

© 2026 г. С.А. КОЧЕТКОВ, д-р техн. наук (kos@ipu.ru),
В.А. УТКИН, д-р техн. наук (vicutkin@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

РОБАСТНЫЙ ПОДХОД К ДИНАМИЧЕСКОЙ КОМПЕНСАЦИИ ВОЗМУЩЕНИЙ¹

В данной работе классическая постановка задачи подавления влияния внешних возмущений в линейных системах распространяется на случай нелинейных систем в робастной постановке на основе использования метода динамической компенсации. Робастные свойства замкнутых систем обеспечиваются за счет использования глубоких обратных связей и разрывных управляющих воздействий. В задачах управления по выходным переменным предложено рассматривать часть модели объекта управления в качестве генератора модельных неопределенностей, причем в этом случае, в отличие от генератора возмущений, появляется возможность влиять на динамику модельного генератора. В качестве примера использования предлагаемого подхода решена задача управления по высоте беспилотным летательным аппаратом с пружинным подвесом груза.

Ключевые слова: динамический компенсатор, скользящие режимы, внешние возмущения, декомпозиция.

DOI: 10.7868/S2413977726040044

1. Введение

В теории управления широко используется метод динамической компенсации возмущений в следующей постановке задачи. Если существует возможность описать поведение внешних возмущений некоторой известной математической моделью, то инвариантность можно обеспечить на основе метода динамической компенсации [1–3] или с использованием теории асимптотических наблюдателей [4–7]. При этом с помощью асимптотических наблюдателей вычисляются оценки неизвестных возмущений, которые затем используются при формировании обратной связи, а с помощью динамических компенсаторов синтезируется динамическая обратная связь в соответствии с моделью возмущений, за счет которой по каналам управления осуществляется компенсация влияния возмущений на выходные переменные. Синтез комбинированного управления при применении обоих подходов осуществляется на основе расширенной модели исходного объекта за счет введения динамической подсистемы, соответствующей пространству возмущений.

Одними из недостатков метода динамической компенсации являются, во-первых, чрезмерное расширение динамического порядка модели объекта

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 25-11-00067, <https://rscf.ru/project/25-11-00067/>.

управления за счет включения генератора задания и, во-вторых, чувствительность замкнутой системы к параметрическим неопределенностям как в собственно модели объекта управления, так и в генераторе возмущений. Последнее обстоятельство делает использование метода динамической компенсации неэффективным на практике.

Для решения проблемы динамической компенсации возмущений при высокой размерности математических моделей объектов управления эффективными оказываются декомпозиционные методы на основе поэтапного синтеза (back-stepping control), методов децентрализованного управления, а также блочного подхода, с помощью которых решение исходной задачи расщепляется на независимые этапы, на каждом из которых осуществляется синтез локальной обратной связи [8] в подсистеме пониженной размерности. С другой стороны, методы систем с разрывными управлениями на скользящих режимах [9] и с глубокими обратными связями [9, 10], ставшими уже классическими при синтезе робастных и инвариантных систем, позволяют обеспечить робастность замкнутых систем к параметрическим неопределенностям.

В разделе 2 приводится известный результат метода динамической компенсации возмущений применительно к линейным системам с использованием метода разделения движений, позволяющий разбить задачу синтеза на независимые подзадачи меньшей размерности при синтезе собственно объекта управления и независимого выбора компенсатора возмущений. В рамках описанных выше подходов в разделе 3 дается расширение задачи динамической компенсации возмущений на нелинейные системы. В разделе 4 рассмотрена задача динамической компенсации в случае параметрически неопределенного генератора возмущений.

В разделе 5 рассмотрена задача управления по горизонтальному положению беспилотного летательного аппарата (БПЛА), на котором осуществляется транспортировка полезного груза на тросовом подвесе. Особенность постановки задачи в данном примере состоит в том, что в качестве генератора возмущающего воздействия рассматривается модель поведения груза на невесомой нити, которая, вообще говоря, является составной частью модели объекта управления. В отличие от классического генератора возмущений, рассматриваемая в статье модель подвеса груза на невесомой нити является неавтономной, но при этом управляемой подсистемой. За счет обратной связи удастся влиять на динамику поведения груза и компенсацию внешних возмущений. По мнению авторов предложенный подход имеет большую перспективу в теории управления.

2. Предварительные сведения. Формулировка проблематики.

Ставится задача подавления влияния внешних возмущений по отношению к вектору выходных переменных линейной стационарной системы, описываемой уравнениями

$$(1) \quad \dot{x} = Ax + Bu + Q\eta, \quad y = Dx,$$

при условии, что вектор внешних возмущений η не измеряется и его поведение может быть описано с помощью следующей динамической модели:

$$(2) \quad \dot{\omega} = W\omega, \quad \eta = H\omega, \quad \omega \in R^r, \quad \dim W = (r \times r), \quad \dim H = (l \times r),$$

где $x \in R^n$ – вектор состояния системы, $u \in R^m$ – вектор управляющих воздействий, $y \in R^p$ – вектор выходных переменных, $\eta \in R^l$ – вектор внешних возмущений, A, B, Q, D, W, H – постоянные матрицы соответствующих размерностей.

Для объекта (1)–(2) делаются допущения, что выполняется так называемое условие согласования, при котором каналы действия вектора возмущения и управления совпадают:

$$\text{Im}Q \subset \text{Im}B \Rightarrow \exists \Lambda : Q = B\Lambda, \quad \dim \Lambda = (m \times l).$$

При этом уравнения (1) могут быть переписаны в виде

$$(3) \quad \dot{x} = Ax + B(u + \Lambda\eta), \quad y = Dx.$$

Следует отметить, что для объекта (3) выполняются условия полного подавления возмущений по отношению ко всему вектору состояния. В [11] предложен декомпозиционный подход к решению задачи обеспечения инвариантности в системе (2), (3), позволяющий разбить задачу синтеза размерности $n + r$ на независимо решаемые подзадачи размерности $n - m, m, r$.

С помощью неособой замены переменных система (2)–(3) приводится к регулярной форме управляемости [12]:

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u + Q_2\omega, \\ \dot{\omega} &= W\omega, \end{aligned}$$

где $x_1 \in R^{n-m}, x_2 \in R^m, \text{rank}B_2 = m$.

Сформируем динамический компенсатор в виде

$$(5) \quad \dot{z} = Wz - v, \quad v, z \in R^r$$

и, выбирая управления в виде

$$(6) \quad u = -B_2^{-1}Q_2z + \bar{u},$$

перепишем выражения (4)–(6) относительно переменных $x_1, x_2, \varepsilon = \omega - z$:

$$(7) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2\bar{u} + Q_2\varepsilon, \\ \dot{\varepsilon} &= W\varepsilon + v. \end{aligned}$$

Рассмотрим преобразование координат $\bar{x}_2 = x_2 + F_1 x_1$ и $\bar{\varepsilon} = \varepsilon + Lx_2$. Тогда уравнение (7) примет вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (A_{11} - A_{12}F)x_1 + \bar{x}_2, \\ \dot{\bar{x}}_2 &= \bar{A}_{21}x_1 + \bar{A}_{22}\bar{x}_2 + B_2\bar{u} + Q_2\bar{\varepsilon}, \\ \dot{\bar{\varepsilon}} &= (W + LQ_2)\bar{\varepsilon} + G_{11}x_1 + G_{12}\bar{x}_2 + LB_2\bar{u} + v.\end{aligned}$$

Выбирая управления динамического компенсатора и объекта управления как

$$(8) \quad \begin{aligned}v &= -G_{11}x_1 - G_{12}\bar{x}_2 - LB_2\bar{u}, \\ \bar{u} &= -B_2^{-1}(\bar{A}_{21}x_1 + (\bar{A}_{22} - Q_2L)\bar{x}_2 - F_2\bar{x}_2),\end{aligned}$$

запишем уравнения замкнутой системы

$$(9) \quad \begin{aligned}\dot{x}_1 &= (A_{11}x_1 - A_{12}F_1)x_1 + \bar{x}_2, \\ \dot{\bar{x}}_2 &= -F_2\bar{x}_2 + Q_2\bar{\varepsilon}, \\ \dot{\bar{\varepsilon}} &= (W + LQ_2)\bar{\varepsilon}.\end{aligned}$$

Полагая, что исходная система управляема и наблюдаема, за счет выбора матриц L , F_1 , F_2 в системе (9) можно назначить желаемый спектр. Решение данной проблемы может быть разбито на независимо решаемые подзадачи меньшей размерности $n - m$, m , r соответственно [11].

3. Метод динамической компенсации в нелинейных системах

Рассмотрим нелинейную систему

$$(10) \quad \begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + B(x)u + Q(x)\eta, \quad \dot{\omega} = W\omega, \quad \eta = H\omega, \\ x &\in R^n, \quad u \in R^m, \quad \eta \in R^r, \quad f(0) = 0.\end{aligned}$$

В предположении, что условия согласования выполняются

$$\text{Im}Q(x) \subset \text{Im}B(x), \forall x \Rightarrow \exists \Lambda(x) : Q(x) = B(x)\Lambda(x),$$

представим (10) в регулярной форме управляемости [12]

$$(11) \quad \begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + B_2(x_1, x_2)[u + \Lambda_2(x_1, x_2)\omega],\end{aligned}$$

где $x_1 \in R^{n-m}$, $x_2 \in R^m$, $u \in R^m$, $\det B_2 \neq 0$.

Следуя блочному подходу [8], приведем пошаговую процедуру решения задачи стабилизации системы (11).

1 шаг. Введем замену переменных $\bar{x}_2 = x_2 - \varphi(x_1)$ таким образом, чтобы в преобразованной системе

$$(12) \quad \begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1[x_1, \bar{x}_2 + \varphi(x_1)], \\ \dot{\bar{x}}_2 &= f_2(\cdot) + B_2(\cdot)[u + \Lambda_2(\cdot)\omega] - \frac{\partial \varphi(x_1)}{\partial x_1} \dot{x}_1\end{aligned}$$

в первой подсистеме выбором $\varphi(x_1)$ обеспечивалась ее стабилизация $x_1 \rightarrow 0$ в предположении $\bar{x}_2 = 0$.

2 шаг. Решаем задачу стабилизации второй подсистемы (11) выбором управления в виде

$$(13) \quad B_2(\cdot)u = F_2\bar{x}_2 - \Lambda_2(\cdot)z_2 - f_2(\cdot) - \frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_1}\dot{x}_1,$$

где

$$(14) \quad \dot{z}_2 = Wz_2 + v_2, \quad v_2, z_2 \in R^r.$$

Вторая подсистема (12), замкнутая обратной связью (13) с учетом (14) в переменных \bar{x}_2 , $\varepsilon_2 = \omega - z_2 + L_2\bar{x}_2$ примет вид

$$(15) \quad \begin{aligned} \dot{\bar{x}}_2 &= F_2\bar{x}_2 + B_2(\cdot)[\Lambda_2(\cdot)\varepsilon_2], \\ \dot{\varepsilon}_2 &= W\varepsilon_2 + L_2F_2\bar{x}_2 + B_2(\cdot)[\Lambda_2(\cdot)\varepsilon_2] + v_2. \end{aligned}$$

3 шаг. Замыкая вторую подсистему (15) обратной связью $v_2 = -L_2F_2\bar{x}_2$ имеем

$$(16) \quad \dot{\varepsilon}_2 = [W + L_{20}\Lambda_2(\cdot)]\varepsilon_2$$

и выбором матрицы L_{20} решаем задачу стабилизации системы (16).

Таким образом, как и в линейном случае, задача стабилизации нелинейной системы (10) может быть решена на основе выбора локальных обратных связей в подсистемах меньшей размерности.

С помощью применения теории систем с разделяемыми движениями на основе использования глубоких обратных связей и/или скользящих режимов также возможно осуществить декомпозицию решения задачи стабилизации объекта (10), при этом задача стабилизации подсистемы (17) решается с использованием методов теории модального управления.

Рассмотрим решение задачи стабилизации объекта (11) на основе теории скользящих режимов [9].

Во второй подсистеме (12) выберем управляющее воздействие в форме

$$u = v - \Lambda_2(\cdot)\bar{z}_2, \quad v = -M(x)\text{sign}\bar{x}_2,$$

где переменная z описывается системой дифференциальных уравнений

$$(17) \quad \dot{\bar{z}}_2 = W\bar{z}_2 + Lv, \quad \bar{z}_2 \in R^r.$$

Для координат \bar{x}_2 , $\bar{\varepsilon}_2 = \omega - \bar{z}_2 + L_2\bar{x}_2$ из системы (12), принимая во внимание (17), могут быть получены соотношения

$$(18) \quad \begin{aligned} \dot{\bar{x}}_2 &= f_2(\cdot) + B_2(\cdot)[u + \Lambda_2(\cdot)\bar{\varepsilon}_2] - \frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_1}\dot{x}_1, \\ \dot{\bar{\varepsilon}}_2 &= W\bar{\varepsilon}_2 + Lv. \end{aligned}$$

При возникновении скользящего режима вдоль многообразия

$$\bar{x}_2 = x_2 - \varphi(x_1) = 0$$

выбором стабилизирующей первое уравнение (12) вектор-функции $\varphi(x_1)$ решается задача стабилизации первой подсистемы (12).

В скользящем режиме $x_1 = x_2 = 0$ с помощью метода эквивалентного управления может быть получено равенство

$$v_{eq} = -\Lambda(0, 0)\bar{\varepsilon}_2, \quad \bar{\varepsilon}_2 = \omega - \bar{z}_2.$$

При условии, что пара матриц $(\Lambda(0), W)$ наблюдаема, за счет назначения коэффициентов матрицы L обеспечивается спектр с отрицательными действительными частями собственных чисел для переменной $\bar{\varepsilon}_2$ из (18):

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_2 = (W + L\Lambda(0))\bar{\varepsilon}_2.$$

4. Генератор возмущений с неизвестными параметрами

В данном разделе рассматривается один из вариантов объекта (1) с единичной размерностью вектора управления. При этом полагается, что поведение возмущений описывается линейным нестационарным динамическим уравнением и изменения параметров модели принадлежат некоторому интервалу:

$$(19) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2(u + \eta), \end{aligned}$$

где $x_1 \in R^{n-1}$, $x_2 \in R$, $u, \eta \in R^1$ и возмущение порождается динамической моделью вида

$$(20) \quad \dot{\omega} = W\omega, \quad \eta = q^T\omega, \quad \omega \in R^r, \quad \dim W = (r \times r).$$

Параметры матрицы W полагаются неизвестными, но ограниченными по модулю $|w_{ij}| \leq W_{ij} = \text{const}$.

В предыдущих разделах было указано что из управляемости пары (A_{11}, A_{12}) следует управляемость исходной системы. С помощью неособой замены переменных $\bar{x}_1 = x_2 - f_1^T x_1$ уравнения системы (20) могут быть переписаны в форме

$$(21) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= (A_{11} + a_{12}f_1^T)x_1 + a_{12}\bar{x}_1, \\ \dot{\bar{x}}_1 &= \bar{a}_{21}^T x_1 + \bar{a}_{22}\bar{x}_1 + b_2 u + q^T \omega, \end{aligned}$$

за счет выбора вектора f_1^T назначаются собственные числа матрицы $A_{11} + a_{12}f_1^T$, при этом проблема стабилизации объекта (21) сводится к обеспечению устойчивости второй подсистемы.

Поскольку параметры генератора возмущений (20) неизвестны, постольку в решении поставленной задачи нельзя выбрать динамический компенсатор в виде (5). Без ограничения общности в предположении о наблюдаемости пары (q^T, W) для поставленной задачи преобразуем модель генератора возмущений (20) к канонической форме вида

$$(22) \quad \dot{\omega}_i = \omega_{i+1}, \quad i = \overline{1, r-1}, \quad \dot{\omega}_r = \sum_{i=1}^r g_i \omega_i, \quad |g_i| \leq G_i = \text{const}, \quad \omega_1 = q^T \omega.$$

Вторая подсистема (21) при управлении $b_2 u = -\bar{a}_{21}^T x_1 - \bar{a}_{22} \bar{x}_1 + \bar{u}$ может быть в форме

$$(23) \quad \dot{\bar{x}}_1 = \bar{u} + \omega_1.$$

Следовательно, исходная проблема трансформировалась к задаче динамической компенсации возмущений в объекте (23), в котором внешние возмущения описываются динамической моделью (22).

Данная задача может быть решена за счет выбора $\bar{u} = -z_1$, где z_1 есть выход динамической системы

$$(24) \quad \dot{z}_i = z_{i+1}, \quad i = \overline{1, r-1}, \quad \dot{z}_r = \sum_{i=1}^r d_i z_i + v, \quad d_i = \text{const},$$

где v – новое управление.

Вводя обозначение $e_i = \omega_i - z_i$, $i = \overline{1, r}$, запишем систему (23) в виде

$$(25) \quad \dot{\bar{x}}_1 = e_1.$$

Дифференцируя переменную (25) r раз, получим расширенную систему в канонической форме [13]

$$(26) \quad \dot{\bar{x}}_i = \bar{x}_{i+1}, \quad i = \overline{1, r-1}, \quad \dot{\bar{x}}_r = \sum_{i=1}^r [g_i e_i + (g_i - d_i) z_i] + v,$$

где $\bar{x}_{i+1} = e_i$, $i = \overline{1, r-1}$.

При выборе достаточно большой амплитуды разрывных управляющих воздействий [9] с учетом ограничений $|g_i| \leq k_i$ система (26) может быть стабилизирована следующим управлением:

$$(27) \quad v = -M \text{sign}(s),$$

за счет которого организуется скользящий режим на многообразии

$$s = \bar{x}_r + \sum_{i=1}^{r-1} C_i \bar{x}_i = 0,$$

с движением по нему, описываемым с помощью метода эквивалентного управления

$$\dot{\bar{x}}_i = \bar{x}_{i-1}, \quad i = \overline{1, r-1}, \quad \dot{\bar{x}}_r = \sum_{i=1}^r C_i \bar{x}_i.$$

Если C_i выбраны как коэффициенты гурвицева полинома, то движение в скользящем режиме обеспечивает асимптотическую сходимость системы.

Предложенная схема построения инвариантных систем за счет использования канонического представления и методов теории скользящих режимов позволяет обеспечить свойства грубости систем как к параметрам модели объекта управления, так и к описанию модели возмущающих воздействий. Отметим, что в модели генератора возмущений (22) допускается предположение о переменных параметрах модели, ограниченных по модулю $|g_i(t)| \leq G_i = \text{const}$.

Для получения оценок вектора состояния системы (26), необходимых для формирования управления (27), требуется построение наблюдателя состояния. Для порядка r приведем процедуру синтеза наблюдателя-дифференциатора переменной (25).

1. Введем фильтр с устойчивыми собственными движениями

$$(28) \quad \begin{aligned} \dot{\xi}_i(t) &= \xi_{i+1}(t) + \bar{x}_1, \quad i = \overline{1, r-1}, \\ \dot{\xi}_r(t) &= c^T \xi(t) + \bar{x}_1, \end{aligned}$$

где $\xi^T(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_r(t)) \in R^r$, $c \in R^r$ – вектор коэффициентов гурвицевого полинома.

2. Представим систему (28) в каноническом виде

$$(29) \quad \begin{aligned} \dot{\bar{\xi}}_i(t) &= \bar{\xi}_{i+1}(t), \quad i = \overline{1, r-1}, \\ \dot{\bar{\xi}}_r(t) &= c^T \bar{\xi}(t) + \bar{\xi}_{r+1}(t), \end{aligned}$$

где

$$(30) \quad \begin{aligned} \bar{\xi}_1(t) &= \xi_1(t), \\ \bar{\xi}_2(t) &= \xi_2(t) + \bar{x}_1, \\ \bar{\xi}_3(t) &= \xi_3(t) + \bar{x}_1 + \bar{x}_2, \\ &\dots \\ \bar{\xi}_r(t) &= \xi_r(t) + \sum_{i=1}^{r-1} \bar{x}_i, \\ \bar{\xi}_{r+1}(t) &= \sum_{i=1}^r \bar{x}_i. \end{aligned}$$

3. Построим наблюдатель вектора состояния $\bar{\xi}^T(t) = (\bar{\xi}_1(t), \dots, \bar{\xi}_3(t))$ и сигнала $\bar{\xi}_{r+1}(t)$ применительно к системе (29):

$$(31) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{\xi}}_i(t) &= \hat{\xi}_{i+1}(t) + \nu_i, \quad i = \overline{1, r-1}, \\ \dot{\hat{\xi}}_r(t) &= c^T \hat{\xi}(t) + \nu_r, \quad \hat{\xi}^T(t) = (\hat{\xi}_1(t), \dots, \hat{\xi}_r(t)). \end{aligned}$$

4. Запишем уравнения (29) и (31) в невязках $\bar{\varepsilon}_i(t) = \bar{\xi}_i(t) - \hat{\xi}_i(t)$:

$$(32) \quad \begin{aligned} \dot{\bar{\varepsilon}}_i(t) &= \bar{\varepsilon}_{i+1}(t) - \nu_i, \quad i = \overline{1, r-1}, \\ \dot{\bar{\varepsilon}}_r(t) &= c^T \bar{\varepsilon}(t) + \bar{\xi}_{r+1}(t) - \nu_r, \end{aligned}$$

где $\bar{\varepsilon}^T(t) = (\bar{\varepsilon}_1(t), \dots, \bar{\varepsilon}_r(t))$.

В работах [14–16] показано, что выбор корректирующих воздействий в наблюдателе (32) в классе линейных функций с насыщением в соответствии с иерархией

$$\nu_1 = \text{sat}_{L_1}(l_1 \bar{\varepsilon}_1(t)), \quad \nu_i = \text{sat}_{L_i}(l_i \nu_{i-1}), \quad i = \overline{2, r}, \quad L_1, L_i, l_i = \text{const}$$

позволяет решить задачу стабилизации системы (32) с заданной точностью.

Определение. Для $M = \text{const} > 0$ и произвольной функции времени $s(t)$ по определению

$$\text{sat}_M(s) = \min(|s|, M)\text{sign}(s(t)).$$

Действительно, в предположениях

$$\begin{aligned} |\bar{\varepsilon}_i(t)| &\leq E_i, & |\dot{\bar{\varepsilon}}_i(t)| &\leq \bar{E}_i; & E_i, \bar{E}_i &= \text{const}, \\ |\bar{\xi}_{r+1}(t)| &\leq E_{r+1} = \text{const} \end{aligned}$$

опишем схематично процедуру стабилизации системы (32).

1. В первой подсистеме

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_1(t) = \bar{\varepsilon}_2(t) - \text{sat}_{L_1}(l_1\bar{\varepsilon}_1(t)),$$

при выборе амплитуды

$$L_1 > |\bar{\varepsilon}_2(t)|$$

переменная $\bar{\varepsilon}_1(t)$ за конечное время оказывается в линейной зоне и имеет место равенство:

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_1(t) = \bar{\varepsilon}_2(t) - l_1\bar{\varepsilon}_1(t).$$

При этом выполняются соотношения $|\bar{\varepsilon}_1(t)| \leq E_2/l_1$, $|\bar{\varepsilon}_2(t) - l_1\bar{\varepsilon}_1(t)| \leq \bar{E}_2/l_1$ и с увеличением коэффициента l_1 для переменной $\bar{\varepsilon}_1(t) \approx 0$ может быть обеспечена заданная степень стабилизации. В итоге имеем оценку с заданной точностью переменной $\bar{\varepsilon}_2(t) \approx l_1\bar{\varepsilon}_1(t)$.

Опишем первый пункт логической схемой:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\varepsilon}}_1(t) = \bar{\varepsilon}_2(t) - \text{sat}_{L_1}(l_1\bar{\varepsilon}_1(t)), \quad L_1 > |\bar{\varepsilon}_2(t)| &\Rightarrow \dot{\bar{\varepsilon}}_1(t) = \bar{\varepsilon}_2(t) - l_1\bar{\varepsilon}_1(t) \Rightarrow \\ \Rightarrow |\bar{\varepsilon}_1(t)| \leq \frac{E_2}{l_1}, \quad |\bar{\varepsilon}_2(t) - l_1\bar{\varepsilon}_1(t)| \leq \frac{\bar{E}_2}{l_1} &\Rightarrow l_1 \rightarrow \infty : \\ \bar{\varepsilon}_i(t) \approx 0, \quad \bar{\varepsilon}_{i+1}(t) \approx l_i\bar{\varepsilon}_i(t). \end{aligned}$$

2. В дальнейшем на последующих этапах $i = \overline{2, r-1}$ синтезируем корректирующие воздействия по следующей логической схеме:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\varepsilon}}_i(t) = \bar{\varepsilon}_{i+1}(t) - \text{sat}_{L_i}(l_i\bar{\varepsilon}_i(t)), \quad L_i > |\bar{\varepsilon}_{i+1}(t)| &\Rightarrow \dot{\bar{\varepsilon}}_i(t) = \bar{\varepsilon}_{i+1}(t) - l_i\bar{\varepsilon}_i(t) \Rightarrow \\ \Rightarrow |\bar{\varepsilon}_i(t)| \leq \frac{E_{i+1}}{l_i}, \quad |\bar{\varepsilon}_{i+1}(t) - l_i\bar{\varepsilon}_i(t)| \leq \frac{\bar{E}_{i+1}}{l_i} &\Rightarrow l_i \rightarrow \infty : \\ \bar{\varepsilon}_i(t) \approx 0, \quad \bar{\varepsilon}_{i+1}(t) \approx l_i\bar{\varepsilon}_i(t). \end{aligned}$$

3. Рассматриваем последнюю подсистему (32)

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_r(t) = c^T\bar{\varepsilon}(t) + \bar{\xi}_{r+1}(t) - \text{sat}_{L_r}(l_r\bar{\varepsilon}_r(t))$$

и с учетом $\bar{\varepsilon}_i(t) \approx 0$ выбором $L_r > |\bar{\xi}_{r+1}(t)|$ получим соотношение

$$\bar{\xi}_{r+1}(t) \approx l_r\bar{\varepsilon}_r(t).$$

Переменные \bar{x}_i , $i = \overline{1, r}$, соответствующие производным от сигнала \bar{x}_1 , могут быть вычислены с использованием оценок $\bar{\xi}(t)$ и сигнала $\bar{\xi}_{r+1}(t)$ за счет последовательного решения уравнений (30) сверху вниз.

5. Пример использования разработанных алгоритмов к управлению БПЛА

В данном разделе рассматривается прикладная задача управления горизонтальным движением беспилотного летательного аппарата, транспортирующего подвешенный на невесомом тросе груз (см. рис. 1).

Динамические уравнения, описывающие поведение указанного объекта, могут быть представлены в виде

$$(33) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= -\frac{J_{\text{eq}}\alpha_v}{\Delta}v - \frac{m^2l^2g}{\Delta}\varphi - \frac{ml\alpha_\omega}{\Delta}\omega + \frac{J_{\text{eq}}}{\Delta}F, \\ \dot{\varphi} &= \omega, \\ \dot{\omega} &= -\frac{mglM_{\text{eq}}}{\Delta}\varphi - \frac{M_{\text{eq}}\alpha_\omega}{\Delta}\omega - \frac{ml\alpha_v}{\Delta}v + \frac{ml}{\Delta}F, \end{aligned}$$

где x – горизонтальная координата центра масс, v – горизонтальная скорость центра масс летательного аппарата, φ – угловое отклонение троса с грузом, ω – угловая скорость троса с грузом, $J_{\text{eq}} = J + ml^2$, J – момент инерции подвешенного груза при вращении его относительно его центра тяжести, $M_{\text{eq}} = m + M$, m , M – массы подвешенного тела и летательного аппарата соответственно, l – расстояние от точки подвеса груза до его центра тяжести, $\Delta = M_{\text{eq}}J_{\text{eq}} - m^2l^2$, AB – линия нулевого отклонения троса с грузом, OA – линия, вдоль которой осуществляется движение БПЛА с грузом (линия горизонтали), α_M – коэффициент вязкого трения среды для летательного ап-

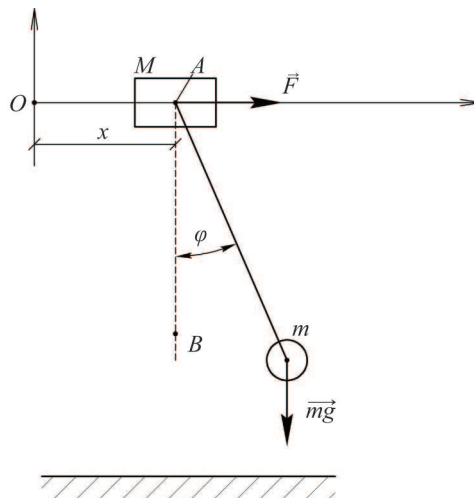


Рис. 1. К уравнениям движения БПЛА.

парата, α_m – коэффициент вязкого трения среды для подвешенного груза, α_r – коэффициент, учитывающий влияние потерь на трение в точке подвеса троса, $\alpha_v = \alpha_m + \alpha_M$, $\alpha_\omega = \alpha_m l + \alpha_r$, F – модуль вектора тяговой силы в горизонтальном направлении, трос полагается невесомым по сравнению с грузом.

Ставится задача стабилизации положения летательного аппарата на заданной точке горизонтали:

$$(34) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - x_d| = \lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{x}(t)| = 0, \quad \bar{x}(t) = x(t) - x_d, \quad x_d = \text{const} > 0$$

в предположении, что измерению доступны только положение и скорость летательного аппарата.

Используя замену переменных

$$\begin{pmatrix} y \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{J_{\text{eq}}} & 0 & \frac{1}{ml} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_{\text{eq}}} & 0 & \frac{1}{ml} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \\ \varphi \\ \omega \end{pmatrix},$$

представим объект (33) в форме

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= -\frac{gl^3 m^3}{J_{\text{eq}} \Delta} x - \frac{\alpha_v J_{\text{eq}}^2 + \alpha_\omega l^2 m^2}{J_{\text{eq}} \Delta} v - \frac{gl^3 m^3}{\Delta} y - \frac{\alpha_\omega l^2 m^2}{\Delta} v_y + \frac{J_{\text{eq}}}{\Delta} F, \\ \dot{y} &= v_y, \\ \dot{v}_y &= -\frac{mgl}{J_{\text{eq}}} y - \frac{\alpha_\omega}{J_{\text{eq}}} v_y - \frac{mgl}{J_{\text{eq}}^2} x - \frac{\alpha_\omega}{J_{\text{eq}}^2} v. \end{aligned}$$

Эти уравнения с учетом (34) перепишем в виде

$$(35) \quad \begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= v, \\ \dot{v} &= -\frac{gl^3 m^3}{J_{\text{eq}} \Delta} \bar{x} - \frac{\alpha_v J_{\text{eq}}^2 + \alpha_\omega l^2 m^2}{J_{\text{eq}} \Delta} v - \frac{gl^3 m^3}{\Delta} y - \frac{\alpha_\omega l^2 m^2}{\Delta} v_y + \frac{J_{\text{eq}}}{\Delta} F - \frac{gl^3 m^3}{J_{\text{eq}} \Delta} x_d, \\ \dot{y} &= v_y, \\ \dot{v}_y &= -\frac{mgl}{J_{\text{eq}}} y - \frac{\alpha_\omega}{J_{\text{eq}}} v_y - \frac{mgl}{J_{\text{eq}}^2} \bar{x} - \frac{\alpha_\omega}{J_{\text{eq}}^2} v - \frac{mgl}{J_{\text{eq}}^2} x_d. \end{aligned}$$

В рамках предлагаемого подхода неизмеряемые переменные состояния y , v_y могут трактоваться как возмущения. Учитывая, что во втором и четвертом уравнении системы действуют постоянные слагаемые $-\frac{gl^3 m^3}{J_{\text{eq}} \Delta} x_d$ и $-\frac{mgl}{J_{\text{eq}}^2} x_d$, полная модель возмущений согласно (35) может быть представлена как

$$(36) \quad \dot{\omega} = W\omega + B_e e,$$

где $\omega = (\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3)^T = (x_d \ y \ v_y)^T$, $W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{mgl}{J_{\text{eq}}^2} & -\frac{mgl}{J_{\text{eq}}} & -\frac{\alpha_\omega}{J_{\text{eq}}} \end{pmatrix}$,

$$e = (\bar{x} \ v)^T, \quad B_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{mgl}{J_{\text{eq}}^2} & -\frac{\alpha_\omega}{J_{\text{eq}}} \end{pmatrix}.$$

Используя (35)–(36), перепишем уравнения (35) в форме

$$(37) \quad \begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= v, \\ \dot{v} &= -\frac{gl^3 m^3}{J_{\text{eq}} \Delta} \bar{x} - \frac{\alpha_\omega J_{\text{eq}}^2 + \alpha_\omega l^2 m^2}{J_{\text{eq}} \Delta} v + Q\omega + \frac{J_{\text{eq}}}{\Delta} F, \\ \dot{\omega} &= W\omega + B_e e, \end{aligned}$$

где $Q = \begin{pmatrix} -\frac{gl^3 m^3}{J_{\text{eq}} \Delta} & -\frac{gl^3 m^3}{\Delta} & -\frac{\alpha_\omega l^2 m^2}{\Delta} \end{pmatrix}$.

Отличием системы (37) от представления (4) является то, что подсистема для возмущений неавтономна (присутствует слагаемое $B_e e$). Однако, как будет показано далее, это не меняет предлагаемого подхода к синтезу обратной связи.

Покажем непосредственными вычислениями, что пара (W, Q) ненаблюдаема. Для этого вычислим ранг матрицы наблюдаемости:

$$\begin{aligned} & \text{rank} \begin{pmatrix} Q \\ QW \\ QW^2 \end{pmatrix} = \\ & = \text{rank} \begin{pmatrix} -\frac{gm^3 l^3}{J_{\text{eq}} \Delta} & -\frac{gm^3 l^3}{\Delta} & -\frac{\alpha_\omega m^2 l^2}{\Delta} \\ \frac{\alpha_\omega gl^3 m^3}{\Delta J_{\text{eq}}^2} & \frac{\alpha_\omega gl^3 m^3}{\Delta J_{\text{eq}}} & \frac{m^2 l^2 (\alpha_\omega^2 - gml J_{\text{eq}})}{J_{\text{eq}} \Delta} \\ \frac{gm^3 l^3 (-\alpha_\omega^2 + gml J_{\text{eq}})}{J_{\text{eq}}^3 \Delta} & \frac{gm^3 l^3 (-\alpha_\omega^2 + gml J_{\text{eq}})}{J_{\text{eq}}^2 \Delta} & \frac{\alpha_\omega m^2 l^2 (-\alpha_\omega^2 + 2gml J_{\text{eq}})}{J_{\text{eq}}^2 \Delta} \end{pmatrix} = \\ & = \text{rank} \begin{pmatrix} -\frac{gm^3 l^3}{J_{\text{eq}} \Delta} & -\frac{gm^3 l^3}{\Delta} & -\frac{\alpha_\omega m^2 l^2}{\Delta} \\ 0 & 0 & -\frac{gm^3 l^3}{\Delta} \\ 0 & 0 & \frac{gm^3 l^3}{J_{\text{eq}} \Delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{gm^3 l^3}{J_{\text{eq}} \Delta} & -\frac{gm^3 l^3}{\Delta} & -\frac{\alpha_\omega m^2 l^2}{\Delta} \\ 0 & 0 & -\frac{gm^3 l^3}{\Delta} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2. \end{aligned}$$

Система(37) с помощью замены переменных

$$\xi = H\omega, \quad H = \begin{pmatrix} Q \\ QW \\ H_3 \end{pmatrix}, \quad H_3 = (1 \ 0 \ 0), \quad \xi = (\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3)^T$$

преобразуется к представлению

$$(38) \quad \begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= v, \\ \dot{v} &= -\frac{gl^3m^3}{J_{\text{eq}}\Delta}\bar{x} - \frac{\alpha_v J_{\text{eq}}^2 + \alpha_\omega l^2 m^2}{J_{\text{eq}}\Delta}v + \xi_1 + \frac{J_{\text{eq}}}{\Delta}F, \\ \dot{\xi} &= \widetilde{W}\xi + \widetilde{B}_e e, \end{aligned}$$

$$\text{где } \widetilde{W} = HWH^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{gml}{J_{\text{eq}}} & -\frac{\alpha_\omega}{J_{\text{eq}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{B}_e = HB_e = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_\omega gm^3 l^3}{\Delta J_{\text{eq}}^2} & \frac{\alpha_\omega^2 m^2 l^2}{\Delta J_{\text{eq}}^2} \\ \frac{gm^3 l^3 (-\alpha_\omega^2 + gml J_{\text{eq}})}{\Delta J_{\text{eq}}^3} & \frac{\alpha_\omega m^2 l^2 (-\alpha_\omega^2 + gml J_{\text{eq}})}{\Delta J_{\text{eq}}^3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В представлении (38) выделено ненаблюдаемое подпространство относительно переменной ξ_4 . При синтезе обратной связи на основе динамического компенсатора данная переменная не влияет на ошибку выходной переменной, поэтому динамический компенсатор строится относительно наблюдаемых компонент $\xi^* = (\xi_1 \ \xi_2)^T$ вектора состояния возмущений ξ .

Наблюдаемость пары (W^*, Q^*) проверяется непосредственной подстановкой

$$\text{rank} \begin{pmatrix} Q^* \\ Q^*W^* \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

где

$$W^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{gml}{J_{\text{eq}}} & -\frac{\alpha_\omega}{J_{\text{eq}}} \end{pmatrix}, \quad Q^* = (1 \ 0).$$

В принятых обозначениях

$$\dot{\xi}^* = W^* \xi^* + B_e^* e,$$

$$(39) \quad B_e^* = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_\omega g m^3 l^3}{\Delta J_{\text{eq}}^2} & \frac{\alpha_\omega^2 m^2 l^2}{\Delta J_{\text{eq}}^2} \\ \frac{g m^3 l^3 (-\alpha_\omega^2 + g m l J_{\text{eq}})}{\Delta J_{\text{eq}}^3} & \frac{\alpha_\omega m^2 l^2 (-\alpha_\omega^2 + g m l J_{\text{eq}})}{\Delta J_{\text{eq}}^3} \end{pmatrix}.$$

Выберем управляющую горизонтальную силу в виде

$$(40) \quad F = -\frac{\Delta}{J_{\text{eq}}} Q^* s + \frac{\Delta}{J_{\text{eq}}} \bar{u}$$

с динамическим компенсатором согласно (5), (39)

$$(41) \quad \dot{s} = W^* s + B_e^* e - \bar{v}.$$

Уравнения замкнутой системы согласно (38), (40)–(41):

$$(42) \quad \begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= v, \\ \dot{v} &= -\frac{g l^3 m^3}{J_{\text{eq}} \Delta} \bar{x} - \frac{\alpha_v J_{\text{eq}}^2 + \alpha_\omega l^2 m^2}{J_{\text{eq}} \Delta} v + Q^* \varepsilon + \bar{u}, \\ \dot{\varepsilon} &= W \varepsilon + \bar{v}, \end{aligned}$$

где $\varepsilon = \xi^* - s$.

Выбирая управления \bar{u} , \bar{v} из выражения (8)

$$(43) \quad \begin{aligned} \bar{v} &= -L K e + W^* L v, \\ \bar{u} &= \frac{g l^3 m^3}{J_{\text{eq}} \Delta} \bar{x} + \left(\frac{\alpha_v J_{\text{eq}}^2 + \alpha_\omega l^2 m^2}{J_{\text{eq}} \Delta} + Q^* L \right) v + K e, \end{aligned}$$

получим уравнения замкнутой системы согласно (42)–(43)

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= v, \\ \dot{v} &= K e + Q^* (\varepsilon + L v), \\ \dot{\varepsilon} &= W^* \varepsilon - L K e + W^* L v, \end{aligned}$$

где $L = (L_1 \ L_2)^T \in R^2$, $K = (K_1 \ K_2)^T \in R^2$ – матрицы с постоянными коэффициентами.

Вводя новую переменную $\bar{\varepsilon} = \varepsilon + L v$, перепишем последнюю систему в виде

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= v, \\ \dot{v} &= K e + Q^* \bar{\varepsilon}, \\ \dot{\bar{\varepsilon}} &= (W^* + L Q^*) \bar{\varepsilon}. \end{aligned}$$

В силу наблюдаемости пары (W^*, Q^*) сходимость переменной $\bar{\varepsilon}$ может быть назначена желаемым образом.

Для численного эксперимента выберем параметры, представленные в таблице.

Численные значения параметров объекта управления, принятые при моделировании

Параметр	Значение
$l, [М]$	5
$J, [кг \cdot м^2]$	1,2
$\alpha_v, [кг/с]$	10
$\alpha_\omega, [м^2 \cdot кг/с]$	20
$m, [кг]$	3,5
$M, [кг]$	2
a_1	7,5
a_0	14
$x(t_0), [М]$	10
$v(t_0), [М/с]$	5
$\varphi(t_0), [рад]$	-0,5
$\omega(t_0), [рад/с]$	10
$x_d, [М]$	25

Характеристический полином матрицы $W^* + LQ^*$:

$$(44) \quad p^2 + \frac{-L_1 J_{eq} + \alpha_\omega}{J_{eq}} p + \frac{-L_2 J_{eq} + gml - L_1 \alpha_\omega}{J_{eq}} = 0.$$

Выберем матрицу L , чтобы назначить его коэффициенты в соответствии с эталонным уравнением

$$(45) \quad p^2 + a_1 p + a_0 = 0.$$

с коэффициентами из таблицы и корнями уравнения

$$p_1 = -3,5, \quad p_2 = -4.$$

Согласно рассуждениям из (44)–(45) получаем

$$\frac{-L_1 J_{eq} + \alpha_\omega}{J_{eq}} = a_1 = 7,5, \quad \frac{-L_2 J_{eq} + gml - L_1 \alpha_\omega}{J_{eq}} = a_0 = 14.$$

Подставляя значения параметров из таблицы, вычислим коэффициенты обратной связи динамического компенсатора

$$L_1 = \frac{\alpha_\omega - a_1 J_{eq}}{J_{eq}} = -7,2745;$$

$$L_2 = \frac{-a_0 J_{eq}^2 - (\alpha_\omega - a_1 J_{eq}) \alpha_\omega + J_{eq} gml}{J_{eq}^2} = -10,4243.$$

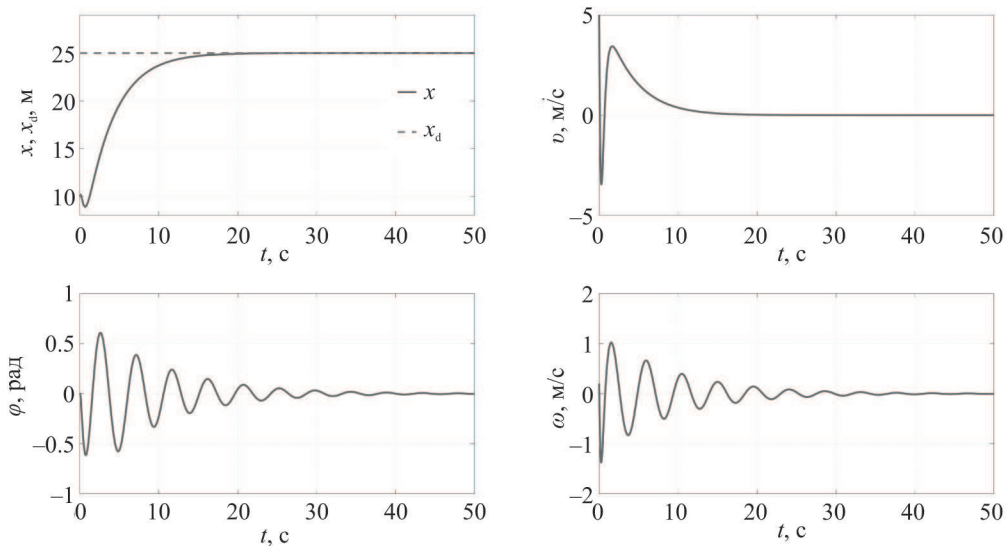


Рис. 2. Переходные процессы для переменных состояния системы (29).

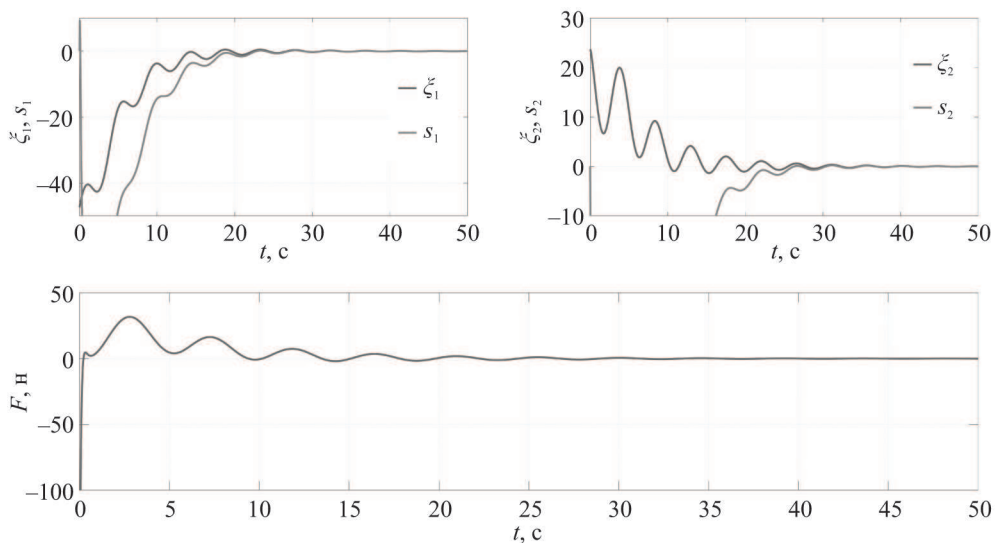


Рис. 3. Переходные процессы для компонент вектора возмущений (34) и динамического компенсатора (37).

Принимается следующая матрица обратной связи K в управлениях (43)

$$K = \begin{pmatrix} -0,12 & -0,7 \end{pmatrix},$$

чтобы обеспечить устойчивость и назначить постоянные времени

$$\tau_1 = 0,4 \text{ c}^{-1}, \quad \tau_2 = 0,3 \text{ c}^{-1}$$

в подсистеме относительно вектора e .

Результаты моделирования системы (29) с динамической обратной связью (40)–(41), (43) и начальными условиями из таблицы представлены на рис. 2, 3.

Как видно из рис. 3, текущая высота положения летательного аппарата сходится к желаемому значению, а компоненты вектора s динамического компенсатора к соответствующим компонентам вектора возмущений ξ^* . Отметим, что, несмотря на сходимости выходной переменной к нулю, управляющее воздействие F содержит затухающую колебательную составляющую (см. рис. 3). Обусловлено это тем, что с помощью управления компенсируются колебания переменных φ , ω , скорость затухания которых определяется коэффициентом α_ω .

Закон управления (40)–(41), (43) синтезировался без коррекции этого затухания, и по этой причине мы имеем “длинный хвост” в переходном процессе (см. рис. 2, 3). Однако в силу управляемости исходной системы (35) за счет коррекции с помощью компонент \bar{x}, v (см. уравнения (35)) можно было бы скорректировать демпфирование компонент φ , ω , а, следовательно, и длину указанного “хвоста”.

6. Заключение

Предложены методы декомпозиции в задаче динамической компенсации внешних возмущений заданного класса. Использование методов синтеза систем с разделяемыми движениями в рамках теории скользящих режимов и глубоких обратных связей позволило расширить известные методы динамической компенсации на класс нелинейных систем и обеспечить робастные свойства как в условиях неопределенности модели объекта управления, так и генератора возмущений. Отметим, что рассмотренный пример управления БПЛА с колебательной нагрузкой, которую можно рассматривать как часть модели объекта управления, так и как внешнее возмущение, показывает возможности расширения проблем динамической компенсации внешних возмущений на задачи, где в качестве генератора заданий рассматривается часть модели объекта управления. Вместе с предложенными в данной работе декомпозиционными методами такой подход позволяет также декомпозировать процедуру синтеза обратной связи на подзадачи меньшей размерности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кулебакин В.С.* К теории автоматических вибрационных регуляторов электрических машин // Теоретическая и экспериментальная электротехника. 1932. № 4. С. 3–21.
2. *Уонем У. М.* Линейные многомерные системы управления. Геометрический подход. М.: Наука, 1980.
3. *Francis B.A., Wonham W.M.* The internal model principle of control theory // Automatica. 1979. V. 12. No. 5. P. 457–465.

4. *Khalil H.K.* Cascade high-gain observers in output feedback control // *Automatica*. 2017. V. 80. P. 110–118.
5. *Краснова С. А., Уткин В. А., Михеев Ю. В.* Каскадный синтез наблюдателей состояния нелинейных многомерных систем // *АиТ*. 2001. № 2. С. 43–63.
6. *Pyrkin A., Bobtsov A., Ortega R., Isidori A.* An adaptive observer for uncertain linear time-varying systems with unknown additive perturbations // *Automatica*. 2023. V. 147. P. 110677.
7. *Floquet T., Edwards C., Spurgeon S.K.* On sliding mode observers for systems with unknown inputs // *Journal of Adaptive Control and Signal Processing*. 2007. V. 21. No. 8–9. P. 638–656.
8. *Лукьянов А. Г., Уткин В. А., Изосимов Д. Б. и др.* Принцип блочного управления. Часть 1 // *АиТ*. 1990. № 5. С. 38–47.
9. *Уткин В. И.* Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1987.
10. *Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б.* Робастная коррекция в системах управления с большим коэффициентом усиления // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2014. Т. 12. С. 3–10.
11. *Уткин В. А., Уткин В. И.* Метод разделения в задачах инвариантности // *АиТ*. 1983. № 12. С. 39–48.
12. *Лукьянов А. Г., Уткин В. И.* Методы сведения уравнений динамических систем к регулярной форме // *АиТ*. 1981. № 4. С. 5–13.
13. *Floquet T., Barbot J.-P.* A canonical form for the design of unknown input sliding mode observers // *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. 2006. V. 334. P. 271–292.
14. *Krasnova S.A., Utkin A.V., Utkin V.A.* Synthesis of a Control System for a Waste Heat Boiler with Forced Circulation under Restrictions on Control Actions // *Mathematics*. 2022. V. 10. No. 14. P. 2397.
15. *Krasnova S.A., Utkin A.V., Utkin V.A.* Block Approach to Analysis and Design of the Invariant Nonlinear Tracking Systems // *Autom. and Rem. Control*. 2017. V. 78. No. 12. P. 2120–2140.
16. *Гулюкина С. И., Уткин В. А.* Управление реактором с непрерывным перемешиванием в условиях неопределенности и с учетом ограничений на фазовые переменные и управления // *Проблемы управления*. 2021. № 5. С. 48–59.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А. А. Галеевым.

Поступила в редакцию 08.07.2025

После доработки 01.11.2025

Принята к публикации 20.11.2025