

© 2026 г. М.М. ВОЛЬНЫХ (volnykh.mm17@physics.msu.ru)
(Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова),
А.Г. КУШНЕР, д-р физ.-мат. наук (kushner@physics.msu.ru)
(Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова;
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БАКЛИ–ЛЕВЕРЕТТА ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С ПЕРЕМЕННОЙ ПОРИСТОСТЬЮ¹

Рассмотрена задача построения многозначного решения для уравнения Бакли–Леверетта, описывающего процесс двухфазной фильтрации в среде с переменным коэффициентом пористости. Такое уравнение используется для расчета эволюции поверхности разделения фаз “нефть–вода” при разработке нефтяных месторождений. Показано, как для заданных начальных условий построить каустику многозначных решений.

Ключевые слова: фильтрация, пористые среды, многозначное решение, каустика, джеты, контактная структура, контактные векторные поля.

DOI: 10.7868/S2413977726040034

1. Введение

В процессе освоения нефтяных месторождений для поддержания энергии пласта применяется нагнетание через специальные скважины вытесняющего агента, такого как вода или растворы с активными добавками. Перемещение нефти, вытесняемой этим агентом, и самого агента зависит от разницы давлений между зонами нагнетания и добычи. В однородных пластах движение жидкостей между чередующимися рядами добывающих и нагнетательных скважин часто рассматривается как одномерное. Это предположение оправдано, например, при осуществлении нагнетания и отбора через параллельно расположенные скважины [1].

Особенно отчетливо одномерная фильтрация жидкостей проявляется при применении горизонтальных скважин с параллельными стволами или вертикальных скважин с трещинами гидроразрыва. Вытесняющий агент подается через нагнетательные скважины и направляется в горизонтально ориентированные трещины, сформированные гидроразрывом. Под влиянием давления потоки жидкости из этих трещин устремляются к добывающим скважинам, откуда нефть извлекается на поверхность через вертикальные каналы.

Данный подход к добыче особенно результативен для месторождений с трудноизвлекаемыми запасами, где для успешного вытеснения нефти требуются физико-химические методы воздействия. Среди таких методов можно

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 25-21-00152).

выделить использование растворов активных компонентов (например, полимеров, поверхностно-активных веществ, углекислого газа и других), тепловые способы (такие как нагнетание горячей воды, пара или внутрипластовое горение), а также волновые воздействия (гидродинамические, электромагнитные, ультразвуковые) или их сочетания.

2. Описание модели

Уравнение Бакли–Левретта [2] описывает одномерную двухфазную фильтрацию в пористой среде. Оно основано на законе Дарси, согласно которому скорость фильтрации пропорциональна разности парциальных давлений фаз. В модели Бакли–Левретта эта разность считается постоянной. Также постоянной предполагается проницаемость порового пространства, которое считается недеформируемым.

Уравнение Бакли–Левретта имеет следующий вид:

$$(1) \quad m \frac{\partial s}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}(F(s)) = 0.$$

Здесь t – время, x – пространственная координата (ось Ox направлена в сторону движения флюидов), $s = s(t, x)$ – водонасыщенность (объемная доля пор, занятых водой), m – коэффициент пористости, $F(s)$ – функция Бакли–Левретта, указывающая объемную долю воды в суммарном потоке U , который считается постоянным. Примерный вид графика функции Бакли–Левретта и ее производной показаны на рис. 1. Штрих означает производную функции F по переменной s .

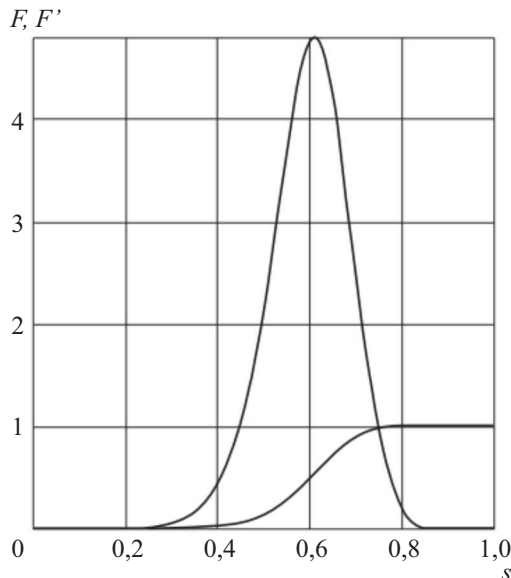


Рис. 1. Графики функций F и ее производной.

Обычно предполагается, что пористая среда однородна, т.е. в уравнении (1) коэффициент пористости m постоянный. Здесь откажемся от этого предположения и будем полагать, что функция m зависит от пространственной переменной, т.е. $m = m(x)$. Функцию $m(x)$ считаем дифференцируемой.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1):

$$(2) \quad s(0, x) = S(x),$$

где $S(x)$ – заданная функция, которую предполагаем дифференцируемой. Как известно, классическое решение этой задачи разрушается при достижении некоторого критического момента времени каким бы ни было начальное распределения водонасыщенности. У решения возникает разрыв, и граница раздела фаз движется подобно ударной волне.

Поэтому вместо классических решений будем рассматривать многозначные решения [3]. Этот подход позволяет обойти трудности, связанные с разрушением решений уравнений, и дает возможность описывать эволюцию ударных волн.

3. Характеристики уравнения Бакли–Левретта

Будем использовать дифференциально-геометрический подход к уравнению (1). Применительно к рассматриваемой задаче этот метод описан в [4]. При таком подходе уравнение рассматривается как гиперповерхность в пространстве 1-джетов функций двух переменных.

Пространство 1-джетов $J^1 = J^1(\mathbb{R}^2)$ функций двух независимых переменных t и x – это пятимерное пространство с каноническими координатами $t, x, u_{00}, u_{10}, u_{01}$. Укажем координаты 1-джета $\theta = j_a^1(s)$ функции $s = s(t, x)$ в точке $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$t(a) = a_1, \quad x(\theta) = a_2, \quad u_{00}(\theta) = s(a), \quad u_{10}(\theta) = \frac{\partial s}{\partial t}(a), \quad u_{01}(\theta) = \frac{\partial s}{\partial x}(a).$$

Пространство J^1 наделено четырехмерным контактным распределением \mathcal{C} , порожденным дифференциальной 1-формой (формой Картана)

$$\varkappa = du_{00} - u_{10}dt - u_{01}dx.$$

Это означает, что в касательном расслоении TJ^1 определено поле подпространств

$$\mathcal{C} : J^1 \ni \theta \mapsto \mathcal{C} = \ker \varkappa_\theta \subset T_\theta J^1,$$

которое не является вполне интегрируемым.

Уравнению (1) отвечают функция $f = m(x)u_{10} + UF'(u_{00})u_{01}$ и гиперповерхность в пространстве 1-джетов: $\mathcal{E} = \{f = 0\}$. Для краткости введем следующее обозначение:

$$(3) \quad H(u_{00}) = UF'(u_{00}).$$

Тогда

$$(4) \quad f = m(x)u_{10} + H(u_{00})u_{01}.$$

Мнозначное решение уравнения (1) – это двумерная поверхность $L \subset \mathcal{E}$, которая является интегральным многообразием контактного распределения \mathcal{C} , т.е. ограничение формы Картана на него равно нулю: $\varkappa|_L = 0$.

Определим векторное поле

$$(5) \quad X = -m(x)\frac{\partial}{\partial t} - H(u_{00})\frac{\partial}{\partial x}$$

на пространстве 0-джетов J^0 . Значение формы Картана на этом поле совпадает с функцией f , а продолжение поля X в пространство 1-джетов – это контактное векторное поле с производящей функцией f :

$$X_f = -m(x)\frac{\partial}{\partial t} - H(u_{00})\frac{\partial}{\partial x} + H'(u_{00})u_{01}u_{10}\frac{\partial}{\partial u_{10}} + (m'(x)u_{10} + H'(u_{00})u_{01}^2)\frac{\partial}{\partial u_{01}}.$$

Оно называется *характеристическим* векторным полем для уравнения (1), а его траектории – *характеристиками*.

Это векторное поле касается гиперповерхности \mathcal{E} и, более того, касается каждого многозначного решения уравнения (1) (см. [5]). Его можно использовать для построения многозначного решения обобщенной задачи Коши. Остановимся на этом более подробно.

4. Задача Коши

Начальное условие (2) порождает кривую Коши в пространстве 1-джетов, которую зададим в виде системы четырех уравнений:

$$\mathcal{K} = \{t = 0, u_{00} = S(x), u_{01} = S'(x), m(x)u_{10} + H(u_{00})S'(x) = 0\} \subset \mathcal{E}.$$

Заметим, что так как $\varkappa|_{\mathcal{K}} = 0$, то эта кривая является интегральной для контактного распределения.

Так как коэффициент $m(x) \neq 0$, то в каждой точке $a \in \mathcal{K}$ касательный вектор поля X_f не лежит в касательном пространстве к этой кривой: $X_f|_a \notin T_a\mathcal{K}$. Сдвинув кривую Коши вдоль траекторий векторного поля X_f , получим двумерную поверхность

$$L = \Phi_\tau^{(1)}(\mathcal{K}).$$

Здесь τ – параметр сдвига вдоль траекторий, а $\Phi_\tau^{(1)}$ – преобразование сдвига (поток векторного поля X_f) от $\tau = 0$ до τ . Этот поток является продолжением в пространство 1-джетов потока Φ_τ векторного поля (5).

Так как поток $\Phi_\tau^{(1)}$ сохраняет контактное распределение \mathcal{C} , то поверхность L является многозначным решением.

Таким образом, многозначное решение L является дизъюнктивным объединением характеристик, проходящих через кривую \mathcal{K} . Это многозначное решение будем называть *многозначным решением задачи Коши*.

Проекция характеристик на плоскость независимых переменных t, x – это интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения

$$(6) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{H(u_{00})}{m(x)}.$$

Эти кривые также будем называть характеристиками.

Так как $X_f(u_{00}) = 0$, т.е. производная Ли функции u_{00} вдоль характеристического векторного поля равна нулю, то каждая характеристика уравнения (1) целиком лежит в слое $u_{00} = \text{const}$. Конечно, для каждой характеристики константа своя. Поэтому функция $H(u_{00})$ постоянна на характеристике.

Интегральные кривые уравнения (6) имеют вид

$$(7) \quad t = \frac{1}{H(u_{00})} \int m(x) dx + C.$$

В этой формуле параметр u_{00} является константой, значение которой определяется начальной точкой характеристики.

В отличие от случая постоянной пористости, когда проекции характеристик на плоскость независимых переменных являются прямыми, здесь получено семейство кривых.

5. Случай линейной пористости

Рассмотрим случай линейной пористости:

$$m(x) = \alpha x + \beta.$$

При этом должно выполняться условие $m(x) > 0$. В качестве функции (3) выберем функцию

$$H(u) = a \exp\left(-\frac{(u-b)^2}{2c^2}\right) + d,$$

которая хорошо приближает производную F' функции Бакли–Леверетта (см. рис. 1). Здесь $\alpha, \beta, a, b, c, d$ – некоторые действительные числа, причем β, a, c не равны нулю. В качестве начальной функции (2) выберем функцию

$$S(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

которая хорошо приближает функцию водонасыщенности вблизи нагнетательной скважины, расположенной в точке $x = 0$.

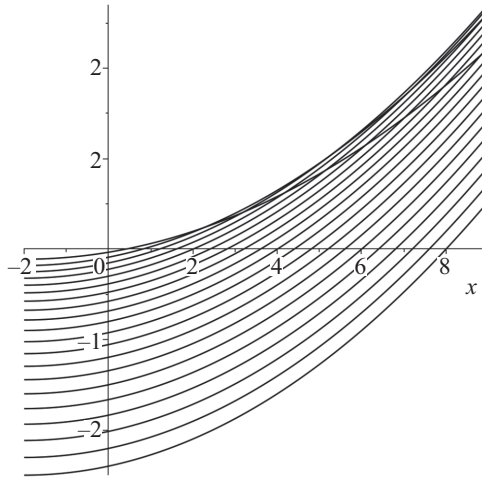


Рис. 2. Характеристики (9) для значений параметров (10).

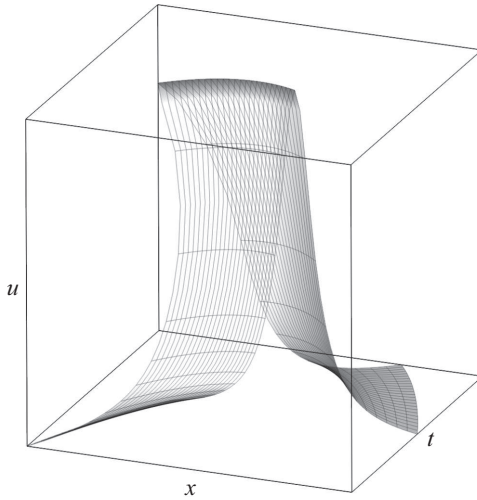


Рис. 3. Многозначное решение L .

Координатную функцию u_{00} для краткости обозначим через u , опуская нижние индексы. Тогда векторное поле (5) примет вид

$$(8) \quad X = -(\alpha x + \beta) \frac{\partial}{\partial t} - \left(a \exp \left(-\frac{(u-b)^2}{2c^2} \right) + d \right) \frac{\partial}{\partial x}.$$

Его поток находится явно:

$$\Phi_\tau : \begin{cases} t \mapsto \alpha \left(a \exp \left(-\frac{(u-b)^2}{2c^2} \right) + d \right) \frac{\tau^2}{2} - (\alpha x + \beta)\tau + t, \\ x \mapsto - \left(a \exp \left(-\frac{(u-b)^2}{2c^2} \right) + d \right) \tau + x, \\ u \mapsto u. \end{cases}$$

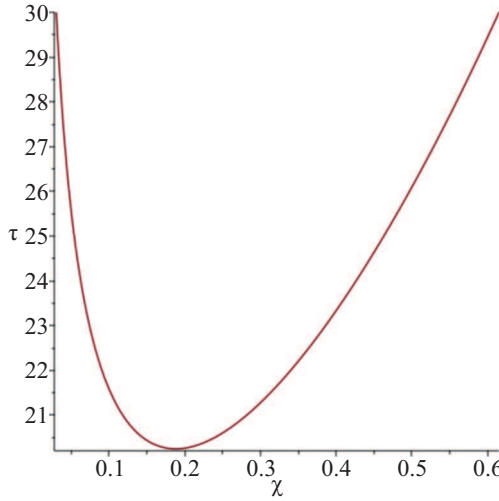


Рис. 4. Каустика Σ на многозначном решении.

Характеристика (7), проходящая через точку (t_0, x_0) , имеет вид параболы

$$(9) \quad \alpha(x^2 - x_0^2) + 2\beta(x - x_0) - 2(t - t_0) \left(a \exp \left(-\frac{(bx_0^2 + b - 1)^2}{2(x_0^2 + 1)^2 c^2} \right) + d \right) = 0.$$

Начиная с некоторого момента времени $t = T$ параболы (9) пересекаются, и при $t > T$ решение уравнения (1) становится многозначным. В точке $t = T$ возникает так называемая “градиентная катастрофа” – частная производная по переменной x классического однозначного решения становится бесконечной. Такое же явление наблюдается и для случая постоянной пористости, однако характеристиками там являются не парабола, а прямые.

Данная работа не касается вопроса преодоления этой трудности. Стандартный способ – построение разрывных решений из многозначных с помощью законов сохранения и условий Гюгонио–Ренкина [6].

Огибающая семейства характеристик (9) является проекцией каустики $\Sigma \subset L$ на плоскость независимых переменных. В точках каустики эта проекция

$$\pi_{1,0} : L \rightarrow \mathbb{R}^2(t, x)$$

имеет особенность: касательные плоскости к многозначному решению проектируются в прямые. На рис. 2 и 3 изображены характеристики (9) и многозначное решение соответственно для следующих значений параметров:

$$(10) \quad a = 0,8, \quad b = 2, \quad c = 0,5, \quad d = 0,2, \quad \alpha = -0,01, \quad \beta = 0,02.$$

На рис. 4 изображена каустика Σ на многозначном решении L .

Укажем проекцию многозначного решения на пространство \mathbb{R}^3 с координатами t, x, u в параметрической форме:

$$L : \begin{cases} t = \frac{\tau}{2} \left(\tau \alpha a \exp \left(-\frac{(b\chi^2 + b - 1)^2}{2(\chi^2 + 1)^2 c^2} \right) + (d\tau - 2\chi)\alpha - 2\beta \right), \\ x = -a\tau \exp \left(-\frac{(b\chi^2 + b - 1)^2}{2(\chi^2 + 1)^2 c^2} \right) - d\tau + \chi, \\ u = \frac{1}{1 + \chi^2}. \end{cases}$$

6. Заключение

Отметим, что существуют другие модели двухфазной фильтрации, в которых учитываются капиллярные силы и которые приводят к дифференциальным уравнениям второго порядка. Таковым, например, является уравнение Рапопорта–Лиса [7]. Однако при их исследовании возникают трудности более высокого порядка, преодоление которых требует других методов, например, методов теории конечномерных динамик [8, 9].

Другие примеры применения методов контактной геометрии к задачам механики сплошных сред и термодинамики приведены в [10]. В частности, для некоторых классов функции Бакли–Леверетта удалось найти точные решения уравнений Баренблатта, описывающих процесс двухфазной фильтрации в пористых средах при наличии поверхностно активных реагентов, растворенных в воде и изменяющих вязкость флюидов [11].

В [12] построена и исследована модель Бакли–Леверетта, в которой коэффициент пористости в уравнении (1) является случайной величиной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ентов В.М., Зазовский А.Ф. Гидродинамическая теория методов повышения нефтеотдачи. М.: Недра, 1989.
2. Buckley S.E., Leverett M.C. Mechanism of fluid displacement in sands // Trans. AIME, SPE. 1942. No. 146. P. 107–116.
3. Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986.
4. Ахметзянов А.В., Кушнер А.Г., Лычагин В.В. Геометрическая теория особых режимов в системах управления с распределенными параметрами // АиТ. 2013. № 11. С. 20–38.
5. Симметрии и законы сохранения. Уравнения математической физики / А.В. Бочаров и др. Ред. А.М. Виноградов, И.С. Красильщик. М.: Факториал Пресс, 2005.
6. Ахметзянов А.В., Кушнер А.Г., Лычагин В.В. Математические модели управления разработкой нефтяных месторождений. М.: ИПУ РАН, 2017.
7. Rapoport L.A., Leas W.J. Properties of linear waterflood // Trans. AIME. 1953. V. 198. P. 139–148.

8. *Ахметзянов А.В., Кушнер А.Г., Лычагин В.В.* Аттракторы в моделях фильтрации // Доклады АН. 2017. Т. 472. №. 6. С. 627–630.
9. *Kushner E.N.* Classification of Generalized Rapoport–Leas Equations // 2018 Eleventh International Conference on Management of large-scale system development (MLSD, Moscow, Russia, 2018. P. 1–3. <https://doi.org/10.1109/MLSD.2018.8551940>
10. *Kushner A., Mukhina S., Gavrilov V.* Contact Structures in Continuous Media Theory // 2024 17th International Conference on Management of Large-Scale System Development (MLSD), Moscow, Russia, 2024. P. 1–4.
11. *Mukhina S.* Symplectic geometry of the oil displacement Barenblatt equations // Journal of Geometry and Physics. 2024. V. 204. P. 105277.
12. *Исаева А.В., Сердобольская М.Л.* Решение уравнения Бакли–Левевертта со случайным коэффициентом пористости // Вычислительные методы и программирование. 2012. Т. 13. Вып. 4. С. 517–524.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галеевым.

Поступила в редакцию 08.07.2025

После доработки 10.11.2025

Принята к публикации 20.11.2025