Автоматика и телемеханика, № 4, 2026

© 2026 г. И.Б. ЯДЫКИН, д-р техн. наук (Jad@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ МЕТРИКИ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ[1]

Введено понятие о базовых системах как системах с передаточной функцией в виде обратного характеристического полинома системы. Получены спектральные разложения энергетических метрик устойчивости базовых систем для их уравнений состояния в канонических формах: Жордана, модальной, управляемости и наблюдаемости. Получены формулы спектральных разложений квадрата H_2-нормы передаточной функции базовой системы для случая кратных корней ее передаточной функции. Разработаны рекуррентные алгоритмы вычисления спектральных разложений обратных матриц грамианов непрерывных динамических систем по кратным спектрам исходных матриц динамики. Получены спектральные разложения энергетических метрик устойчивости в виде спектрального разложения квадрата H_2-нормы передаточной функции базовой системы для случая ее простых и кратных корней. Предложен новый подход к анализу устойчивости линейных систем на основе усиленного критерия устойчивости Рауса–Гурвица, который включает формирование таблиц Рауса и матриц Сяо, вычисление спектра матрицы динамики, вычисление спектральных разложений энергетических метрик, совместное использование критерия устойчивости Рауса–Гурвица и критерия ограниченности энергетических метрик устойчивости базовых систем. Даны рекомендации по использованию полученных результатов.

Ключевые слова: спектральные разложения, канонические формы, базовые системы, грамианы, дифференциальные уравнения Ляпунова и Сильвестра, матрицы Коши, матрицы Сяо, энергетические метрики.

DOI: 10.7868/S2413977726040024

1. Введение

Хорошо известно, что грамианы являются решениями уравнений Сильвестра и Ляпунова, которым посвящено громадное число научных работ, среди которых отметим [1–4]. Эти алгебраические и дифференциальные матричные уравнения играют также фундаментальную роль в теории управления. В последние годы возник интерес к развитию методов вычислений различных энергетических показателей для анализа устойчивости и степени управляемости, достижимости и наблюдаемости этих систем. Первые спектральные разложения грамианов для линейных непрерывных и дискретных систем с

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 25-29-20158).

простым спектром были получены в работе [1] на основе спектрального разложения интегрального представления решения уравнений Ляпунова или Сильвестра. В ней впервые исследованы временные характеристики грамианов в канонических формах управляемости и роль собственных векторов и ядер матриц Коши в задачах синтеза оптимальных моделей низкой размерности динамических систем. Энергетические показатели устойчивости достижимости для линейных устойчивых и неустойчивых линейных систем были предложены в ряде работ [5–12]. В теории управления метод грамианов как метод решения дифференциальных уравнений Ляпунова и Сильвестра применяется для решения следующих прикладных задач:

- Оптимального размещения датчиков и исполнительных устройств [7, 10–13];
- Упрощения моделей линейных и билинейных систем управления на основе использования энергетических метрик [1–3];
- Анализа и синтеза модальных систем управления [13–15, 17];
- Анализа точности систем управления при случайных возмущениях [2, 4];
- Мониторинга состояния и технической диагностики на основе выявления аномалий энергетического баланса [13, 16, 18].

Метод грамианов позволяет получить не только качественную, но и количественную оценку указанной энергии, сосредоточенной в слабоустойчивых колебаниях. Эффект резонансного взаимодействия близких колебательных мод в динамической системе может усиливаться многократно. Преобразование уравнений состояния в канонические формы управляемости и наблюдаемости позволяет выделить среди всех энергетических метрик инвариантные метрики, не зависящие от преобразования координат. Структурные свойства управляемости и наблюдаемости в контексте вычисления и анализа грамианов исследованы в работах [19, 20]. Важная задача оптимального размещения датчиков и исполнительных устройств на основе различных энергетических функционалов, в том числе инвариантных эллипсоидов, рассматривалась в [4, 7].

2. Предварительное обсуждение результатов и постановка задачи

Рассмотрим непрерывную стационарную MIMO LTI линейную стационарную непрерывную динамическую систему со многими входами и многими выходами вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = 0, \quad y(t) = Cx(t), \tag{2.1}$$

где $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, $y(t) \in R^m$. В случае SISO LTI систем $u(t) \in R^1$, $y(t) \in R^1$. Уравнения Ляпунова и Сильвестра играют важную роль в теории управления и проектировании систем управления по интегральным показателям качества, в синтезе оптимальных систем с использованием наблюдателей состояния. Для решения этих задач применяются уравнения Ляпунова двух типов:

$$AP + PA^T = -I_n. \tag{2.2}$$

$$AP + PA^T = -\sum_{j,\eta} e_j e_\eta^T. \tag{2.3}$$

Уравнения первого типа возникают в MIMO LTI системах, задаваемых уравнениями состояния общего вида (2.1). Уравнения второго типа возникают в SISO LTI системах, задаваемых уравнениями состояния в модальной канонической форме и в канонических формах управляемости и наблюдаемости. В модальной канонической форме в этом случае имеем следующие выражения для матрицы A_d, векторов b, c:

$$A_d = diag\begin{bmatrix} s_1 & \dots & s_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}^T, \quad c = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{bmatrix}^T, \tag{2.4}$$

где r_i – вычет передаточной функции в полюсе "i". Для базовой системы имеем [1]

$$c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}^T. \tag{2.5}$$

В канонических формах управляемости в этом случае уравнения состояния имеют вид

$$\begin{gathered} \dot{x}_c(t) = A_c^F x_c(t) + b^F u(t), \quad x_c(0) = 0, \\ y_c(t) = c^F x_c(t), \end{gathered} \tag{2.6}$$

$$A_c^F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b^F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \tag{2.7}$$

$$c^F = \begin{bmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \dots & \xi_{n-2} & \xi_{n-1} \end{bmatrix},$$

где ξ_i – коэффициент полинома числителя передаточной функции

$$W(s) = \frac{\xi_{n-1}s^{n-1} + \dots + \xi_1 s + \xi_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}.$$

Для базовой системы имеем

$$c^F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

Классический критерий устойчивости непрерывных линейных систем основан на решении уравнений вида (2.2), (2.3) с измененной правой частью вида $-bb^T$. Эти матрицы зависят от матриц преобразования подобия, так что грамианы управляемости и выражения квадратов H_2-нормы передаточной функции, полученные с помощью грамианов, не являются инвариантами при различных преобразованиях пространства состояний. Этого недостатка можно избежать, если использовать правые части вида (2.2) или (2.3). Назовем эти уравнения второго типа базовыми уравнениями Ляпунова, а соответствующие уравнения состояния, в которых вектор c^F выбран в виде $c^F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}$ или $c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}^T$, базовыми уравнениями состояния. Этим уравнениям состояния соответствует передаточная функция (ПФ)

$$W_{base}(s) = \frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} = \frac{1}{N(s)}, \tag{2.9}$$

где $N(s)$ – характеристический многочлен системы.

Определение 1 [5, 6]. *Назовем матрицей Сяо квадратную матрицу, имеющую структуру нулевого пледа вида*

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 & 0 & -y_2 & 0 & y_3 \\ 0 & y_2 & 0 & -y_3 & 0 \\ -y_2 & 0 & y_3 & 0 & \ldots \\ 0 & -y_3 & 0 & \ldots & 0 \\ y_3 & 0 & \ldots & 0 & y_n \end{bmatrix}, \quad y_i \in \mathbb{C}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{2.10}$$

Элементы этой матрицы вычисляются по формулам

$$y_{j\eta} = \begin{cases} 0, \quad \textit{если} \;\; j + \eta = 2k + 1, \qquad k = 1, \ldots, n; \\ y_n = \dfrac{1}{2Y_{n,1}}, \\ y_{n-l} = \dfrac{-\sum_{i=1}^{m-1}(-1)^i Y_{n-l,i+1} y_{n-l+i}}{Y_{n-l,1}}, \\ \qquad \textit{если} \;\; j + \eta = 2k, \quad k = 1, \ldots, n, \quad l = \overline{1, n-1}. \end{cases}$$

Известно, что базовые уравнения играют важную роль при исследовании устойчивости линейных систем. Рассмотрим дифференциальное уравнение состояния вида

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t) = \delta(t), \tag{2.11}$$

$$y^{(n-1)}(0) = 1, \quad y^{(n-2)}(0) = 0, \quad \ldots, \quad y(0) = 0,$$

где $\delta(t) - \delta$ – функция Дирака. Это уравнение соответствует передаточной функции базовой системы. Доказано, что грамиан управляемости для системы (2.11) имеет вид матрицы Сяо (2.10), в которой элементы y_i вычисляются с помощью измеряемых величин $y^{(i)}(t)$ [6].

$$y_i = \int\limits_0^\infty \left[y^{(i)}(t)\right]^2 dt. \tag{2.12}$$

Эти оценки имеют физический смысл измеряемых энергий состояний системы, причем они могут быть вычислены различными способами, в том числе с использованием наблюдателей состояния [19]. В соответствии с [10–12] введем

Определение 2. Энергетической метрикой устойчивости системы (2.1) *назовем квадрат H_2-нормы ее передаточной функции.*

Покажем, что базовые системы могут быть полностью управляемы при выполнении дополнительных условий. Матрица управляемости для модальной базовой системы (2.4), (2.5) является матрицей Вандермонда, которая является матрицей полного ранга только при условии, что все собственные числа матрицы динамики различны. Матрица управляемости для базовой системы (2.7), (2.8) не вырождена. Поэтому базовая система (2.7), (2.8) полностью управляема. Матрица грамиана управляемости для базовой системы (2.7), (2.8) в форме Сяо имеет вид [5]

$$P^{cF} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j \left(-s_k\right)^{\eta}}{\prod_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n} \left(s_k - s_\lambda\right) \prod_{\lambda=1,}^{n} \left(-s_k - s_\lambda\right)} 1_{j+1\eta+1}, \tag{2.13}$$

$$P^{cF} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j \left(-s_k\right)^{\eta}}{\dot{N}\left(s_k\right) N\left(-s_k\right)} 1_{j+1\eta+1}. \tag{2.14}$$

Отсюда следует, что матрицы грамианов P^{cF} положительно определены.

Замечание 1. Из (2.14) следует, что матрица Сяо зависит от квадратичных форм $s_k^j(-s_k)^{\eta}$, образованных собственными числами исходной базовой и антиустойчивой базовой систем, от вычетов передаточной функции базовой системы и от значений характеристического полинома антиустойчивой системы в его собственных числах. Квадратичные формы определяют свойство нулевого пледа матриц Сяо. Знаменатель выражения (2.14), который зависит от характеристического полинома $N(s)$, определяет значение квадрата H_2-нормы передаточной функции, являющейся энергетической метрикой системы (2.1). Очевидна важная роль базовой системы в формировании энергетических метрик устойчивости. Полная управляемость базовых систем является одним из условий положительной определенности их грамианов управляемости. Это упрощает определение грамианов управляемости для базовой системы (2.7), (2.8), упрощает преобразование грамианов в форму Адамара и вычисление квадрата H_2-нормы передаточной функции (2.9). Кроме того, это гарантирует нормальность матрицы грамиана, следствием которой является положительность диагональных элементов и следа соответствующих грамианов. Их элементы зависят только от собственных чисел матрицы динамики и ее характеристического многочлена, которые не зависят от преобразований подобия и, следовательно, являются инвариантами при этих преобразованиях. Что касается базовой системы (2.4), (2.5), то грамиан управляемости в ней приобретает простую форму матриц Коши [1,21].

$$P_c = \frac{-1}{s_j + s_\eta^*},\ \forall j, \eta = \overline{1, n},\ \forall s_j, s_\eta \in C^-. \tag{2.15}$$

Симметричная матрица Коши определяется в виде

$$C = \frac{-1}{x_j + x_{\eta,}},\ \forall j, \eta = \overline{1, n},\ \forall x_j, x_\eta {\in} R^-. \tag{2.16}$$

Для таких матриц имеет место следующая

Т е о р е м а 1 [21]. *Симметричная матрица Коши вида* (2.16) *положительно определена тогда и только тогда, когда числа x_j, x_η положительны и взаимно различны*

$$0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n,\ \ 0 < x_n < x_{n-1} < \ldots < x_1.$$

С л е д с т в и е 1. *Рассмотрим матрицу Коши вида* (2.16)*, устойчивой базовой системы* (2.4), (2.5)*, или для системы* (2.7), (2.8)*. Предположим, что системы устойчивы и собственные числа их матриц динамики действительные и взаимно различные. Тогда симметричная матрица Коши вида* (2.16) *положительно определена тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$0 < -s_1 < -s_2 < \ldots < -s_n,\ \ 0 < -s_n < -s_{n-1} < \cdots < -s_1.$$

В данном случае роль положительных чисел x_j, x_η, играют вещественные части собственных чисел матрицы динамики $-s_j, -s_\eta$, которые могут оказаться комплекснозначными. Это требует представления грамианов в виде устойчивых эрмитовых матриц

$$[P_c]_{Herm} = [P_o]_{Herm}\,, \quad p_{j\eta Herm} = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{s_j + s_\eta^*} + \frac{-1}{s_j^* + s_{\eta,}}\right) = Re\left(\frac{-1}{s_j + s_\eta^*}\right).$$

В [1, лемма 9,4] доказано, что матрица Коши (2.15) устойчивой диагонализированной базовой системы положительно определена. Заметим, что для базовых систем их грамианы управляемости и наблюдаемости совпадают

$$P_c = P_o.$$

В этом случае получим важное свойство базовой системы

$$\sigma_k = (-2Re(s_k))^{-1},\ \ k = \overline{1, n},$$

где σ_k – Ганкелевы сингулярные числа матриц грамианов. В этом случае получаем простую формулу для квадрата H_2-нормы передаточной функции базовой системы

$$||W(s)||_2^2 = trP_C = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{-2Re(s_k)}.$$

Важную роль в исследовании спектральных разложений решений уравнений вида (2.2), (2.3), в том числе грамианов базовых систем, играют кратные собственные числа матриц динамики, что связано с рассмотрением уравнений состояния в форме Жордана.

Цели настоящего исследования следующие. Первой целью статьи будет получение спектральных разложений матриц грамианов базовых непрерывных динамических систем по кратным спектрам их матриц динамики. Другой целью статьи является разработка рекуррентных алгоритмов вычисления грамиана управляемости и его обратного грамиана для MIMO LTI непрерывных систем. Третьей целью является анализ энергетических метрик устойчивости линейных стационарных систем с использованием алгебраического критерия устойчивости Рауса–Гурвица.

3. Основные результаты

Рассмотрим задачу вычисления спектральных разложений MIMO LTI и SISO LTI систем с помощью решений дифференциальных и алгебраических уравнений Ляпунова в частотной области. Как известно, если линейная система устойчива, ее передаточная функция строго собственная, но все полюса различны, то справедливы следующие формулы для вычисления квадрата H_2-нормы $W(s)$[1]:

$$\|W(s)\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} r_k W(-s_k), \quad r_k = Res\left[N^{-1}(s), s_k\right]. \tag{3.1}$$

В случае базовой системы (2.4), (2.5) эта энергетическая метрика устойчивости является сепарабельной по полюсам передаточной функции, причем каждая спектральная составляющая является положительным числом. Энергетические метрики устойчивости J_1, J_2 имеют вид [19]

$$J_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{r_k}{\dot{N}(s_k)\, N(-s_k)}, \tag{3.2}$$

$$J_2 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n} \frac{-1}{s_k + s_\rho} \frac{1}{\dot{N}(s_k)\dot{N}(s_\rho)}. \tag{3.3}$$

Формулу (3.2) можно представить в эквивалентной форме

$$J_1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{r_k}{\prod_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n}(s_k - s_\lambda)\prod_{\lambda=1,}^{n}(-s_k - s_\lambda)}.$$

Поскольку матрица устойчивой диагонализированной базовой системы положительно определена, формулу (3.3) можно представить в виде следа матрицы Коши

$$J_2 = tr\sum_{k=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n} Re\left(\frac{-1}{s_k + s_\rho^*}\right) e_k e_\rho^T \ .$$

Спектральное разложение передаточной функции ПФ по кратным полюсам базовой SISO LTI системы в общем виде имеет форму [24]

$$W(s)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m_k}\frac{L_{k\nu}}{(s-s_k)^{m_k-\nu+1}}, \tag{3.4}$$

где s_k – полюс передаточной функции, $L_{k\nu}$ – вычет ПФ порядка “ν” в полюсе s_k

$$L_{k\nu}=\frac{1}{(\nu-1)!}\left[\frac{d^{\nu-1}}{ds^{\nu-1}}\left(\frac{(s-s_k)^{\nu}}{N(s)}\right)\right]_{s=s_k}. \tag{3.5}$$

Для базовых систем вычисление вычета передаточной функции ПФ по кратным полюсам резко упрощается. Пусть строго собственная передаточная функция ПФ общего вида SISO LTI системы имеет форму

$$W(s)=\frac{1}{N(s)}=\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(s-s_i)^{m_i}}.$$

Введем обозначения

$$N_{k1}(s)=(s-1)^{m_1}\times\ldots\times(s-s_{k-1})^{m_{k-1}}\times(s-s_{k+1})^{m_{k+1}}\times\ldots(s-s_n)^{m_n},$$
$$N_{k1}(s_k)=(s_k-s_1)^{m_1}\times\ldots\times(s_k-s_{k-1})^{m_{k-1}}\times(s_k-s_{k+1})^{m_{k+1}}\times\ldots(s_k-s_n)^{m_n}.$$

Тогда вычет $L_{k\nu}$ передаточной функции $W(s)$ может быть вычислен с помощью следующего рекуррентного алгоритма.

Первый шаг алгоритма $\nu=1$

$$L_{k1}(s_k,\ s_\mu)=N_k^{-1}(s_k,\ s_\mu)\quad\forall k,\mu=\overline{1,n}.$$

Второй шаг алгоритма $\nu=2$

$$L_{k2}(s_k,\ s_\mu)=-N_k^{-1}(s_k,\ s_\mu)\left(\frac{m_1}{s_k-s_1}+\ldots+\frac{m_{k+1}}{s_k-s_{k+1}}+\ldots+\frac{m_n}{(s_k-s_n)}\right),$$
$$\forall k,\mu=\overline{1,n},$$

или

$$L_{k2}(s_k,\ s_\mu)=-L_{k1}(s_k,\ s_\mu)\sum_{\mu=1,\mu\neq k}^{m}\frac{m_\mu}{(s_k-s_\mu)},\quad\forall k,\mu=\overline{1,n}.$$

$$L_{k3}=\frac{1}{2!}\left[L_{k2}-\frac{1}{N_{k1}(s)}\sum_{\mu=1,\mu\neq k}^{n}\frac{m_\mu}{(s-s_\mu)^2}\right]\Bigg|_{s=s_k},\quad\forall k=\overline{1,n},\ \forall\nu=\overline{1,m_k}.$$

Из формул вычетов следуют предельные соотношения

$$\lim_{s_k\to s_i}|L_{k\nu}|=\infty.$$

Теорема 2. Спектральные разложения энергетических метрик устойчивости базовых систем по кратным полюсам ПФ.

Рассмотрим базовую SISO LTI систему общего вида с кратными полюсами с передаточной функцией вида (3.2). Предположим, что система полностью управляема, строго собственная и устойчивая.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. *Спектральное разложение энергетической метрики устойчивости базовой системы по кратным полюсам ПФ имеет вид*

$$J_1 = J_2 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m_k} \frac{(-1)^{m_k-\nu}}{(m_k-\nu)!}\left\{L_{k\nu}\left[\frac{d^{m_k-\nu}}{ds^{m_k-\nu}}\left(\frac{1}{N(-s)}\right)\right]_{s=s_k}\right\}_{Herm}, \tag{3.6}$$

$$L_{k\nu} = \frac{1}{(\nu-1)!}\left[\frac{d^{\nu-1}}{ds^{\nu-1}}\left(\frac{(s-s_k)^{\nu}}{N(s)}\right)\right]_{s=s_k}. \tag{3.7}$$

2. *Спектральное разложение энергетической метрики базовой системы по комбинационным кратным полюсам ПФ имеет вид*

$$\begin{gathered} J_2 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m_k}\sum_{\rho=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m_\rho} \frac{(m_k-\nu+m_\rho-\mu+1)!}{(m_k-\nu)!}\times \\ \times\left[L_{k\nu}L_{\rho\mu}\frac{1}{(-s_k-s_\rho^*)^{m_k-\nu+m_\rho-\mu+1}}\right]_{Herm}, \end{gathered} \tag{3.8}$$

где

$$L_{\rho\mu} = \frac{1}{(\mu-1)!}\left[\frac{d^{\mu-1}}{ds^{\mu-1}}\left(\frac{(s-s_\rho)^{\mu}}{N(s)}\right)\right]_{s=s_\rho}. \tag{3.9}$$

Энергетические метрики базовой системы (2.4), (2.5) или системы (2.7), (2.8) J_1, J_2 являются положительными числами. Они являются инвариантами при различных преобразованиях подобия.

Доказательство. Рассмотрим следующие разложения передаточных функций исходной системы (2.1) для случая ее кратных полюсов и ее антиустойчивой подсистемы

$$W(-s) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m_k}\frac{L_{k\nu}}{(-s-s_k)^{m_k-\nu+1}}, \tag{3.10}$$

где $L_{k\nu}$ – вычет порядка “ν” в полюсе s_k ПФ $W(s)$

$$L_{k\nu} = \frac{1}{(\nu-1)!}\left[\frac{d^{\nu-1}}{ds^{\nu-1}}\left(\frac{(-s-s_k)^{\nu}}{N(-s)}\right)\right]_{s=s_k}.$$

Воспользуемся тем, что в данном случае передаточная функция, как и ее обратное преобразование Лапласа являются скалярными функциями.

$$J = \left\|N^{-1}(s)\right\|_2^2 = \int_0^\infty L^{-1}\left[N^{-1}(s)\right] L^{-1}\left[N^{-1}(-s^*)\right] dt. \tag{3.11}$$

Вычислим интеграл (3.11) в виде предела при $T \to \infty$ другого интеграла

$$J = \lim_{T\to\infty} \int_0^T L^{-1}\left[N^{-1}(s)\right] L^{-1}\left[N^{-1}(-s)\right] dt.$$

Введем первообразную функцию

$$H(t) = L^{-1}\left[N^{-1}(s)\right] L^{-1}\left[N^{-1}(-s)\right],$$

где

$$\left[N^{-1}(s)\right] = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m_k} L_{k\nu}\frac{1}{(s-s_k)^{m_k-\nu+1}},$$

$$L_{k\nu} = \frac{1}{(\nu-1)!}\left[\frac{d^{\nu-1}}{ds^{\nu-1}}\left(\frac{(s-s_k)^{\nu}}{N(s)}\right)\right]_{s=s_k},$$

$$L^{-1}\left[N^{-1}(s)\right] = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m_k}\frac{L_{k\nu}}{(m_k-\nu)!}t^{m_k-\nu}e^{s_k t},$$

$$\left[N^{-1}(-s)\right] = \sum_{\rho=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{\rho} L_{\rho\mu}\frac{1}{(-s-s_k)^{m_\rho-\mu+1}},$$

$$L_{\rho\mu} = \frac{1}{(\mu-1)!}\left[\frac{d^{\mu-1}}{ds^{\mu-1}}\left(\frac{(-s-s_\rho)^{\mu}}{N(-s)}\right)\right]_{s=s_\rho},$$

$$L^{-1}\left[N^{-1}(-s)\right] = \sum_{\rho=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m_\rho}\frac{L_{\rho\mu}}{(m_\rho-\mu)!}t^{m_\rho-\mu}e^{-s_\rho^* t}.$$

Первое утверждение теоремы связано с разложением квадрата H_2-нормы $N^{-1}(s)$, когда в первообразной функции спектральному разложению подвергается только функция $L^{-1}\left[N^{-1}(s)\right]$. В этом случае теорема о преобразовании Лапласа произведения комплексных функций времени, изображение которых представляет собой дробно-рациональную дробь приобретает вид

$$L\left[L^{-1}\left[N^{-1}(s)\right] \times N^{-1}(-s)\right] = L\left[H(t)\right] =$$

$$= H(s) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m_k}\frac{(-1)^{m_k-\nu}L_{k\nu}}{(m_k-\nu)!}\left[\frac{d^{m_k-\nu}}{ds^{m_k-\nu}}\left(\frac{1}{N(-s)}\right)\right]_{s=s-s_k}.$$

Отсюда следует

$$J_1 = \left\| N^{-1}(s) \right\|_2^2 = -H(0) = J_2 =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{m_k} \frac{(-1)^{m_k-\nu}}{(m_k-\nu)!} \left\{ L_{k\nu} \left[\frac{d^{m_k-\nu}}{ds^{m_k-\nu}} \left(\frac{1}{N(-s)} \right) \right]_{s=s_k} \right\}_{Herm}.$$

Это доказывает первое утверждение теоремы. Если добавим в эту схему спектральное разложение второй функции $L^{-1}\left[N^{-1}(s)\right]$ и используем теорему о преобразовании Лапласа произведения комплексных функций времени, изображение которых представляет собой дробно-рациональную дробь, то получим формулу

$$L\left[L^{-1}\left[N^{-1}(s)\right] \times N^{-1}(-s)\right] = L\left[H(t)\right] =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{m_k} \frac{(-1)^{m_k-\nu}}{(m_k-\nu)!} L_{k\nu} \left\{ \frac{d^{m_k-\nu}}{ds^{m_k-\nu}} \left[\sum_{\rho=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m_\rho} L_{\rho\mu} \frac{1}{(-s-s_\rho^*)^{m_\rho-\mu+1}} \right]_{s=s_k} \right\} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{m_k} \sum_{\rho=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m_\rho} \frac{(m_k-\nu+m_\rho-\mu+1)!}{(m_k-\nu)!} \times$$
$$\times \left[L_{k\nu} L_{\rho\mu} \frac{1}{(-s_k-s_\rho^*)^{m_k-\nu+m_\rho-\mu+1}} \right]_{Herm}.$$

Поскольку $H(t)$ – первообразная функция, то из (3.4) с учетом устойчивости системы следует

$$J_2 = \left\| N^{-1}(s) \right\|_2^2 = H(t)]_0^\infty = -H(0) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{m_k} \sum_{\rho=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m_\rho} \frac{(m_k-\nu+m_\rho-\mu+1)!}{(m_k-\nu)!} \times$$
$$\times \left[L_{k\nu} L_{\rho\mu} \frac{1}{(-s_k-s_\rho^*)^{m_k-\nu+m_\rho-\mu+1}} \right]_{Herm}.$$

Это доказывает второе утверждение теоремы. Заметим, что при доказательстве теоремы не были использованы матрицы динамики базовой системы. Отсюда вытекает, что ее утверждения справедливы как для базовой системы (2.4), (2.5), так и для системы (2.7), (2.8). Кроме того, энергетические метрики J_1, J_2 равны друг другу, они являются положительными числами, поскольку H_2-норма передаточной функции является положительным числом. Они являются инвариантами при различных преобразованиях подобия, поскольку являются функциями собственных чисел матрицы динамики системы.

Рассмотрим далее дифференциальное и алгебраическое уравнения Ляпунова вида

$$\frac{dP(t)}{dt} = A_d P\left(t\right) + P\left(t\right) A_d^T + b_d b_d^T, \quad P\left(0\right) = 0_{nxn}, \quad t \in \left[0, T\right], \tag{3.12}$$

$$A_d P\left(t\right) + P\left(t\right) A_d^T = -b_d b_d^T. \tag{3.13}$$

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы 2, но все полюса ПФ различны. Тогда справедливо следующее утверждение:*

$$J_1\left(s_1, \ldots, s_n\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\dot{N}(s_k)} \frac{1}{\left(-s_k\right)^n + \ldots + a_1\left(-s_k\right) + a_0} > 0,$$

$$J_2\left(s_1, \ldots, s_n\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n} J_{2,k\rho}\left(s_1, \ldots, s_n\right) > 0, \tag{3.14}$$

$$J_{2,k\rho}\left(s_1, \ldots, s_n\right) = 2Re\frac{r_k r_\rho}{\left(-s_k - s_\rho\right)} = 2\alpha_{k\rho} Re\frac{\left(r_k r_\rho\right)}{\alpha_{k\rho}^2 + \beta_{k\rho}^2},$$

$$\alpha_{k\rho} = -Re s_k - Re s_\rho, \quad \beta_{k\rho} = -\Im s_k - \Im s_\rho.$$

Доказательство. Рассмотрим базовую систему (2.6), (2.7) и формулы (2.11), (2.12). Поскольку для базовой системы векторы входа и выхода имеют вид (2.7), (2.8), получаем

$$J_2\left(s_1, \ldots, s_n\right) = c^F P_c^F (c^F)^T = y_{n-1} = \int_0^\infty k^2\left(\tau\right) d\tau,$$

где $k(\tau)$ – импульсная переходная функция системы. Отсюда вытекают формулы из утверждений.

Теорема 3. *Предположим, что система SISO LTI* (2.1) *является полностью управляемой, существует невырожденное преобразование координат $x_d = Tx$ такое, что*

$$A_d = TAT^{-1}.$$

Предположим, что все собственные числа матрицы A различны, не принадлежат мнимой оси и выполнены условия

$$s_i + s_j \neq 0, \qquad \forall i, j = \overline{1, n}.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. *Решение уравнения* (3.12) *в комплексной области существует, единственно и имеет вид*

$$L\left[P\left(t\right)\right] = \frac{1}{s}\left\{\sum_{i,j=1}^{n} \frac{-1}{\left(s_i + s_j^*\right)}\left[Res\left(Is - A_d\right)^{-1}, s_i\right] b_{di} b_{dj} \times \right.$$
$$\left.\times\left[Res\left(Is - A_d^*\right)^{-1}, s_j^*\right]\right\}_{Herm}, \tag{3.15}$$

где b_{di} – элемент “i” вектора b_d, b_{dj} – элемент “j” вектора b_d.

2. *Решение уравнения* (3.12) *в действительной области единственно и имеет вид*

$$P\left(0,T\right)=\int\limits_{0}^{T}\left\{\sum_{i,j=1}^{n}\frac{-1}{\left(s_i+s_j^*\right)}b_d b_d^T e^{\left(s_i+s_j^*\right)\tau}e_j e_\eta^T d\tau\right\}_{Herm}. \tag{3.16}$$

3. *Решение алгебраического уравнения* (3.13) *в действительной области существует, единственно и имеет вид*

$$P\left(0,\infty\right)=\left\{\sum_{i,j=1}^{n}\frac{-b_{di}b_{dj}}{\left(s_i+s_j^*\right)}e_j e_\eta^T\right\}_{Herm}. \tag{3.17}$$

Матрица $P^{-1}\left(0,\infty\right)$ *в условиях теоремы существует и единственна*

$$P^{-1}\left(0,\infty\right)=\frac{-P_0}{p_0}, \tag{3.18}$$

где P_0 *– свободный член матричного полинома Фаддеева,* p_0 *– свободный член характеристического полинома матрицы* $P(0,T)$*, определяемые с помощью рекуррентного алгоритма Фаддеева–Леверье* [22, 23].

Доказательство. Применение преобразования Лапласа к матричным функциям времени имеет свои особенности. Рассмотрим диагональные матрицы размера $n\times n$

$$F_1\left(t\right)=diag\left[\dots\quad\dots\quad f_{1,\nu}(t)\quad\dots\quad\dots\right],$$
$$F_2\left(t\right)=diag\left[\dots\quad\dots\quad f_{2,\eta}(t)\quad\dots\quad\dots\right],$$

где функции $f_{1,\nu}\left(t\right),f_{2,\eta}(t)$ преобразуемы по Лапласу, а их изображения $f_{1,\nu}\left(s\right)$, $f_{2,\eta}\left(s\right)$ являются рациональными дробями, имеющими только n полюсов и не имеющими нулей.

$$f_{1,i}\left(s\right)=\frac{1}{\left(s-s_{1,i}\right)},\quad f_{2,j}\left(s\right)=\frac{1}{\left(s-s_{2,j}\right)}.$$

Покажем, что для каждого элемента "ij" изображения по Лапласу произведения матриц $F_1\left(t\right)b_{di}b_{dj}F_2\left(t\right)$ справедливы формулы

$$L\left[e_iF_1\left(t\right)b_{di}b_{dj}F_2\left(t\right)e_j^T\right]=\sum_{i,j=1}^{n}1_{ii}b_{di}b_{dj}\frac{1}{\left(s-s_{1,i}-s_{2,j}\right)}1_{jj},\quad 1_{ii}=e_ie_i^T, \tag{3.19}$$

$$f_{1,i}\left(t\right)=e^{s_it},\quad f_{2,j}\left(t\right)=e^{s_j^*t}.$$

Справедливы также тождества для вычетов резольвент:

$$\left[Res\left(Is-A_d\right)^{-1},s_i\right]=1_{ii},\quad\left[Res\left(Is-A_d^*\right)^{-1},s_j^*\right]=1_{jj}.$$

Используя теорему о преобразовании Лапласа произведения вещественных функций времени, изображение которых представляет собой дробно-рациональную алгебраическую функцию, получим (3.19). Как известно, решением дифференциального уравнения Ляпунова с нулевыми начальными условиями является интеграл Ляпунова вида

$$P\left(t\right)=\int\limits_{0}^{T}e^{At}b_{d}b_{d}^{T}e^{A^{*}t}dt.$$

Применив (3.19), получим

$$P\left(0,T\right)=\int\limits_{0}^{T}\left\{\sum_{i,j=1}^{n}\frac{-1}{\left(s_{i}+s_{j}^{*}\right)}b_{di}b_{dj}e^{\left(s_{i}+s_{j}^{*}\right)\tau}e_{j}e_{\eta}^{T}d\tau\right\}_{Herm}. \tag{3.20}$$

Как показано в [13]

$$P\left(t\right)=\sum_{i,j=1}^{n}P_{ij}\left(t\right),\quad P_{ij}\left(t\right)=\left\{\frac{e^{\left(s_{i}+s_{j}^{*}\right)t}}{s_{i}+s_{j}^{*}}1_{ii}b_{di}b_{dj}1_{jj}\right\}_{Herm}.$$

Формула в утверждении 3) доказывается путем предельного перехода в (3.20). Существование и единственность решения уравнения (3.13) во временной области доказана во многих работах, например [3]. Докажем справедливость этого утверждения в комплексной области. Поскольку интеграл Ляпунова является решением уравнения (3.13), это утверждение достаточно доказать для его преобразования Лапласа. Заметим, что матрица $e^{At}b_{d}b_{d}^{T}e^{A^{*}t}$ является гладкой, не равной нулю функцией времени. Для любого “ij” элемента выполнено неравенство

$$\lim_{t\to\infty,\varepsilon\leftrightarrow0}\int\limits_{0}^{T}e_{j}\left|e^{At}b_{d}b_{d}^{T}e^{A^{*}t}\right|e_{\eta}^{T}dt<\infty,\ \forall t\in\left[0,T\right),\ \forall i,j=\overline{1,n}.$$

Отсюда вытекает, что для всех функций времени $e_{j}\left|e^{At}b_{d}b_{d}^{T}e^{A^{*}t}\right|e_{\eta}^{T}$, удовлетворяющих условиям теоремы, существует абсцисса абсолютной сходимости σ, что доказывает существование и единственность прямого преобразования Лапласа для решения (3.16). С другой стороны, если существует прямое преобразование Лапласа решения, то существует и обратное преобразование:

$$\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty}e_{\nu}\left|e^{At}b_{d}b_{d}^{T}e^{A^{*}t}\right|e_{\mu}^{T}e^{ts}ds,\quad c>\sigma,\ \forall\nu,\mu=\overline{1,n}.$$

При этом обратное преобразование единственно в смысле Лебега. Справедливость утверждения 4) вытекает из полной управляемости системы [4]. Отсюда следует существование и единственность обратной матрицы $P^{-1}\left(0,T\right)$

при любом T. Запишем разложение резольвенты матрицы $P(0,T)$ в ряд Фаддеева–Леверье:

$$[Is - P(0,T)]^{-1} = \frac{P_{n-1}s^{n-1} + \ldots + P_1 s + P_0}{p_n s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \ldots + p_1 s + p_0}\ . \tag{3.21}$$

Положив в (3.21) $s = 0$, получим формулу

$$P^{-1}(0,\infty) = \frac{-P_0}{p_0}, \tag{3.22}$$

где P_0 – свободный член матричного полинома Фаддеева, p_0 – свободный член характеристического полинома матрицы $P(0,T)$. Они определяются с помощью рекуррентного алгоритма Фаддеева–Леверье [22, 23].

$$P_{n-1}s^{n-1} = Ip_n s^{n-1},\ \ p_n = 1,$$
$$P_{n-2}s^{n-2} = (Ip_{n-1} + p_{n-2}P(0,T))\, s^{n-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_0 = \left(Ip_1 + p_2 P(0,T) + \ldots + p_n P(0,T)^{n-1}\right). \tag{3.23}$$

Коэффициенты p_i определяются формулами

$$p_{n-i} = \frac{-1}{i} tr\left(P(0,T)\, P_{n-i}\right).$$

Замечание 2. В работе [13] доказано, что результаты теоремы могут быть распространены на случай канонических форм Жордана уравнений состояния (2.1) для случая, когда характеристическое уравнение матрицы динамики SISO LTI системы (2.1) может быть представлено в виде

$$N(s) = \prod_{k=1}^{n} (s - s_k)^{m_k}, \quad \sum_{k=1}^{n} m_k = q.$$

Решение уравнения (2.3) в действительной области для кратных собственных чисел s_k матрицы A_d с кратностью m_k имеет вид

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P_{j\eta}(t),$$

$$P_{j\eta}(t) = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\eta=0}^{n-1} h_{j\eta}(t)\, b_d b_d^T e_j e_\eta^T,$$

$$h_{j\eta}(t) = L^{-1}\left\{ s^{-1} \sum_{k=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m_k} L_{k,\nu j} \frac{(-1)^{m_k-\nu}}{(m_k-\nu)!} \left[\frac{d^{m_k-\nu}}{ds^{m_k-\nu}} \left(\frac{s^\eta}{N(-s)} \right) \right]_{s=s-s_k} \right\},$$

$$L_{k,\nu j} = \frac{1}{(\nu-1)!} \left[\frac{d^{\nu-1}}{ds^{\nu-1}} \left(\frac{(s-s_k)^{m_k} s^j}{N(s)} \right) \right]_{s=k}.$$

Пример 1. Рассмотрим простую базовую систему SISO LTI с размерностью $n = 3$, представленную уравнениями состояния в диагональной канонической форме вида

$$\dot{x}_d = A_d x_d + b_d u,$$

$$A_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad b_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$N(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0, \quad a_3 = 1, \quad a_2 = 6, \quad a_1 = 11, \quad a_0 = 6,$$

$$s_1 = -1, \quad s_2 = -2, \quad s_3 = -3.$$

Вычислим решение алгебраического уравнения Ляпунова. Поскольку в примере решается не дифференциальное, а алгебраическое уравнение Ляпунова для устойчивой системы, то формула (3.22) переходит в формулу

$$P(\infty) = [p_{ij}(\infty)], \quad p_{ij}(\infty) = \frac{-b_{di} b_{dj}}{s_i + s_j}. \tag{3.24}$$

Подставив в формулу параметры примера, получим

$$P(\infty) = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}666 & 0{,}75 \\ 0{,}666 & 1 & 1{,}2 \\ 0{,}75 & 1{,}2 & 1{,}5 \end{bmatrix}.$$

Положив в формуле (3.21) $s = 0$, получаем

$$P^{-1} = \frac{-P_0}{p_0}. \tag{3.25}$$

Первый шаг рекуррентного алгоритма. Задаем $P_2 = I_2$, $p_3 = 1$,

$$k = 0.$$

Второй шаг. Вычисляем P_1, p_2.

$$k = 1$$

$$P_1 = p_2 I_3 + P P_2 = \begin{bmatrix} -2{,}5 & 0{,}666 & 0{,}75 \\ 0{,}666 & -2 & 1{,}2 \\ 0{,}75 & 1{,}2 & -1{,}5 \end{bmatrix},$$

$$p_2 = \frac{-1}{1} tr(P P_2) = -3.$$

Третий шаг. Вычисляем P_0, p_1.

$$k = 2$$

$$P_0 = p_2 I_3 + P P_2 = \begin{bmatrix} 0{,}06 & -0{,}099 & 0{,}0492 \\ -0{,}099 & 0{,}1875 & -0{,}1005 \\ 0{,}0492 & -0{,}1005 & 0{,}5844 \end{bmatrix},$$

$$p_1 = \frac{-1}{2} tr(P P_1) = -0{,}30394.$$

Четвертый шаг. Вычисляем p_0.

$$k = 3$$

$$p_0 = \frac{-1}{3} tr\left(PP_2\right) = -0{,}000966, \quad p_0^{-1} = -1035{,}19.$$

Подставляем полученные на последнем и предпоследнем шагах выражения в формулу (3.21)

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 62{,}114 & -102{,}4838 & 50{,}9313 \\ -102{,}4838 & -194{,}0981 & -104{,}36 \\ 50{,}9313 & -104{,}36 & 58{,}426 \end{bmatrix}.$$

Не трудно убедиться, что полученная матрица является обратной матрицей грамиана управляемости.

Т е о р е м а 4. *Рассмотрим MIMO LTI систему* (2.1) *в канонической форме управляемости и запишем дифференциальное уравнение Ляпунова*

$$\frac{dP(t)}{dt} = A_c^F P\left(t\right) + P\left(t\right)\left(A_c^F\right)^T + B^F\left(B^F\right)^T, \qquad (3.26)$$
$$P\left(0\right) = 0_{nxn}, \quad t \in \left[0, T\right].$$

Предположим, что система (2.1) *является полностью управляемой, существует невырожденное преобразование координат* $x_c = Tx$, *такое, что*

$$A_c^F = TAT^{-1}.$$

Предположим, что все собственные числа матрицы A_c^F *различны, не принадлежат мнимой оси и выполнены условия* $s_i + s_j \neq 0, \forall i, j = \overline{1, n}$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. *Решение уравнения* (3.26) *в комплексной области существует, единственно и имеет вид*

$$\left[P\left(s\right)\right] = \frac{1}{s}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[Res\left(Is - A_c^F\right)^{-1}, s_j\right] B^F\left(B^F\right)^T \times \right. \qquad (3.27)$$
$$\left.\left\{\left[\left[-Is - (A_c^F)^T\right]^{-1}\right]\right\}\right\}_{Herm},$$

где

$$A_{cj}^F = a_{j+1}I + a_{j+2}A_c^F + \ldots + a_n\left(A_c^F\right)^{n-j-1}, \quad j = \overline{0, n-1},$$
$$A_{c\eta}^F = a_{\eta+1}I + a_{\eta+2}A_c^F + \ldots + a_n\left(A_c^F\right)^{n-\eta-1}, \eta = \overline{0, n-1}.$$

2. *Решение уравнения* (3.26) *в действительной области единственно и имеет вид*

$$(3.28)\quad P_{j\eta}(t) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} s_k^j (-s_k)^\eta}{\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n} (s_k - s_\lambda) \prod\limits_{\lambda=1}^{n} (-s_\rho - s_\lambda)} (e^{s_k t} - 1) A_{cj}^F B^F \left(B^F\right)^T \left(A_{c\eta}^F\right)^T =$$

$$= \Omega_{c,j\eta}^F(t) \circ \Psi_{c,j\eta}^F,$$

$$\Omega_{c,j\eta}^F(t) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} s_k^j (-s_k)^\eta}{\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n} (s_k - s_\lambda) \prod\limits_{\lambda=1}^{n} (-s_\rho - s_\lambda)} (e^{s_k t} - 1) e_j e_\eta^T,$$

$$\Psi_{c,j\eta}^F = A_{cj}^F B^F \left(B^F\right)^T (A_{c\eta}^F)^T.$$

3. *Бесконечный грамиан управляемости имеет вид*

$$(3.29)\qquad P(0,\infty) = \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\eta=0}^{n-1} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} s_k^j (-s_k)^\eta}{\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n} (s_k - s_\lambda) \prod\limits_{\lambda=1}^{n} (-s_\rho - s_\lambda)} e_j e_\eta^T \right\}_{Herm} \times$$

$$\times A_{cj}^F B^F \left(B^F\right)^T (A_{c\eta}^F)^T.$$

4. *Матрица* $P^{-1}(0,\infty)$ *в условиях теоремы существует и единственна.*

$$(3.30)\qquad P^{-1}(0,\infty) = \frac{-P_0^F}{p_0},$$

в которой P_0^F *– свободный член матричного полинома Фаддеева для уравнений состояния в канонической форме управляемости,* p_0 *– свободный член характеристического полинома грамиана, определяемые с помощью рекуррентного алгоритма Фаддеева–Леверье* [22, 23].

5. *Результаты теоремы могут быть распространены на случай канонических форм Жордана уравнений состояния* (3.26) *для случая, когда характеристическое уравнение матрицы динамики имеет "k" различных корней кратности* m_k. *Решение уравнения* (3.26) *в действительной области для кратных собственных чисел* s_k *матрицы* A_c^F *с кратностью* m_k *имеет вид*

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} P_{j\eta}(t),$$

$$P_{j\eta}(t) = h_{j\eta}(t) A_{cj}^F B^F \left(B^F\right)^T (A_{c\eta}^F)^T,$$

$$(3.31)\quad h_{j\eta}(t) = L^{-1} \left\{ s^{-1} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_k} L_{k,j} \frac{(-1)^{m_k-\nu}}{(m_k-\nu)!} \left[\frac{d^{m_k-\nu}}{ds^{m_k-\nu}} \left(\frac{s^\eta}{N(-s)} \right) \right]_{s=s-s_k} \right\},$$

$$(3.32) \qquad L_{k,j} = \frac{1}{(j-1)!}\left[\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}\left(\frac{(s-s_k)^{m_k} s^j}{N(s)}\right)\right]_{s=k}.$$

Доказательство. Общий метод решения основан на спектральном разложении решения интеграла Ляпунова. Доказательство существования и единственности решений повторяет аналогичное доказательство теоремы 3. Точно так же доказывается справедливость утверждений 2–4 и рекуррентных формул (3.30). Сами формулы имеют другой вид, определяемый матрицей динамики в форме управляемости. Общее решение для случая различных корней характеристического уравнения в комплексной области имеет вид [13]

$$L\left[P\left(t\right)\right] = \frac{1}{s}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[Res\left(Is - A_c^F\right)^{-1}, s_j\right] B^F\left(B^F\right)^T \times \right.$$

$$\left. \times \left\{\left[\left[-Is - (A_c^F)^T\right]^{-1}\right]\right\}\right\}_{Herm}.$$

Введем матричную первообразную функцию $H_1\left(t\right)$ и скалярную матричную функцию $H\left(t\right)$ вида

$$H_1\left(t\right) = H\left(t\right)\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\eta=0}^{n-1} A_{cj}^F B^F\left(B^F\right)^T (A_{c\eta}^F)^T,$$

$$H\left(t\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\eta=0}^{n-1}\frac{s_k^j\left(-s_k\right)^\eta}{\dot{N}\left(s_k\right)N\left(-s_k\right)} 1_{j+1\eta+1}.$$

$$A_{cj}^F = a_{j+1}I + a_{j+2}A_c^F + \ldots + a_n\left(A_c^F\right)^{n-j-1}, \quad j = \overline{0, n-1},$$

$$A_{c\eta}^F = a_{\eta+1}I + a_{\eta+2}A_c^F + \ldots + a_n\left(A_c^F\right)^{n-\eta-1}, \quad \eta = \overline{0, n-1}.$$

В соответствии с (2.14) матрица $H\left(t\right)$ является матрицей Сяо. Отсюда следует, что матрицу $P_{j\eta}\left(t\right)$ можно представить в виде произведения Адамара [13]

$$P_{j\eta}\left(t\right) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} s_k^j(-s_k)^\eta}{\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n}\left(s_k - s_\lambda\right)\prod\limits_{\lambda=1}^{n}\left(-s_\rho - s_\lambda\right)}(e^{s_k t} - 1)A_{cj}^F B^F\left(B^F\right)^T\left(A_{c\eta}^F\right)^T =$$

$$= \Omega_{c,j\eta}^F\left(t\right)\circ\Psi_{c,j\eta}^F,$$

$$\Omega_{c,j\eta}^F\left(t\right) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} s_k^j(-s_k)^\eta}{\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n}\left(s_k - s_\lambda\right)\prod\limits_{\lambda=1}^{n}\left(-s_\rho - s_\lambda\right)}(e^{s_k t} - 1)e_j e_\eta^T,$$

$$\Psi_{c,j\eta}^F = A_{cj}^F B^F\left(B^F\right)^T (A_{c\eta}^F)^T.$$

Из этих формул следует, что бесконечный грамиан управляемости для случая различных корней характеристического уравнения в действительной области имеет вид

$$P\left(0,\infty\right)=\left\{\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\eta=0}^{n-1}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}s_k^j(-s_k)^\eta}{\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n}\left(s_k-s_\lambda\right)\prod\limits_{\lambda=1}^{n}\left(-s_\rho-s_\lambda\right)}e_je_\eta^T\right\}_{Herm}\times$$
$$\times A_{cj}^F B^F\left(B^F\right)^T(A_{c\eta}^F)^T.$$

Это доказывает справедливость утверждений 1–3. Справедливость утверждения 4 доказывается так же, как и теоремы 3. Для построения бесконечного грамиана управляемости используется рекуррентный алгоритм Фаддеева–Леверье (см. пример)

$$P^{-1}\left(0,\infty\right)=\frac{-P_0}{p_0},$$

в котором P_0 – свободный член матричного полинома Фаддеева, p_0 – свободный член характеристического полинома матрицы грамиана управляемости.

$$P(t)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}P_{j\eta}\left(t\right),$$

$$P_{j\eta}\left(t\right)=h_{j\eta}\left(t\right)A_{cj}^F B^F\left(B^F\right)^T(A_{c\eta}^F)^T,$$

$$h_{j\eta}\left(t\right)=L^{-1}\left\{s^{-1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_k}L_{k,j}\frac{(-1)^{m_k-\nu}}{(m_k-\nu)!}\left[\frac{d^{m_k-\nu}}{ds^{m_k-\nu}}\left(\frac{s^\eta}{N(-s)}\right)\right]_{s=s-s_k}\right\},$$

$$L_{k,j}=\frac{1}{(j-1)!}\left[\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}\left(\frac{(s-s_k)^{m_k}s^j}{N(s)}\right)\right]_{s=k}.$$

С л е д с т в и е 3. *Обобщим результаты теоремы 4 для непрерывных линейных SISO LTI систем. Предположим, что выполнены все условия теоремы 4 с заменой MIMO LTI систем на SISO LTI системы. Тогда справедливо следующее спектральное разложение грамиана управляемости SISO LTI системы в действительной области*

$$P\left(t\right)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\eta=1}^{n}\frac{s_k^{j-1}(-s_k)^{\eta-1}}{\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n}\left(s_k-s_\lambda\right)\prod\limits_{\lambda=1}^{n}\left(-s_\rho-s_\lambda\right)}(e^{s_kt}-1)e_je_\eta^T.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для системы в канонической форме управляемости разложение резольвент матриц динамики A^F, A^{F*} имеет простой вид, поэтому справедливы формулы

$$(Is - A^F)^{-1} b^F = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ N(s)^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ N(s)^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} N(s)^{-1} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$b^{FT}(-Is - A^{F*})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ N(-s)^{-1} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ N(-s)^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}^T + \ldots + \begin{bmatrix} N(-s)^{-1} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T.$$

Подставив их в (3.27), используя теорему о преобразовании Лапласа произведения комплексных функций времени, изображение которых представляет собой дробно-рациональную дробь и теорему о смещении в комплексной области, доказываем формулу Следствия 3 [13].

Следствие 4 [13, Теорема 1]. *Предположим, что выполнены условия теоремы 4 для SISO LTI системы. Кроме того, предположим, что система асимптотически устойчива. Тогда спектральное разложение обратного грамиана управляемости LTI системы в комплексной области является решением систем уравнений*

$$\vec{X} = \left(I_n \otimes P_c^F\right)^{-1} \vec{I_n}. \tag{3.33}$$

$$P_c^F = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j \left(-s_k\right)^\eta}{\dot{N}\left(s_k\right) N\left(-s_k\right)} \mathbf{1}_{j+1\eta+1}. \tag{3.34}$$

Доказательство. Из условий теоремы следует, что решение системы (3.33)–(3.34) существует и единственно. В [13] был предложен следующий алгоритм вычисления матриц обратных грамианов в форме Сяо. Пусть X – матрица обратного грамиана управляемости, x_i – "i-й" столбец матрицы X. Тогда обратный грамиан определяется формулой

$$P_c^F x_i = e_i, \quad i = \overline{1, n},$$

где $e_i - x_i$ – "i-й" столбец матрицы I_n. Эти уравнения можно переписать в виде решения алгебраического уравнения Сильвестра

$$\left(I_n \otimes P_c^F\right) \vec{X} = \vec{I_n}, \quad X = \left(P_c^F\right)^{-1}.$$

Перепишем (2.14) в виде

$$P_c^F = \sum_{k=1}^{n} P_{ck}^F, \quad P_{ck}^F = \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j \left(-s_k\right)^\eta}{\dot{N}\left(s_k\right) N\left(-s_k\right)} \mathbf{1}_{j+1\eta+1},$$

где P_{ck}^F – матрица субграмиана управляемости, соответствующая полюсу s_k. Откуда

$$\vec{X} = \left(I_n \otimes P_c^F\right)^{-1} \vec{I_n}.$$

Окончательно получаем искомое спектральное разложение обратного грамиана управляемости по спектру матрицы динамики в канонической форме управляемости в виде (3.33), (3.34). Обратный грамиан имеет структуру нулевого пледа матрицы Сяо(zero plaid, [5, 6]). Такую же структуру будут иметь столбцы матрицы P_c^F. Незначимые элементы нулевого пледа определяются формулой

$$x_{ij} = 0, \quad \forall i, j = i + j \neq 2k, \quad k = \overline{1, n}.$$

С другой стороны конечный обратный грамиан определяется и виде решения дифференциального уравнения Сильвества

$$X = -\int\limits_0^t e^{P_c^F t} dt, \quad \text{или} \quad \frac{dX}{dt} = e^{P_c^F t},$$

которое можно решить в комплексной области

$$\mathcal{L}\left(\frac{dX}{dt}\right) = \left(Is - P_c^F\right)^{-1}.$$

Решение этого уравнения с помощью спектральных разложений резольвенты грамиана можно получить на основе применения алгоритма Фаддеева–Леверье.

Замечание 3. Анализ формул теорем 3 и 4 показывает, что они гораздо сложнее для вычислений грамианов, чем формулы энергетических метрик теоремы 2 J_1, J_2. Однако последние инвариантны при любых преобразованиях подобия, в том числе и тех, которые приводят MIMO LTI систему (2.1) в новую систему, уравнения состояния которой отвечают одной из трех канонических форм: Жордана, модальной, управляемости.

4. Энергетические метрики устойчивости и критерий устойчивости Рауса–Гурвица

Необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости базовой системы второго вида имеет форму ограниченности квадратов норм ПФ системы [1]

$$\left\|N^{-1}(s)\right\|_2^2 < \infty, \qquad \left\|N^{-1}(s)\right\|_\infty^2 < \infty \tag{4.1}$$

или в соответствии с теоремой 2 ограниченности квадратов норм ПФ базовой системы для случая кратных корней

$$J_1 < \infty, \quad J_2 < \infty, \quad \max_{s_i} J_1 < \infty, \quad \max_{s_i} J_2 < \infty. \tag{4.2}$$

Определим энергетическую метрику устойчивости базовой системы в виде $J_1(s_1,\ldots,s_n), J_2(s_1,\ldots,s_n)$. Спектральные разложения энергетических метрик $J_1(s_1,\ldots,s_n), J_2(s_1,\ldots,s_n)$ по простым корням характеристического уравнения имеют вид (3.2), (3.3). Математическая корректность этих метрик вытекает из того, что метрики равны квадратам H_2 или H_∞-норм передаточной функции базовой системы, которые являются инвариантами при преобразованиях подобия.

$$\left\|N^{-1}(s)\right\|_{inf}^2 = \max_{s_k}\left\|N^{-1}(s)\right\|_2^2, \ \forall k=1,\ldots,n.$$

Спектральные разложения энергетической метрики $J_2(s_1,\ldots,s_n)$ по кратным корням характеристического уравнения имеют вид

$$J_2(s_1,\ldots,s_n) = \\ = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m_k}\sum_{\rho=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m_\rho}\frac{(m_k-\nu+m_\rho-\mu+1)!}{(m_k-\nu)!}\times \\ \times\left[L_{k\nu}L_{\rho\mu}\frac{1}{(-s_k-s_\rho^*)^{m_k-\nu+m_\rho-\mu+1}}\right]_{Herm}.$$

Заметим, что метрики базовых систем не зависят от матриц Фаддеева в разложении грамианов управляемости. Из этих формул следует, что по мере приближения системы к границе устойчивости, вызванного приближением корней характеристического уравнения к мнимой оси, энергетические метрики устойчивости стремятся к бесконечности. Определим приемлемое значение энергетической метрики устойчивости в виде положительного достаточно большого числа N_{perm}:

$$J_1(s_1,\ldots s_n) = N_{1perm}, \quad J_2(s_1,\ldots s_n) = N_{2perm}. \tag{4.3}$$

Будем считать любую базовую систему условно неустойчивой, если все корни ее характеристического уравнения находятся в левой полуплоскости, но при этом энергетическая метрика устойчивости превышает установленное приемлемое значение.

Заметим, что именно слабоустойчивые и резонансные корни характеристического уравнения определяют степень близости системы к границе устойчивости. Анализ формул теоремы 2 показывает, что слабоустойчивыми являются две группы корней. Первая группа состоит из корней, близких мнимой оси. Вторая группа состоит из комплексных пар корней, которые близки друг другу по норме (резонансная группа корней). При приближении слабоустойчивых собственных чисел первой группы друг к другу соответствующие им слагаемые становятся положительно-определенными, а их значения становятся сколь угодно большими положительными числами. Аналогичные предельные соотношения имеют место для резонансной группы корней. В последнем случае степень колебательной неустойчивости будет гораздо выше, так как модули вычетов $L_{kv}, L_{\rho\mu}$ обратно пропорциональны разности корней s_k, s_ρ. Оценка энергии слабоустойчивых составляющих разложений энергетических метрик устойчивости позволяет определить и оценить энергетический запас устойчивости в виде

$$R_{1stab} = 20lg\frac{N_{perm}}{J_1\left(s_1, \dots s_n\right)}, \tag{4.4}$$

$$R_{2stab} = 20lg\frac{N_{perm}}{J_2\left(s_1, \dots s_n\right)}. \tag{4.5}$$

Введенные метрики устойчивости (4.2), (4.3) не отменяют классический критерий устойчивости, основанный на близости ближайшего корня характеристического уравнения к мнимой оси, а дополняют его с учетом энергии, аккумулированной в состояниях системы. То же относится к алгебраическому критерию устойчивости линейных стационарных систем Рауса–Гурвица [5, 6]. Можно ожидать, что совместное применение критерия Рауса–Гурвица и спектральных разложений грамианов в виде энергетических метрик устойчивости (4.4), (4.5) для анализа устойчивости создаст эффект синергии, усилив преимущества каждого подхода и ослабив их недостатки. Гибридный критерий включает формирование таблиц Рауса и матриц Сяо, вычисление спектра матрицы динамики, вычисление спектральных разложений энергетических метрик $J_1\left(s_1, \dots, s_n\right), J_2\left(s_1, \dots, s_n\right)$, формирование критерия устойчивости (4.4), (4.5), анализ устойчивости для различных сценариев функционирования системы. Очевидно, что полученные критерии справедливы не только для базовой системы, а и для непрерывной стационарной линейной системы со многими входами и многими выходами, характеристический многочлен которой совпадает с характеристическим многочленом базовой системы. В [9] предложен метод вычисления грамиана базовой системы в канонической форме управляемости, основанный на использовании таблицы Рауса и без необходимости вычислять спектр матрицы динамики. Диагональные элементы матриц Сяо связаны с элементами таблицы Рауса соотношениями

$$y_{j\eta} = \begin{cases} 0, \quad \text{если} \quad j+\eta = 2k+1, \quad k = 1, \dots, n; \\ y_n = \dfrac{1}{2Y_{n,1}}, \\ y_{n-l} = \dfrac{-\sum\limits_{i=1}^{m-1}(-1)^i Y_{n-l,i+1} y_{n-l+i}}{Y_{n-l,1}}, \\ \qquad \text{если} \quad j+\eta = 2k, \quad k = 1, \dots, n, \quad l = \overline{1, n-1}, \end{cases} \tag{4.6}$$

где $R_{j\eta}$ – элементы "$j\eta$" таблицы Рауса, m – число элементов в "j" строке таблицы Рауса. Предположим, что наряду с таблицей Рауса предварительно вычислены все собственные числа матрицы динамики s_k, и они различны. В соответствии с (2.13), (2.14) грамиан управляемости базовой системы имеет форму матриц Сяо, диагональные элементы которой имеют вид

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}(s_k)^{2i-2}}{\prod\limits_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n}(s_k - s_\lambda)\prod\limits_{\lambda=1,}^{n}(-s_k - s_\lambda)} > 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{4.7}$$

Выражения (4.7) показывают, что энергетическая метрика устойчивости зависит от плотности распределения вещественных частей собственных чисел s_k, s_λ на вещественной оси: чем ближе s_λ к s_k, тем больше значение энергетической метрики [14, 16]. В этом состоит групповой эффект нелинейного взаимодействия мод, который усиливается при стремлении модуля вещественных частей корней характеристического уравнения друг к другу и их комбинаций к нулю. Достоинством алгоритма (4.6) является отсутствие необходимости вычислять собственные числа матрицы динамики. Это является одновременно и его недостатком, поскольку коэффициенты характеристического уравнения в большинстве случаев не имеют физического смысла, так как не связаны с конкретными физическими устройствами. Достоинством алгоритма (4.7) является то, что диагональные элементы матриц грамианов выражают энергию измеряемой физической переменной базовой системы y_i. Вместе с тем значения метрики обратно пропорциональны произведениям модулей разности всех собственных чисел, которые по норме близки друг другу. В этом смысле метрика (4.7) оценивает энергию совместного взаимодействия в группе слабоустойчивых колебательных мод. Критерий Рауса–Гурвица не обладает таким свойством. Кроме того, переменные y_i зависят от собственных чисел s_k каждое из которых связано с конкретным физическим устройством и имеет его метку. С их помощью можно вычислять квадраты H_2- и H_∞-норм передаточных функций в задачах оптимального синтеза робастных систем управления по критерию энергоэффективности. Для замкнутых систем управления применяются формулы (4.1), в которых $N^{-1}(s)$ является характеристическим полиномом замкнутой системы. Энергетические метрики позволяют также оценивать степень достижимости, объем эллипсоидов притяжения, среднюю минимальную энергию и индексы центральности динамических сетей [7, 10–12, 15]. Совместное использование алгоритмов (4.6), (4.7) в рассматриваемом гибридном критерии Рауса–Гурвица обеспечивает более глубокий анализ апериодической и колебательной устойчивости системы с учетом кратности собственных чисел матрицы динамики системы.

5. Заключение

Метод спектральных и сингулярных разложений грамианов является развитием частотных методов анализа и синтеза систем управления. Основным инструментом для построения разложений являются теоремы преобразования Лапласа для спектральных и сингулярных разложений решений дифференциальных уравнений Ляпунова и Сильвестра, разложение резольвенты матрицы динамики и матрицы грамиана в ряд Фаддеева–Леверье и рекуррентные алгоритмы вычисления матриц Фаддеева. Эти разложения для канонических форм управляемости и наблюдаемости имеют явную физическую интерпретацию в виде мер энергии квадратичных форм, образованных переменными состояния базовой системы. В работе показано, что прямой и обратные грамианы управляемости можно вычислять с помощью одной общей эффективной рекуррентной процедуры. В статье предложен новый способ вычисления изображений по Лапласу конечных грамианов для простых и кратных собственных чисел на основе численно устойчивых рекуррентных алгоритмов для разложения изображения матричной резольвенты в ряд Фаддеева–Леверье [22, 23]. Использование разработанных спектральных разложений квадрата H_2-нормы передаточных функций базовых систем позволяет упростить построение математических моделей низкого порядка в методе сбалансированного отсечения. Применение преобразований уравнений системы в канонические формы дает при вычислении спектральных разложений прямых и обратных грамианов следующие преимущества:

1. Матрицы грамианов вычисляют как решения дифференциальных уравнений Ляпунова в частотной и временной области, что позволяет одновременно вычислять решения алгебраических уравнений Ляпунова, как конечные, так и бесконечные грамианы, как прямые, так и обратные грамианы для непрерывных динамических систем, задаваемых уравнениями состояния в канонических формах: Жордана, модальной, управляемости, наблюдаемости.

2. Грамианы в канонических формах управляемости и наблюдаемости в форме матриц Сяо являются инвариантными при преобразовании подобия. При этом для их получения достаточно вычислить только n диагональных элементов матриц грамианов вместо n^2 элементов.

3. Энергетические метрики устойчивости базовых систем J_1 и J_2 позволяют вычислять степень устойчивости системы не только для различных, но и для кратных корней характеристического уравнения. Наличие кратных корней существенно усиливает угрозу потери устойчивости. Спектральные разложения энергетических метрик устойчивости базовых систем для динамических систем высокой размерности с кратным спектром матриц динамики позволяют избежать использования матриц Жордана.

4. Спектральные разложения грамианов управляемости устойчивой базовой системы в форме Коши зависят от вещественных частей простых и кратных собственных чисел матрицы динамики, от их плотности распределения на вещественной оси [25].

5. Рекуррентные алгоритмы спектральных разложений грамианов содержат только матричные операции сложения и умножения и не содержат операции инвертирования и возведения в степень. Они содержат только операции сложения, умножения, возведения в степень для скалярных функций, и не содержат операции деления на функции равные нулю. Вычеты передаточных функций базовых систем, которые используются при вычислении энергетических критериев, также можно вычислить с помощью ре-

куррентных алгоритмов. Все это является следствием разложения резольвент матриц динамики исходной устойчивой и дуальной антиустойчивой систем в ряд Фаддеева–Леверье и применения классических частотных методов анализа и синтеза динамических систем, что делает подобный подход новым эффективным инструментом для вычислений энергетических критериев устойчивости.

Определенным недостатком новых методов и алгоритмов, развиваемых в данной работе, являются проблемы их вычислительной реализации для систем высокой размерности. Однако именно применение рекуррентных версий разработанных алгоритмов вычисления грамианов и энергетических метрик делает эффективным их применение для динамических систем высокой размерности [26]. В статье получены результаты исследований, которые могут оказаться полезными в проектировании цифровых двойников, методов оптимизации затрат энергии в системах управления, анализа энергетических метрик устойчивости и достижимости, мониторинга состояния на основе анализа аномалий энергетического баланса, разработке энергетических метрик систем, задаваемых уравнениями состояния для динамических сетей в виде графов, в задачах вибрационного анализа технических объектов [13, 28].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Antoulas A.C.* Approximation of Large-Scale Dynamical Systems. SIAM. Philadephia, 2005.
2. *Benner P., Damm T.* Lyapunov equations, Energy Functionals and Model Order Reduction of Bilinear and Stochastic Systems // SIAM J. Control Optim. 2011. V. 49. P. 686–711.
3. *Behr M., Benner P., Damm T.* Solution formulas for differential Sylvester and Lyapunov equations // Calcolo. 2019. V. 56. No. 51. https://doi.org/10.1007/s10092-019-0348-x
4. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНАНД, 2019. 504 с.
5. *Hauksdottir A., Sigurdsson S., Adalgeirsson S., Porgilsson H., Herjolfsson G.* Closed form solutions of the Sylvester and the Lyapunov equations – closed form Gramians // 2008 American Control Conference, Seattle, WA, USA, 2008. P. 2585–2590. https://doi.org/10.1109/ACC.2008.4586881
6. *Hauksdottir A., Sigurdsson S.* The continuous closed form controllability Gramian and its inverse // 2009 American Control Conference Hyatt Regency Riverfront, St. Louis, MO, USA, 2009. P. 5345–5350. https://doi.org/10.1109/ACC.2009.5160123
7. *Liu Y., Slotine J., Barabasi A.* Controllability of complex networks // Nature. 2011. V. 473. No. 7346. P. 167–173. https://doi.org/10.1038/nature10011
8. *Xiao C.S., Feng Z.M., Shan X.M.* On the Solution of the Continuous-Time Lyapunov Matrix Equation in Two Canonical Forms // IEE Proc. 1992. V. 139. No. 3. P. 286–290. https://doi.org/10.1049/ip-d.1992.0038

9. *Sreeram V., Agathoklis P.* Solution of Lyapunov equation with system matrix in companion form // IEE Proc. D. Control. Theory Appl. 1991. V. 138. No. 6. P. 529–534. https://doi.org/10.1049/ip-d.1991.0074
10. *Pasqualetti F., Zampieri S., Bullo F.* Controllability metrics, limitations and algorithms for complex networks // IEEE Transactions on Control of Network Systems. 2014. V. 1. No. 1. P. 40–52. https://doi.org/10.1109/ACC.2014.6858621
11. *Lindmark G., Altafini C.* Minimum energy control for complex networks // Scientific Reports. 2018. V. 8. No. 3188. P. 1–14. https://doi.org/10.1038/s41598-018-21398-7
12. *Бирюков Д.С., Слита О.В., Ушаков А.В.* Оценка затрат на управление в задаче обеспечения желаемой структуры мод и их робастности // Изв. вузов. Приборостроение. 2009. Т. 52. № 11. С. 38–43.
13. *Ядыкин И.Б.* Спектральные разложения обратных матриц грамианов и энергетических метрик непрерывных динамических систем // АиТ. 2024. № 10. С. 80–107.
14. *Ядыкин И.Б., Галяев А.А.* О методах вычисления грамианов и использовании их в анализе линейных динамических систем // АиТ. 2013. № 2. С. 53–74.
15. *Zhao S., Pasqualetti F.* Networks with diagonal controllability Gramian: Analysis, graphical conditions, and design algorithms // Automatica. 2019. V. 102. P. 10–18.
16. *Iskakov A., Kutyakov E., Kataev D.* Locating the source of forced oscillations on the basis of Lyapunov modal analysis // IFAC-PapersOnLine. Rabat: Elsevier, 2024. V. 58. No. 13. P. 685–690.
17. *Краснова С.А., Уткин В.А.* Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем. М.: Наука, 2006. 272 с.
18. *Bakhtadze N., Yadykin I.,* Discrete Predictive Models for Stability Analysis of Power Supply Systems // Mathematics. 2020. V. 8. No. 11. P. 1943. https://doi.org/10.3390/math8111943
19. *Ядыкин И.Б., Галяев И.А.* Спектральные разложения грамианов и энергетических метрик непрерывных неустойчивых систем управления // АиТ. 2023. № 10. С. 132–149.
20. *Ядыкин И.Б., Галяев И.А.* Структурные спектральные методы решения непрерывных уравнений Ляпунова // АиТ. 2023. № 12. С. 18–37.
21. *Fiedler M.* Notes on Hilbert and Cauchy matrices // Linear algebra and its Applications. 2010. V. 432. P. 351–356.
22. *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. Учебник-М.: Изд-во Лань, 2009. 726 с.
23. *Hanson B., Peeters R.* A Faddeev Sequence Method for solving Lyapunov and Sylvester Equations // Linear Algebra and its Applications. 1996. V. 241–243. P. 401–430.
24. *Гарднер М.Ф., Бэрнс Дж. Л.* Переходные процессы в линейных системах с сосредоточенными параметрами. М.: Физматлит, 1961.
Gardner M.F., Barns J.L. Transients in linear systems studied by the Laplace transformation / V. 1. Lumped-constant systems. New York, London. Wiley, Chapman and Hall, 1942.
25. *Фуртат И.Б.* Плотностные системы. Анализ и управление // АиТ. 2023. № 11. С. 55–76.

26. *Bekhiti B., Fragulis G., Maraslidis G., et al.* A Novel Recursive Algorithm for Inverting Matrix Polynomials via a Generalized Leverrier-Faddeev Scheme: Application to FEM Modeling of Wing Vibrations in a 4th Generation Fighter Aircraft // Mathematics. 2025. V. 13. No. 2101. https://doi.org/10.3390/math13132101

27. *Мироновский Л.А., Соловьева Т.Н.* Анализ и синтез модально-сбалансированных систем // АиТ. 2013. № 4. С. 59–79.

28. *Yarar E., Erturk A.T., Acikgez C., Karabay S.* Experimental and numerical vibration analysis of surface mechanical attrition treatment // Journal of Vibration and Control. 2022. V. 29. No. 23–24. P. 5737–5749.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галяевым.

Поступила в редакцию 08.07.2025

После доработки 14.10.2025

Принята к публикации 20.11.2025