

# Управление в социально-экономических системах

© 2026 г. Г.И. АЛГАЗИН, д-р физ.-мат. наук (algaz46@yandex.ru),  
Д.Г. АЛГАЗИНА, канд. техн. наук (darya.algazina@mail.ru)  
(Алтайский государственный университет, Барнаул)

## АГРЕГИРОВАННЫЕ ИНДИКАТОРЫ ДИНАМИКИ ИГРЫ ОЛИГОПОЛИИ

Рассматривается проблема разработки агрегированных индикаторов динамики рефлексивного коллективного принятия решений в моделях олигополии. Рассматриваются конкурентные рынки с произвольным числом агентов, которые рефлексуют по Курно. Предложенные индикаторы используются для аналитического оценивания динамики, выявления условий ее сходимости к равновесию и моментов разворота динамики к сходимости. Сравнительный анализ показывает согласованность результатов, полученных на основе численного моделирования и полученных с использованием агрегированных индикаторов. Для стабилизирующихся последовательностей индикаторов доказана идеальная согласованность результатов.

*Ключевые слова:* олигополия Курно, рефлексивное коллективное поведение, агрегированное описание, равновесие, стабилизирующиеся последовательности, агрегированные индикаторы.

DOI: 10.7868/S2413977726030053

### 1. Введение

Настоящая работа посвящена решению игры агентов на рынке олигополии. Обзор современного состояния решения этой проблемы, как одной из важнейших в теории игр, приведен в [1–3].

В условиях неполной информированности, взаимообусловленности поведения и конкурентной среды динамика принятия агентом решений на конкурентном рынке строится на основе рефлексивных размышлений о наилучшем собственном выборе с учетом откликов конкурентов [4–16]. В настоящей работе развивается подход к описанию рефлексивного коллективного поведения и решению проблемы достижения равновесия [17].

В отличие от традиционных подходов, когда акцент делается на действия каждого агента в каждом периоде (такте) принятия решения, в рамках данного подхода условия сходимости формулируются для агрегированного описания поведения агентов. Используется агрегация по действиям агентов и агрегация по времени. Агрегация по действиям осуществляется по каждому периоду путем суммирования невязок действий агентов. Агрегация по

времени осуществляется по совокупности последовательных периодов путем суммирования значений элементов динамики [17].

Рассматривается проблема разработки агрегированных индикаторов, которые могут быть использованы в задачах мониторинга динамики рынка в целом и аналитического оценивания движения динамики каждого агента к положению равновесия. В качестве базовой рассматривается модель олигополии, когда в условиях неполного знания рефлексивные по Курно агенты следуют процедуре коллективного поведения.

Структура изложения материалов работы следующая. Второй и третий разделы посвящены изложению теоретического материала проводимого исследования при традиционных для моделей индикаторного коллективного поведения предположениях относительно информированности агентов, а также обоснованию предложенных индикаторов. Для ряда частных случаев приводится сравнительный анализ результатов по оценке асимптотической сходимости рефлексивных динамик, полученных на основе численного моделирования и полученных путем аналитического оценивания с использованием предложенных новых агрегированных индикаторов. Четвертый раздел посвящен рассмотрению возможности применения предложенных индикаторов самими агентами. Вводятся дополнительные предположения об информированности агентов, позволяющие им независимо и наравне с конкурентами получать по индикаторам единые для всех оценки динамики рынка.

## 2. Отправные результаты для проводимого исследования

В разделе приводятся ранее полученные и новые результаты, которые положены в основу построения агрегированных индикаторов сходимости динамик агентов.

Модель олигополии Курно рассматривается как некооперативная игра с  $n$  игроками (рациональными агентами), которые конкурируют объемами выпуска однородной продукции. Предполагаются классические для этой модели линейная обратная функция спроса  $p\left(\sum_{j \in N} q_j\right) = a - b \sum_{j \in N} q_j$  и линейные функции затрат агентов вида  $\varphi_i(q_i) = c_i q_i + d_i$ . Здесь:  $q_i$  – выпуск  $i$ -го агента ( $i \in N = \{1, \dots, n\}$ );  $c_i, d_i$  – предельные и постоянные издержки  $i$ -го агента соответственно;  $p\left(\sum_{j \in N} q_j\right)$  – единая рыночная цена;  $a, b$  – параметры спроса, характеризующие максимально возможную цену товара, при которой объем спроса будет стремиться к нулю, и наклон кривой спроса соответственно. Функция выигрыша (целевая функция)  $i$ -го агента зависит от собственной стратегии  $q_i$ , совокупности стратегий всех игроков и имеет вид [18, 19]:

$$(1) \quad \Pi_i \left( q_i, \sum_{j \in N} q_j \right) = \left( a - b \sum_{j \in N} q_j \right) q_i - c_i q_i - d_i \rightarrow \max_{q_i}, \quad i \in N.$$

Условия, когда решение  $q^* = (q_1^*, \dots, q_i^*, \dots, q_n^*)$  игры на рынке олигополии в случае линейных функций спроса и издержек, понимаемое как статическое

равновесие Нэша в игре в нормальной форме [20], существует, единственно и  $q_i^* > 0 \forall i \in N$ , можно найти, например, в [17].

В условиях игровой неопределенности (о действиях, выбираемых конкурентным окружением) и неполного знания (о затратах, целевых функциях и пр. конкурентов) решение игры ищется в виде исхода динамики рефлексивного коллективного поведения [3, 4, 9, 17, 19, 21]:

$$(2) \quad q_i^{t+1} = q_i^t + \gamma_i^{t+1}(x_i^t - q_i^t), \quad i \in N.$$

Здесь:

$t$  ( $t = 0, 1, 2, \dots$ ) – номер такта (периода времени);

$x_i^t = x_i \left( \sum_{j \in N \setminus \{i\}} q_j^t \right)$  – текущее положение цели  $i$ -го агента – это действие, которое обеспечивает  $i$ -му агенту максимальное значение его целевой функции в  $t$ -м такте, для определения которого не требуется знание агентом целевых функций конкурентов, поскольку наблюдаемые им действия всех агентов в  $t$ -м такте полагаются такими же и в текущем такте;

$\gamma_i^{t+1} \in [0; 1]$  – параметр, независимо выбираемый каждым агентом в  $(t+1)$ -м такте, определяет величину его «шага» от текущей стратегии к текущему положению своей цели;

$q^0 = (q_1^0, \dots, q_i^0, \dots, q_n^0)$  – вектор начальных стратегий агентов. Для линейной модели Курно [15, 17, 19]

$$(3) \quad x_i^t = \frac{(a - c_i)/b - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} q_j^t}{2}.$$

Замена переменных

$$(4) \quad \varepsilon_i^t = q_i^* - q_i^t \quad (i \in N; t = 0, 1, 2, \dots)$$

позволяет преобразовать модель прибыли (1) к виду в  $t$ -м такте

$$(5) \quad \Pi_i^t = - \left( \sum_{j \in N} \varepsilon_j^t \right) \varepsilon_i^t \rightarrow \max_{\varepsilon_i^t} \quad (i \in N),$$

а (2) к виду

$$(6) \quad \varepsilon_i^{t+1} = \varepsilon_i^t + \gamma_i^{t+1} \left( - \frac{\sum_{j \in N \setminus \{i\}} \varepsilon_j^t}{2} - \varepsilon_i^t \right).$$

В общем случае задача (5) в статической постановке может иметь множество решений. Так при  $n = 2$  любой вектор  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  формально будет решением, если  $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ , или, в общем случае, если  $\sum_{j \in N} \varepsilon_j = 0$ . Однако возможные ненулевые решения (например, при  $n = 2$  таким будет ненулевой вектор  $\varepsilon = (5, -5)$ ) не являются равновесными по Нэшу. Представляют интерес только равновесные решения.

Отправные результаты для проводимого исследования, объясняющие переход к модели с невязками, представлены в следующих трех утверждениях.

Утверждение 1. В модели (5) статическое равновесие Нэша  $\varepsilon^* = (\varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_i^*, \dots, \varepsilon_n^*)$  существует, единственно и  $\varepsilon_i^* = 0 \quad \forall i \in N$ , а сходимость процесса (6) означает, что  $\varepsilon_i^t \rightarrow \varepsilon_i^* = 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Доказательство утверждения 1 приведено в Приложении впервые.

В [17] доказаны следующие два утверждения.

Утверждение 2. Процесс (6) сходится тогда и только тогда, когда сходится процесс (2)–(3) для модели (1).

Утверждение 3. Если  $\sum_{j \in N} \varepsilon_j^t \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , то  $\varepsilon_i^t \rightarrow \varepsilon_i^* = 0 \quad \forall i \in N$ .

Также для последующего изложения важны следующие соотношения (с учетом переобозначения выражения  $\frac{\tilde{\gamma}^t(1+n)}{4}$ , которое использовалось в [17], на  $\tilde{\gamma}^t$  здесь):

$$(7) \quad \sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t+1} = (1 - 2\tilde{\gamma}^{t+1}) \sum_{j \in N} \varepsilon_j^t,$$

$$(8) \quad \left| \sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t_0 + \tau} \right| \leq (1 - 2\tilde{\gamma}_+^\tau)^{t_+} |1 - 2\tilde{\gamma}_-^\tau|^{t_-} \left| \sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t_0} \right| \quad (\tau = t_+ + t_-).$$

В (8) и Приложении верхние индексы  $t_+$  и  $t_-$  являются показателями степени, а верхние индексы  $(t_0 + \tau)$  и  $t_0$  не являются степенями.

В (8) используются обозначения:  $t_0$  – некоторый произвольный такт и  $\tau > 0$ ;  $t_+(t_-)$  – число тактов в множестве  $T_+(T_-)$  и  $T_+ = \{t \in T | 1 - 2\tilde{\gamma}^t > 0\}$ ,  $T_- = \{t \in T | 1 - 2\tilde{\gamma}^t < 0\}$ ,  $T = \{t_0 + 1, \dots, t_0 + \tau\}$ ,  $\tilde{\gamma}_+^\tau = \frac{1}{t_+} \sum_{t \in T_+} \tilde{\gamma}^t$ ,  $\tilde{\gamma}_-^\tau = \frac{1}{t_-} \sum_{t \in T_-} \tilde{\gamma}^t$  – средние значения параметра

$$(9) \quad \tilde{\gamma}^t = \left( \frac{\sum_{j \in N} \gamma_j^t + \sum_{j \in N} \gamma_j^t \varepsilon_j^{t-1}}{\sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t-1}} \right) / 4$$

за  $\tau$  тактов по множествам  $T_+$  и  $T_-$  соответственно.

В особом случае, когда  $\tilde{\gamma}^t = \frac{1}{2}$  и поэтому  $\sum_{j \in N} \varepsilon_j^t = 0$ , динамика рынка улучшается в том смысле, что невязки каждого агента в  $(t + 1)$ -м такте меньше его невязок в  $t$ -м такте по абсолютной величине [17].

В рядах динамики отношение двух последовательных уровней ряда носит название цепного коэффициента роста. В данном случае для ряда совокупных невязок выражение этого коэффициента через агрегированный по действиям агентов показатель  $\tilde{\gamma}^t$  имеет по (7) вид  $\frac{\sum_{j \in N} \varepsilon_j^t}{\sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t-1}} = 1 - 2\tilde{\gamma}^t$ .

### 3. Агрегированные индикаторы в новых исследованиях сходимости динамики

Вначале остановимся на важном частном случае последовательности  $\{\tilde{\gamma}^t\}$ , который имеет вполне естественное объяснение с точки зрения выбора каждым  $i$ -м агентом своих шагов  $\gamma_i^t$  и допускает простую экспериментальную

верификацию (см., например, [4, 15, 19]). Например, если в рассматриваемом случае агент со временем не меняет своих шагов или повторяет их известным способом.

Будем полагать, что последовательность  $\{\tilde{\gamma}^t\}$  стабилизируется к  $\tilde{\gamma}^{t_s}$  начиная с такта  $t_s$ , если  $t_s$  – наименьшее натуральное число такое, что  $\tilde{\gamma}^t = \tilde{\gamma}^{t_s} \forall t \geq t_s$  [22].

*Утверждение 4. Если последовательность  $\{\tilde{\gamma}^t\}$  стабилизируется к  $\tilde{\gamma}^{t_s}$ , то динамика (6) сходится тогда и только тогда, когда  $0 < \tilde{\gamma}^{t_s} < 1$ .*

Доказательство этого утверждения дано в Приложении.

*Пример 1.* Пусть число агентов на рынке  $n = 4$ . Обозначим вектор параметров шагов агентов как  $\gamma^t = (\gamma_1^t, \gamma_2^t, \gamma_3^t, \gamma_4^t)$ . Вначале рассмотрим случай, когда  $\gamma^t = (0, 2; 1; 1; 1)$  на всех тактах, т.е. агенты не меняют свои шаги. Численный эксперимент показывает, что последовательность  $\{\tilde{\gamma}^t\}$  стабилизируется с точностью до третьего знака после запятой к уровню  $\tilde{\gamma}^{t_s} = 1,039$  начиная с такта  $t_s = 35$ , а динамика (6) расходится. По утверждению 4 динамика (6) также расходится, поскольку для этого случая  $\tilde{\gamma}^{t_s} > 1$ . Рассмотрим другой случай, когда  $\gamma^1 = \gamma^5 = \gamma^9 = \dots = (0, 2; 1; 1; 1)$ ,  $\gamma^2 = \gamma^6 = \gamma^{10} = \dots = (1; 0, 2; 1; 1)$ ,  $\gamma^3 = \gamma^7 = \gamma^{11} = \dots = (1; 1; 0, 2; 1)$ ,  $\gamma^4 = \gamma^8 = \gamma^{12} = \dots = (1; 1; 1; 0, 2)$ . Наборы параметров повторяются через каждые 3 такта. Численный эксперимент показывает, что начиная с такта  $t_s = 21$  последовательность  $\{\tilde{\gamma}^t\}$  стабилизируется к  $\tilde{\gamma}^{t_s} = 0,955$  и динамика (6) сходится. По утверждению 4 динамика (6) также сходится, поскольку для этого случая  $\tilde{\gamma}^{t_s} < 1$ . Отметим, что в обоих случаях три агента делают полные шаги (равные единице) и один делает неполный шаг (равный 0,2), средние значения шагов совпадают (равны 0,8), а последовательности  $\{\tilde{\gamma}^t\}$  стабилизируются. Однако результаты в них оказываются прямо противоположными. В первом случае динамика (6) расходится, а во втором сходится, что может быть не совсем очевидно и ожидаемо.

Для стабилизирующихся последовательностей всегда будет иметь место идеальная согласованность результатов численного моделирования и аналитического оценивания по  $\tilde{\gamma}^t$ , что иллюстрирует этот пример. Приведенный пример также иллюстрирует такие ситуации, когда в рамках агрегированного описания можно достаточно просто и единообразно формулировать условия сходимости динамик принятия решений, чего может не быть при детализированном описании.

Теперь перейдем к рассмотрению общих случаев динамики (6), когда последовательности  $\{\tilde{\gamma}^t\}$  могут не являться стабилизирующимися.

Введем для процесса (6) агрегированный показатель вида

$$(10) \quad z_{t_0, t_1} = \sum_{t=t_0}^{t_1} z^t \quad (z_{t_0, t_0} = z^{t_0}),$$

где

$$(11) \quad z^t = \begin{cases} \tilde{\gamma}^t, & \tilde{\gamma}^t < \frac{1}{2} (t \in T_+); \\ 1 - \tilde{\gamma}^t, & \tilde{\gamma}^t > \frac{1}{2} (t \in T_-); \\ \frac{1}{2}, & \tilde{\gamma}^t = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Свойства  $z_{t_0, t}$ :

- 1) Пусть  $t_0 < t_1 < t_2$ . Тогда  $z_{t_0, t_2} = z_{t_0, t_1} + z_{t_1+1, t_2}$ .
- 2) Пусть  $t^* \in M(\tau) = \{t^* | z_{1, t^*} = \min_{t=1, \dots, \tau} z_{1, t}\}$ . Тогда  $z_{t^*+1, t} \geq 0$   
 $\forall t = t^* + 1, \dots, \tau$ .
- 3) Пусть  $t^* = \max_{t \in M(\tau)} t$ . Тогда  $z_{t^*+1, t} > 0 \quad \forall t = t^* + 1, \dots, \tau$ .

*Утверждение 5. Пусть для олигополии Курно параметры  $\tilde{\gamma}^t, z^t, z_{1, t}$  определяются выражениями (9), (10) и (11) соответственно. Тогда если  $M(\tau) = \{t^* | z_{1, t^*} = \min_{t=1, \dots, \tau} z_{1, t}\} \neq \emptyset$  при  $\tau \rightarrow \infty$ , то процесс (6) сходится к положению равновесия.*

Доказательство этого основного утверждения работы приведено в Приложении.

По утверждению если минимум  $z_{1, t}$  по  $t$  существует (т.е.  $z_{1, t}$  не уходит в минус бесконечность) и  $t^*$  является точкой минимума, то  $z_{t^*+1, t} \geq 0$  ( $\forall t \geq t^* + 1$ ) и динамика переходит в сходящуюся.

В контексте утверждения 5 ключевую роль играет формирование величины  $z_{1, t}$ . В этой связи обсудим, как может она измениться в следующем  $(t + 1)$ -м такте.

Случай  $\tilde{\gamma}^{t+1} < \frac{1}{2}$  соответствует тому, что по (10)  $z_{1, t+1} = z_{1, t} + \tilde{\gamma}^{t+1}$ . Если  $0 < \tilde{\gamma}^{t+1}$ , то  $z_{1, t+1} > z_{1, t}$ . Значение величины  $z$  повышается, что благоприятно сказывается на сходимости процесса. Если  $\tilde{\gamma}^{t+1} < 0$ , то  $z_{1, t+1} < z_{1, t}$ . Значение  $z$  понижается, что может неблагоприятно сказаться на сходимости процесса. Если  $\tilde{\gamma}^{t+1} = 0$ , то  $z_{1, t+1} = z_{1, t}$ . Значение  $z$  не меняется.

Случай  $\frac{1}{2} < \tilde{\gamma}^{t+1}$  соответствует тому, что по (10)–(11)  $z_{1, t+1} = z_{1, t} + 1 - \tilde{\gamma}^{t+1}$ . Если  $\tilde{\gamma}^{t+1} < 1$ , то  $z_{1, t+1} > z_{1, t}$ . Значение величины  $z$  повышается, что благоприятно сказывается на сходимости процесса. Если  $1 < \tilde{\gamma}^{t+1}$ , то  $z_{1, t+1} < z_{1, t}$ . Значение  $z$  понижается, что может неблагоприятно сказываться на сходимости процесса. Если  $\tilde{\gamma}^{t+1} = 1$ , то  $z_{1, t+1} = z_{1, t}$ . Значение  $z$ -показателя не меняется.

Случай  $\tilde{\gamma}^t = \frac{1}{2}$  благоприятствует сходимости процесса и  $z_{1, t+1} = z_{1, t} + \frac{1}{2}$ .

Утверждение 5 и проведенное здесь обсуждение дают основания для того, чтобы рассматривать показатель  $z_{t_0, t}$  в качестве агрегированного индикатора в оценке сходимости динамики (6). Положительное текущее значение индикатора указывает на улучшение динамики рынка в целом относительно такта отсчета (в смысле (8)), что по утверждению 3 благоприятствует сходимости

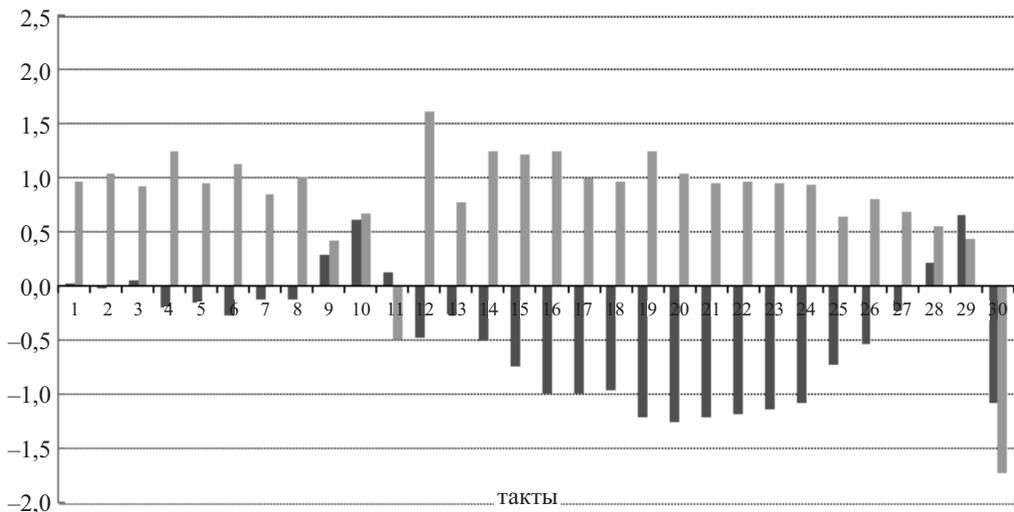


Рис. 1. Динамика индикаторов  $\tilde{\gamma}^t$  (светлые столбики) и  $z_{1,t}$  (темные столбики).

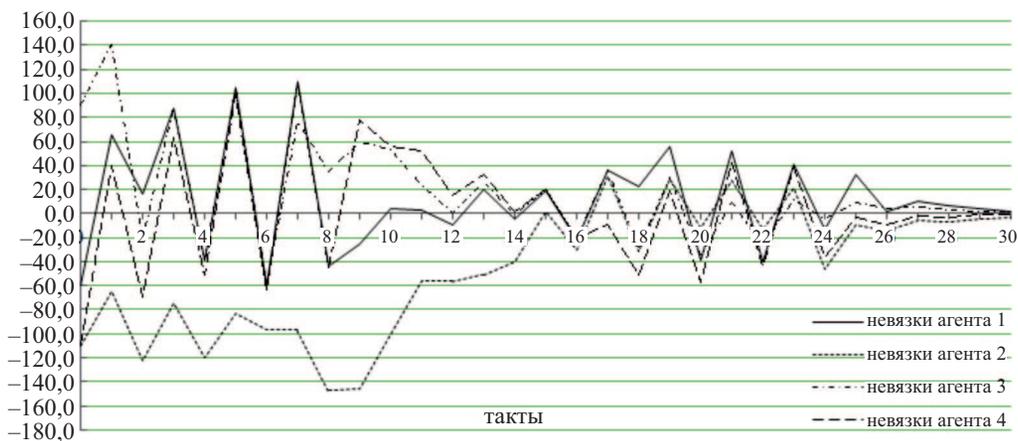


Рис. 2. Динамика невязок действий отдельных агентов.

динамики каждого агента. Отрицательное текущее значение агрегированного индикатора не дает оснований для утверждения об относительном улучшении динамик. В целом положительный вклад в индикатор и в сходимость процесса дают такты, для которых  $0 < \tilde{\gamma}^t < 1$ .

В рядах динамики в качестве показателя интенсивности используется базисный коэффициент роста, который в рассматриваемом случае для ряда совокупных невязок и промежутка  $[t_0; t_0 + \tau]$  имеет вид  $\frac{\sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t_0 + \tau}}{\sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t_0}}$ . Агрегированный по действиям агентов и промежутку индикатор  $z_{t_0, t_0 + \tau}$  оценивает динамику этого коэффициента и указывает на такты ее разворота к сходимости к нулю.

*Пример 2. Фрагмент численного расчета.* Данный пример иллюстрирует действие утверждения 5. Пусть также  $n = 4$ . На рис. 1 приведена динамика индикатора  $\tilde{\gamma}^t$ , который рассчитывается согласно (9) по некоторым начальным условиям  $\varepsilon_i^0$  и шагам агентов  $\gamma_i^t$  ( $i = \overline{1,4}$ ). На промежутке в тридцать тактов динамика  $\tilde{\gamma}^t$  не стабилизируется. На этом же рисунке приведена соответствующая динамика индикатора  $z_{1,t}$ , который рассчитывается по (10)–(11). Влияние динамики индикатора  $z_{1,t}$  на динамику невязок  $\varepsilon_i^t$  ( $i = \overline{1,4}$ ) можно проследить по рис. 2. До двадцатого такта не наблюдается тенденция к сходимости невязок всех агентов, поскольку на промежутке в тридцать тактов индикатор  $z_{1,t}$  достигает своего минимума только на двадцатом такте (см. рис. 1). Тогда индикатор  $z_{21,t}$ , который (согласно его свойству 1) может быть рассчитан по формуле  $z_{21,t} = z_{1,t} - z_{1,20}$ , имеет положительный знак при  $t \geq 21$  и возрастает до  $t = 29$  включительно. Поэтому динамики невязок агентов движутся к теоретическому статичному равновесию Курно–Нэша  $\varepsilon_i^* = 0$  ( $i = \overline{1,4}$ ).

Вернемся к примеру 1 со стабилизирующимися последовательностями индикаторов  $\{\tilde{\gamma}^t\}$ , чтобы продемонстрировать их применение. Для случая сходящейся динамики  $\varepsilon_i^t$  агрегированный индикатор начиная с  $t_s = 21$  будет рассчитываться с учетом (11) по формуле  $z_{t_s,\tau} = \sum_{t=t_s}^{\tau} (1 - \tilde{\gamma}^t) = (\tau - t_s + 1) \times (1 - \tilde{\gamma}^{t_s}) = (\tau - t_s + 1)0,445$ . Его значение будет ограничено снизу при  $\tau \rightarrow \infty$ , поэтому на основании утверждения 5 подтверждается сходимость (6) по этому агрегированному индикатору. Для случая расходящейся динамики  $\varepsilon_i^t$  агрегированный индикатор начиная с  $t_s = 35$  будет рассчитываться по той же формуле  $z_{t_s,\tau} = (\tau - t_s + 1)(1 - \tilde{\gamma}^{t_s}) = (\tau - t_s + 1)(-0,039)$ . Его значение не будет ограничено снизу при  $\tau \rightarrow \infty$ . Поэтому  $M(\tau) = \emptyset$  при  $\tau \rightarrow \infty$ , и на основании утверждения 5 не подтверждается сходимость (6) по  $z$ -индикатору.

#### 4. Применение агентами индикаторов

Предложенные индикаторы могут представлять не только теоретический, но и практический интерес. Опишем один из возможных вариантов применения агентами агрегированных индикаторов в оценке своей динамики и динамики рынка.

Традиционно в процедуре коллективного поведения (2) агент принимает решение об объеме своего текущего выпуска, не зная равновесного выпуска и не имея возможности судить, насколько его предыдущие действия и действия других агентов способствовали достижению равновесия. Очевидно, что такая возможность может быть полезной агенту, чтобы сделать текущий выбор.

Ее агент может получить, используя агрегированные индикаторы  $\tilde{\gamma}^t$  и  $z_{t_0,t}$ .

Индикатор  $\tilde{\gamma}^t$  показывает, что выбор шагов в предыдущем  $t$ -м такте всеми агентами дал положительный вклад в сходимость процесса, если  $0 < \tilde{\gamma}^t < 1$ . Индикатор  $z_{t_0,t}$  показывает, что выбор шагов во временном промежутке  $t_0, t_0 + 1, \dots, t$  дал улучшение динамики рынка в целом в такте  $t$  относительно такта  $t_0$ , если  $z_{t_0,t} > 0$ .

Основная проблема возможности применения агентами индикаторов состоит в том, что процедуры коллективного поведения (2) и (6) описываются в разных «системах координат»: в одной системе по (2) рассчитываются текущие выпуски агентов, в другой – по (6) рассчитываются невязки текущих выпусков и по (9)–(10) формируются индикаторы.

Для того чтобы увязать эти системы координат, приведем следующие выкладки. Полагая, что  $Q^t = \sum_{j \in N} q_j^t$ , из (4) и  $\sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t+1} = (1 - 2\tilde{\gamma}^{t+1}) \sum_{j \in N} \varepsilon_j^t$  следует, что  $\sum_{j \in N} \varepsilon_j^t = \frac{Q^{t+1} - Q^t}{2\tilde{\gamma}^{t+1}}$ . Тогда  $\sum_{j \in N} \varepsilon_j^t - \sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t-1} = \frac{Q^{t+1} - Q^t}{2\tilde{\gamma}^{t+1}} - \frac{Q^t - Q^{t-1}}{2\tilde{\gamma}^t} = -(Q^t - Q^{t-1})$ . Приходим к рекуррентному соотношению

$$(12) \quad \tilde{\gamma}^{t+1} = \frac{Q^{t+1} - Q^t}{Q^t - Q^{t-1}} \cdot \frac{\tilde{\gamma}^t}{1 - 2\tilde{\gamma}^t}.$$

Примем следующие предположения, позволяющие каждому агенту, оставаясь в рамках системы координат процесса (2), объективно и наравне с другими конкурентами оценивать динамику рынка:

- 1) Все агенты «интеллектуальны» до уровня знания формулы (12), которая позволяет им рекуррентно вычислять значение индикатора  $\tilde{\gamma}^t$ , и формул (10)–(11) для вычисления индикатора  $z_{t_0,t}$ .
- 2) Все агенты в некоторый момент времени  $t_0$  выбирают один и тот же шаг  $\gamma^{t_0}$  ( $t_0$  – это такт, с которого будут синхронизованы представления всех агентов о ходе процесса. Его агенты выбирают по договоренности. По (9) будет, что  $\tilde{\gamma}^{t_0} = \gamma^{t_0}(1 + n)/4$ . Полагается, что величина  $\tilde{\gamma}^{t_0}$  известна всем агентам).

Первое предположение вполне естественно для агента, использующего индикаторы. Оно означает, что в  $(t + 1)$ -м такте каждый агент будет знать расчетные индикаторы  $\tilde{\gamma}^t$  и совокупные выпуски предыдущих тактов  $Q^t$  ( $t = 1, 2, \dots$ ). Индикаторы  $\tilde{\gamma}^t$  вычисляются самими агентами по рекуррентной формуле (12), а знание агентами совокупных выпусков обеспечивается условиями процедуры коллективного поведения (2)–(3). В свою очередь, в  $(t + 1)$ -м такте каждый агент будет знать также расчетные индикаторы  $z_{t_0,t}$ , которые согласно свойству 1 индикатора вычисляются самим агентом по рекуррентной формуле  $z_{t_0,t} = z_{t_0,t-1} + z^t$ , где  $z^t$  определяется по (11).

Второе предположение направлено на то, чтобы исключить влияние равновесных выпусков на индикатор  $\tilde{\gamma}^t$  и процесс (6).

В рамках этих предположений, наблюдая по модели (2) ранее выбранные совокупные выпуски  $Q^t$ , каждый агент может уже самостоятельно и независимо от других получать единые оценки  $\tilde{\gamma}^t$  и  $z_{t_0,t}$  динамики рынка, синхронизированные с оценками конкурентов начиная с такта  $t_0$ .

## 5. Заключение

Практическая и научная значимость, а также перспективы будущих исследований динамики коллективного поведения определяются аналитическим подтверждением интуитивного представления о том, что их агрегированное

описание на значительных временных промежутках может быть не менее точным, чем детализированное. Применение агрегированных индикаторов позволяет расширить понимание о множестве ситуаций, которые в условиях неполной информированности и отсутствия общего знания могут приводить модели олигополии к рефлексивным равновесиям – устойчивым исходам взаимодействия агентов. Представляется перспективной разработка и применение агрегированных индикаторов в поиске аналитических решений задач рефлексивного принятия решений в рамках и других, отличных от рассмотренных в данной работе, моделей олигополии и поведения, например с реакцией агентов по Штакельбергу, а также с учетом психических и поведенческих компонент деятельности агентов [9].

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство утверждения 1.* Оптимальные стратегии агентов могут быть определены на основе (5) как решение системы  $n$  однородных линейных уравнений  $\partial \Pi_i / \partial \varepsilon_i = - \left( \sum_{j \in N} \varepsilon_j \right) - \varepsilon_i = 0$  ( $i \in N$ ) с  $n$  неизвестными. Определитель, соответствующий матрице коэффициентов при неизвестных, не равен нулю. Поэтому такая система имеет только нулевое решение  $\varepsilon_i^* = 0 \quad \forall i \in N$ . Это решение будет равновесным по Нэшу. Предположим, что только  $i$ -й агент отклоняется от нулевого решения на конечную величину  $\Delta \varepsilon_i \neq 0$ . Тогда по (5) имеем, что  $\Pi_i(\varepsilon^*) = 0 > -(\Delta \varepsilon_i)^2$ , т.е. при отклонении прибыль агента уменьшается и поэтому тривиальное решение является равновесным.

Утверждение 1 доказано.

*Доказательство утверждения 4.* Пусть  $0 < \tilde{\gamma}^{t_s} < 1$ . По (7) имеем  $\sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t_0 + \tau} = (1 - 2\tilde{\gamma}^{t_s})^\tau \sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t_0}$ . Отсюда  $\sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t_0 + \tau} \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow \infty$  и по утверждению 3 будет  $\varepsilon_i^{t_0 + \tau} \rightarrow \varepsilon_i^* = 0 \quad \forall i \in N$ .

Если  $\tilde{\gamma}^{t_s} < 0$  или  $1 < \tilde{\gamma}^{t_s}$ , то  $\left| \sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t_0 + \tau} \right| \rightarrow \infty$ , и поэтому динамика сходиться не может.

Утверждение доказано.

*Доказательство утверждения 5.* Положим  $t^* = \max_{t \in M(\tau)} t$  при  $\tau \rightarrow \infty$ . Тогда по свойству 3) для  $z_{t^*+1, t}$  будет  $z_{t^*+1, t^*+\tau} = \sum_{t \in T_+} \tilde{\gamma}^t + t_- - \sum_{t \in T_-} \tilde{\gamma}^t > 0$  при  $\tau \geq 1$ . Отсюда, учитывая выражения для средних значений  $\tilde{\gamma}_+^t = \frac{1}{t_+} \sum_{t \in T_+} \tilde{\gamma}^t$ ,  $\tilde{\gamma}_-^t = \frac{1}{t_-} \sum_{t \in T_-} \tilde{\gamma}^t$ , имеем  $t_+ \tilde{\gamma}_+^\tau - t_- (\tilde{\gamma}_-^\tau - 1) > 0$ . Из этого неравенства следует неравенство  $\frac{t_+(1-2\tilde{\gamma}_+^\tau) + t_-(2\tilde{\gamma}_-^\tau - 1)}{t_+ + t_-} < 1$ .

По неравенству (8) имеем  $\left| \sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t^* + \tau} \right| \leq (1 - 2\tilde{\gamma}_+^\tau)^{t_+} |1 - 2\tilde{\gamma}_-^\tau|^{t_-} \left| \sum_{j \in N} \varepsilon_j^{t^*} \right|$  ( $\tau = t_+ + t_-$ ).

Для оценки выражения  $(1 - 2\tilde{\gamma}_+^\tau)^{t_+} |1 - 2\tilde{\gamma}_-^\tau|^{t_-}$  в правой части этого неравенства воспользуемся следующим известным неравенством. Пусть  $x_1, x_2 \geq 0$ ,  $1 > \alpha > 0$ . Тогда  $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \geq x_1^\alpha x_2$ . Равенство имеет место только при  $x_1 = x_2$ .

Поэтому будет справедливо:

$$(1 - 2\bar{\gamma}_+^\tau)^{t_+} |1 - 2\bar{\gamma}_-^\tau|^{t_-} = (1 - 2\bar{\gamma}_+^\tau)^{t_+} (2\bar{\gamma}_-^\tau - 1)^{t_-} \leq \\ \leq \left[ \frac{t_+(1 - 2\bar{\gamma}_+^\tau) + t_-(2\bar{\gamma}_-^\tau - 1)}{t_+ + t_-} \right]^{t_+ + t_-}.$$

Было показано, что выражение в квадратных скобках меньше единицы. Поэтому  $\left[ \frac{t_+(1 - 2\bar{\gamma}_+^\tau) + t_-(2\bar{\gamma}_-^\tau - 1)}{t_+ + t_-} \right]^{t_+ + t_-} \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow \infty$ , и на основании утверждения 3 процесс (6) сходится к равновесию.

Утверждение 5 доказано.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Corchon L.C.(ed.), Marini M.A. (ed.)*. Handbook of Game Theory and Industrial Organization. V. I: Theory. Edward Elgar Publishing, UK, USA, 2018.
2. *Corchon L.C.(ed.), Marini M.A. (ed.)*. Handbook of Game Theory and Industrial Organization. V. II: Applications. Edward Elgar Publishing, UK, USA, 2018.
3. *Гераськин М.И.* Обзор новейших достижений в теории игр олигополии // *АиТ*. 2023. № 6. С. 3–25.  
*Geraskin M.I.* A Survey of the Latest Advances in Oligopoly Games // *Autom. Remote Control*. 2023. V. 84. No. 6. P. 565–578.
4. *Novikov D.A., Chkhartishvili A.G.* Reflexion and Control: Mathematical Models. Leiden: CRC Press, 2014.
5. *Ueda M.* Effect of Information Asymmetry in Cournot Duopoly Game with Bounded Rationality // *Appl. Math. Comput.* 2019. V. 362.  
<https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.06.049.124535>
6. *Peng Y., Xiao Y., Lu Q., Wu X., Zhao Y.* Chaotic Dynamics in Cournot Duopoly Model with Bounded Rationality Based on Relative Profit Delegation Maximization // *Physica A: Statist. Mech. Appl.* 2020. V. 560. 125174 p.
7. *Koriyama Y., Ozkes A.I.* Inclusive Cognitive Hierarchy // *J. Econom. Behavior Organiz.* 2021. V. 186. P. 458–480.
8. *Новиков Д.А.* Ограниченная рациональность и управление // *Математическая теория игр и ее приложения*. 2022. Т. 14. Вып.1. С. 49–84.
9. *Новиков Д.А.* Модели динамики психических и поведенческих компонент деятельности в коллективном принятии решений // *Управление большими системами*. М.: ИПУ РАН, 2020. Вып. 85. С. 206–237.
10. *Скаржинская Е.М., Цуриков В.И.* О возможности последовательного приближения к равновесию в коалиционной игре при повторении коллективных действий // *Экономика и математические методы*. 2020. № 4. С. 103–115.
11. *Askar S.* On Complex Dynamics of Cournot-Bertrand Game with Asymmetric Market Information // *Appl. Math. Comput.* 2021. V. 393. No. 3.  
<https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125823>
12. *Alcantara-Jimenez G., Clempner J.B.* Repeated Stackelberg Security Games: Learning with Incomplete State Information // *Reliability Engineer. Syst. Safety*. 2020. V. 195(C). <https://doi.org/10.1016/j.ress.2019.106695>

13. *Long J., Zhao H.* Stability of Equilibrium Prices in a Dynamic Duopoly Bertrand Game with Asymmetric Information and Cluster Spillovers // *Int. J. Bifurcat. Chaos Appl. Sci. Engineer.* 2021. V. 31. No. 16. P. 215–240.
14. *Xiao Y., Zhang S., Peng Y.* Dynamic Investigations in a Stackelberg Model with Differentiated Products and Bounded Rationality // *J. Comput. Appl Math.* 2022. V. 414. No. 3. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2022.114409>
15. *Корепанов В.О.* Модели рефлексивного группового поведения и управления // М.: ИПУ РАН, 2011. 127 с.
16. *Угольницкий Г.А., Усов А.Б.* Сравнительный анализ эффективности способов организации взаимодействия экономических агентов в моделях дуополии Курно с учетом экологических условий // *АиТ.* 2023. № 2. С. 150–168.  
*Ougolnitsky G.A, Usov A.B.* The Interaction of Economic Agents in Cournot Duopoly Models under Ecological Conditions: A Comparison of Organizational Modes // *Autom. Remote Control.* 2023. V. 84. No. 2. P. 175–189.
17. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Агрегированные оценки динамики рефлексивного коллективного поведения в модели олигополии Курно // *АиТ.* 2024. № 9. С. 124–138.  
*Algazin G.I., Algazina D.G.* Aggregate Estimates of Reflexive Collective Behavior Dynamics in a Cournot Oligopoly Model // *Autom. Remote Control.* 2024. V. 85. No. 9. P. 821–831.
18. *Cournot A.* *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth.* London: Hafner, 1960. (Original 1838).
19. *Алгазин Г.И., Алгазина Ю.Г.* Рефлексивная динамика в условиях неопределенности олигополии Курно // *АиТ.* 2020. № 2. С. 115–133.  
*Algazin G.I., Algazina Yu.G.* Reflexive Dynamics in the Cournot Oligopoly under Uncertainty // *Autom. Remote Control.* 2020. V. 81. No. 2. P. 345–359.
20. *Nash J.* *Non-Cooperative Games* // *Ann. Math.* 1951. No. 54. P. 286–295.
21. *Опоицев В.И.* *Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения.* М.: Наука, 1977.
22. *Яковлев М.К.* Построение поля действительных чисел и теории пределов числовых последовательностей на основе понятия стабилизатора последовательности бесконечных десятичных дробей // *Математика в высшем образовании.* 2010. № 8. С. 41–52.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Чхартишвили.*

Поступила в редакцию 24.05.2025

После доработки 26.06.2025

Принята к публикации 30.06.2025