

# Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2026 г. А.А. ГАЛЯЕВ, д-р техн. наук (galaev@ipu.ru),

Л.М. БЕРЛИН (berlin.lm@phystech.edu),

П.В. ЛЫСЕНКО, канд. физ.-мат. наук (pavellysen@ipu.ru),

В.Г. БАБИКОВ, канд. физ.-мат. наук (babikov@ipu.ru)

(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ПОСТАНОВКИ В ЗАДАЧЕ ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛА<sup>1</sup>

Статья развивает тематику предыдущих работ авторов. В ней исследуется последовательность задач и этапов их решения, которые формируют подход к решению проблемы обнаружения сигнала в шуме, в том числе при малом отношении сигнал/помеха. Формулируется последовательность математических постановок, требующих решения. Используются аналитические конструкции для получения тестовых статистик, статистик наблюдений и решающих правил в случае близости двух гипотез на основе частотных, временных и частотно-временных распределений. Устанавливается возможность повышения отношения сигнал/помеха при различении двух гипотез для  $d$ -сигналов. Теоретические результаты установлены доказательством соответствующих лемм.

*Ключевые слова:* критерии обнаружения, обработка сигналов, преобразование Фурье, обнаружение сигналов в шуме.

DOI: 10.7868/S241397726030073

### 1. Введение

Задача обнаружения детерминированного сигнала при наличии шума среды на первый взгляд является задачей бинарной классификации. Но чем глубже исследователь погружается в формализацию задачи, тем больше возникает вопросов о том, какой информацией о свойствах сигнала и шума он обладает и как правильно понимать решение этой задачи. В общем случае задача обнаружения представляет собой бинарную классификацию, для которой требуется сформировать правило принятия решения о наличии или отсутствии полезного сигнала в сигнально-шумовой смеси. При этом признаки, сформированные на основе входящей временной последовательности отсчетов, могут относиться к множеству различных классов, на которые делятся как полезный сигнал, так и шум. Чем больше классов предлагается для

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 23-19-00134).

принятия решения, тем точнее требуется знать частотно-временные свойства сигнала и шума [1, 2].

В бинарной классификации различение двух гипотез опирается на функцию различения [3], которая показывает предельные возможности метода обнаружения детерминированного сигнала в шуме. Это можно рассматривать как некоторый аналог принципа неопределенности в квантовой механике или цифровой обработке сигналов (теорема Котельникова) [2]: даже увеличивая количество признаков, нельзя решить задачу обнаружения сигнала в шуме при малом отношении сигнал/помеха. Получается, что ключевыми физическими характеристиками сигнально-шумовой смеси, которые известны или могут быть измерены, являются вид и длина временного окна, частота дискретизации, отношение сигнал/помеха, статистические свойства шума, количество дискрет сигнала [4]. Остальные же характеристики отнесем к локальным или интегральным информационным характеристикам, которые являются функциями (функционалами) от входящего временного ряда [5–8]. Поэтому требуется сформировать оптимальные правила для синтеза информационной системы, решающей задачу обнаружения на основе ограниченной априорной информации [9, 10].

Особенностью такой оптимальной обработки являются неустойчивость к изменению статистических свойств шума и априорная неопределенность о свойствах сигнала [11, 12]. Оказывается, что при решении задачи обнаружения детерминированного сигнала при малом отношении сигнал/помеха дополнительной информацией является различающая способность гипотез [3, 13]. В целом актуальными на практике являются задачи обнаружения детерминированного сигнала при малом отношении сигнал/шум и задачи различения хаотических и случайных сигналов. Математические постановки таких задач разумно опираются на дополнительные предположения о свойствах сигнала и шума. Однако на практике многие математические конструкции оказываются не реализуемыми или реализуемыми с большими погрешностями.

Текущая работа посвящена установлению свойств задачи обнаружения и формированию подхода для улучшения качества решения. Будут рассмотрены несколько последовательных этапов формализации и решения задачи обнаружения, опираясь на известные формулировки задачи разделения двух гипотез и леммы Неймана–Пирсона. Затем необходимо выделить критерии, свойства и признаки детерминированного сигнала, применить методы оптимальной обработки сигналов с вычислением вероятностных временных, частотных и частотно-временных распределений и на финальном этапе построить статистики для модельных экспериментов.

## 2. Леммы Неймана–Пирсона, оптимальные тесты и вид функции ошибок

### 2.1. Задача обнаружения

Задача обнаружения сигнала  $s(n)$  традиционно сводится к задаче различения двух гипотез

$$\begin{cases} \Gamma_0 : x(n) = w(n), \\ \Gamma_1 : x(n) = s(n) + w(n), \quad n = 1, \dots, N. \end{cases}$$

Гипотеза  $\Gamma_0$  связана с принятием решения о приеме только шума, а гипотеза  $\Gamma_1$  – о приеме смеси полезного сигнала и шума, где последовательности  $\{x(n)\}$ ,  $n = 1, \dots, N$  – временной ряд из принятых данных,  $\{s(n)\}$  – полезный сигнал,  $\{w(n)\}$  – аддитивный случайный шум,  $N$  – длина временного ряда данных.

Случайные величины временного ряда  $(x(1), \dots, x(n), \dots, x(N))$  принимают значения  $(x_1, \dots, x_n, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ .

### 2.2. Классическая лемма Неймана–Пирсона

Для получения аналитического выражения оценки вероятности ошибки различения гипотез можно применить одну из разновидностей леммы Неймана–Пирсона, которая является условием оптимальности [14, 15].

*Лемма 1* [Неймана–Пирсона (классическая)]. Пусть имеется произвольная, называемая решающим правилом или тестом, измеримая функция многих переменных  $(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ , такая что

$$\varphi(x_1, \dots, x_N) = \begin{cases} 1, & \text{верна гипотеза } \Gamma_0, \\ 0, & \text{верна гипотеза } \Gamma_1, \end{cases}$$

по которой находятся

$$\begin{aligned} \alpha(\varphi) &= \text{вероятность (принять } \Gamma_1 \mid \text{верна } \Gamma_0), \\ \beta(\varphi) &= \text{вероятность (принять } \Gamma_0 \mid \text{верна } \Gamma_1). \end{aligned}$$

Тогда решающее правило  $\varphi^*$  оптимально, если

$$(1) \quad 1 - \beta(\varphi^*) = \sup_{\varphi} [1 - \beta(\varphi)] \text{ при условии } \alpha(\varphi^*) = \alpha_0,$$

где супремум берется по всевозможным тестам.

Здесь  $\alpha(\cdot)$  – вероятность ложной тревоги, а  $\beta(\cdot)$  – вероятность пропуска полезного сигнала.

### 2.3. Безусловная лемма Неймана–Пирсона

*Лемма 2* [Неймана–Пирсона (безусловная)]. Пусть имеется произвольная, называемая решающим правилом или тестом, измеримая функция

многих переменных  $(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ , такая что

$$\varphi(x_1, \dots, x_N) = \begin{cases} 1, & \text{верна гипотеза } \Gamma_0, \\ 0, & \text{верна гипотеза } \Gamma_1, \end{cases}$$

по которой находятся

$$\begin{aligned} \alpha(\varphi) &= \text{вероятность (принять } \Gamma_1 \mid \text{верна } \Gamma_0), \\ \beta(\varphi) &= \text{вероятность (принять } \Gamma_0 \mid \text{верна } \Gamma_1). \end{aligned}$$

Тогда решающее правило  $\varphi^*$  оптимально, если

$$(2) \quad \alpha(\varphi^*) + \beta(\varphi^*) = \inf_{\varphi} [\alpha(\varphi) + \beta(\varphi)] = \mathcal{E}r(N; \Gamma_0, \Gamma_1) - \text{функция ошибок,}$$

где инфимум берется по всевозможным тестам.

Особенность применения этой разновидности леммы Неймана–Пирсона состоит в том, что требуется не ошибаться, принимая одну гипотезу вместо другой.

Для функции ошибок справедлива точная формула следующего вида:

$$(3) \quad \mathcal{E}r(N; \Gamma_0, \Gamma_1) = 1 - \frac{1}{2} \|P_0^{(N)} - P_1^{(N)}\| = 1 - TV(P_0, P_1),$$

где  $P_0^{(N)}$  – многомерная функция распределения статистики наблюдений по гипотезе  $\Gamma_0$ ,  $P_1^{(N)}$  – многомерная функция распределения статистики наблюдений по гипотезе  $\Gamma_1$ , а  $TV(P_0, P_1)$  – полная вариация меры со знаком. Здесь  $\|Q\| = 2 \sup_A |Q(A)|$ . Таким образом, если множества-носители мер  $P_0, P_1$  не пересекаются, то возможно безошибочное различение гипотез. Если же меры  $P_0^{(N)}$  и  $P_1^{(N)}$  близки, то  $\|P_0^{(N)} - P_1^{(N)}\| \approx 0$ , и тогда  $\mathcal{E}r(N; \Gamma_0, \Gamma_1) \approx 1$ .

*Замечание 1.* Для задачи обнаружения детерминированного полезного сигнала, например при малом отношении сигнал/шум, интересен случай  $\|P_0^{(N)} - P_1^{(N)}\| = 2TV(P_0, P_1) \approx 0$  и возможность разумной оценки этой величины. Поэтому когда вероятность суммарной ошибки различения двух гипотез близка к единице, появляется возможность использовать аналитическое выражение  $TV(P_0, P_1)$  для конструирования критерия в задаче обнаружения полезного сигнала в сигнально-шумовой смеси.

Еще раз подчеркнем, что в классической лемме Неймана–Пирсона при заданной вероятности ложной тревоги максимизируется вероятность обнаружения сигнала, а в безусловной лемме Неймана–Пирсона минимизируется суммарная ошибка ложной тревоги и пропуска сигнала. Безусловная лемма вследствие аналитического представления функции ошибок предпочтительна при работе с малыми отношениями сигнал/шум и неизвестной помеховой обстановке. Возникает следующая

*Задача 1.* Определить правила выбора критерия и построения распределений  $P_0, P_1$ , минимизирующих ошибку различения гипотез в задаче обнаружения сигнала при малом отношении сигнал/шум.

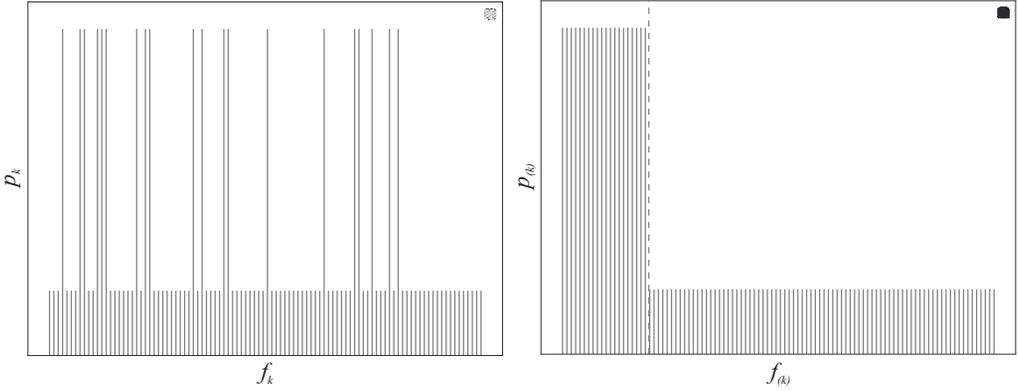


Рис. 1. Энергетический неупорядоченный и упорядоченный спектр  $d$ -сигнала в равномерном шуме ( $d = 20$ ,  $N = 100$ ).

Здесь и далее рассматриваются дискретные распределения вероятностей  $P = \{p = (p_1, \dots, p_i, \dots, p_N)\}$ , которые по определению обладают следующими свойствами:

$$(4) \quad \forall p_i \in [0, 1], \quad \sum_{i=1}^N p_i = 1.$$

Дадим теперь определение  $d$ -сигнала, который будет применяться в работе. Для этого потребуется рассмотреть распределение следующего вида, где каждая вероятность  $p_k$  может принимать одно из двух различных значений:

$$(5) \quad \begin{cases} p_k = \frac{1 - p_{\max}}{N - d}, & \forall k = 1, \dots, N - d, \\ p_k = p_N = \frac{p_{\max}}{d}, & \forall k = N - d + 1, \dots, N. \end{cases}$$

*Определение 1.* Сигнал  $s(t)$ , для которого возможно представление временных, спектральных или частотно-временных отсчетов в виде распределения (5), назовем  $d$ -сигналом.

В [16] представлено следующее определение  $d$ -сигнала.

*Определение 2.* Сигнал, который состоит из  $d$  синусоидальных сигналов равной амплитуды, будем называть  $d$ -сигналом, а отдельные частоты этого сигнала будем называть дискретами. Тогда спектр этого сигнала будет иметь вид

$$(6) \quad A_d = \sum_{i=1}^d A_0 \exp(-j2\pi f_i \Delta T),$$

где  $A_0$  – амплитуда единичного отсчета спектра,  $f_i$  – частота  $i$ -го отсчета ( $\Gamma_i$ ),  $\Delta T$  – временной интервал сигнала в секундах.

Пример спектра и упорядоченного спектра  $d$ -сигнала приведен на рис. 1.

*Замечание 2.* Частоты  $d$ -дискрет  $f_i$  и размер окна  $\Delta T$ , где окном будем называть временной интервал сигнала, для которого производится дискретное преобразование Фурье (ДПФ), таковы, что выполняется следующее условие:  $\forall f_i : f_i \Delta T = r_i$ , где  $r_i \in \mathbb{N}$ ,  $r_i < N/2$ .

Смысл выражения  $r_i \in \mathbb{N}$  заключается в том, что целое количество периодов  $r_i$  соответствующей  $i$ -й  $d$ -дискреты спектра должно укладываться во временное окно  $\Delta T$  сигнально-шумовой смеси.

*Замечание 3.* В зависимости от значений  $p_{\max}$  и  $d$  получаются различные  $d$ -сигналы.

### 3. Оптимальное различение двух гипотез

Из классической леммы Неймана–Пирсона следует, что наилучший метод различения гипотез основан на отношении правдоподобия для дискретного времени следующего вида:

$$(7) \quad l_N(x(t)) = \ln \frac{P_0(x(1), \dots, x(N))}{P_1(x(1), \dots, x(N))},$$

где  $P_0$  и  $P_1$  – совместные распределения случайного процесса  $\xi_t$ , принимающего значения  $x(1), \dots, x(N)$  в моменты времени  $t = \Delta t, \dots, t = N\Delta t$ . При заданной ширине временного окна  $T = N\Delta t$  между  $\alpha$  (вероятностью ложной тревоги) и  $\beta$  (вероятностью пропуска полезного сигнала) в условии оптимального приема имеется жесткая функциональная связь

$$(8) \quad \alpha = \alpha(\beta, T) \text{ или } \beta = \beta(\alpha, T) \text{ или } T = T(\alpha, \beta).$$

Получается, что по смыслу  $T(\alpha, \beta)$  – наименьшее время наблюдения, за которое можно различить две гипотезы с заданными вероятностями ложной тревоги и пропуска сигнала [3].

*Замечание 4.* Поскольку при дискретном преобразовании Фурье (ДПФ) имеется возможность увеличивать количество отсчетов  $N$ , то каждое наблюдение можно считать достаточным, чтобы исследовать закономерности

$$(9) \quad \alpha = \alpha(\beta) \text{ или } \beta = \beta(\alpha).$$

*Определение 3.* Назовем взаимной энтропией гипотезы  $\Gamma_0$  относительно  $\Gamma_1$  дивергенцию Кульбака–Лейблера

$$(10) \quad H_{0/1}(P_0, P_1) = D_{KL}(P_0, P_1).$$

*Предложение 1.* Если вероятность ошибки  $\beta$  не слишком мала, а именно  $-\ln \beta \ll N$ , то

$$(11) \quad \beta(\alpha) = \exp(-H_{0/1}(P_0, P_1))(1 - \alpha) + o\left(\frac{\ln \beta}{N}\right).$$

*Определение 4.* Различающей способностью гипотез назовем симметризованное расстояние Кульбака–Лейблера, оно же информационное расстояние,

$$(12) \quad I_D = D_{KL}(P_0, P_1) + D_{KL}(P_1, P_0).$$

Различающая способность используется тогда, когда результаты экспериментов по гипотезам  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$  близки друг другу, т.е. когда рассматривается задача обнаружения слабого сигнала. В общем случае различающая способность зависит от отношения сигнал/шум. Следующие примеры показывают эту особенность.

*Пример 1.* Пусть имеются две гипотезы  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$  и вычислены вероятности ложной тревоги  $\alpha$  и пропуска сигнала  $\beta$ , тогда при выполнении условий предложения 1 имеем

$$(13) \quad I_D = -\ln \frac{\beta}{(1-\alpha)} - \ln \frac{\alpha}{(1-\beta)} = \ln \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\alpha\beta} \approx -(\ln \alpha + \ln \beta).$$

*Пример 2.* Пусть имеются две гипотезы  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$  для различения детерминированного сигнала на фоне гауссовского шума со спектральной плотностью  $\sigma^2$ , а детерминированный сигнал представим в виде

$$(14) \quad s(t) = s_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos(\omega_i t + \varphi_i),$$

где  $\{\omega_i\}$  и  $\{\varphi_i\}$  – некоторые константы. Тогда

$$(15) \quad I_D = \frac{\int_0^T s^2(t) dt}{\sigma^2} = \frac{s_0^2}{2\pi\sigma^2} + \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i^2}{\sigma^2}.$$

Это означает, что при разделении сигнала и шума различающая способность зависит от отношения сигнал/шум [3].

*Пример 3.* Пусть имеются две гипотезы  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$  для различения детерминированного  $d$ -сигнала на фоне гауссовского шума со спектральной плотностью  $\sigma^2$ ,  $d \ll N$ , а спектр этого сигнала будет иметь вид

$$(16) \quad A_d = \sum_{i=1}^d A_0 \exp(-j\omega_i + \varphi_i),$$

где  $A_0$  – амплитуда единичного отсчета спектра,  $\omega_i$  – частота  $i$ -го отсчета,  $\varphi_i$  – фаза  $i$ -го отсчета. Тогда при использовании спектральной сложности и порядковых статистик для формирования упорядоченной спектральной плотности принятой смеси сигнал/шум [17] имеем

$$(17) \quad I_D \approx \ln \left( \frac{N}{d} \right) \left( \frac{\int_0^T s^2(t) dt}{\sigma^2} \right).$$

Это означает, что различающая способность зависит от количества дискрет сигнала и отношения сигнал/шум.

Примеры показывают до каких пределов возможно различение гипотез при заданных подходах к их сравнению. Примеры 1 и 2 показывают равенство статистического и энергетического подходов при прочих равных условиях. Пример 3 показывает отличие возможности различения энергетического подхода при условии знания ограниченности спектральной полосы сигнала при

заданной частоте дискретизации. Пример 1, приведенный к условиям примера 3, устанавливает, что в его условиях понижается вероятность пропуска сигнала при заданной величине ложной тревоги.

Представленные выше функции информационных дивергенций могут быть объединены общим понятием *f-дивергенции* [18]:

$$(18) \quad D_f(p||q) = \sum_{x \in \mathbb{R}^N} q(x) f\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right).$$

Выбор функции  $f$  порождает целое семейство различных дивергенций:

- Дивергенция Кульбака–Лейблера  $D_{KL}(p, q)$  получается из (18) выбором  $f(x) = x \log_2(x)$ ,  $x > 0$ .
- Дивергенция Йенсена–Шеннона получается из (18) выбором

$$(19) \quad f(x) = x \log_2 \frac{2x}{x+1} + \log_2 \frac{2}{x+1}, \quad x > 0.$$

- Полная вариация получается при  $f(x) = \frac{1}{2}|1 - x|$ :

$$(20) \quad TV(p, q) = \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathbb{R}^N} |p(x) - q(x)|.$$

*Замечание 5.* На дискретных распределениях вида (4) справедливо выражение для полной вариации меры со знаком  $TV$  (total variation), записанное в виде

$$(21) \quad TV(P_0, P_1) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N |p_i^0 - p_i^1|.$$

Кроме того,  $TV(p, q)$  также является метрикой на пространстве распределений вероятностей и оценивает сверху дивергенцию Йенсена–Шеннона:

$$(22) \quad JSD(p||q) \leq TV(p, q).$$

Каждая из рассмотренных в разделе функций может использоваться для построения статистик наблюдений при вторичной обработке последовательности наборов измерений, содержащих по  $i = 1, \dots, N$  отсчетов.

Для формализации критериев, которые учитывают не только случайную составляющую сигналов, но и детерминированную, введем понятия функции дисбаланса  $D$  и статистической сложности  $C$  ( $C$  – complexity) распределения

$$C(p) = H(p)D(p, q),$$

где  $H(p)$  является энтропией распределения  $p$ , а дисбаланс  $D(p, q)$  определяет расстояние между сигнальным и шумовым распределениями. Простейшим примером дисбаланса является евклидово расстояние в пространстве дискретных вероятностных распределений [19], которое удобно применять при оценке и сравнении сигналов, имеющих спектральное распределение  $q$ , близкое к равномерному.

## 4. Построение распределений $P_0$ и $P_1$

Сформулируем способы построения распределений  $P_0$  и  $P_1$  для отдельного наблюдения. Предлагается три способа построения распределений: на основе временного ряда  $\{x_i\}$ , на основе его дискретного преобразования Фурье и на основе частотно-временного преобразования, а именно классической или робастной спектрограмм.

### 4.1. Оптимизация частотно-временных распределений и виды спектрограмм

Оказывается, что кратковременное (оконое) преобразование Фурье может быть получено как решение оптимизационной задачи [20].

*Задача 2. Нужно найти*

$$(23) \quad F_s(t, \omega) = m^* = \arg \min_m I(t, \omega, m),$$

где

$$(24) \quad I(t, \omega, m) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w(n\Delta t) \mathbf{F}(e(t, \omega, n, m)).$$

Здесь  $\mathbf{F}(e)$  – функция потерь,  $w(n\Delta t)$  – оконная функция,  $\Delta t$  – интервал дискретизации, а функция ошибки принимает вид

$$e(t, \omega, n, m) = s(t + n\Delta t) \exp(-i\omega n\Delta t) - m.$$

Функция ошибки определяет остаточную величину, выражающую «сходство» между сигналом и гармоникой  $\exp(i\omega n\Delta t)$ . Разные виды спектрограммы могут быть получены при помощи различных функций  $\mathbf{F}(e)$ .

*Замечание 6.* Если  $\mathbf{F}(e) = |e|^2$ , то необходимые условия экстремума задачи 2

$$\frac{\partial I(t, \omega, m)}{\partial m} = 0$$

дают ее решение в виде

$$(25) \quad F_s(t, \omega) = \frac{1}{a_w} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w(n\Delta t) s(t + n\Delta t) \exp(-i\omega n\Delta t),$$

$$a_w = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w(n\Delta t).$$

Получается, что кратковременное преобразование Фурье  $S_t(\omega)$  сигнала  $s(t)$  равно

$$S_t(\omega) = F_s(t, \omega),$$

а соответствующая спектрограмма имеет вид

$$(26) \quad P_S(t, \omega) = |F_s(t, \omega)|^2.$$

*Замечание 7.* Поскольку  $(t, \omega)$  являются дискретными переменными при дискретных преобразованиях, то можно определить

$$P_0 = \frac{P_S(t, \omega)}{\sum_{t, \omega} P_S(t, \omega)}.$$

*Замечание 8.* Метод максимального правдоподобия (ММП) применим, когда известна плотность распределения шума  $p(e)$ . ММП предполагает функцию потерь  $\mathbf{F}(e) = -\ln p(e)$ . Так, ММП-оценка спектров сигналов, искаженных гауссовским шумом  $p(e) \sim \exp(-|e|^2)$ , с соответствующей функцией  $\mathbf{F}(e) = |e|^2$  представляет собой кратковременное преобразование Фурье. Кроме того, во многих случаях ММП-оценки весьма чувствительны к отклонениям от параметрической модели и гипотетического распределения. Даже небольшое отклонение от гипотезы может привести к существенному ухудшению такой оценки.

Следуя замечаниям 6 и 8, в статистике был разработан минимаксный робастный подход [8] в качестве альтернативы традиционному ММП, чтобы снизить чувствительность оценки ММП. Функция потерь в таком случае принимает вид  $\mathbf{F}(e) = |e|$ . Робастное минимаксное кратковременное преобразование Фурье (M-STFT) опирается на решение нелинейной системы уравнений (27)–(29)

$$(27) \quad F_s(t, \omega) = \frac{1}{a_w(t, \omega)} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} d(t, \omega, n) s(t + n\Delta t) \exp(-i\omega n\Delta t),$$

$$(28) \quad d(t, \omega, n) = \frac{w(n\Delta t)}{|s(t + n\Delta t) \exp(-i\omega n\Delta t) - F_s(t, \omega)|},$$

$$(29) \quad a_w(t, \omega) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} d(t, \omega, n).$$

*Определение 5.* Пусть  $\mathbf{F}(e) = |e|$  и в задаче 2 заданы (27)–(29), тогда робастная спектрограмма определяется как

$$(30) \quad P_s(t, \omega) = I(t, \omega, 0) - I(t, \omega, F_s(t, \omega)).$$

Заметим, что и для квадратичной функции потерь выражения (30) и (25) совпадают.

Еще один способ построения робастной спектрограммы заключается в построении оконного дискретного распределения Вигнера–Вилле. Само распределение задается в виде

$$(31) \quad W_s(t, \omega) = \frac{1}{a_w} \sum_{n=-N/2}^{N/2} w(n\Delta t) s(t + n\Delta t) s^*(t - n\Delta t) \exp(-i2\omega n\Delta t),$$

где

$$(32) \quad a_w = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w(n\Delta t).$$

Оно может быть найдено из решения следующей оптимизационной задачи.

*Задача 3. Нужно найти*

$$(33) \quad W_s(t, \omega) = m^* = \arg \min_m J(t, \omega, m),$$

где

$$(34) \quad J(t, \omega, m) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} w(n\Delta t) \mathbf{F}(|e|).$$

Функция ошибки задается следующим образом:

$$e(t, \omega, n, m) = s(t + n\Delta t) s^*(t - n\Delta t) \exp(-i2\omega n\Delta t) - m,$$

$$\text{а } \mathbf{F}(|e|) = |e|^2.$$

#### 4.2. Дискретное преобразование Фурье

*Задача 4. Пусть имеется реализация  $\{x_1, \dots, x_{2N+2}\}$  последовательности независимых случайных величин  $\{\xi_1, \dots, \xi_{2N+2}\}$  с нулевым математическим ожиданием, к которой применено ДПФ*

$$(35) \quad X_k = \sum_{n=1}^{2N+2} x_n e^{-2i\pi k(n-1)/(2N+2)},$$

определяющее случайную величину

$$(36) \quad \Xi_k = \sum_{n=1}^{2N+2} \xi_n e^{-2i\pi k(n-1)/(2N+2)},$$

где  $k = 0, \dots, N$ , поскольку в силу свойства симметрии ДПФ вещественного сигнала вторая половина из  $N + 1, \dots, 2N + 1$  комплексных амплитуд спектральных отсчетов комплексно сопряжена с первой.

Требуется найти дискретную функцию вероятности нормированного упорядоченного спектрального распределения  $\eta_k(N)$  как нормированное среднее для каждого  $k$ -го значения случайной величины

$$(37) \quad \eta_k(N) = \frac{(\mathbf{T}I)_k}{E_X},$$

где  $I_k = \Xi_k \Xi_k^*$  (квадрат модуля амплитуды или энергия спектрального отсчета),  $E_X$  – половина энергии сигнала, а  $\mathbf{T}$  – оператор упорядочивания ряда в порядке невозрастания.

Решение задачи 4 в случае наблюдения независимых нормально распределенных случайных величин  $\xi_n$ ,  $n = 1, \dots, 2N + 2$  с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma_0^2$  приводится в [17] и [13]. Оценка функции вероятности  $\tilde{n}_k(N)$  нормированного упорядоченного дискретного спектра, порожденной соответствующей экспоненциальной случайной величиной  $I_k$ , выглядит следующим образом:

$$(38) \quad \tilde{n}_k(N) = \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i} \right) = \frac{1}{N} \sum_{i=k}^N \frac{1}{i}.$$

Для приближенного вычисления  $n_k(N)$  выберем формулу

$$(39) \quad n_k(N) = -\frac{1}{NK_N} \ln \frac{2k-1}{2N+1}, \quad \text{где } K_N = -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \ln \frac{2k-1}{2N+1}.$$

*Замечание 9.* Считая, что нормированные порядковые статистики  $(\eta_1, \dots, \eta_N)$  принимают значения  $P_0 = \{p = (\tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_N)\}$  или  $P_0 = \{p = (n_1, \dots, n_N)\}$ , а статистики наблюдений  $P_1 = \{p = (p_1, \dots, p_N)\}$ , спектральную сложность также можно задавать на основе распределения (38) по формуле

$$(40) \quad C_{SS}(p) = -\frac{1}{4 \log_2 N} \left( \sum_{k=1}^N p_k \log_2 p_k \right) \left( \sum_{k=1}^N |p_k - \tilde{n}_k(N)| \right)^2$$

или его приближенного аналога (39) по формуле

$$(41) \quad C_S(p) = -\frac{1}{4 \log_2 N} \left( \sum_{k=1}^N p_k \log_2 p_k \right) \left( \sum_{k=1}^N |p_k - n_k(N)| \right)^2.$$

Теперь положим, что  $N = N_1 N_2$ , где  $N_1$  – количество отсчетов в одном окне, а  $N_2$  – количество окон. Поскольку энтропия в одном окне не зависит от порядка расположения отсчетов спектра, то ее можно определить как

$$H(n_k(N_1)) = -\frac{1}{\log_2 N_1} \sum_{k=1}^{N_1} n_k(N_1) \log_2 n_k(N_1).$$

Энтропия в  $N_2$  статистически одинаковых окнах равна

$$H(P_S(N_2, N_1)) = -\frac{1}{\log_2 N_1 + \log_2 N_2} \left( \log_2 N_2 + \sum_{k=1}^{N_1} p_k(N_1) \log_2 p_k(N_1) \right).$$

## 5. Оптимизация информационных критериев и обнаружение $d$ -сигналов

Теперь обратимся к некоторым уже известным информационным критериям различения гипотез и установим их свойства. Поскольку в лемме 2 установлено, что функция ошибок различения двух гипотез зависит от полной вариации  $TV(p, q)$ , то вводится еще одно понятие дисбаланса и статистической сложности на его основе [10]. Там же показано, что такой критерий является одним из лучших для решения задачи различения двух гипотез и индикации появления детерминированной составляющей слабого полезного сигнала в белом шуме:

$$(42) \quad C_{TV}(p) = H(p)D_{TV}(p),$$

где

$$(43) \quad D_{TV}(p) = \frac{1}{4} \left( \sum_{i=1}^N \left| p_i - \frac{1}{N} \right| \right)^2,$$

$$(44) \quad H(p) = \frac{1}{\log_2 N} \left( - \sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i \right)$$

– нормированная энтропия Шеннона [21]. При вычислении суммы (44) принимается, что  $\frac{0}{\log_2 0} = 0$  по непрерывности. Там же было показано, что максимальное значение  $C_{TV}$  достигается на распределении, состоящем всего из двух значений с оптимальным количеством отсчетов для каждого из этих значений. Справедлива следующая

*Лемма 3. Максимум статистической сложности (42) достигается на семействе распределений (5).*

Требуется определить оптимальные значения  $d$  и  $p_{\max}$ . Для этого вычислим значение дисбаланса  $D_{TV}$  на распределении (5):

$$(45) \quad D_{TV}(\omega, p_{\max}) = (p_{\max} - \omega)^2, \quad \omega = \frac{d}{N}.$$

В свою очередь энтропия равна

$$(46) \quad H(\omega, p_{\max}) = 1 - \frac{1}{\log_2 N} \left( (1 - p_{\max}) \log_2 \frac{1 - p_{\max}}{1 - \omega} + p_{\max} \log_2 \frac{p_{\max}}{\omega} \right).$$

В таблице приведены оптимальные значения параметров формул (45) и (46), доставляющие максимум статистической сложности  $C_{TV}(\omega, p_{\max})$ .

Оптимальные параметры  $C_{TV}(\omega, p_{\max})$  при различных значениях  $N$

$N$	$C_{TV}(\omega^*, p_{\max}^*)$	$p_{\max}^*$	$1 - \omega^*$	$d^*$
3	0,1289	0,8241	0,6751	1 или 2
256	0,4789	0,9976	0,8752	32
512	0,5120	0,9991	0,8901	56
1024	0,5410	0,9997	0,9022	100
2048	0,5667	0,9999	0,9122	180

Из леммы 3 и таблицы видно, что  $d$ -сигналы играют важную роль при решении задачи обнаружения. Поэтому возникает следующая

*Задача 5. Обнаружение  $d$ -сигнала в сигнально-шумовой смеси длины  $N$ ,  $N > d$ .*

Для решения задачи 5 по обнаружению  $d$ -сигнала применим энтропию Реньи  $H_\gamma$  с параметром  $\gamma$  ( $\gamma > 0$ ,  $\gamma \neq 1$ ), подробные свойства которой представлены в [22].

$$(47) \quad H_\gamma = \frac{1}{1 - \gamma} \left( \log_2 \sum_{k=1}^N p_k^\gamma \right).$$

Оказывается, что энтропия Реньи для  $d$ -сигнала вычисляется и равна

$$(48) \quad H_\gamma^{(d)} = \frac{1}{1 - \gamma} \log_2 \left( d \left( \frac{p_{\max}}{d} \right)^\gamma + (N - d) \left( \frac{1 - p_{\max}}{N - d} \right)^\gamma \right).$$

При больших  $N$  она может быть оценена следующим образом:

$$(49) \quad H_\gamma^{(d)} \approx \tilde{H}_\gamma^{(d)} = \begin{cases} \frac{1}{1 - \gamma} \log_2(d^{1-\gamma} p_{\max}^\gamma) = \log_2 d + \frac{\gamma}{1 - \gamma} \log_2(p_{\max}), & \gamma > 1, \\ \log_2 N + \frac{\gamma}{1 - \gamma} \log_2(1 - p_{\max}), & 0 < \gamma < 1, \end{cases}$$

что показывает приближенную линейную связь между логарифмами количества дискрет сигнала,  $p_{\max}$  и энтропией Реньи.

Из таблицы и (49) при  $\gamma > 1$  следует равенство

$$(50) \quad \tilde{H}_\gamma^{(d^*)} = \log_2 d^*.$$

Подобные соотношения известны для частотно-временной обработки известных сигналов [20]. Энтропия Реньи на белом шуме принимает свое максимальное значение  $\tilde{H}_\gamma^{(N)} = \log_2 N$ .

*Определение 6. Определим отношение “сигнал/помеха” для  $d$ -сигнала в случае, когда система (5) отвечает спектру мощности сигнально шумо-*

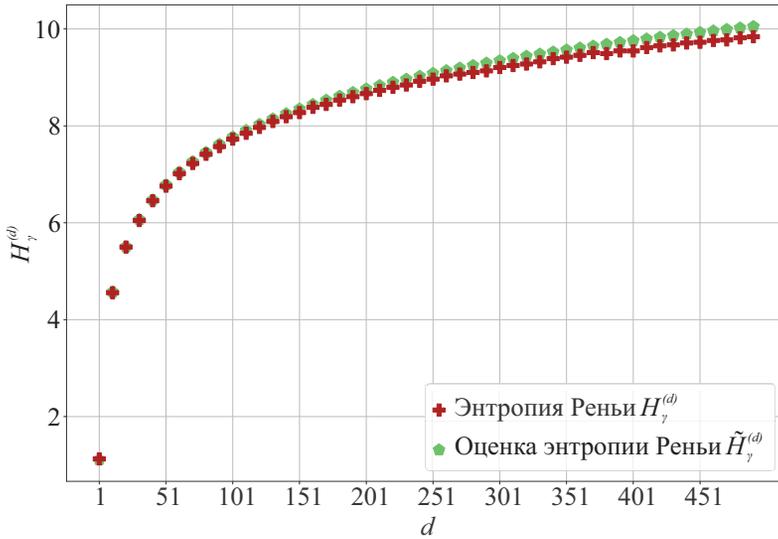


Рис. 2. Сравнение энтропии Реньи ( $\gamma = 10$ ), вычисленной по формуле (47), и ее оценки (53).

вой смеси, как:

$$\begin{aligned}
 SNR = 10 \log_{10} \delta &= 10 \log_{10} \left( d \left( \frac{p_{\max}}{d} \right) / \left( (N - d) \frac{(1 - p_{\max})}{(N - d)} \right) \right) = \\
 (51) \qquad \qquad \qquad &= 10 \log_{10} \left( \frac{p_{\max}}{1 - p_{\max}} \right).
 \end{aligned}$$

В таком случае  $p_{\max}$  можно выразить через  $SNR$  для того, чтобы использовать для вычисления энтропии Реньи

$$(52) \qquad \qquad \qquad p_{\max} = \frac{10^{\frac{SNR}{10}}}{1 + 10^{\frac{SNR}{10}}}.$$

Тогда  $\tilde{H}_\gamma^{(d)}$  может быть выписана при  $\gamma > 1$  согласно (49) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 (53) \qquad \qquad \qquad \tilde{H}_\gamma^{(d)} &= \log_2 d + \frac{\gamma}{1 - \gamma} \log_2 \left( \frac{10^{\frac{SNR}{10}}}{1 + 10^{\frac{SNR}{10}}} \right) = \\
 &= \log_2 d + \frac{\gamma}{1 - \gamma} \left[ \frac{SNR}{10} \log_2 10 - \log_2 \left( 1 + 10^{\frac{SNR}{10}} \right) \right].
 \end{aligned}$$

На рис. 2 представлено сравнение энтропии Реньи, вычисленной по формуле (47), и ее оценки (53) в виде зависимости от количества  $d$  гармонических компонент в сгенерированном сигнале, смешанном с белым шумом,  $SNR = 0$  dB. Видно, что оценка близка к вычисленным значениям.

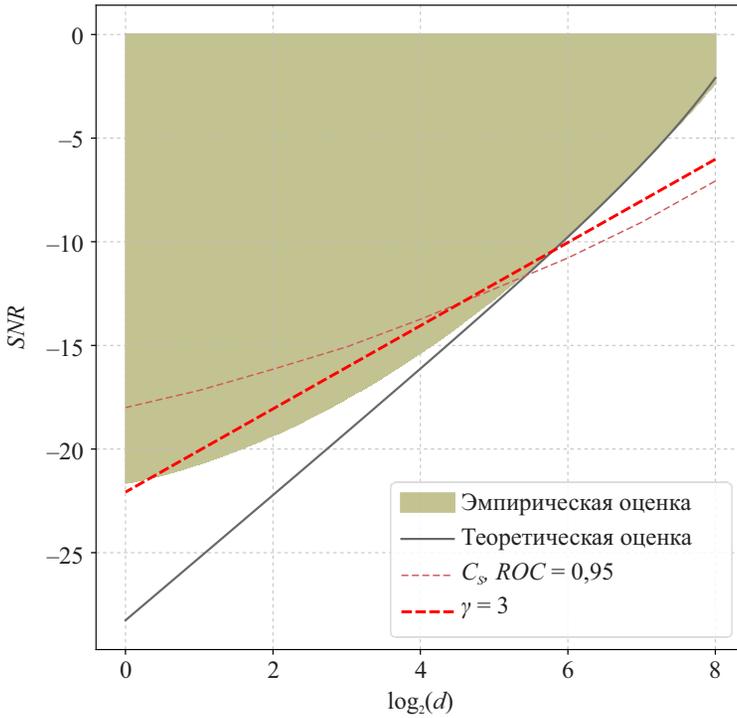


Рис. 3. Предельные значения  $SNR$  при обнаружении сигнала в белом шуме в зависимости от количества дискрет  $d$  ( $N = 2048$ ).

*Следствие 1. При малом отношении сигнал/помеха энтропия Реньи примет вид*

$$(54) \quad \tilde{H}_\gamma^{(d)} \approx \log_2 d + \frac{\gamma \log_2 10}{10(1-\gamma)} SNR.$$

Таким образом, зная максимальное значение энтропии Реньи, минимальное значение  $SNR$  можно оценить как

$$(55) \quad SNR_{\min} = \frac{10(1-\gamma)}{\gamma \log_2 10} (\log_2 N - \log_2 d).$$

Согласно [4] взаимно-однозначное соответствие между кортежем  $H$  (энтропия),  $C_{TV}$  (статистическая сложность) и кортежем  $SNR$  (отношение сигнал/шум),  $\log d$  (дискретность) дает возможность использовать метрические (аналитические)<sup>2</sup> сетки в задачах обнаружения и классификации сигнала в шуме.

Сравнительный анализ оценок  $SNR$  в зависимости от количества  $d$  дискрет в спектре представлен на рис. 3 ( $N = 2048$ ). Закрашенная область демонстрирует результат эмпирического исследования предельных возможно-

<sup>2</sup> В [4] подробно раскрывается понятие метрической сетки. В контексте диаграммы сложности метрическая сетка – это приближенное взаимно-однозначное отображение кортежа таких информационных характеристик сигнально-шумовой смеси, как информационная энтропия и статистическая (спектральная) сложность, и кортежа таких характеристик, как дискретность (количество дискрет в спектре  $d$ -сигнала) и отношение сигнал/шум.

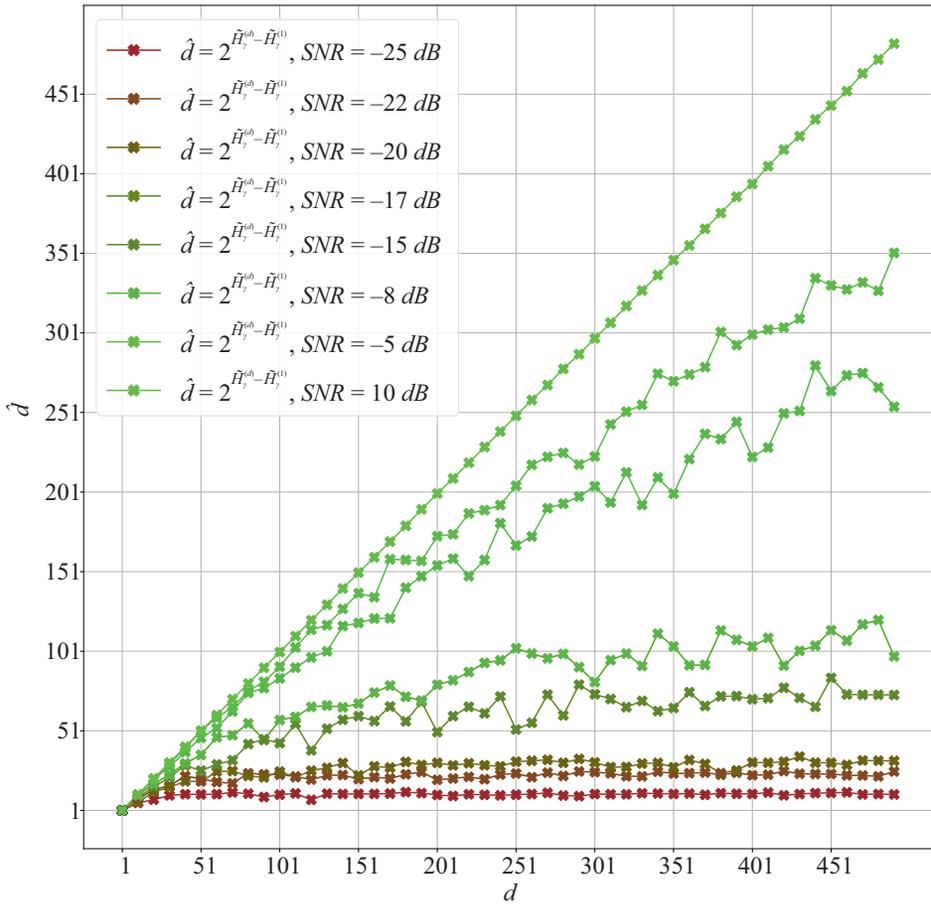


Рис. 4. Оценка количества компонент  $d$ -сигнала длины  $N = 65\,536$  в белом шуме с помощью энтропии Реньи ( $\gamma = 10$ ) для разных  $SNR$ .

стей классификации сигналов в белом шуме посредством диаграммы статистической сложности. Сплошная черная линия – это теоретическая оценка, полученная при помощи формулы из [16]:

$$(56) \quad SNR > 10 \lg \left( \frac{3d}{N - 3d} \right).$$

Тонкой пунктирной линией на рис. 3 показаны предельные возможности обнаружения сигнала при помощи критерия  $C_s$  (спектральная сложность). Результат зависимости предельного  $SNR$  от количества дискрет в спектре был получен посредством численного эксперимента ( $ROC = 0,95$ )<sup>3</sup>. Толстая пунктирная линия определяет оценку по формуле (55) при  $\gamma = 3$ .

<sup>3</sup> Площадь под ROC-кривой (Receiver Operating Characteristic) или AUC (Area Under the Receiver Operating Characteristic curve). На практике для метрики оценки качества модели машинного обучения значение ROC-AUC 0,5 предполагает отсутствие какой-либо способности обнаруживать сигнал в шуме на основе заданного критерия, значение от 0,7 до 0,8 считается приемлемым, от 0,8 до 0,9 считается высоким, а значение более 0,9 считается превосходным.

Полученная формула (53) для  $\tilde{H}_\gamma^{(d)}$  позволяет сформулировать следующую лемму для оценки  $\hat{d}$  количества компонент  $d$ -сигнала.

*Замечание 10.* Оценка  $\hat{d}$  количества компонент  $d$ -сигнала при использовании энтропии Реньи записывается в следующем виде:

$$(57) \quad \hat{d} = 2^{\tilde{H}_\gamma^{(\hat{d})} - \tilde{H}_\gamma^{(1)}}.$$

*Доказательство.* Выпишем формулу (53) для  $d = \hat{d}$  и  $d = 1$ :

$$(58) \quad \begin{cases} \log_2 \hat{d} = \tilde{H}_\gamma^{(\hat{d})} - \frac{\gamma}{1-\gamma} \left[ \frac{SNR}{10} \log_2 10 - \log_2 \left( 1 + 10^{\frac{SNR}{10}} \right) \right], \\ \log_2 1 = 0 = \tilde{H}_\gamma^{(1)} - \frac{\gamma}{1-\gamma} \left[ \frac{SNR}{10} \log_2 10 - \log_2 \left( 1 + 10^{\frac{SNR}{10}} \right) \right]. \end{cases}$$

Выразив таким образом одинаковое в обоих случаях слагаемое, зависящее от  $SNR$ , в системе (58) через  $\tilde{H}_\gamma^{(1)}$ , получим утверждение леммы.

На рис. 4 представлена численная валидация замечания 10 в виде зависимости оценки количества компонент по формуле (57) для сгенерированных сигналов, состоящих из  $d$  гармонических компонент, смешанных с белым шумом для разных  $SNR$ . Из рис. 4 видно, что можно говорить о достаточно устойчивой оценке до 100 компонент при условии величины белого шума до  $-10$  dB.

Далее получим оценку количества компонент, если использовать ненормированную энтропию Шеннона. Для этого представим выражение  $\tilde{H}^{(d)}$ , оценивающее энтропию Шеннона для  $d$ -сигнала при больших  $N$ .

$$(59) \quad \begin{aligned} H^{(d)} &= - \left( d \frac{p_{\max}}{d} \log_2 \frac{p_{\max}}{d} + (N-d) \frac{1-p_{\max}}{N-d} \log_2 \frac{1-p_{\max}}{N-d} \right) = \\ &= - \left( p_{\max} \log_2 \frac{p_{\max}}{d} + (1-p_{\max}) \log_2 \frac{1-p_{\max}}{N-d} \right) = \\ &= - (p_{\max} \log_2 p_{\max} + (1-p_{\max}) \log_2 (1-p_{\max})) + \\ &\quad + (p_{\max} \log_2 d + (1-p_{\max}) \log_2 (N-d)). \end{aligned}$$

Слагаемые в левой скобке ограничены в силу ограниченности  $0 < p_{\max} < 1$ , поэтому они не будут входить в выражение для  $\tilde{H}^{(d)}$ .

$$(60) \quad H^{(d)} \approx \tilde{H}^{(d)} = p_{\max} \log_2 d + (1-p_{\max}) \log_2 N.$$

Для получения оценки  $\hat{d}$  по аналогии с доказательством замечания 10 рассмотрим энтропию Шеннона при  $d = \hat{d}$  и  $d = 1$ .

$$(61) \quad \tilde{H}^{(1)} = (1-p_{\max}) \log_2 N \implies p_{\max} = 1 - \frac{\tilde{H}^{(1)}}{\log_2 N}.$$

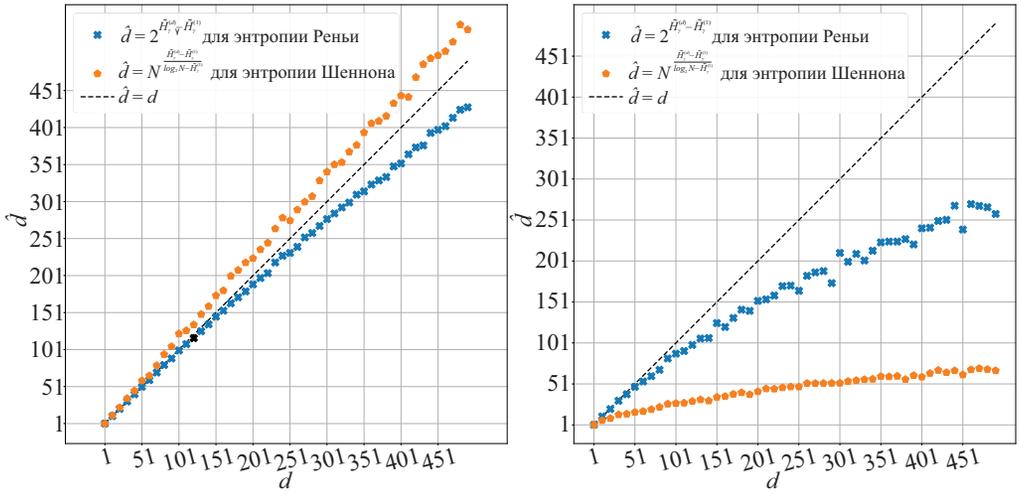


Рис. 5. Оценка количества компонент  $d$ -сигнала длины  $N = 65\,536$  в белом шуме с помощью энтропии Реньи ( $\gamma = 10$ ) и энтропии Шеннона для  $SNR = 0$  dB и  $SNR = -8$  dB.

Теперь используем полученное выражение  $p_{\max}$  для  $\tilde{H}(\hat{d})$ .

$$(62) \quad \tilde{H}(\hat{d}) = \left(1 - \frac{\tilde{H}(1)}{\log_2 N}\right) \log_2 d + \log_2 N \frac{\tilde{H}(1)}{\log_2 N}.$$

Откуда

$$(63) \quad \log_2 \hat{d} = \frac{(\tilde{H}(\hat{d}) - \tilde{H}(1)) \log_2 N}{(\log_2 N - \tilde{H}(1))} \implies \hat{d} = N^{\frac{\tilde{H}(\hat{d}) - \tilde{H}(1)}{\log_2 N - \tilde{H}(1)}}.$$

В результате справедливо следующее замечание.

*Замечание 11.* Оценка  $\hat{d}$  количества компонент  $d$ -сигнала при использовании энтропии Шеннона записывается в следующем виде:

$$(64) \quad \hat{d} = N^{\frac{\tilde{H}(\hat{d}) - \tilde{H}(1)}{\log_2 N - \tilde{H}(1)}}.$$

На рис. 5 показано сравнение функционирования оценок количества компонент по формулам (57) и (64), основанным на энтропии Реньи и Шеннона соответственно. Видно, что энтропия Реньи дает более робастную оценку.

## 6. Заключение

В работе установлена последовательность оптимизационных подзадач, требующих решения, для обнаружения сигнала в шуме, в том числе при малом отношении сигнал/помеха. В общем случае требуется определиться

с оптимальным статистическим тестом в задаче различения двух гипотез, установить оптимальные правила задания тестовой статистики наблюдений на основе дискретных спектральных или частотно-временных распределений, а также задать вид оптимального критерия различения. Аналитические конструкции критериев, понятие  $d$ -сигналов, информационные критерии обнаружения составляют основу решения этой бинарной задачи классификации: присутствует сигнал или нет. Дальнейшее улучшение качества решения такой задачи возможно при уточнении статистических свойств шума и сигнала в шуме.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rihaczek A.* Signal energy distribution in time and frequency // *IEEE Transactions on Information Theory*. 1968. V. 14. No. 3. P. 369–374.
2. *Cohen L.* Time-Frequency Analysis. New Jersey: Prentice Hall, 1995.
3. *Dobrushin R.L., Pinsker M.S., Shiryaev A.S.* An application of the concept of entropy to problems of detecting a signal in the noise // *Lithuanian Mathematical Journal*. 1963. V. 3. No. 1. P. 107–122.
4. *Babikov V.G., Galyaev A.A.* Analytical Representation of Complexity Diagrams // *Problems of Information Transmission*. 2025. V. 61. No. 1. P. 31–46.
5. *Horie T., Burioka N., Amisaki T., Shimizu E.* Sample entropy in electrocardiogram during atrial fibrillation // *Yonago Acta Med*. 2018. V. 61. No. 1. P. 49–57.
6. *Ribeiro M., Henriques T., Castro L., et al.* The Entropy Universe // *Entropy*. 2021. V. 23. No. 2. P. 1–35.
7. *Zunino L., Soriano M.C., Rosso O.A.* Distinguishing chaotic and stochastic dynamics from time series by using a multiscale symbolic approach // *Phys. Rev. E Stat. Nonlin. Soft Matter Phys*. 2012. V. 86. No. 4. P. 1–10.
8. *Shen J., Hung J., Lee L.* Robust entropy-based endpoint detection for speech recognition in noisy environments // 5th International Conference on Spoken Language Processing (ICSLP 1998). ISCA, 1998.
9. *Allen R.L., Mills D.W.* Signal Analysis: Time, Frequency, Scale, and Structure. New Jersey: John Wiley & Sons, 2004.
10. *Berlin L.M., Galyaev A.A., Lysenko P.V.* Comparison of information criteria for detection of useful signals in noisy environments // *Sensors*. 2023. V. 23. No. 4. P. 1–17.
11. *Ramirez J., Segura J.C., Benitez C., et al.* A New Kullback–Leibler VAD for Speech Recognition in Noise // *IEEE Signal Process. Lett.* 2004. V. 11. No. 2. P. 266–269.
12. *Mehrotra K.G., Mohan C.K., Huang H.* Anomaly detection principles and algorithms. Terrorism, Security, and Computation. Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2018.
13. *Galyaev A.A., Berlin L.M., et al.* Order statistics of the normalized spectral distribution for detecting weak signals in white noise // *Autom. Remote Control*. 2024. No. 12. P. 1–16.

14. *Ширяев А.Н.* Вероятностно-статистические методы в теории принятия решений. М.: МЦНМО: НМУ, 2020.
15. *Johnson P., Moriarty J., Peskir G.* Detecting changes in real-time data: a user's guide to optimal detection // *Philos. Trans. A Math. Phys. Eng. Sci.* 2017. V. 375. No. 2100. P. 1–16.
16. *Babikov V.G., Galyaev A.A.* Information Diagrams and Their Capabilities for Classifying Weak Signals // *Problems of Information Transmission.* 2024. V. 60. No. 2. P. 127–140.
17. *Galyaev A.A., Babikov V.G., Lysenko P.V., Berlin L.M.* A new spectral measure of complexity and its capabilities for detecting signals in noise // *Dokl. Math.* 2024. V. 110. No. 1. P. 361–368.
18. *Sason I.* On f-divergences: Integral representations, local behavior, and inequalities // *Entropy.* 2018. V. 20. No. 5. P. 1–32.
19. *López-Ruiz Ricardo.* Shannon information, LMC complexity and Rényi entropies: a straightforward approach // *Biophys. Chem.* 2005. V. 115. No. 2–3. P. 215–218.
20. *Boashash B.* Time-Frequency Signal Analysis and Processing. A Comprehensive Reference. London: Academic Press, 2016.
21. *Shannon C.E.* A mathematical theory of communication // *Bell Syst. Tech. J.* 1948. V. 27. P. 379–423.
22. *Rényi Alfréd.* On measures of entropy and information // *Proceedings of the fourth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability, volume 1: contributions to the theory of statistics.* University of California Press, 1961. V. 4. P. 547–562.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В. Назиным.*

Поступила в редакцию 07.07.2025

После доработки 01.09.2025

Принята к публикации 24.09.2025