*Управление в социально-экономических системах*

© 2026 г. **Р.К. ШАВШИН** (ruslanshavshin@gmail.com)
**(Национальный исследовательский университет
Высшая школа экономики, Москва)**

# РОЛЬ ДИЗАЙНА РЫНКА В ЦЕНООБРАЗОВАНИИ И РАСПРЕДЕЛЕНИИ РЫНОЧНОЙ ВЛАСТИ НА КОНЕЧНЫХ РЫНКАХ[1]

Анализируется влияние дизайна рынка на равновесные характеристики на конечных рынках. Рассматривается модель направленного поиска на рынке труда в двух вариациях: когда условия контрактов предлагают фирмы и когда их предлагают сотрудники. Демонстрируется, что предпочтения сторон рынка (сотрудников, фирм и общества в целом) относительно его дизайна зависят от размеров рынка и могут как совпадать, так и различаться между различными сторонами. В рамках анализа показывается, что при определенном соотношении численности сторон рынка прирост в ожидаемом количестве заключенных контрактов превышает 10%.

*Ключевые слова*: дизайн рынка, направленный поиск, конечные рынки, рынок труда.

**DOI:** 10.7868/S2413977726030063

## 1. Введение

Концепция направленного поиска, лежащая в основе широкого класса исследований, предлагает свой взгляд на устройство рыночной структуры и взаимодействия, позволяющий объяснить некоторые важные наблюдаемые в реальности феномены. Одним из таких явлений является сосуществование на различных сторонах рынка агентов, которые могли бы заключить между собой сделку, но в итоге работы рыночного механизма оставшихся без контракта. Примеры включают в себя одновременное существование свободных вакансий и безработицы на рынке труда, одиноких мужчин и женщин в поиске на брачном рынке, необслуженных покупателей и продавцов с оставшимися запасами на товарном рынке.

Ключевая идея, определяющая концепцию направленного поиска, состоит в том, что процесс соединения агентов с разных сторон рынка происходит не случайным образом, а является результатом стратегического взаимодействия.

[1] Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

– На первом этапе агенты на одной из сторон рынка (*Proposers*) одновременно и независимо публично объявляют условия, на которых каждый из них готов заключить контракт с любым агентом с другой стороны рынка (*Respondents*).

– На втором этапе агенты на стороне *Respondents*, *наблюдая все предложенные контракты*, одновременно и независимо решают, с каким из агентов на стороне *Proposers* они хотят попытаться заключить контракт. Именно в этот момент происходит «направленный поиск» в том смысле, что решение агентами из *Respondents* принимается стратегически исходя из предложенных агентами на стороне *Proposers* условий и предсказания поведения других агентов со стороны *Respondents*.

– На третьем этапе взаимодействие происходит отдельно внутри образовавшихся подгрупп, состоящих из агента со стороны *Proposers* и всех агентов со стороны *Respondents*, решивших попытаться заключить контракт с данным агентом на предыдущем этапе. С помощью некоторого механизма в каждой подгруппе определяется пара агентов с разных сторон рынка, заключающих контракт, или отмечается отсутствие в итоге такой пары. В качестве механизма могут выступать усложненные варианты как аукционов того или иного формата, однако зачастую интерес представляет нестратегический механизм случайного сведения агентов с разных сторон рынка, соответствующий, например, ситуации, в которой продавец назначает цену на свой товар и затем случайно выбирает покупателя среди тех, кто подал заявку на покупку.

Базовой работой, наиболее близкой к этой, является [1], в которой рассматривается товарный рынок с однородными фирмами и покупателями, одной единицей товара у каждой фирмы и механизмом случайного сведения фирмы с одним из пришедших к ней покупателей. В дальнейшем было предложено множество продвижений и расширений, полноценный обзор которых представлен в [2]. При этом обобщений, сохраняющих возможность получения равновесных формул в явном виде, практически не представлено. Одним из таких является работа [3], где равновесие выводится аналитически для случая, в котором фирмам позволяется иметь произвольный объем запасов, больший нуля.

Похожие мотивы возникают также в задаче определения стабильного паросочетания. Известно, что алгоритм Гейла–Шэпли ( [4]) позволяет найти два решения указанной задачи, являющихся при этом верхним и нижним элементами решетки стабильных паросочетаний. Это означает, что вариация алгоритма Гейла–Шэпли, в которой фирмы являются предлагающей стороной, всегда приводит к стабильному соответствию, наилучшему для всех фирм и наихудшему для всех сотрудников из всех возможных стабильных паросочетаний. Обратное верно для вариации алгоритма Гейла–Шэпли, в которой предлагающей стороной являются сотрудники. В отличие от вышесказанного в рассматриваемой здесь модели в зависимости от размеров рынка фирмам, как и сотрудникам, может быть выгодно отказаться от роли предлагающей стороны, при этом в ситуации с одинаковым числом агентов на различных сторонах рынка возможность получения преимущества одной стороной рынка над другой за счет смены дизайна в принципе отсутствует.

В существующей литературе при всем вышесказанном еще не было уделено внимания вопросу о том, как равновесные характеристики зависят от ключевого элемента базовой структуры рынка, а именно от того, кто является «покупателем», а кто – «продавцом». Однако данный вопрос играет важную роль в определении политики и последствий ее внедрения. Например, онлайн-платформа по соединению учеников и репетиторов может путем изменения своей архитектуры и дизайна взаимодействия пользователей построить работу путем выкладывания резюме репетиторами и откликов на них учеников или путем создания публичных заявок учениками и откликов на них заинтересовавшихся репетиторов. В зависимости от оценки ожидаемого количества пользователей, на каждой из сторон рынка платформа, обычно получающая комиссию за создание успешной пары, может внедрить тот или иной функционал с целью максимизации ожидаемого числа образовавшихся стабильных пар и, в конечном счете, ожидаемой комиссии. Аналогичный вопрос актуален для онлайн-платформ оказания услуг (*profi.ru*), поиска работы (*hh.ru*) и многих других. Важно отметить, что в реальности зачастую на платформе реализован не чисто один из вариантов, а некоторая их комбинация. При этом понимание того, как равновесные характеристики соотносятся друг с другом в двух предельных случаях в рамках стилизованной модели, поможет пролить свет на структуру оптимального дизайна платформы в более приближенных к реальности ситуациях.

В рамках анализа в этой работе была рассмотрена формулировка задачи в терминах рынка труда с однородными фирмами, обладающими одной свободной вакансией и готовыми платить максимальную заработную плату $wage_{\max}$, и однородными сотрудниками, желающими устроиться на работу при обеспечении минимальной заработной платы $0 \leqslant wage_{\min} < wage_{\max}$. Был проведен сравнительный анализ равновесных характеристик в зависимости от размеров рынка, т.е. количества фирм и сотрудников в случаях, когда условия контрактов в виде заработной платы предлагают сотрудники путем публикации резюме и когда заработную плату объявляют фирмы, публикуя описание вакансий.

Ключевой вклад этой работы заключается в определении структуры предпочтений различных сторон рынка (сотрудников, фирм и общества в целом) в зависимости от его размера. Продемонстрировано, что

– с точки зрения общественного благосостояния, определяемого как ожидаемое число сделок на рынке, публикация условий контрактов на первом этапе стороной с меньшей численностью предпочтительна, так как доставляет большее целевое значение, чем в обратном случае;

– с точки зрения каждой из сторон в ситуации, когда их численность отличается друг от друга не слишком сильно, предпочтительнее с точки зрения максимизации собственного излишка передать обязанность публиковать условия контрактов на первом этапе другой стороне и занять позицию откликающихся на уже опубликованные предложения на втором этапе. В то же время в ситуации, когда численность фирм и сотрудников существенно отличается, с точки зрения максимизации собственного излишка каждой из сторон выгоднее самой публиковать условия контрактов на первом этапе;

– в силу того, что понятие существенности отличается для сторон из-за различных размеров каждой из них и, как следствие, асимметричности, множество всех допустимых размеров рынка разбивается на части в зависимости от всевозможных комбинаций набора предпочтений сторон рынка относительно обязанности публикации контрактов на первом этапе.

Помимо этого, оценены масштабы неэффективности и продемонстрировано, что при определенных размерах рынка исключительно за счет смены его дизайна можно добиться увеличения ожидаемого количества заключенных контрактов более чем на 10%.

Еще одним итогом проведенного анализа стала демонстрация неоднородности сути предпочтений сторон: описана ситуация, в которой одна из сторон рынка в результате смены его дизайна может потерять в своей относительной доле в совокупном излишке, но при этом выиграть в денежном выражении за счет роста совокупного излишка в результате более эффективной координации агентов на рынке. Другая сторона рынка также выигрывает в денежном выражении в рассматриваемом случае.

Таким образом, полученные результаты могут быть использованы при определении оптимального дизайна онлайн-платформы или иного рынка в зависимости от целевой функции лица, принимающего решение.

## 2. Модель

### *2.1. Описание рынка*

Рассмотрим рынок труда, на котором присутствуют $n_f \geqslant 2$ однородных фирм, у каждой из которых есть ровно одна открытая вакансия, и $n_w \geqslant 2$ находящихся в поиске работы сотрудников. Обозначим множество сторон как $S = \{\text{Фирмы, Сотрудники}\}$. Пусть минимальная заработная плата, за которую готов работать каждый из сотрудников, равна $wage_{\min} \geqslant 0$, а максимальная заработная плата, которую готова платить каждая из фирм, равна $wage_{\max} > wage_{\min}$. Обозначим разность $wage_{\max}$ и $wage_{\min}$ как $\Delta wage$. Рынок устроен следующим образом.

На первом этапе агенты на одной из сторон рынка $Proposers \in S$ одновременно и независимо устанавливают вектор заработных плат. Например, если такой стороной являются фирмы, то каждая из них делает публичным описание вакансии с указанием фиксированной заработной платы, если же стороной *Proposers* являются сотрудники, то каждый из них делает публичным свое резюме с указанием желаемой заработной платы. Ни в том, ни в другом случае заявленная заработная плата не может быть изменена позднее и станет частью действующего контракта соискателя в случае успешных переговоров.

На втором этапе, наблюдая предложенные агентами стороны *Proposers* условия контрактов, агенты на второй стороне рынка $Respondents \in S$ одновременно и независимо принимают решение, с каким из контрагентов на стороне *Proposers*, при этом ровно с одним, они хотят попытаться заключить контракт. Если на первом этапе описание вакансий публиковали фирмы, то на втором потенциальные сотрудники откликаются на них, при этом каждый сотрудник может откликнуться ровно на одну вакансию. Если же изначально сотрудники публиковали резюме, то на втором этапе фирмы приглашают их к трудоустройству, при этом каждая фирма может обратиться ровно к одному сотруднику.

На третьем этапе агенты на стороне *Proposers*, изначально публиковавшей условия контрактов, рассматривают поступившие на них отклики. Если агент на данной стороне получил не менее одного отклика, то он выбирает контрагента для заключения сделки равновероятно среди откликнувшихся и заключает успешную сделку. Агенты на стороне *Proposers*, не получившие ни одного отклика, равно как и агенты на стороне *Respondents*, чей отклик не получил ответа, остаются без заключенного контракта с нулевой полезностью / прибылью.

Все агенты действуют рационально и стратегически. Каждый из них максимизирует свой выигрыш, равный $wage - wage_{\min}$ для сотрудников и $wage_{\max} - wage$ для фирм, в случае успешного заключения контракта.

Обозначим модель, в рамках которой на первом этапе фирмы публикуют вакансии, как FP (firms posting). В рамках данной модели фирмы являются *Proposers*, а сотрудники – *Respondents*. Обозначим модель, в рамках которой на первом этапе сотрудники публикуют резюме, как WP (workers posting). В рамках данной модели фирмы являются *Respondents*, а сотрудники – *Proposers*. Отметим, что каждая из версий модели в отдельности представляет собой изложение классической базовой модели направленного поиска [1] в контексте рынка труда. В следующем разделе будет найдено совершенное в подыграх симметричное равновесие в каждой из моделей и сравнены равновесные характеристики.

### *2.2. Равновесие*

В рамках данной секции отойдем от терминологии фирма / сотрудник и переформулируем условие задачи в терминах сторон *Proposers* / *Respondents*, рассмотренных во введении. Пусть количество агентов на стороне *Proposers* равно $n_p \geqslant 2$, на стороне *Respondents* – $n_r \geqslant 2$. Пусть полезность каждого агента от заключения контракта до вычета издержек (цены) на стороне *Proposers* равна $val_p \geqslant 0$, а на стороне *Respondents* – $val_r \geqslant 0$. При этом в зависимости от устройства функций полезности агентов из *Proposers* / *Respondents* их выигрыш принимает одну из двух форм:

$$\begin{cases} gain_p(val) = val - val_p, \\ gain_r(val) = val_r - val, \end{cases}$$

если в случае заключения контракта денежный трансфер в размере $val$ идет в направлении $Respondents \Longrightarrow Proposers$, подразумевая, что $val_r > val_p$, и

$$\begin{cases} gain_p(val) = val_p - val, \\ gain_r(val) = val - val_r \end{cases}$$

в обратном случае.

*Теорема 1. В рассматриваемой модели существует единственное некоординированное совершенное в подыграх симметричное равновесие, в котором каждый агент из Proposers на первом этапе предлагает цену контракта*

$$val = \frac{val_p\left(\frac{n_r}{n_p}\right)\left(1-\frac{1}{n_p}\right)^{n_r} + val_r\left(1-\left(1-\frac{1}{n_p}\right)^{n_r-1}\frac{n_r}{n_p} - \left(1-\frac{1}{n_p}\right)^{n_r}\right)}{\frac{n_r}{n_p}\left(1-\frac{1}{n_p}\right)^{n_r} + 1 - \left(1-\frac{1}{n_p}\right)^{n_r-1}\frac{n_r}{n_p} - \left(1-\frac{1}{n_p}\right)^{n_r}},$$

*а каждый агент из Respondents на втором этапе выбирает для отклика агента из Proposers равновероятно с вероятностью* $\gamma = \frac{1}{n_p}$.

*Доказательство.* Доказательство аналогично представленному в [2] для Proposition 5 с точностью до обозначений. Приведем ниже его ключевые шаги.

Чистой стратегией каждого агента $j$ из *Proposers* является

$$val_j \in \left[\min(val_r, val_p), \max(val_r, val_p)\right].$$

Обозначим через $\mathbf{val} = (val_1, \ldots, val_{n_p})$ профиль стратегий агентов *Proposers*.

Стратегией поиска для агента $i$ из *Respondents* является вектор

$$\gamma_{i*} = (\gamma_{i1}, \ldots, \gamma_{in_p}),$$

где $\gamma_{ij}$ отражает вероятность для данного агента $i$ из *Respondents* выбрать для попытки заключения контракта агента $j$ из *Proposers*. Обозначим через

$$\underset{n_r \times n_p}{\Gamma} = (\gamma_{1*}, \ldots, \gamma_{n_r*})^T = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n_r1} & \cdots & \gamma_{n_rn_p} \end{pmatrix}$$

профиль стратегий агентов *Respondents*.

Равновесием является $(\mathbf{val}, \Gamma)$ такие, что ни один агент не имеет стимулов к отклонению, при этом симметричным является равновесие, в котором $val_j = val$ и $\gamma_{ij} = \frac{1}{n_p}$. Чтобы проверить, является ли заданная пара $(\mathbf{val}, \Gamma)$ равновесием, необходимо проверить, что происходит после единоличного отклонения одного из агентов *Proposers*. Начнем с симметричного вектора $\mathbf{val} = (val, \ldots, val)$ и без ограничения общности предположим, что первый агент из *Proposers* отклонился от стратегии $val$ к стратегии $val^{dev}$. Таким образом, теперь $\mathbf{val} = (val^{dev}, val, \ldots, val)$. Необходимо проверить, является ли данное отклонение прибыльным при условии симметричного равновесия после отклонения.

Пусть для любого агента $i$ из *Respondents* вероятность того, что он попытается заключить контракт с отклонившимся агентом *Proposers*, после отклонения равна $\gamma^{dev} = \gamma_{i1}(val^{dev}, val)$. Симметричное совершенное к подыграм равновесие описывается через $val$ и $\gamma^{dev}(val^{dev}, val)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $val^{dev} = val$ доставляет максимум функции полезности потенциально отклоняющегося агента *Proposers* при условии отсутствия отклонений других агентов;
2) $(\gamma^{dev})^*(val^{dev}, val)$ составляет равновесие в подыгре для любых $val^{dev}$ и $val$;
3) на равновесном пути имеем $\gamma_{ij} = \frac{1}{n_p}$, хотя после отклонения агенты *Respondents* посещают отклонившегося агента из *Proposers* с вероятностью $\gamma^{dev} = \gamma^{dev}(val^{dev}, val)$, а всех остальных агентов *Proposers* равновероятно с вероятностью $\gamma^{nondev} = \frac{1-\gamma^{dev}}{n_p-1}$.

Вероятность того, что хотя бы один агент из *Respondents* попытается заключить контракт с отклонившимся агентом из *Proposers*, равна

$$\alpha_p^{dev} = 1 - \left(1 - \gamma^{dev}\right)^{n_r}.$$

Обозначим вероятность того, что агент *Respondents* заключит контракт, если он отправится к отклонившемуся агенту *Proposers*, как $\alpha_r^{dev} = \alpha_r^{dev}(val^{dev}, val)$. Заметим, что $n_r\gamma^{dev}\alpha_r^{dev} = \alpha_p^{dev}$, так как в левой части стоит ожидаемое число агентов *Respondents*, с которыми заключит контракт отклонившийся агент *Proposers*, а в правой части – ожидаемое число заключенных отклонившимся агентом контрактов. Таким образом,

$$\alpha_r^{dev} = \frac{1 - \left(1 - \gamma^{dev}\right)^{n_r}}{n_r\gamma^{dev}}.$$

Ожидаемая полезность отклонившегося агента из *Proposers* равна

$$V_p^{dev}(val^{dev}, val) = \alpha_p^{dev} gain_p(val^{dev}) = \left(1 - \left(1 - \gamma^{dev}\right)^{n_r}\right) gain_p(val^{dev}).$$

Ожидаемая полезность агента из *Respondents*, пытающегося заключить контракт с отклонившимся агентом из *Proposers*, равна

$$V_r^{dev}(val^{dev}, val) = \alpha_r^{dev} gain_r(val^{dev}) = \frac{1 - \left(1 - \gamma^{dev}\right)^{n_r}}{n_r\gamma^{dev}} gain_r(val^{dev}).$$

Ожидаемая полезность агента из *Respondents*, пытающегося заключить контракт с любым из неотклонившихся агентов из *Proposers*, равна

$$V_r^{nondev}(val^{dev}, val) = \frac{1 - \left(1 - \gamma^{nondev}\right)^{n_r}}{n_r\gamma^{nondev}} gain_r(val).$$

С учетом вышеописанного условия первого порядка для максимизации функции полезности $V_p^{dev}(val^{dev}, val)$ потенциально отклоняющегося агента

*Proposers* при условии отсутствия отклонений других агентов имеют вид:

$$0 = \frac{\partial V_p^{dev}}{\partial val^{dev}} = sgn(val_r - val_p)\alpha_p^{dev} + gain_p(val^{dev})\frac{\partial \alpha_p^{dev}}{\partial val^{dev}} =$$
$$= sgn(val_r - val_p)\alpha_p^{dev} + n_r(1-\gamma^{dev})^{n_r-1}gain_p(val^{dev})\frac{\partial \gamma^{dev}}{\partial val^{dev}}.$$

В симметричном смешанном равновесии в подыгре агентам *Respondents* безразлично, с каким из агентов *Proposers* (отклонившимся или любым из неотклонившихся) пытаться заключить контракт. Таким образом, $\gamma^{dev}$ удовлетворяет условию

$$\frac{1-(1-\gamma^{dev})^{n_r}}{n_r\gamma^{dev}}gain_r(val^{dev}) = \frac{1-(1-\gamma^{nondev})^{n_r}}{n_r\gamma^{nondev}}gain_r(val).$$

Для любого $\gamma^{dev} \in (0,1)$ можно взять производную неявной функции $\frac{\partial \gamma^{dev}}{\partial val^{dev}}$ и подставить ее в выведенные выше условия первого порядка для функции ожидаемой полезности отклонившегося агента из *Proposers*. Упрощение выражения подстановкой $\gamma^{dev} = \frac{1}{n_p}$ и $val^{dev} = val$ доказывает, что отклонение невыгодно тогда и только тогда, когда $val$ принимает значение, определяемое выражением в условии настоящей теоремы.

Теорема доказана.

Приведем теперь формулы ключевых равновесных характеристик, рассматриваемых далее при сравнении дизайнов рынка.

*Следствие 1. Безусловная вероятность заключить сделку в равновесии для каждого агента Respondents равна*

$$\nu(\gamma, n_r) = \sum_{i=1}^{n_p} \gamma\mu(\gamma, n_r) = \mu(\gamma, n_r) = \frac{1-\left(1-\frac{1}{n_p}\right)^{n_r}}{\frac{n_r}{n_p}},$$

*где $\mu(\gamma, n_r)$ – вероятность для агента из Respondents заключить сделку с выбранным агентом из Proposers при условии, что данный агент из Respondents выбрал для отклика заданного агента из Proposers с вероятностью один, а все остальные $n_r - 1$ агентов из Respondents выбирают данного агента из Proposers с равновесной вероятностью $\gamma$.*

*Ожидаемая полезность каждого агента из Respondents в равновесии имеет вид*

$$\mathbf{E}\left[u_r\right] = gain_r\nu(\gamma, n_r) = \frac{|val_r - val_p|\left(1-\frac{1}{n_p}\right)^{n_r}\left(1-\left(1-\frac{1}{n_p}\right)^{n_r}\right)}{\frac{n_r}{n_p}\left(1-\frac{1}{n_p}\right)^{n_r} + 1 - \left(1-\frac{1}{n_p}\right)^{n_r-1}\frac{n_r}{n_p} - \left(1-\frac{1}{n_p}\right)^{n_r}}$$

*и может быть ограничена сверху и снизу как:*

$$\mathbf{E}\left[u_r\right] \in |val_r - val_p|\left(\left(1-\frac{1}{n_p}\right)^{n_r}, \left(1-\frac{1}{n_p}\right)^{n_r-1}\right).$$

*Ожидаемый излишек агентов Respondents (Respondents Surplus, RS) в равновесии имеет вид*

$$\mathbf{E}\left[RS\right] = n_r \mathbf{E}\left[u_r\right].$$

*Ожидаемая полезность каждого агента из Proposers в равновесии имеет вид*

$$\mathbf{E}\left[u_p\right] = gain_p n_r \gamma \mu(\gamma, n_r) =$$

$$= \frac{|val_r - val_p| \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_p}\right)^{n_r}\right)\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_p}\right)^{n_r - 1} \frac{n_r}{n_p} - \left(1 - \frac{1}{n_p}\right)^{n_r}\right)}{\frac{n_r}{n_p}\left(1 - \frac{1}{n_p}\right)^{n_r} + 1 - \left(1 - \frac{1}{n_p}\right)^{n_r - 1} \frac{n_r}{n_p} - \left(1 - \frac{1}{n_p}\right)^{n_r}}$$

*и ограничена снизу и сверху как:*

$$\mathbf{E}\left[u_p\right] \in |val_r - val_p| \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_p}\right)^{n_r - 1} \frac{n_r}{n_p} - \left(1 - \frac{1}{n_p}\right)^{n_r}, \right.$$

$$\left. \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_p}\right)^{n_r - 1} \frac{n_r}{n_p} - \left(1 - \frac{1}{n_p}\right)^{n_r}\right)\left(1 + \frac{1}{n_p - 1}\right)\right).$$

*Ожидаемый излишек агентов Proposers (Proposers Surplus, PS) в равновесии имеет вид*

$$\mathbf{E}\left[PS\right] = n_p \mathbf{E}\left[u_p\right].$$

*Ожидаемый совокупный излишек (Total Surplus, TS) в равновесии равен*

$$\mathbf{E}\left[TS\right] = \mathbf{E}\left[PS\right] + \mathbf{E}\left[RS\right] = n_p \mathbf{E}\left[u_p\right] + n_r \mathbf{E}\left[u_r\right] =$$

$$= |val_r - val_p|\, n_r \nu(\gamma, n_r) = |val_r - val_p|\, n_p \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_p}\right)^{n_r}\right).$$

*Здесь важно отметить несколько моментов.*

*Во-первых, использование указанных выше верхней границы ожидаемой полезности агента из Respondents вместе с нижней границей ожидаемой полезности агента из Proposers дает точное выражение ожидаемого совокупного излишка.*

*Во-вторых, в допущении того, что аргументы $n_p$ и $n_r$ функции ожидаемого совокупного излишка вещественнозначные, первая производная по каждому из них равна нижней границе функции ожидаемой полезности агентов из Proposers и Respondents соответственно.*

*Ожидаемое число заключенных контрактов (Number of Deals, ND) в равновесии равно*

$$\mathbf{E}\left[ND\right] = \frac{1}{|val_r - val_p|}\mathbf{E}\left[TS\right].$$

*Ожидаемая доля заключенных контрактов от максимально возможного числа (Share of Deals, SD) равна*

$$\mathbf{E}\left[SD\right] = \max\left(\frac{1}{n_p}, \frac{1}{n_r}\right)\mathbf{E}\left[ND\right].$$

*Доля ожидаемого излишка агентов Respondents в ожидаемом совокупном излишке ограничена снизу и сверху как*

$$\frac{\mathbf{E}\left[RS\right]}{\mathbf{E}\left[TS\right]} \in \left(\frac{n_r\left(1-\frac{1}{n_p}\right)^{n_r}}{n_p\left(1-\left(1-\frac{1}{n_p}\right)^{n_r}\right)}, \frac{n_r\left(1-\frac{1}{n_p}\right)^{n_r-1}}{n_p\left(1-\left(1-\frac{1}{n_p}\right)^{n_r}\right)}\right).$$

*Равновесная цена контракта может быть представлена как*

$$val = var_r + \left(val_p - val_r\right)\frac{\mathbf{E}\left[RS\right]}{\mathbf{E}\left[TS\right]}.$$

Доказательство основано на подстановке равновесной заработной платы в соответствующие выражения и дальнейших алгебраических преобразованиях.

## 3. Анализ устройства рынка

После того как в предыдущей секции были описаны равновесные характеристики рынка в общем случае, пришло время вернуться к модели с фирмами и сотрудниками и рассмотреть, как размеры рынка влияют на предпочтения сторон относительно его устройства.

### *3.1. Эффективность рынка и общественные предпочтения*

Начнем анализ с одного из ключевых аспектов, а именно с эффективности работы рыночного механизма. В качестве параметров, характеризующих эффективность, могут быть взаимозаменяемо использованы следующие величины: ожидаемое число заключенных в равновесии контрактов, ожидаемая доля заключенных контрактов или ожидаемый совокупный излишек. По отдельности данные величины были описаны в следствии 1. Здесь же в первую очередь интересует разница в указанных величинах в зависимости от устройства рынка.

*Определение 1. Функция разности ожидаемого числа заключенных контрактов в моделях FP и WP в зависимости от размеров рынка задается как*

$$\Delta_{ND}\left(n_f, n_w\right) =$$
$$= \mathbf{E}\left[ND \middle| Proposers = Firms\right] - \mathbf{E}\left[ND \middle| Proposers = Workers\right] =$$
$$= n_f\left(1-\left(1-\frac{1}{n_f}\right)^{n_w}\right) - n_w\left(1-\left(1-\frac{1}{n_w}\right)^{n_f}\right).$$

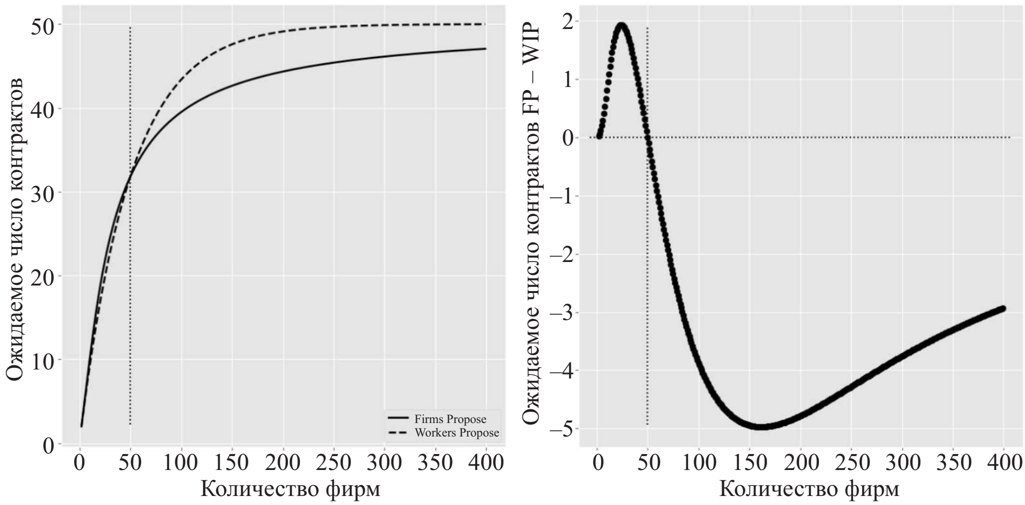


Рис. 1. Ожидаемое число заключенных в равновесии контрактов в моделях FP и WP как функция от количества фирм при $n_w = 50$, $wage_{\min} = 100$, $wage_{\max} = 200$.

*Определение 2. Функция разности ожидаемой доли заключенных контрактов от максимально возможного числа в моделях FP и WP в зависимости от размеров рынка задается как*

$$\Delta_{SD}(n_f, n_w) =$$
$$= \mathbf{E}\left[SD \middle| Proposers = Firms\right] - \mathbf{E}\left[SD \middle| Proposers = Workers\right] =$$
$$= \max\left(\frac{1}{n_f}, \frac{1}{n_w}\right)\Delta_{ND}(n_f, n_w).$$

*Определение 3. Функция разности ожидаемого совокупного излишка в моделях FP и WP в зависимости от размеров рынка задается как*

$$\Delta_{TS}(n_f, n_w) =$$
$$= \mathbf{E}\left[TS \middle| Proposers = Firms\right] - \mathbf{E}\left[TS \middle| Proposers = Workers\right] =$$
$$= (wage_{\max} - wage_{\min})\,\Delta_{ND}(n_f, n_w).$$

Заметим, что все три обозначенные функции разности имеют один и тот же знак при одинаковом значении своих аргументов. Для наглядности и удобства восприятия обратимся к графической иллюстрации, представленной на рис. 1, а затем сформулируем аналитические свойства указанных функций.

*Теорема 2. Рассмотрим функцию $\Delta_{ND}(n_f, n_w)$ разности ожидаемого числа заключенных контрактов в моделях FP и WP. Данная функция обладает следующими свойствами:*

1) $\Delta_{ND}(n_f, n_w) \geqslant 0 \iff n_f \leqslant n_w$, *причем* $\Delta_{ND}(n_f, n_w) = 0 \iff n_f = n_w$.

2) $\Delta_{ND}(n_f; n_w)$ *как функция от* $n_f$ *при фиксированном* $n_w$

– *возрастает на промежутке* $[2, \theta_1)$, *где* $2 < \theta_1 < n_w$, *при* $n_w \geqslant 5$ (*при* $2 \leqslant n_w \leqslant 4$ $\theta_1$ *считаем равным* 2),

– *убывает на промежутке* $[\theta_1, \theta_2)$, *где* $n_w < \theta_2 < \infty$,

– *возрастает на промежутке* $[\theta_2, \infty)$.

*Приближенное значение точек* $\theta_1$ *и* $\theta_2$ *задается как*

$$\begin{cases} \theta_1 \simeq \left(\dfrac{1}{k_2}\right) n_w \simeq 0{,}4747 n_w, \\ \theta_2 \simeq \left(\dfrac{1}{k_1}\right) n_w \simeq 3{,}2565 n_w, \end{cases}$$

*где* $k_1$ *и* $k_2$ – *меньший и больший положительные корни уравнения*

$$1 - (1 + k)\exp(-k) - \exp\left(-\frac{1}{k}\right) = 0. \tag{1}$$

3) *В пределе на бесконечности стремится к нулю по каждому из своих аргументов при фиксированном втором аргументе.*

*Доказательство.* Для начала заметим, что

$$\Delta_{ND}(n_f = 2; n_w) = 2\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n_w}\right) - n_w\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_w}\right)^2\right) =$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{2^{n_w}}\right) - n_w\left(1 - \left(1 - \frac{2}{n_w} + \frac{1}{n_w^2}\right)\right) =$$

$$= 2 - \frac{1}{2^{n_w - 1}} - n_w\left(\frac{2}{n_w} - \frac{1}{n_w^2}\right) =$$

$$= 2 - \frac{1}{2^{n_w - 1}} - 2 + \frac{1}{n_w} = \frac{1}{n_w} - \frac{1}{2^{n_w - 1}} > 0, \quad \forall n_w \geqslant 3$$

в силу того, что показательная функция растет быстрее, чем линейная. Также отметим, что $\Delta_{ND}(n_w; n_w) = 0$ в силу симметрии.

Расширим определение $\Delta_{ND}(n_f; n_w)$ как функции от вещественного аргумента $n_f$ при заданном параметре $n_w$.

Первая производная имеет вид

$$\Delta'_{ND}(n_f; n_w) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n_f}\right)^{n_w} - \frac{n_w}{n_f}\left(1 - \frac{1}{n_f}\right)^{n_w - 1} +$$

$$+ n_w \ln\left(1 - \frac{1}{n_w}\right)\left(1 - \frac{1}{n_w}\right)^{n_f}.$$

Воспользуемся следующими приближениями:

$$\ln\left(1-\frac{1}{a}\right)\simeq-\frac{1}{a},$$
$$\left(1-\frac{1}{a}\right)^{b}\simeq\exp\left(-\frac{b}{a}\right)$$

и перепишем выражение для первой производной в упрощенном виде:

$$\Delta_{ND}^{'}\left(n_f;n_w\right)\simeq 1-\left(1-\frac{1}{n_f}\right)^{n_w}-\frac{n_w}{n_f}\left(1-\frac{1}{n_f}\right)^{n_w-1}-\left(1-\frac{1}{n_w}\right)^{n_f},$$
$$\Delta_{ND}^{'}\left(n_f;n_w\right)\simeq 1-\exp\left(-\frac{n_w-1}{n_f}\right)\left(1+\frac{n_w-1}{n_f}\right)-\exp\left(-\frac{n_f}{n_w}\right).$$

С поправкой на приближение $\frac{n_w-1}{n_f}\simeq\frac{n_w}{n_f}$ введем замену $\frac{n_w}{n_f}=k>0$.

$$\Delta_{ND}^{'}\left(n_f;n_w\right)\simeq 1-(1+k)\exp\left(-k\right)-\exp\left(-\frac{1}{k}\right).$$

Условия первого порядка, задающие точки экстремума функции $\Delta_{ND}\left(n_f;n_w\right)$, имеют вид

$$\Delta_{ND}^{'}(n_f;n_w)=0\iff 1-(1+k)\exp\left(-k\right)-\exp\left(-\frac{1}{k}\right)=0.$$

Указанное уравнение имеет ровно два решения, удовлетворяющих условию $k>0$ (WolframAlpha):

$$\begin{cases}k_1^*\simeq 0{,}307074,\\ k_2^*\simeq 2{,}106541.\end{cases}$$

Таким образом, точки экстремума как функции от параметра $n_w$ имеют вид

$$\begin{cases}n_{f_1}^*\simeq 3{,}25654n_w,\\ n_{f_2}^*\simeq 0{,}47471n_w.\end{cases}$$

Отметим, что в рамках численного анализа удалось установить, что поправка $n_{f_1}^*\simeq 3{,}25654n_w-1$ дает чуть лучшее приближение к минимуму при рассмотрении $\Delta_{ND}$ как функции целочисленного аргумента. Однако для согласованности в основном тексте будет использоваться нескорректированная версия.

Вторая производная имеет вид

$$\Delta_{ND}^{''}\left(n_f;n_w\right)=-\frac{n_w\left(n_w-1\right)}{n_f^3}\left(1-\frac{1}{n_f}\right)^{n_w-2}+n_w\ln^2\left(1-\frac{1}{n_w}\right)\left(1-\frac{1}{n_w}\right)^{n_f}.$$

Преобразовав ее с использованием приближения для логарифма и затем сравнив с нулем, получаем:

$$\Delta''_{ND}\left(n_f; n_w\right) < 0 \iff \frac{1}{n_w}\left(1 - \frac{1}{n_w}\right)^{n_f} < \frac{n_w\left(n_w - 1\right)}{n_f^3}\left(1 - \frac{1}{n_f}\right)^{n_w - 2},$$

$$\Delta''_{ND}\left(n_f; n_w\right) < 0 \iff \left(1 - \frac{1}{n_f}\right)^{n_w - 2}\frac{1}{n_f^3} > \left(1 - \frac{1}{n_w}\right)^{n_f - 1}\frac{1}{n_w^3}.$$

Взяв натуральный логарифм от обеих частей, еще раз использовав приближение и проведя арифметические упрощения получаем:

$$\Delta''_{ND}\left(n_f; n_w\right) < 0 \iff 3\ln(n_f) + \frac{n_w - 2}{n_f} - \frac{n_f - 1}{n_w} - 3\ln(n_w) < 0.$$

Подставляя параметризованное выражение для точек экстремума в неравенство с нулем второй производной получаем следующее:

$$\Delta''_{ND}(n^*_{f_2}(n_w); n_w) < 0 \iff 3\ln(0{,}475 n_w) + \frac{n_w - 2}{0{,}475 n_w} - \frac{0{,}475 n_w - 1}{n_w} - \\ - 3\ln(n_w) < 0,$$

$$\Delta''_{ND}\left(n^*_{f_2}\left(n_w\right); n_w\right) < 0 \iff -0{,}6034 - \frac{-1{,}5253}{n_w} - \frac{-2{,}1065}{n_w - 1} < 0 \ \forall n_w \geqslant 2.$$

Таким образом, точка $n^*_{f_2}$ является точкой максимума.

Проделав аналогичное упражнение для точки $n^*_{f_1}$, получаем

$$\Delta''_{ND}\left(n^*_{f_1}\left(n_w\right); n_w\right) > 0 \iff 3\ln\left(3{,}2565 n_w\right) + \frac{n_w - 2}{3{,}2565 n_w} - \\ - \frac{3{,}2565 n_w - 1}{n_w} - 3\ln(n_w) < 0,$$

$$\Delta''_{ND}\left(n^*_{f_1}\left(n_w\right); n_w\right) > 0 \iff 7{,}1056 > \frac{7{,}2565}{n_w} + \frac{0{,}3071}{n_w - 1} \ \forall n_w \geqslant 2.$$

Таким образом, точка $n^*_{f_1}$ является точкой минимума.

Заметим, что

$$\begin{cases} n^*_{f_1} \simeq 3{,}25654 n_w > n_w, \\ n^*_{f_2} \simeq 0{,}47471 n_w < n_w, \end{cases}$$

$\forall n_w \geqslant 2$, т.е. максимум функции $\Delta_{ND}\left(n_f, n_w\right)$ расположен слева от точки $n_w$, а минимум – справа от нее.

Рассмотрим теперь асимптотическое поведение.

$$\lim_{n_f\to\infty}\Delta_{ND}\left(n_f,n_w\right)=\lim_{n_f\to\infty}n_f\left(1-\left(1-\frac{1}{n_f}\right)^{n_w}\right)-$$
$$-\lim_{n_f\to\infty}n_w\left(1-\left(1-\frac{1}{n_w}\right)^{n_f}\right)=0,$$

$$\lim_{n_f\to\infty}n_w\left(1-\left(1-\frac{1}{n_w}\right)^{n_f}\right)=n_w,$$

$$\lim_{n_f\to\infty}n_f\left(1-\left(1-\frac{1}{n_f}\right)^{n_w}\right)=n_w.$$

В заключение следует отметить несколько моментов.

Во-первых, поскольку оригинальный аргумент $n_f$ функции $\Delta_{ND}\left(n_w;n_w\right)$ является целочисленным, а не вещественным, то найденные точки минимума / максимума нуждаются в поправке на ближайшее целое число с наименьшим / наибольшим значением функции $\Delta_{ND}$.

Во-вторых, несмотря на то, что в формулировке теоремы и ее доказательстве использовались приближения, проведенный численный анализ показывает, что разность между истинным максимумом / минимумом при целочисленном значении аргумента $n_f$ и приближенным значением округления до целого не превышает 1 при любых значениях $n_w$.

Теорема доказана.

*Следствие 2. Функция $\Delta_{TS}\left(n_f,n_w\right)$ разности ожидаемого совокупного излишка в моделях FP и WP обладает теми же свойствами, описанными в теореме 2, что и функция разности ожидаемого числа заключенных контрактов $\Delta_{ND}\left(n_f,n_w\right)$.*

*Доказательство.* По определению

$$\Delta_{TS}\left(n_f,n_w\right)=\left(wage_{\max}-wage_{\min}\right)\Delta_{ND}\left(n_f,n_w\right).$$

Таким образом, относительно свойств в рамках теоремы 2 рассматриваемые функции эквиваленты как равные с точностью до умножения на положительную константу.

*Следствие 3. Функция $\Delta_{SD}\left(n_f,n_w\right)$ разности ожидаемой доли заключенных контрактов от максимально возможного числа в моделях FP и WP обладает такими же свойствами, описанными в теореме 2, как и функция разности ожидаемого числа заключенных контрактов, с поправкой на координату точки максимума $\lambda_1$. Приближенное значение точки $\lambda_1$ задается как*

$$\lambda_1\simeq k_1n_w\simeq 0{,}3071n_w,$$

*где $k_1$ – меньший из двух положительных корней уравнения 1.*

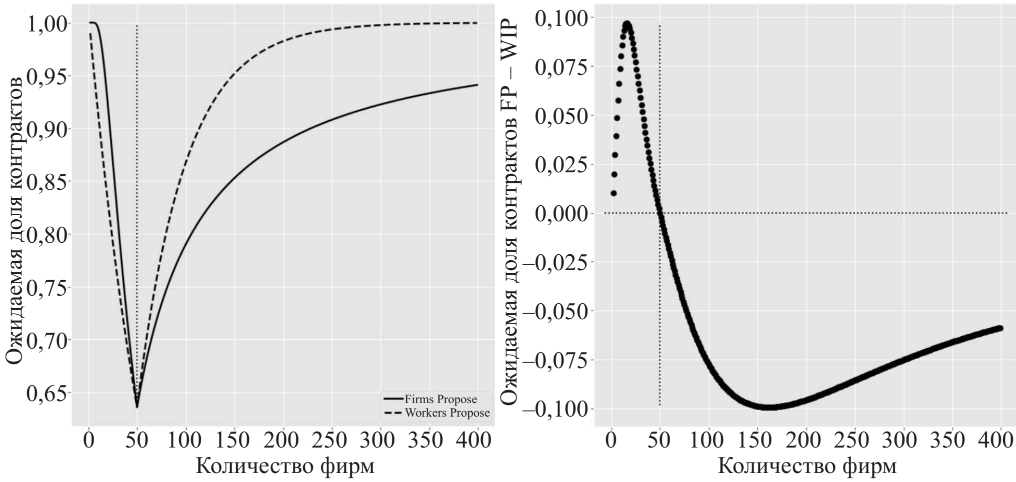


Рис. 2. Ожидаемая доля заключенных в равновесии контрактов в моделях FP и WP как функция от количества фирм при $n_w = 50$, $wage_{\min} = 100$, $wage_{\max} = 200$.

*Доказательство.* В случае $n_f \geqslant n_w$ по определению функции $\Delta_{SD}(n_f, n_w)$ имеем:

$$\Delta_{SD}(n_f, n_w) = \frac{1}{n_w}\Delta_{ND}(n_f, n_w),$$

т.е. умножение на $\frac{1}{n_w}$ не оказывает влияние ни на нули функции $\Delta_{ND}$, ни на ее поведение как функции от аргумента $n_f$ при фиксированном $n_w$.

В случае $n_f < n_w$ доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 2.

На основе обсуждения выше можно сформулировать следующее.

*Утверждение 1. С точки зрения общественного благосостояния / рыночной эффективности, измеряемых любым из способов, заданных определениями 1, 2, 3, предпочтительнее, чтобы условия контрактов на первом этапе публиковала сторона, численность которой на рынке меньше.*

В то же время, если говорить не только о бинарной относительной эффективности в двух случаях (FP и WP) при фиксированных размерах рынка, но задаться вопросом, насколько относительное превосходство одного дизайна над другим меняется при изменении размеров рынка, то корректнее перейти к рассмотрению относительных величин, таких как ожидаемая доля сделок в равновесии, графическая иллюстрация которой представлена на рис. 2.

Заметим, что размеры рынка $n_f = n_w$ являются наименее эффективными с точки зрения ожидаемой доли заключенных контрактов в обеих моделях (FP и WP), при этом в силу этой чрезвычайной неэффективности общество не может получить выгоду за счет смены дизайна рынка. В то же время для любого иного размера рынка один из дизайнов является строго предпочтительным с общественной точки зрения. При этом следует отметить, что в случае коррелированного равновесия рынок с равным числом агентов на каждой из сторон является наиболее эффективным, так как обеспечивает не только 100% долю заключенных контрактов, но и отсутствие агентов без контракта на каждой из сторон рынка.

Данная ситуация похожа на использование метрики ROC-AUC (Area Under the Receiver Operating Characteristic Curve) при оценке качества моделей машинного обучения в задаче бинарной классификации: модель, имеющая ROC-AUC, равный 0,5, является наихудшим возможным вариантом, так как соответствует случайному угадыванию и не подлежит улучшению. При этом модель, имеющая очень маленький ROC-AUC, равный 0,01, что соответствует перевернутому ранжированию классов, может быть существенно улучшена до ROC-AUC, равного $(1 - 0{,}01)$, простой переменой меток классов.

Перейдем к рассмотрению вопроса о достижимых масштабах прироста в эффективности рынка за счет смены его дизайна.

Следствие 4. *Наибольшее и наименьшее значения функции $\Delta_{SD}(n_f; n_w)$ разности ожидаемой доли заключенных контрактов от максимально возможного числа в моделях FP и WP как функции от $n_f$ при фиксированном $n_w$ приблизительно равны по абсолютной величине*

$$\Delta_{SD}(k_1 n_w; n_w) \simeq -\Delta_{SD}\left(\frac{n_w}{k_1}; n_w\right) \simeq$$
$$\simeq 1 - \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_1}\exp(-k_1) - \exp\left(-\frac{1}{k_1}\right) \simeq 10{,}04\%$$

*и достигаются в точках*

$$\begin{cases} \lambda_1 \simeq k_1 n_w \simeq 0{,}3071 n_w, \\ \theta_2 \simeq \left(\dfrac{1}{k_1}\right) n_w \simeq 3{,}2565 n_w, \end{cases}$$

*где $k_1$ – меньший из двух положительных корней уравнения 1.*

*Таким образом, при определенных размерах рынка прирост в эффективности исключительно за счет смены дизайна может превышать 10% в ожидаемой доле заключенных контрактов.*

Замечание 1. Важно отметить, что в силу используемых аппроксимаций приблизительное наибольшее и наименьшее значения функции $\Delta_{SD}(n_f; n_w)$ не зависят от параметра $n_w$. Истинные наибольшее и наименьшее значения не обладают этим свойством. При этом абсолютное расхождение не превышает 0,4% для $n_w \geqslant 50$ и падает с дальнейшим ростом $n_w$.

### *3.2. Предпочтения фирм*

Рассмотрим теперь, каковы предпочтения фирм относительно устройства рынка в зависимости от его размера. Анализируемыми характеристиками являются ожидаемая полезность отдельной фирмы и ожидаемый совокупный излишек всех фирм, а также зависимость указанных величин от дизайна рыночного механизма.

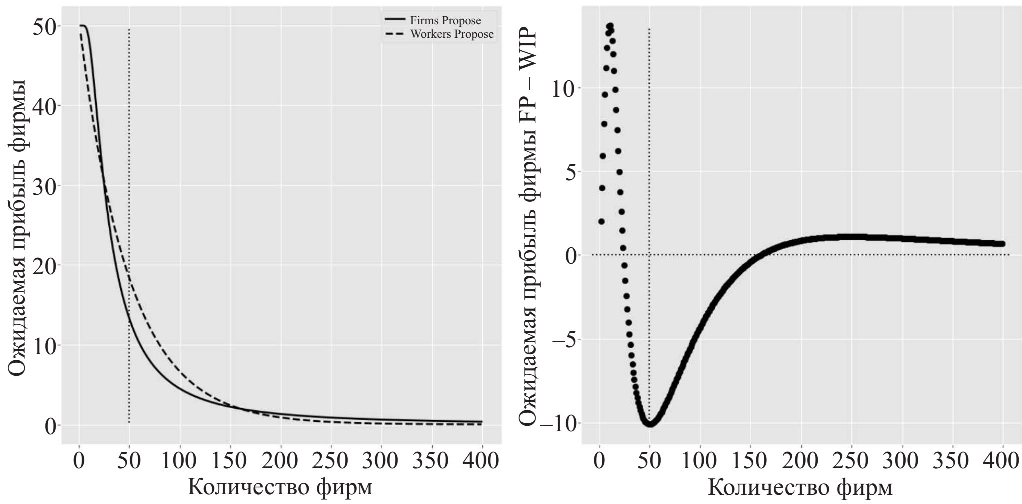


Рис. 3. Ожидаемая прибыль фирм в равновесии в моделях FP и WP как функция от количества фирм при $n_w = 50$, $wage_{\min} = 100$, $wage_{\max} = 200$.

*Определение 4. Функция разности ожидаемой прибыли фирмы в моделях FP и WP в зависимости от размеров рынка в приближенном виде задается как*

$$\Delta_{u_F}(n_f, n_w) = \mathbf{E}\left[u_p \middle| Proposers = Firms\right] - \mathbf{E}\left[u_r \middle| Proposers = Workers\right] \simeq$$

$$\simeq \Delta wage \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n_f}\right)^{n_w - 1} \frac{n_w}{n_f} - \left(1 - \frac{1}{n_f}\right)^{n_w} - \left(1 - \frac{1}{n_w}\right)^{n_f}\right).$$

*Замечание 2.* В модели FP фирмы выполняют роль *Proposers*, а в модели WP – *Respondents*, поэтому для получения точной функции разности необходимо взять соответствующие величины из следствия 1. При этом полноценный анализ точной функции не представляется возможным, в связи с чем и было использовано указанное приближение, лежащее между нижней и верхней границами точной функции, полученными с использованием соответствующих границ из следствия 1.

*Определение 5. Функция разности ожидаемого излишка фирм в моделях FP и WP в зависимости от размеров рынка в приближенном виде задается как*

$$\Delta_{FS}(n_f, n_w) = \mathbf{E}\left[PS \middle| Proposers = Firms\right] - \mathbf{E}\left[RS \middle| Proposers = Workers\right] =$$

$$= n_f \Delta_{u_F}(n_f, n_w).$$

Графическая иллюстрация в частном случае представлена на рис. 3 для ожидаемой прибыли фирм и на рис. 4 для ожидаемого излишка фирм. Сформулируем теперь аналитические свойства указанных функций.

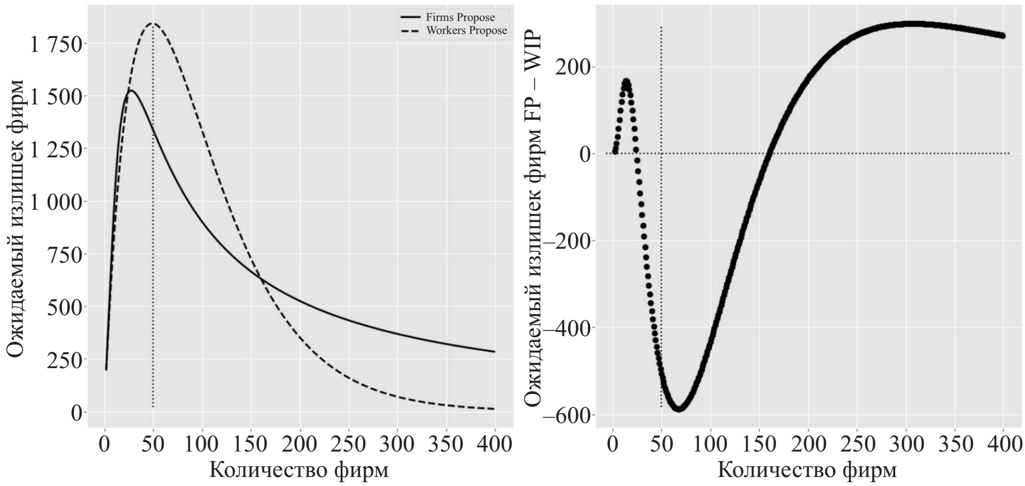


Рис. 4. Ожидаемый излишек фирм в равновесии в моделях FP и WP как функция от количества фирм при $n_w = 50$, $wage_{\min} = 100$, $wage_{\max} = 200$.

*Теорема 3. Рассмотрим функцию $\Delta_{u_F}(n_f, n_w)$ разности ожидаемой прибыли фирмы в моделях FP и WP. Данная функция обладает следующими свойствами.*

1) *$\Delta_{u_F}(n_f; n_w)$ как функция от $n_f$ при фиксированном $n_w$ имеет ровно два нуля $\theta_1$ и $\theta_2$, приближенное значение которых задается как*

$$\begin{cases} \theta_1 \simeq \left(\dfrac{1}{k_2}\right) n_w \simeq 0{,}4747 n_w, \\ \theta_2 \simeq \left(\dfrac{1}{k_1}\right) n_w \simeq 3{,}2565 n_w, \end{cases}$$

*где $k_1$ и $k_2$ – меньший и больший положительные корни уравнения 1. При этом*

$$\begin{cases} \Delta_{u_F}(n_f; n_w) > 0 \iff n_f < \theta_1 \vee n_f > \theta_2, \\ \Delta_{u_F}(n_f; n_w) < 0 \iff \theta_1 < n_f < \theta_2. \end{cases}$$

2) *$\Delta_{u_F}(n_f; n_w)$ как функция от $n_f$ при фиксированном $n_w$*

*– возрастает на промежутке $[2, \xi_1)$, где $2 < \xi_1 < \theta_1$, при $n_w \geqslant 9$ (при $2 \leqslant n_w \leqslant 8$ $\xi_1$ считаем равным 2),*

*– убывает на промежутке $[\xi_1, \xi_2)$, где $\xi_2 = n_w$,*

*– возрастает на промежутке $[\xi_2, \xi_3)$, где $\theta_2 < \xi_3 < \infty$,*

*– убывает на промежутке $[\xi_3, \infty)$.*

*Приближенное значение точек $\xi_1$, $\xi_2$ и $\xi_3$ задается как*

$$\begin{cases} \xi_1 \simeq p_1 n_w \simeq 0{,}1975 n_w, \\ \xi_2 = p_2 n_w = n_w, \\ \xi_3 \simeq p_3 n_w \simeq 5{,}0639 n_w, \end{cases}$$

*где $p_1$, $p_2$ и $p_3$ – корни уравнения*

$$3\ln(p) + \frac{1}{p} - p = 0 \tag{2}$$

*в порядке возрастания. Отметим, что $p_1 = \frac{1}{p_3}$.*

3) *В пределе на бесконечности стремится к нулю по каждому из своих аргументов при фиксированном втором аргументе.*

*Доказательство.* Расширим определение $\Delta_{u_F}(n_f; n_w)$ как функции от вещественного аргумента $n_f$ при заданном параметре $n_w$.

Доказательство первой части настоящей теоремы покрывается доказательством теоремы 2, так как данное в определении 4 приближение функции $\Delta_{u_F}(n_f; n_w)$ в точности равно приближению первой производной функции $\Delta_{ND}(n_f, n_w)$, используемому в доказательстве теоремы 2, а следовательно, нули первой производной функции $\Delta_{ND}(n_f; n_w)$ и нули функции $\Delta_{u_F}(n_f; n_w)$ совпадают.

С поправкой на приближения первая производная функции $\Delta_{u_F}(n_f; n_w)$ равна второй производной функции $\Delta_{ND}(n_f, n_w)$, выражение на нули которой уже было расписано в доказательстве теоремы 2.

$$\Delta'_{u_F}(n_f; n_w) = 0 \iff 3\ln\left(\frac{n_f}{n_w}\right) + \frac{n_w}{n_f} - \frac{n_f}{n_w} - \frac{2}{n_f} + \frac{1}{n_w} = 0.$$

В рамках приближения отбросив член $-\frac{2}{n_f} + \frac{1}{n_w}$ и сделав замену $\frac{n_f}{n_w} = p$, получаем уравнение

$$\Delta'_{u_F}(n_f; n_w) = 0 \iff 3\ln(p) + \frac{1}{p} - p = 0.$$

Отметим, что $p = 1$ – корень. Заметим также, что если некоторое $p^*$ является корнем, то и $\frac{1}{p^*}$ является корнем. Приближенное значение отличного от единицы корня (WolframAlpha) равно 0,1975. Воспользовавшись методом интервалов, можно показать, что $\xi_1$ и $\xi_3$ являются точками максимума, а $\xi_2$ – точкой минимума.

Теорема доказана.

*Следствие 5. Функция $\Delta_{FS}(n_f, n_w)$ разности ожидаемого излишка фирм в моделях FP и WP в зависимости от размеров рынка обладает такими же свойствами, описанными в теореме 3, как и функция $\Delta_{u_F}(n_f, n_w)$ разности ожидаемой прибыли фирмы, с поправкой на координаты точек экстремума $\phi_1$, $\phi_2$, $\phi_3$. Приближенное значение точек экстремума задается как*

$$\begin{cases} \phi_1 \simeq \left(\frac{1}{r_3}\right) n_w \simeq \frac{1}{3{,}7779} n_w \simeq 0{,}2647 n_w, \\ \phi_2 \simeq \left(\frac{1}{r_2}\right) n_w \simeq \frac{1}{0{,}7388} n_w \simeq 1{,}3536 n_w, \\ \phi_3 \simeq \left(\frac{1}{r_1}\right) n_w \simeq \frac{1}{0{,}1608} n_w \simeq 6{,}2189 n_w, \end{cases}$$

*где $r_1$, $r_2$ и $r_3$ – корни уравнения*

$$1 - \left(1 + r + r^2\right) \exp(-r) - \left(1 - \frac{1}{r}\right) \exp\left(-\frac{1}{r}\right) = 0$$

*в порядке возрастания.*

*Доказательство.* Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.

Экономическая интерпретация полученных выше результатов может быть сформулирована следующим образом.

Утверждение 2. *На рынке, размеры сторон которого не сильно отличаются друг от друга:*

$$\frac{1}{k_2} \simeq 0{,}4747 \leqslant \frac{n_f}{n_w} \leqslant \frac{1}{k_1} \simeq 3{,}2565,$$

*фирмы предпочитают занять сторону Respondents, отдавая обязанность изначально предлагать условия контрактов сотрудникам; при этом если размеры сторон рынка отличаются значительно в любом направлении, с точки зрения фирм предпочтительнее уже самим занять сторону Proposers.*

### *3.3. Предпочтения сотрудников*

Перейдем теперь к анализу предпочтений сотрудников относительно устройства рынка. В этом плане интерес представляют ожидаемая полезность отдельного сотрудника и ожидаемый совокупный излишек всех сотрудников, но, главное, разница в указанных величинах в зависимости от устройства рынка.

Определение 6. *Функция разности ожидаемой полезности сотрудников в моделях FP и WP в зависимости от размеров рынка в приближенном виде задается как*

$$\Delta_{u_W}(n_f, n_w) = \mathbf{E}\left[u_r \middle| Proposers = Firms\right] - \mathbf{E}\left[u_p \middle| Proposers = Workers\right] \simeq$$

$$\simeq \Delta wage\left(\left(1 - \frac{1}{n_f}\right)^{n_w} + \left(1 - \frac{1}{n_w}\right)^{n_f - 1} \frac{n_f}{n_w} + \left(1 - \frac{1}{n_w}\right)^{n_f} - 1\right).$$

Определение 7. *Функция разности ожидаемого излишка сотрудников в моделях FP и WP в зависимости от размеров рынка в приближенном виде задается как*

$$\Delta_{WS}(n_f, n_w) = \mathbf{E}\left[RS \middle| Proposers = Firms\right] - \mathbf{E}\left[PS \middle| Proposers = Workers\right] \simeq$$

$$\simeq n_w \Delta_{u_W}(n_f, n_w).$$

Графическая иллюстрация в частном случае представлена на рис. 5. Введенные функции обладают следующими аналитическими свойствами.

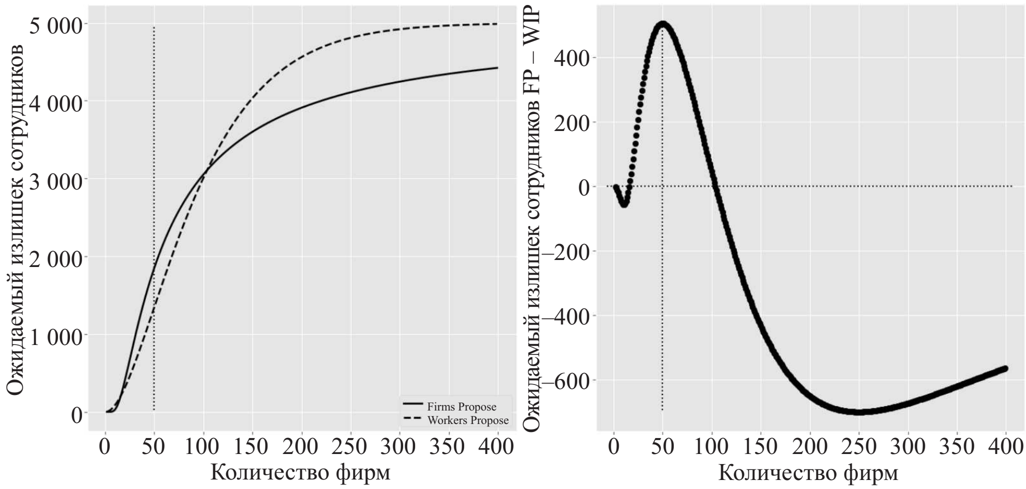


Рис. 5. Ожидаемый излишек сотрудников в равновесии в моделях FP и WP как функция от количества фирм при $n_w = 50$, $wage_{\min} = 100$, $wage_{\max} = 200$.

Теорема 4. *Рассмотрим функцию $\Delta_{u_W}(n_f, n_w)$ разности ожидаемой полезности сотрудников в моделях FP и WP. Данная функция обладает следующими свойствами.*

1) *$\Delta_{u_W}(n_f; n_w)$ как функция от $n_f$ при фиксированном $n_w$ имеет ровно два нуля $\lambda_1$ и $\lambda_2$, приближенное значение которых задается как*

$$\begin{cases} \lambda_1 \simeq k_1 n_w \simeq 0{,}3071 n_w, \\ \lambda_2 \simeq k_2 n_w \simeq 2{,}1065 n_w, \end{cases}$$

*где $k_1$ и $k_2$ – меньший и больший положительные корни уравнения 1. При этом*

$$\begin{cases} \Delta_{u_W}(n_f; n_w) < 0 \iff n_f < \lambda_1 \vee n_f > \lambda_2, \\ \Delta_{u_W}(n_f; n_w) > 0 \iff \lambda_1 < n_f < \lambda_2. \end{cases}$$

2) *$\Delta_{u_W}(n_f; n_w)$ как функция от $n_f$ при фиксированном $n_w$*

*– убывает на промежутке $[2, \xi_1)$, где $2 < \xi_1 < \lambda_1$, при $n_w \geqslant 9$ (при $2 \leqslant n_w \leqslant 8$ $\xi_1$ считаем равным 2),*

*– возрастает на промежутке $[\xi_1, \xi_2)$, где $\xi_2 = n_w$,*

*– убывает на промежутке $[\xi_2, \xi_3)$, где $\lambda_2 < \xi_3 < \infty$,*

*– возрастает на промежутке $[\xi_3, \infty)$.*

*Приближенное значение точек $\xi_1$, $\xi_2$ и $\xi_3$ задается как*

$$\begin{cases} \xi_1 \simeq p_1 n_w \simeq 0{,}1975 n_w, \\ \xi_2 = p_2 n_w = n_w, \\ \xi_3 \simeq p_3 n_w \simeq 5{,}0639 n_w, \end{cases}$$

*где $p_1$, $p_2$ и $p_3$ – корни уравнения 2 в порядке возрастания.*

3) *В пределе на бесконечности стремится к нулю по каждому из своих аргументов при фиксированном втором аргументе.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.

С л е д с т в и е 6. *Функция $\Delta_{WS}(n_f, n_w)$ разности ожидаемого излишка сотрудников в моделях FP и WP обладает теми же свойствами, описанными в теореме 4, что и функция разности полезности сотрудников $\Delta_{u_W}(n_f, n_w)$.*

Полученные результаты могут быть проинтерпретированы с экономической точки зрения следующим образом.

У т в е р ж д е н и е 3. *На рынке, размеры сторон которого не сильно отличаются друг от друга:*

$$k_1 \simeq 0{,}3071 \leqslant \frac{n_f}{n_w} \leqslant k_2 \simeq 2{,}1065,$$

*сотрудники предпочитают занять сторону Respondents, отдавая обязанность изначально предлагать условия контрактов фирмам; при этом если размеры сторон рынка отличаются значительно в любом направлении, с точки зрения сотрудников предпочтительнее уже самим занять сторону Proposers.*

### *3.4. Рыночная власть и равновесная зарплата*

Еще одной важной перспективой, показывающей сравнительное преимущество фирм над сотрудниками (или наоборот) и демонстрирующей рыночную власть, является ожидаемая доля излишка одной из сторон в ожидаемом совокупном излишке. Чем выше эта доля, тем более выгодное положение занимает одна сторона рынка по сравнению со второй. При этом необходимо отметить, что речь в данном случае идет лишь о разделе «пирога», но не о его абсолютной величине.

Следует заметить, что экономический смысл степени рыночной власти лежит в природе равновесной рыночной цены. Как было показано в следствии 1, заработная плата в равновесии, являясь взвешенным $wage_{\min}$ и $wage_{\max}$, выражена как линейная строго монотонная функция от доли ожидаемого излишка одной из сторон в ожидаемом совокупном излишке. В целях удобства без потери общности анализ будет приведен далее для нормированной версии.

О п р е д е л е н и е 8. *Функция разности доли ожидаемого излишка сотрудников в ожидаемом совокупном излишке в моделях FP и WP в зависимости от размеров рынка в приближенном виде задается как*

$$\Delta_{\frac{WS}{TS}}(n_f, n_w) \simeq$$

$$\simeq \frac{\mathbf{E}\left[RS\middle|Proposers = Firms\right]}{\mathbf{E}\left[TS\middle|Proposers = Firms\right]} - \frac{\mathbf{E}\left[PS\middle|Proposers = Workers\right]}{\mathbf{E}\left[TS\middle|Proposers = Workers\right]} \simeq$$

$$\simeq \frac{n_w\left(1-\frac{1}{n_f}\right)^{n_w}}{n_f\left(1-\left(1-\frac{1}{n_f}\right)^{n_w}\right)} + \frac{n_f\left(1-\frac{1}{n_w}\right)^{n_f}}{n_w\left(1-\left(1-\frac{1}{n_w}\right)^{n_f}\right)} - 1.$$

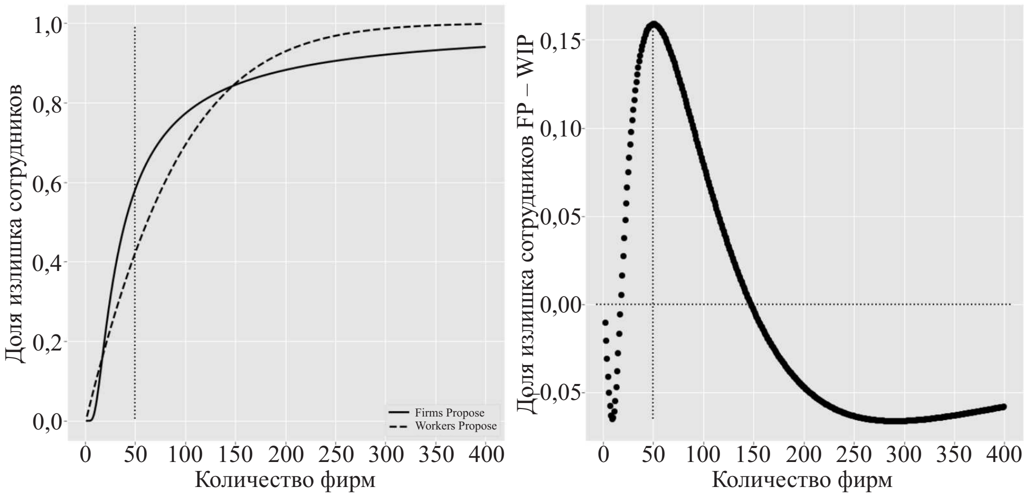


Рис. 6. Доля ожидаемого излишка сотрудников в ожидаемом совокупном излишке в моделях FP и WP как функция от количества фирм при $n_w = 50$, $wage_{\min} = 100$, $wage_{\max} = 200$.

*С использованием еще одного приближения она может быть выражена как*

$$\Delta_{\frac{WS}{TS}}(x) \simeq \frac{1}{x}\left(\frac{\exp\left(-\frac{1}{x}\right)}{1-\exp\left(-\frac{1}{x}\right)}\right) + x\left(\frac{\exp(-x)}{1-\exp(-x)}\right) - 1,$$

*где* $x = \frac{n_f}{n_w}$.

На рис. 6 представлена графическая иллюстрация обсуждаемой функции в частном случае. Введенная функция обладает следующими аналитическими свойствами.

Теорема 5. *Рассмотрим функцию* $\Delta_{\frac{WS}{TS}}(n_f, n_w)$ *разности доли ожидаемого излишка сотрудников в ожидаемом совокупном излишке в моделях FP и WP. Данная функция обладает следующими свойствами.*

1) $\Delta_{\frac{WS}{TS}}(n_f; n_w)$ *как функция от* $n_f$ *при фиксированном* $n_w$ *имеет ровно два нуля* $\alpha_1$ *и* $\alpha_2$*, приближенное значение которых задается как*

$$\begin{cases}\alpha_1 \simeq s_1 n_w \simeq 0{,}3337 n_w,\\ \alpha_2 \simeq s_2 n_w \simeq 2,9963 n_w,\end{cases}$$

*где* $s_1$ *и* $s_2$ *– меньший и больший положительные корни уравнения*

$$\frac{1}{s}\left(\frac{\exp\left(-\frac{1}{s}\right)}{1-\exp\left(-\frac{1}{s}\right)}\right) + s\left(\frac{\exp(-s)}{1-\exp(-s)}\right) - 1 = 0.$$

*При этом*

$$\begin{cases}\Delta_{\frac{WS}{TS}}(n_f; n_w) < 0 \iff n_f < \alpha_1 \vee n_f > \alpha_2,\\ \Delta_{\frac{WS}{TS}}(n_f; n_w) > 0 \iff \alpha_1 < n_f < \alpha_2.\end{cases}$$

2) $\Delta_{\frac{WS}{TS}}(n_f; n_w)$ *как функция от* $n_f$ *при фиксированном* $n_w$

*– убывает на промежутке* $[2, \omega_1)$, *где* $2 < \omega_1 < \alpha_1$, *при* $n_w \geqslant 11$ (*при* $2 \leqslant n_w \leqslant 10$ $\omega_1$ *считаем равным* 2),

*– возрастает на промежутке* $[\omega_1, \omega_2)$, *где* $\omega_2 = n_w$,

*– убывает на промежутке* $[\omega_2, \omega_3)$, *где* $\alpha_2 < \omega_3 < \infty$,

*– возрастает на промежутке* $[\omega_3, \infty)$.

*Приближенное значение точек* $\omega_1$, $\omega_2$ *и* $\omega_3$ *задается как*

$$\begin{cases} \omega_1 \simeq t_1 n_w \simeq 0{,}1697 n_w, \\ \omega_2 = t_2 n_w = n_w, \\ \omega_3 \simeq t_3 n_w \simeq 5{,}8925 n_w, \end{cases}$$

*где* $t_1$, $t_2$ *и* $t_3$ *– положительные корни уравнения*

$$\frac{t + \exp\left(-\frac{1}{t}\right) - t\exp\left(-\frac{1}{t}\right)}{\left(\exp\left(-\frac{1}{t}\right) - 1\right)^2 t^3} + \frac{1-t}{\exp(t) - 1} - \frac{t}{\left(\exp(t) - 1\right)^2} = 0$$

*в порядке возрастания.*

3) *В пределе на бесконечности стремится к нулю по каждому из своих аргументов при фиксированном втором аргументе.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.

*Замечание 3.* В силу того, что сумма долей ожидаемого излишка сотрудников и фирм в ожидаемом совокупном излишке равна 1, функция разности доли ожидаемого излишка фирм равна $1 - \Delta_{\frac{WS}{TS}}(n_f, n_w)$, имеет соответствующие свойства, а ее график является отражением графика функции $\Delta_{\frac{WS}{TS}}(n_f; n_w)$ относительно оси абсцисс.

Полученные результаты могут быть проинтерпретированы с экономической точки зрения следующим образом.

*Утверждение 4. На рынке, размеры сторон которого не сильно отличаются друг от друга:*

$$s_1 \simeq 0{,}3337 \leqslant \frac{n_f}{n_w} \leqslant s_2 \simeq 2{,}9963,$$

*сотрудники с точки зрения максимизации своей доли в ожидаемом совокупном излишке предпочитают занять сторону Respondents, отдавая обязанность изначально предлагать условия контрактов фирмам; при этом если размеры сторон рынка отличаются значительно в любом направлении, с точки зрения максимизации своей доли сотрудникам предпочтительнее уже самим занять сторону Proposers.*

*Предпочтения фирм с точки зрения максимизации своей доли в ожидаемом совокупном излишке при этом прямо противоположны.*

*Замечание 4.* Важно отметить ключевое различие между утверждениями 3 и 4. В утверждении 3 сотрудники заботятся о максимизации своей полезности / излишка в денежном выражении. В случае же утверждения 4 сотрудники при выборе дизайна и фиксированных размерах рынка максимизируют свою долю в ожидаемом совокупном излишке. Следствием различных границ для этих двух целей, при которых происходит изменение предпочтений относительно дизайна рынка, является возникновение областей размеров рынка, в которых эти цели вступают в конфликт между собой.

### *3.5. Сравнительный анализ предпочтений сторон*

После того как были рассмотрены предпочтения каждой из сторон рынка (сотрудников, фирм и общества в целом и в отдельности), пришло время свести результаты проведенного анализа воедино.

На рис. 7 представлен в графическом виде результат объединения утверждений 1–4 о предпочтениях сторон рынка. На его основе можно сделать следующие выводы.

Во-первых, если рассматривать предпочтения сторон исключительно в денежном выражении, ось $\frac{n_f}{n_w}$ разбивается на 6 интервалов. На двух из них, а именно $\frac{n_f}{n_w} \in (0{,}3071, 0{,}4747)$ и $\frac{n_f}{n_w} \in (2{,}1065, 3{,}2565)$, предпочтения всех сторон совпадают, на остальных – вступают в противоречие.

Во-вторых, если добавить в рассмотрение предпочтения сторон в отношении максимизации собственной доли в общем излишке, возникает важный эффект. При $\frac{n_f}{n_w} \in (0{,}3071, 0{,}3337)$ с позиции максимизации денежной величины для общества, фирм и сотрудников выгоднее, чтобы роль *Proposers* заняли фирмы. При этом с позиции максимизации доли в совокупном излишке сотрудникам выгоднее самим стать предлагающей стороной. То есть возможна ситуация, в которой стремление одной из сторон к максимизации своего «куска пирога» ударит по денежным интересам всех участников рынка, включая эту сторону. Для фирм аналогичный эффект наблюдается при $\frac{n_f}{n_w} \in (2{,}9963, 3{,}2565)$.

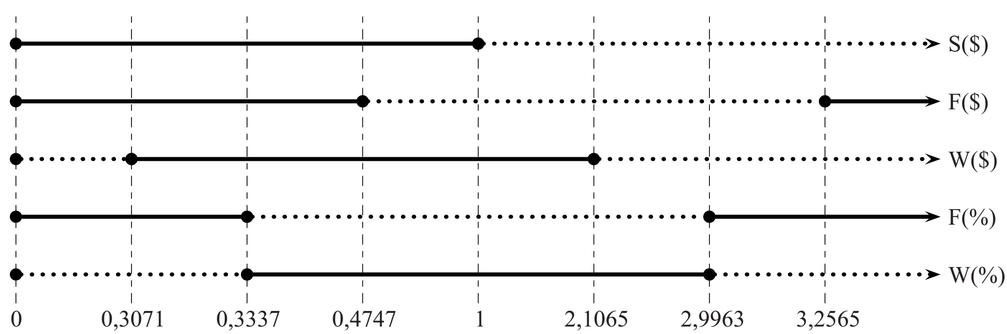


Рис. 7. Предпочтения сторон рынка относительно его дизайна при различном отношении сторон $\frac{n_f}{n_w}$. (Непрерывная линия соответствует предпочтению фирм на роль предлагающей стороны, пунктирная – предпочтению сотрудников.)

## 4. Заключение

В рамках проведенного анализа описана структура предпочтений различных сторон рынка относительно его устройства в зависимости от его размеров. Было продемонстрировано, что анализируемая структура неоднородна: при различном отношении числа фирм к числу сотрудников предпочтения сторон могут несколько раз изменяться на противоположные, в некоторых случаях совпадая между собой. Наиболее чувствительным к смене дизайна является отношение сторон рынка $\frac{n_f}{n_w} \simeq 0{,}3071$ и $\frac{n_f}{n_w} \simeq \frac{1}{0{,}3071}$, при котором прирост в ожидаемой доле заключенных контрактов может превышать 10%. Еще одним полученным результатом стала демонстрация неоднородности выбора целевой переменной при определении предпочтений сторон: было показано, что одна из сторон рынка в результате смены его дизайна может потерять в своей относительной доле в совокупном излишке, но при этом выиграть в денежном выражении за счет роста совокупного излишка в результате более эффективной координации агентов на рынке.

Все полученные результаты демонстрируют важность дизайна рынка как ключевого элемента рыночной структуры и могут быть использованы, например, на различных онлайн-платформах при решении задачи максимизации ее целевой переменной.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Burdett K., Shi S., Wright R.* Pricing and matching with frictions // Journal of Political Economy. 2001. V. 109. No. 5. P. 1060–1085.
2. *Wright R., Kircher P., Julien B., et al.* Directed search and competitive search equilibrium: A guided tour // J. Econ. Lit. 2021. V. 59. No. 1. P. 90–148.
3. *Sandomirskaia M., Shavshin R.* Pricing, Market Power, and Friction in a Finite Market: The Role of Capacities // Higher School Econom. Res. Paper. 2024. V. 267. 36 p.
4. *Gale D., Shapley L.* College admissions and the stability of marriage // The American mathematical monthly. 1962. V. 69. No. 1. P. 9–15.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.*

Поступила в редакцию 28.04.2025

После доработки 08.10.2025

Принята к публикации 11.10.2025