\min} \times p_{4\min} = 0,8 \times 0,7 = 0,56,$$

то сделать это можно за 12 дней, а с вероятностью 100% запустить линию за 19.

Очевидно, что в описанной ситуации все зависимости мягкие, а их влияние невозможно просто просуммировать. Во-первых, существуют различные сценарии их использования:

1. Запустить все проекты независимо, и время на запуске производственных линий в этом случае скорее всего будет сокращено, поскольку при последовательном запуске можно начать работать с усложненными линиями в лучшем случае только через 12 и 7 дней, что в обоих случаях больше сэкономленных за счет мягких зависимостей сроков. Начать строительство тоже можно как минимум на неделю раньше. Заметим, что сэкономленное за счет мягких зависимостей время здесь не учитывается.

2. Можно использовать свой бетон – простой или улучшенный, подождав от 12 до 35 дней и сэкономив на этом от 100 до 150 млн. и 5 дней. Поскольку срок завершения строительства жестко задан, 5 дней тоже играют роль.

3. Можно использовать свою арматуру – универсальную или улучшенную, подождав от 7 до 19 дней и сэкономив на этом 120–180 млн. и 6 дней. При жестком сроке завершения строительства 6 дней тоже имеет смысл учитывать.

4. Можно использовать и бетон, и арматуру собственного производства с учетом совместимости – А15 может использоваться только с В15. Арматура А0 универсальная, может использоваться с бетоном любой марки, но не

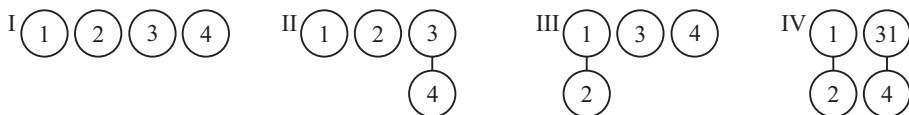


Рис. 1. Варианты взаимодействия первых четырех проектов.

обладает рядом преимуществ. При этом время ожидания учитывается только по бетону, поскольку выпуск арматуры будет налажен раньше. А вот на сокращении сроков можно сэкономить 11 дней.

Легко увидеть, что указанные выше четыре сценария дают в реальности гораздо большее количество конкретных вариантов. Попробуем разобраться с ними методом перебора, рассмотрев для этого все возможные и логичные варианты комбинации проектов. Их не так много. Для начала заметим, что между собой взаимодействуют первые четыре проекта. Пятый может сочетаться с любой их комбинацией. Варианты взаимодействия проектов 1–4 представлены на рис. 1.

На рис. 2–5 приведены варианты взаимодействия всех пяти проектов для каждой из четырех комбинаций I–IV. Рассмотрим кратко их особенности.

I) Мягкие зависимости между первыми четырьмя проектами не учитываются, все проекты выполняются параллельно и максимально быстро, но экономии по ресурсным и трудозатратам не происходит. Имеются пять вариантов включения проекта 5 (остальные нелогичны или нерациональны).

1. Проект 5 включается также без учета мягких зависимостей, параллельно с остальными. Случай, характерный для ситуации, когда дефицита ресурсов нет, но есть желание или необходимость закончить все проекты максимально быстро. Для I.1 $t_c = 0$, $r_c = 0$.

2. Проект 5 включается после проекта 3 и начинает использовать арматуру собственного производства. При запуске после проекта 3 используется соответствующая мягкая зависимость (3–5), $t_c = 6$, $r_c = 120$. Длительность проекта 3 не более 11 дней (а с вероятностью 80% всего 7 дней), вычитая экономию по времени, получаем сдвиг 1–5 дней и экономию ресурсов.

3. Проект 5 включается после проекта 4 и использует улучшенную арматуру собственного производства. Используется мягкая зависимость (4–5), $t_c = 7$, $r_c = 180$. В итоге проект 5 сдвигается на 2–5 дней, а экономия ресурсов заметно вырастает – до 180. Дополнительным ограничением выступает то, что арматура А15 может использоваться только с бетоном Б15, поэтому закупать бетон придется именно этой марки. Или, когда линия по бетону Б15 будет запущена, начать использовать бетон своего производства.

4. Проект 5 включается после запуска проектов 1 и 3, учитываются обе мягкие зависимости – (1–5) и (3–5). Оговоримся сразу, что вариант запуска проекта 5 после проектов 1 и 4 сразу исключаем, как нелогичный, поскольку для использования А15 требуется бетон более высокой марки и ждать начала выпуска бетона, который не будет использоваться, не имеет смысла. В результате $t_c = 5 + 6 = 11$, $r_c = 100 + 120 = 220$. Сдвиг по времени проекта 5 оцени-

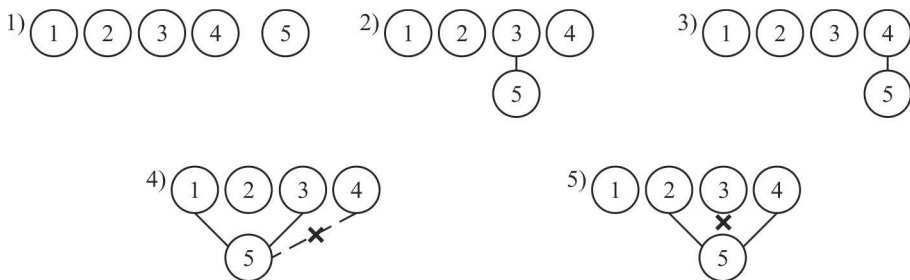


Рис. 2. Варианты включения проекта 5 для комбинации I.

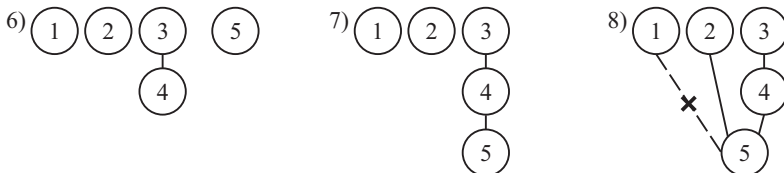


Рис. 3. Варианты включения проекта 5 для комбинации II.

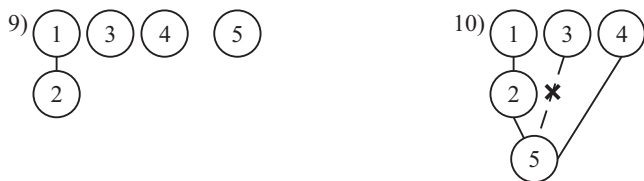


Рис. 4. Варианты включения проекта 5 для комбинации III.

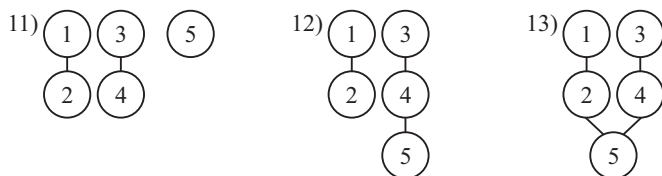


Рис. 5. Варианты включения проекта 5 для комбинации IV.

ваем по наибольшему времени реализации проектов 1 и 3, т.е. 12–20 дней, а с учетом экономии – 1–9.

5. Проект 5 включается после запуска проектов 2 и 4, учитываются обе мягкие зависимости – (2–5) и (4–5). Оговоримся сразу, что вариант запуска проекта 5 после проектов 2 и 3 не имеет смысла, поскольку за время запуска линии по производству Б15 производство А15 успеет запуститься в любом случае, а в паре эти продукты дадут гораздо больший выигрыш, чем при использовании Б15 с А0. В результате $t_c = 8 + 7 + 2 = 17$, $r_c = 150 + 180 + 5 = 335$. Третье слагаемое – это синергетический эффект, выигрыш от совместного использования А15 и Б15. Сдвиг по времени про-

екта 5 оцениваем по наибольшему времени реализации проектов 2 и 4, т.е. 15–22 дней, а с учетом экономии – (-2) –5. Значение (-2) показывает, что срок реализации проекта 5 в лучшем случае может быть сокращен еще больше по сравнению со временем его реализации без учета мягких зависимостей. При этом экономия ресурсов также выглядит внушительной.

II) Среди первых четырех проектов учитывается только зависимость (3–4), что дает экономию $t_c = 4$, $r_c = 15$, а выпуск арматуры А15 налаживается в итоге за 12–19 дней. В этой ситуации проект 5 может быть подключен тремя разными способами.

6. Проект 5 включается параллельно, без учета мягких зависимостей. Особенности этой ситуации рассмотрены выше. Экономия по времени и ресурсам только от мягкой зависимости между 3 и 4 проектами: $t_c = 4$, $r_c = 15$.

7. Проект 5 включается после проекта 4 (и проекта 3 как его составляющей) и начинает использовать арматуру А15 собственного производства. При запуске после проекта 4 используется соответствующая мягкая зависимость (4–5), $t_c = 7$, $r_c = 180$. В итоге получаем запущенную за 12–19 дней линию по производству арматуры А15, которая в дальнейшем используется в проекте 5, сдвиг сроков проекта 5 на 5–12 дней и необходимость закупать для проекта 5 бетон только марки Б15. Заметим здесь, что, поскольку самый длинный срок запуска линии по производству арматуры меньше или равен самому короткому сроку запуска линии по производству бетона, использовать в проекте 5 свою арматуру, но не использовать бетон может быть логично, тогда как к моменту использования своего бетона линия по производству арматуры уже будет запущена и использовать свой бетон без своей арматуры не имеет смысла.

8. Проект 5 включается после проекта 4 (и проекта 3 как его составляющей) и проекта 2, и использует арматуру А15 и бетон Б15 собственного производства. Используются мягкие зависимости (2, 5), (4–5) и, естественно, (3, 4). Также учитывается экономия от совместного использования А15 и Б15. Соответственно $t_c = 8 + 7 + 4 + 2 = 21$, $r_c = 150 + 180 + 15 + 5 = 350$. Сдвиг сроков проекта 5 на (-6) –1 день, т.е. его окончание с большой вероятностью раньше срока. Почему нет смысла учитывать в подобной связке проект 1 вместо проекта 2 рассматривалось выше.

III) Среди первых четырех проектов учитывается только зависимость (1–2), что дает экономию $t_c = 7$, $r_c = 20$, а выпуск бетона Б15 налаживается в итоге за 20–35 дней. Ситуация наименее вероятная, поскольку при учете зависимости (1–2) имеет смысл сразу учесть зависимость (3–4) (см. комбинацию IV ниже), так как никаких лишних затрат не происходит, а выигрыш значимый. Тем не менее можно теоретически предположить стечение обстоятельств, когда такая ситуация возможна (например, арматура нужной марки в достаточном количестве лежит на складе). В этом случае проект 5 может быть подключен двумя разными способами.

9. Проект 5 включается параллельно, без учета мягких зависимостей. Особенности этой ситуации рассмотрены выше. Экономия по времени и ресурсам только от мягкой зависимости между 1 и 2 проектами: $t_c = 7$, $r_c = 20$.

10. Проект 5 включается после проекта 2 (и проекта 1 как его составляющей) и проекта 4 и использует арматуру А15 и бетон Б15 собственного производства. Используются мягкие зависимости (2–5), (4–5) и, естественно, (1–2). Также учитывается экономия от совместного использования А15 и Б15. Соответственно: $t_c = 8 + 7 + 7 + 2 = 24$, $r_c = 150 + 180 + 20 + 5 = 355$. Сдвиг сроков проекта 5 на (-4) –11 дней. Почему нет смысла учитывать в подобной связке проект 1 вместо проекта 2, рассматривалось выше.

IV) Среди первых четырех проектов учитываются обе зависимости – и (1–2), и (3–4), что дает экономию $t_c = 7 + 4 = 11$, $r_c = 20 + 15 = 35$, выпуск бетона Б15 налаживается 20–35 дней, а выпуск арматуры А15 – за 12–19 дней. В этой ситуации проект 5 может быть подключен тремя разными способами.

11. Проект 5 включается параллельно, без учета мягких зависимостей. Особенности этой ситуации рассмотрены выше. Экономия по времени и ресурсам только от мягких зависимостей между проектами 1–4: $t_c = 7 + 4 = 11$, $r_c = 20 + 15 = 35$.

12. Проект 5 включается после проекта 4 (и проекта 3 как его составляющей) и начинает использовать арматуру А15 собственного производства. При запуске после проекта 4 используется соответствующая мягкая зависимость (4–5), $t_c = 7$, $r_c = 180$. В итоге получаем запущенную за 12–19 дней линию по производству арматуры А15, которая в дальнейшем используется в проекте 5, сдвиг сроков проекта 5 – на 5–12 дней и необходимость закупать для проекта 5 бетон только марки Б15.

13. Проект 5 включается после проекта 4 (и проекта 3 как его составляющей), а также – проекта 2 (и проекта 1 как его составляющей), и использует арматуру А15 и бетон Б15 собственного производства. Кроме упомянутых выше зависимостей (1–2) и (3–4) реализуются мягкие зависимости (2–5), (4–5), т.е. фактически все. Также учитывается экономия от совместного использования А15 и Б15. Соответственно: $t_c = 7 + 8 + 7 + 4 + 2 = 28$, $r_c = 20 + 150 + 180 + 15 + 5 = 370$. Сдвиг сроков проекта 5 на (-8) –7 дней.

Сведем полученные результаты в табл. 2.

Основным результатом анализа таблицы является наблюдение, что каких-либо явных закономерностей в ней нет. Более того, критерии эффективности в данной ситуации могут быть различными, например можно оценивать экономию ресурсов или корректировку срока завершения проекта 5 как наиболее масштабной части программы. И хотя некоторая корреляция между приведенными критериями существует (например, варианты 5, 8, 10 и 13 достаточно эффективны по обоим, также можно заметить, что для каждой из комбинаций I–IV наиболее эффективным оказался вариант с максимальным количеством используемых зависимостей), в целом сделать однозначный выбор непросто.

Таблица 2. Сравнение вариантов взаимодействия проектов в программе

Комбинация	Вариант	t_c	r_c	Кол-во мягк. зависимостей	Сдвиг окончания проекта 5 на (дней)
I	1	0	0	0	0
	2	6	120	1	7–11
	3	7	180	1	2–5
	4	11	220	2	1–9
	5	17	335	2	(–1)–5
II	6	4	15	1	0
	7	7	120	2	5–12
	8	21	350	3	(–6)–1
III	9	7	20	1	0
	10	24	355	3	(–4)–11
IV	11	11	35	2	0
	12	7	180	3	5–12
	13	28	370	3	(–8)–7

В начале раздела упоминалась важность вероятностной составляющей, которая далее никак не использовалась. Также не был учтен тот факт, что срок окончания каждого проекта – это не две крайние точки, а любой момент на отрезке между ними, и каждому такому моменту соответствует своя вероятность, в простейшем случае распределенная линейно. А в жизни зависимость вероятности от момента может быть гораздо сложнее.

Рассмотренный пример является по сути очень простым для реальной программы, особенно строительной, более того, приведенный в упрощенном варианте – не учитывается то, что сокращение сроков и/или ресурсов тоже обычно происходит с некоторой вероятностью, определенным образом распределенной. Все вышесказанное хорошо показывает, как редко можно свести работу с мягкими зависимостями к простым схемам без потери сути. Статья делает шаг к учету вероятностных и неопределенных параметров при работе с ними.

3. Определение множества выполняемых мягких зависимостей

В [4, 5] приведены основные определения, на которых основывается рассмотрение задачи сокращения времени выполнения программы при наличии мягких зависимостей. Предполагается, что существует множество способов включения мягких зависимостей в программу. Каждый из этих способов характеризуется вероятностью реализации и временем выполнения программы.

Обозначим:

τ_i – время выполнения проекта, если мягкие зависимости не учитываются;

m – количество проектов в программе;

$T = \sum_{i=1}^m \tau_i$ – время выполнения всей программы в случае, когда мягкие зависимости не учитываются.

В [4] приводится описание алгоритма для определения способа включения мягких зависимостей в программу с целью сокращения продолжительности ее выполнения.

В данной работе решается задача определения оптимального варианта выбора мягких зависимостей по критериям вероятности их реализации и сокращения продолжительности программы.

4. Учет вероятности реализации мягких зависимостей

Будем считать, что в программе имеется множество S мягких зависимостей, состоящее из n элементов, p_i , $i = 1, \dots, n$ – вероятность реализации i -й мягкой зависимости, t_i , $i = 1, \dots, n$ – время сокращения выполнения программы при реализации i -й мягкой зависимости.

В [10] утверждается, если все мягкие зависимости реализуются, то время выполнения программы равно $T - \tilde{T}$, где $\tilde{T} = \sum_{i=1}^n t_i$. Так как реализация каждой мягкой зависимости рассматривается как независимое событие, то вероятность реализации всех мягких зависимостей будет определяться как $P = \prod_{i=1}^n p_i$.

В данной работе, как и в [10], оценка эффективности варианта реализации мягкой зависимости определяется значением математического ожидания времени сокращения выполнения программы. Обозначим через M_S математическое ожидание времени сокращения выполнения программы при реализации всех мягких зависимостей. Как показано в [10],

$$M_S = \sum_{i=1}^n t_i \prod_{i=1}^n p_i.$$

Рассмотрим ситуацию, когда все мягкие зависимости обеспечивают одинаковое время сокращения проектов, а вероятности реализации этих зависимостей разные.

В этом случае математическое ожидание реализации всех мягких зависимостей может быть записано в виде

$$M_S = nt \prod_{i \in S} p_i.$$

Не ограничивая общности, будем считать, что все мягкие зависимости упорядочены по возрастанию вероятности реализации, т.е.

$$(1) \quad p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n.$$

В случае, когда все мягкие зависимости обеспечивают одинаковое время сокращения проектов и выполняется (1), для последовательно реализуемых мягких зависимостей в количестве k , математическое ожидание определяется как

$$M_m = kt \prod_{i=m}^{k+m-1} p_i, \quad m = 1, \dots, n - k + 1.$$

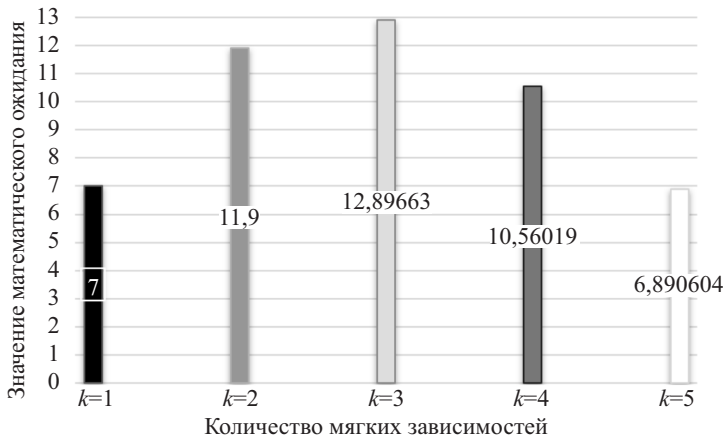


Рис. 6. Изменение значений математического ожидания при изменении вероятности реализации мягких зависимостей.

Учитывая условие (1), можем утверждать, что

$$M_1 > M_2 > \dots > M_{n-k+1}.$$

Пусть

$$(2) \quad p_i = p_1 b^{i-1},$$

в этом случае можно записать

$$M_1 = ktp_1 b^{k(k-1)b/2}.$$

Определим количество реализуемых мягких зависимостей, которое обеспечивает максимальное значение математического ожидания

$$(3) \quad \frac{\partial M_1}{\partial k} = tp_1 b^{k(k-1)b/2} + ktp_1 \frac{b}{2} (2k-1) \ln b = 0.$$

Из (3) получаем

$$1 + k \frac{b}{2} (2k-1) \ln b = 0.$$

Решение этого уравнения записывается в виде

$$(4) \quad k = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{16}{b \ln b}}}{4}.$$

Пример 1. Имеются пять мягких зависимостей. Время сокращения выполнения программы каждой мягкой зависимостью составляет $t = 10$, вероятность реализации первой мягкой зависимости составляет $0,7$ ($p_1 = 0,7$). Так как вероятность реализации мягких зависимостей изменяется в соответствии с (2), коэффициент геометрической прогрессии равен $0,85$ ($b = 0,85$) и, соответственно вероятность реализации мягких зависимостей равна $p_1 = 0,7$; $p_2 = 0,6$; $p_3 = 0,51$; $p_4 = 0,43$; $p_5 = 0,37$. На рис. 6 показана зависимость значения математического ожидания от количества реализуемых мягких зависимостей.

Вывод из примера 1. Для получения максимального значения математического ожидания достаточно реализовать только три мягких зависимости. Это, кстати, следует из выражения (4). Для заданного значения b расчет показывает, что $k = 2,95$. Здесь также следует отметить, что увеличивая коэффициент геометрической прогрессии, можно увеличить количество реализуемых мягких зависимостей, обеспечивающих максимальное значение математического ожидания, и, соответственно, уменьшение коэффициента геометрической прогрессии приводит к уменьшению этих показателей.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда время сокращения проекта при реализации i -й мягкой зависимости изменяется в соответствии с процедурой геометрической прогрессии и определяется выражением

$$(5) \quad t_i = t_1 a^{i-1},$$

при этом вероятность реализации мягких зависимостей одинаковая.

В этом случае математическое ожидание реализации всех мягких зависимостей может быть записано в виде

$$(6) \quad M_S = \frac{t_1 (a^n - 1)}{a - 1} p^n.$$

Предполагая, что реализуются только первые k мягких зависимостей, выражение (6) может быть записано в виде

$$M_1 = \frac{t_1 (a^k - 1)}{a - 1} p^k.$$

Определим количество мягких зависимостей, реализация которых позволяет получить максимальное значение математического ожидания времени сокращения программы

$$(7) \quad \frac{d}{dk} \left(\frac{t_1 (a^k - 1)}{a - 1} p^k \right) = t_1 p^k \frac{a^k \ln a}{a - 1} + t_1 \frac{a^k - 1}{a - 1} p^k \ln p = 0.$$

Из (7) получаем

$$(8) \quad k = \frac{\ln \frac{\ln p}{\ln ap}}{\ln a}.$$

Так как рассматривается случай $k < n$, то из (8) следует

$$(9) \quad p < a^{a^n / (1 - a^n)}.$$

Пример 2. Как и в примере 1 имеются пять мягких зависимостей. Из (9) для $a = 1,05$ получаем, что $p < 1$, поэтому вероятность реализации каждой мягкой зависимости может быть выбрана в размере 0,7. Время сокращения выполнения программы каждой мягкой зависимости определяется выражением (5) и составляет $t_1 = 10$, $t_2 = 10,7$; $t_3 = 11,45$; $t_4 = 12,25$; $t_5 = 13,11$. На рис. 7 показана зависимость значения математического ожидания от количества реализуемых мягких зависимостей.

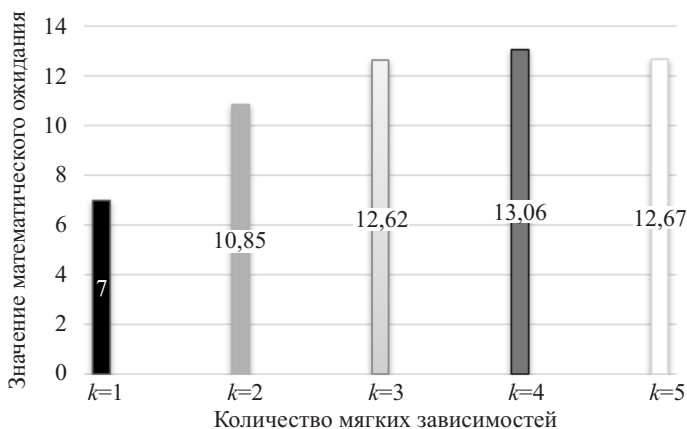


Рис. 7. Изменение значений математического ожидания при изменении времени сокращения выполнения программы.

Вывод из примера 2. Для получения максимального значения математического ожидания достаточно реализовать только четыре мягких зависимости. Это, кстати, следует из выражения (8). Для заданного значения a расчет показывает, что $k = 3,11$. Здесь также следует отметить, что изменение коэффициента геометрической прогрессии a изменяет количество реализуемых мягких зависимостей, обеспечивающих максимальное значение математического ожидания.

Выше были рассмотрены два варианта: первый – когда все мягкие зависимости обеспечивают одинаковое время сокращения проектов, а вероятности реализации этих зависимостей разные. А второй – когда время сокращения проекта при реализации мягких зависимостей изменяется и при этом вероятность реализации мягких зависимостей одинаковая.

5. Заключение

В работе анализируется использование мягких зависимостей при реализации программ. Приводится пример, показывающий, как редко можно свести работу с мягкими зависимостями к простым схемам без потери сути. Рассмотрена задача определения количества реализаций мягких зависимостей с целью обеспечения максимального срока сокращения продолжительности выполнения программы с учетом стохастической неопределенности реализации мягких зависимостей. Показано, что максимальное значение математического ожидания времени сокращения программы зависит не только от количества реализованных мягких зависимостей, а во многом определяется вероятностью реализации каждой мягкой зависимости. Приведены примеры, когда максимальное значение времени сокращения продолжительности выполнения программы обеспечивается меньшим числом имеющихся мягких зависимостей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баркалов С.А.* Математические основы управления проектами / Под ред. Буркова В.Н. М.: Высш. шк., 2005. 423 с.
2. *Баркалов С.А.* Модели и методы распределения ресурсов в управлении проектами / Баркалов С.А., Буркова И.В., Колпачев В.Н., Поталенко А.М. М.: ИПУ РАН, 2004. 85 с.
3. *Баркалов С.А.* Задача управления проектами при мягких зависимостях между работами / Баркалов С.А., Колпачев В.Н., Перелыгин А.Л., Лихотин Ю.П. // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Дорожно-транспортное строительство. 2004. № 3. С. 125–129.
4. *Бурков В.Н., Буркова И.В., Щепкин А.В.* Мягкие зависимости между проектами в управлении программами // Труды 16-й Международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем» (MLSD'2023, Москва). М.: ИПУ РАН, 2023. С. 149–155.
5. *Буркова И.В.* Минимизация затрат в проектах на основе мягких зависимостей // Труды Всероссийской научно-практической конференции (с международным участием) «Системы автоматизации (в образовании, науке и производстве)» (AS'2023, Новокузнецк). Новокузнецк: 2023. С. 219–224.
6. *Голенко-Гинзбург Д.И.* Стохастические сетевые модели планирования и управления разработками. Воронеж: Научная книга, 2010. 283 с.
7. *Гельруд Я.Д.* Обобщенные стохастические сетевые модели для управления комплексными проектами // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика. 2010. № 4. С. 36–51.
8. *Воропаев В.И., Гельруд Я.Д.* Обобщенные стохастические сетевые модели для управления комплексными проектами // Управление проектами и программами. 2008. № 1. С. 18–27; № 2. С. 114–125.
9. *Smith A.* Stochastic Methods in Project Management / J. Optim. 2021. V. 12. P. 45–60.
10. *Бурков В.Н., Буркова И.В., Щепкин А.В.* Условия применения мягких зависимостей между проектами в управлении программами при стохастической неопределенности их реализации // Труды Международной научно-практической конференции «ТЕОРИЯ АКТИВНЫХ СИСТЕМ – 55 лет» (ТАС-55, Москва). М.: ИПУ РАН, 2024. С. 95–99.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галеевым.

Поступила в редакцию 08.07.2025

После доработки 17.11.2025

Принята к публикации 20.11.2025