

Управление в технических системах

© 2026 г. М.В. МАКСИМЕНКО, канд. техн. наук (m.v.maksimenko@spbu.ru),
А.А. ТИХОНОВ, д-р физ.-мат. наук (a.tikhonov@spbu.ru)
(Санкт-Петербургский государственный университет)

МОДИФИКАЦИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОГО МЕТОДА ТРЕХОСНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ЗЕМЛИ В ОРБИТАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ¹

Решается задача трехосной стабилизации искусственного спутника Земли (ИСЗ) в произвольном (непрямом) положении в орбитальной системе координат с помощью электродинамической системы управления, генерирующей лоренцев момент и момент магнитного взаимодействия. Управляющие моменты содержат восстанавливающие, диссипативные и компенсирующие составляющие. Предложен новый способ формирования диссипативных моментов, реализуемый с помощью имеющихся органов управления. Методом функций Ляпунова получены достаточные условия асимптотической устойчивости программного движения ИСЗ без использования ограничений на модель геомагнитного поля и наклонение орбиты ИСЗ. Представлено комбинированное электродинамическое управление, позволяющее сократить время стабилизации и снизить амплитуду колебаний переходных процессов. Приведены результаты численных экспериментов, демонстрирующих работоспособность предложенного модифицированного метода стабилизации ИСЗ, а также его эффективность.

Ключевые слова: спутник, электродинамическое управление, трехосная стабилизация, модифицированное управление, функция Ляпунова, асимптотическая устойчивость.

DOI: 10.7868/S2413977726030043

1. Введение

Взаимодействие искусственного спутника Земли (ИСЗ) с геомагнитным полем является источником возникновения крутящих моментов, которые успешно используются для решения широкого круга задач динамики управляемого движения ИСЗ относительно его центра масс [1, 2]. К их числу относится рассматриваемая в данной работе задача трехосной стабилизации ИСЗ в орбитальной системе координат. Взаимодействие геомагнитного поля с магнитными катушками, установленными на ИСЗ, рассматривается как простой, надежный и эффективный способ решения этой задачи [2–7], а также более сложных задач, в которых требуется обеспечивать иные программные

¹ Исследование выполнено за счет Российского научного фонда (проект № 24-41-02031, <https://rscf.ru/project/24-41-02031/>).

режимы углового движения ИСЗ [8]. При этом, несмотря на наличие глобальной управляемости и наблюдаемости в магнитных системах управления [9], приходится учитывать такой недостаток этих систем, как невозможность создания управляющего момента в направлении вектора магнитной индукции геомагнитного поля [4]. Аналогичным недостатком обладает другая известная система управления, основанная на использовании взаимодействия электрического заряда с геомагнитным полем [10–14]. Однако объединение возможностей этих двух принципов создания систем управления в единую электродинамическую систему управления (ЭДСУ) позволяет достигать лучших результатов по сравнению с теми, которые дают каждая из двух систем в отдельности [15].

С использованием ЭДСУ решены такие актуальные задачи динамики ИСЗ, как одноосная и трехосная стабилизация ИСЗ в орбитальной и в кениговой системах координат, стабилизация двухосной закрутки ИСЗ и др. [16]. Вместе с тем многие упомянутые задачи решались с использованием частных предположений, например касающихся выбора модели геомагнитного поля, формы и наклона орбиты ИСЗ.

В задачах трехосной стабилизации обычно программным режимом является прямое положение равновесия ИСЗ в орбитальной системе координат, т.е. такое положение, в котором главные центральные оси инерции ИСЗ совпадают с осями орбитальной системы координат. Вместе с тем, бывает актуальна стабилизация ИСЗ в непрямых положениях равновесия – задача принципиально более сложная ввиду того, что значительный по величине гравитационный момент является возмущающим моментом именно в непрямых положениях равновесия. Задача стабилизации ИСЗ землеобзора при косом расположении в орбитальной системе координат в служебном аварийном режиме решена в [17], где подробно изучены вопросы цифрового управления магнитным приводом на всех этапах перехода системы управления ориентацией ИСЗ в аварийный режим и последующего длительного поддержания этого режима.

Кроме того, известны различные способы реализации пассивных или комбинированных систем угловой стабилизации ИСЗ, не требующих расхода рабочего тела и энергии или требующих их в незначительном объеме и опирающихся на одновременное использование гравитационного и аэродинамического моментов [18–20].

Такой подход к проблеме угловой стабилизации ИСЗ естественно приводит к реализации непрямых положений равновесия ИСЗ в орбитальной системе координат в качестве рабочих режимов. При этом решаются задачи выбора наиболее подходящих штатных режимов ориентации, избежания нежелательных резонансных эффектов [21], а также и задачи стабилизации выбранных штатных режимов с использованием дополнительных средств, таких как маховики и активные магнитные системы [22, 23]. Следовательно, могут быть полезны и другие способы, опирающиеся на использование магнитного поля Земли. Решению задачи стабилизации ИСЗ в непрямых положениях равнове-

сия с использованием ЭДСУ посвящена работа [24]. Управления в ней строятся в соответствии с классическим подходом, предполагающим создание в системе управления восстанавливающих, диссипативных и компенсирующих моментов [25]. При этом в рамках такого подхода диссипативный момент создается в виде линейной функции относительной угловой скорости ИСЗ.

В данной работе предложены две модификации диссипативного момента, а также их адаптивная комбинация. Продемонстрирована высокая эффективность комбинированного метода формирования диссипативного момента. В данной работе отсутствуют ограничения, связанные с выбором той или иной модели геомагнитного поля и с наклоном орбиты ИСЗ. Исследование проводится на базе нелинейной математической модели с использованием метода функций Ляпунова для обоснования асимптотической устойчивости программного движения.

2. Электродинамическое управление угловым движением ИСЗ

2.1. Программное движение ИСЗ

Рассматривается движение ИСЗ как твердого тела вокруг центра масс, который движется по кеплеровой круговой орбите произвольного наклона i и радиуса R в магнитном поле Земли (МПЗ). Предполагается, что ИСЗ оснащен контролируемым электростатическим зарядом Q , распределенным по определенному объему V с плотностью σ , и контролируемым собственным магнитным моментом \vec{I} .

Для описания угловой ориентации ИСЗ в статье будут использоваться следующие правые ортогональные декартовы системы координат (рис. 1).

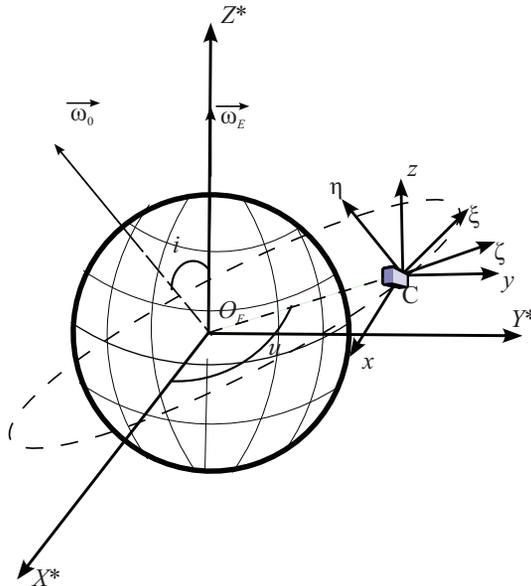


Рис. 1. Системы координат.

1) $O_E X^* Y^* Z^*$ – система координат, принимаемая за инерциальную, ось $O_E X^*$ направлена в восходящий узел орбиты, ось $O_E Z^*$ – по оси суточного вращения Земли.

2) $C\xi\eta\zeta$ – орбитальная система координат с началом в центре масс ИСЗ, ось $C\xi$ (орт $\vec{\xi}_0$) направлена по касательной к орбите в направлении движения, ось $C\eta$ (орт $\vec{\eta}_0$) – по нормали к орбите, ось $C\zeta$ (орт $\vec{\zeta}_0$) – по местной вертикали.

3) $Cxyz$ – подвижная система координат, оси которой направлены вдоль главных центральных осей инерции ИСЗ.

Относительное положение систем $Cxyz$ и $C\xi\eta\zeta$ определяется матрицей направляющих косинусов $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^3$, элементы которой можно выразить через «самолетные» углы ψ , θ , φ в соответствии со следующими представлениями ортов $\vec{\xi}_0$, $\vec{\eta}_0$, $\vec{\zeta}_0$ орбитальной системы координат в системе координат $Cxyz$:

$$\begin{aligned}\vec{\xi}_0 &= (\cos \psi \cos \theta, \cos \psi \sin \theta \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi, \sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \sin \theta \cos \varphi)^\top, \\ \vec{\eta}_0 &= (\sin \psi \cos \theta, \cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \theta \sin \varphi, \sin \psi \sin \theta \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi)^\top, \\ \vec{\zeta}_0 &= (-\sin \theta, \sin \varphi \cos \theta, \cos \varphi \cos \theta)^\top.\end{aligned}$$

Исследование проводится с учетом вращения орбитальной системы координат относительно инерциальной с угловой скоростью $\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{\eta}_0$ и вращения Земли с угловой скоростью $\vec{\omega}_E$ (рис. 1). Поэтому абсолютная угловая скорость ИСЗ $\vec{\omega}$ может быть представлена в виде

$$(1) \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}' + \vec{\omega}_0,$$

где $\vec{\omega}'$ – угловая скорость ИСЗ относительно орбитальной системы координат. Вектор \vec{v}_C скорости центра масс ИСЗ относительно вращающейся Земли имеет следующее разложение по ортам $\vec{\xi}_0$, $\vec{\eta}_0$, $\vec{\zeta}_0$:

$$\vec{v}_C = (R(\omega_0 - \omega_E \cos i), R\omega_E \sin i \cos u, 0)^\top,$$

где $u = \omega_0 t$ – аргумент широты, используемый далее в качестве безразмерной независимой переменной.

Распределение масс ИСЗ характеризуется тензором инерции $\mathbf{J} = \text{diag}(A, B, C)$ в главных центральных осях инерции $Cxyz$.

Программная ориентация ИСЗ в орбитальной системе координат определяется матрицей $\mathbf{A}_0 = \{a_{ij}(\varphi_0, \theta_0, \psi_0)\}_{i,j=1}^3$. В соответствии с этим требуется построить управляющие моменты, обеспечивающие существование и асимптотическую устойчивость такого программного движения ИСЗ относительно центра масс, при котором

$$(2) \quad \varphi = \varphi_0, \quad \theta = \theta_0, \quad \psi = \psi_0, \quad \vec{\omega}' = \vec{0}.$$

2.2. Управляющие моменты и управляемые векторы

При движении ИСЗ относительно МПЗ с магнитной индукцией \vec{B} возбуждаются лоренцев момент \vec{M}_L [26] и момент магнитного взаимодействия \vec{M}_M . Они имеют вид

$$(3) \quad \vec{M}_L = \vec{P} \times \vec{T}, \quad \vec{M}_M = \vec{I} \times \mathbf{A}^\top \vec{B},$$

где $\vec{P} = Q\vec{\rho}_0$, $\vec{\rho}_0$ – радиус-вектор центра заряда ИСЗ относительно его центра масс, $\vec{T} = \mathbf{A}^\top (\vec{v}_C \times \vec{B})$. Здесь и далее управляемые векторы \vec{P} и \vec{I} считаются заданными в системе координат *Cxyz*. Моменты (3) являются управляющими в электродинамической системе управления угловым движением ИСЗ.

Отметим, что при заданной орбите ИСЗ магнитная индукция \vec{B} в (3) является известной функцией координат точки околоземного пространства. В дальнейшем считаем, что МПЗ однородно в части пространства, занимаемой ИСЗ, а вектор $\vec{B} = B_\xi \vec{\xi}_0 + B_\eta \vec{\eta}_0 + B_\zeta \vec{\zeta}_0$ принимает в точках этого пространства то же значение, что и в центре масс ИСЗ (точка *C*).

В программном режиме (2) вращательного движения ИСЗ векторы \vec{T} и \vec{B} соответственно принимают вид

$$\vec{T}_0 = \mathbf{A}_0^\top (\vec{v}_C \times \vec{B}), \quad \vec{B}_0 = \mathbf{A}_0^\top \vec{B}.$$

Электродинамическая система управления предполагает, что для реализации программного режима вращательного движения ИСЗ должны быть выбраны законы изменения управляемых векторов \vec{P} и \vec{I} . Построим каждый из них как сумму восстанавливающей (индекс «*rest*»), диссипативной (индекс «*diss*») и компенсирующей (индекс «*comp*») составляющих:

$$(4) \quad \vec{P} = \vec{P}_{rest} + \vec{P}_{diss} + \vec{P}_{comp}, \quad \vec{I} = \vec{I}_{rest} + \vec{I}_{diss} + \vec{I}_{comp}.$$

С учетом (4) управляющие моменты (3) примут вид

$$(5) \quad \begin{aligned} \vec{M}_L &= (\vec{P}_{rest} + \vec{P}_{diss} + \vec{P}_{comp}) \times \vec{T}, \\ \vec{M}_M &= (\vec{I}_{rest} + \vec{I}_{diss} + \vec{I}_{comp}) \times \mathbf{A}^\top \vec{B}. \end{aligned}$$

3. Математическая модель

3.1. Система уравнений, описывающих движение ИСЗ

Движение ИСЗ относительно центра масс как твердого тела с учетом воздействия гравитационного (возмущающего) и управляющих моментов (3) описывается динамическими уравнениями Эйлера

$$(6) \quad \frac{d}{dt} (\mathbf{J}\vec{\omega}) + \vec{\omega} \times (\mathbf{J}\vec{\omega}) = \vec{M}_{GR} + \vec{M}_L + \vec{M}_M,$$

где $\vec{M}_{GR} = 3\omega_0^2 (\mathbf{A}^\top \vec{\zeta}_0) \times (\mathbf{J}\mathbf{A}^\top \vec{\zeta}_0)$ – гравитационный момент [1].

Подставляя выражение для абсолютной угловой скорости (1), гравитационный и управляющие моменты в (6), получим:

$$(7) \quad \begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\mathbf{J} \left(\vec{\omega}_0 \mathbf{A}^\top \vec{\eta}_0 + \vec{\omega}' \right) \right] + \left[\vec{\omega}_0 \mathbf{A}^\top \vec{\eta}_0 + \vec{\omega}' \right] \times \left[\mathbf{J} \left(\vec{\omega}_0 \mathbf{A}^\top \vec{\eta}_0 + \vec{\omega}' \right) \right] = \\ & = 3\omega_0^2 (\mathbf{A}^\top \vec{\zeta}_0) \times (\mathbf{J} \mathbf{A}^\top \vec{\zeta}_0) + (\vec{P}_{rest} + \vec{P}_{diss} + \vec{P}_{comp}) \times \vec{T} + \\ & \quad + (\vec{I}_{rest} + \vec{I}_{diss} + \vec{I}_{comp}) \times \mathbf{A}^\top \vec{B}. \end{aligned}$$

Для замыкания системы дифференциальных уравнений (7) будем их рассматривать совместно с кинематическими уравнениями Пуассона:

$$(8) \quad \frac{d\vec{\xi}_0}{dt} = \vec{\xi}_0 \times \vec{\omega} - \omega_0 \vec{\zeta}_0, \quad \frac{d\vec{\eta}_0}{dt} = \vec{\eta}_0 \times \vec{\omega}, \quad \frac{d\vec{\zeta}_0}{dt} = \vec{\zeta}_0 \times \vec{\omega} + \omega_0 \vec{\xi}_0.$$

3.2. Компенсация возмущающего момента

Программный режим (2) углового движения ИСЗ в общем случае не является прямым положением равновесия ИСЗ в орбитальной системе координат. Поэтому гравитационный момент и выражение $\omega_0^2 (\mathbf{A}^\top \vec{\eta}_0) \times (\mathbf{J} \mathbf{A}^\top \vec{\eta}_0)$ из уравнений (7) не обращаются в ноль в программном движении ИСЗ. Для компенсации суммарного возмущающего момента \vec{M}_d , вычисляемого по формуле

$$\vec{M}_d = \omega_0^2 \left(3(\mathbf{A}^\top \vec{\zeta}_0) \times (\mathbf{J} \mathbf{A}^\top \vec{\zeta}_0) - (\mathbf{A}^\top \vec{\eta}_0) \times (\mathbf{J} \mathbf{A}^\top \vec{\eta}_0) \right),$$

будет использован подход, основанный на создании соответствующих компенсирующих компонент электродинамических параметров [27] и обеспечивающий выполнение равенства $\vec{M}_d + \vec{P}_{comp} \times \vec{T} + \vec{I}_{comp} \times (\mathbf{A}^\top \vec{B}) = \vec{0}$. Формулы, используемые для вычисления восстанавливающих и компенсирующих компонент управляемых векторов \vec{P} и \vec{I} для реализации электродинамического управления, направленного на стабилизацию программного движения ИСЗ, имеют вид:

$$\begin{aligned} \vec{P}_{rest} &= Qk_L \vec{T}_0, \quad \vec{P}_{comp} = \frac{\vec{M}_d \cdot (\mathbf{A}^\top \vec{B})}{|\vec{B}| |\vec{T}|} \left(\mathbf{V}^\top (0, 0, 1)^\top \right), \\ \vec{I}_{rest} &= k_M \vec{B}_0, \quad \vec{I}_{comp} = \mathbf{V}^\top \left(0, \frac{\vec{M}_d \cdot \left((\mathbf{A}^\top \vec{B}) \times \vec{T} \right)}{|\vec{B}|^2 |\vec{T}|}, -\frac{\vec{M}_d \cdot \vec{T}}{|\vec{B}| |\vec{T}|} \right)^\top. \end{aligned}$$

Здесь k_L и k_M – подбираемые параметры управления, которые могут являться постоянными или функциями времени, $\mathbf{V} = \{v_{ij}\}_{i,j=1}^3$ – известная матрица с элементами

$$\begin{aligned} v_{11} &= B_x / |\vec{B}|, \quad v_{12} = B_y / |\vec{B}|, \quad v_{13} = B_z / |\vec{B}|, \\ v_{21} &= T_x / |\vec{T}|, \quad v_{22} = T_y / |\vec{T}|, \quad v_{23} = T_z / |\vec{T}|, \\ v_{31} &= \frac{B_y T_z - B_z T_y}{|\vec{B}| |\vec{T}|}, \quad v_{32} = \frac{B_z T_x - B_x T_z}{|\vec{B}| |\vec{T}|}, \quad v_{33} = \frac{B_x T_y - B_y T_x}{|\vec{B}| |\vec{T}|}. \end{aligned}$$

Выбор диссипативных компонент \vec{P}_{diss} и \vec{I}_{diss} управляемых векторов будет обоснован далее.

3.3. Уменьшение относительной угловой скорости ИСЗ

Задача угловой стабилизации ИСЗ подразумевает не только достижение заданной ориентации, но и обеспечение ее асимптотической устойчивости. Для этого в управляемых векторах (4) предусмотрены диссипативные компоненты, которые могут выбираться различными способами. Например, многочисленные пассивные устройства для создания диссипативных моментов, включающие хорошо зарекомендовавшие себя составные схемы в спутниках типа Vertistat, сферические магнитные демпферы (как жидкостные, так и вихревых токах), гистерезисные стержни обеспечивают создание диссипативных моментов, пропорциональных угловой скорости ИСЗ (см. [28] и работы, цитируемые в ней).

В электродинамических системах управления обычно используются полупассивные способы создания диссипативных моментов. При этом наряду с линейными вариантами управления [15, 29] во многих случаях также оказываются эффективными управления, нелинейные относительно угловой скорости [30].

Кроме того, в теории управления механическими системами, а также угловым движением ИСЗ широко используется управление по кинетическому моменту [31–34]. В частности, известен вариант стабилизации ИСЗ, использующий демпфирование, пропорциональное кинетическому моменту ИСЗ [6].

Ранее в работах авторов использовались диссипативные компоненты с параметрами управления h_L и h_M вида

$$(9) \quad \vec{P}_{diss} = Qh_L\vec{\omega}' \times \vec{T}, \quad \vec{I}_{diss} = h_M\vec{\omega}' \times (\mathbf{A}^\top \vec{B}).$$

В данном исследовании предлагается наряду с формулами (9) рассмотреть три новых варианта формирования диссипативных компонент. В первом из них вместо относительной угловой скорости присутствует $\vec{K} = \mathbf{J}\vec{\omega}'$ – кинетический момент ИСЗ в относительном движении:

$$(10) \quad \vec{P}_{diss} = Qh_L (A^{-1}\mathbf{J}\vec{\omega}') \times \vec{T}; \quad \vec{I}_{diss} = h_M (A^{-1}\mathbf{J}\vec{\omega}') \times (\mathbf{A}^\top \vec{B}).$$

Во втором варианте формирования диссипативной компоненты управляемых векторов используется закон, в котором вместо \vec{K} присутствует орт вектора \vec{K} :

$$(11) \quad \vec{P}_{diss} = \frac{Qh_L}{|\vec{K}|} (A^{-1}\mathbf{J}\vec{\omega}') \times \vec{T}; \quad \vec{I}_{diss} = \frac{h_M}{|\vec{K}|} (A^{-1}\mathbf{J}\vec{\omega}') \times (\mathbf{A}^\top \vec{B}).$$

В этом варианте управления стабилизация будет достигаться формально за бесконечно большое время. Поэтому при реализации соответствующего алгоритма управления норма вектора \vec{K} при стремлении ее к нулю принимается равной некоторой выбранной постоянной малой величине Δ , как только $|\vec{K}|$ уменьшится до этой величины. Другими словами, вводится в рассмотрение

модифицированная норма $|\vec{K}|_{mod}$ согласно формуле:

$$(12) \quad |\vec{K}|_{mod} = \frac{|\Delta - |\vec{K}|| + \Delta + |\vec{K}|}{2}.$$

Третий вариант представляет собой комбинацию вариантов (10) и (11). Обоснование третьего варианта управления будет дано далее в разделе 5.

Заметим, что новые варианты формирования диссипативных компонент в виде (10), (11) и их комбинации не требуют введения в систему управления дополнительных измерительных устройств по сравнению с (9).

Подставляя (5) в (7), получим следующую систему дифференциальных уравнений, которую рассмотрим вместе с (8):

$$(13) \quad \begin{aligned} & \frac{d}{dt} [\mathbf{J} (\vec{\omega}' + \omega_0 \vec{\eta}_0)] + (\vec{\omega}' + \omega_0 \vec{\eta}_0) \times (\mathbf{J} \vec{\omega}') + \omega_0 \vec{\omega}' \times (\mathbf{J} \vec{\eta}_0) = \\ & = Q k_L \vec{T}_0 \times \vec{T} + \vec{P}_{diss} \times \vec{T} + k_M \vec{B}_0 \times (\mathbf{A}^\top \vec{B}) + \vec{I}_{diss} \times (\mathbf{A}^\top \vec{B}). \end{aligned}$$

Таким образом, поставлена задача об определении условий для параметров k_L , k_M , h_L , h_M , при выполнении которых может быть гарантирована асимптотическая устойчивость программного движения (2).

4. Анализ устойчивости движения

Выведем условия асимптотической устойчивости для программного движения (2) с использованием варианта (10) как более общего по сравнению с (9). Предполагая, что углы $\varphi_1 = \varphi - \varphi_0$, $\theta_1 = \theta - \theta_0$, $\psi_1 = \psi - \psi_0$ малы и их производные по времени также малы, разложим управляющие моменты, присутствующие в правой части уравнения (13), в степенные ряды по этим малым величинам и опустим все степени выше первой аналогично подходу, который был использован в [24, 35]:

$$\begin{aligned} M_{L\nu_m}^{(1)} &= l_{m1}(t)(k_L \varphi_1 + h_L \dot{\varphi}_1) + l_{m2}(t)(k_L \theta_1 + \delta h_L \dot{\theta}_1) + l_{m3}(t)(k_L \psi_1 + \varepsilon h_L \dot{\psi}_1), \\ M_{M\nu_m}^{(1)} &= b_{m1}(t)(k_M \varphi_1 + h_M \dot{\varphi}_1) + b_{m2}(t)(k_M \theta_1 + \delta h_M \dot{\theta}_1) + \\ &+ b_{m3}(t)(k_M \psi_1 + \varepsilon h_M \dot{\psi}_1). \end{aligned}$$

Здесь $m = 1, 2, 3$, $\nu_1 = x$, $\nu_2 = y$, $\nu_3 = z$, $\delta = B/A$, $\varepsilon = C/A$. Обозначим симметричные матрицы: $\mathbf{S}_L(t) = \{l_{ij}\}_{i,j=1}^3$, $\mathbf{S}_M(t) = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^3$ с элементами l_{ij} и b_{ij} (см. Приложение). Тогда уравнения (13) примут вид дифференциальных уравнений возмущенного движения в решаемой задаче трехосной угловой стабилизации ИСЗ:

$$(14) \quad \mathbf{J} \ddot{\vec{y}} + \mathbf{D}(t) \dot{\vec{y}} + \mathbf{G} \dot{\vec{y}} + \mathbf{H}(t) \vec{y} + \vec{F}(t, \vec{y}, \dot{\vec{y}}) = \vec{0},$$

где $\vec{y} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \theta_1 \\ \psi_1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{G} = \omega_0 (A - B + C) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – постоянная матрица,

$\mathbf{D}(t) = -A^{-1}\mathbf{J}(h_L\mathbf{S}_L(t) + h_M\mathbf{S}_M(t))$, $\mathbf{H}(t) = -(k_L\mathbf{S}_L(t) + k_M\mathbf{S}_M(t))$ – матрицы с переменными коэффициентами, вектор \vec{F} нелинейно зависит от \vec{y} , $\dot{\vec{y}}$.

Введем параметры управления $k_{L0}, k_{M0}, h_{L0}, h_{M0}$, которые являются положительными постоянными и вычисляются по формулам:

$$k_{L0} = k_L Q |\vec{T}(t)|^2, \quad k_{M0} = k_M |\vec{B}(t)|^2, \quad h_{L0} = h_L Q |\vec{T}(t)|^2, \quad h_{M0} = h_M |\vec{B}(t)|^2.$$

Обозначая их соотношения через $\varepsilon_1 = k_{L0}/k_{M0}$, $\varepsilon_2 = h_{L0}/h_{M0}$, $\mu = h_{M0}/k_{M0}$, получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(t) &= -\mu k_{M0} (A^{-1}\mathbf{J}\mathbf{U}_M(t) + \varepsilon_2 A^{-1}\mathbf{J}\mathbf{U}_L(t)), \\ \mathbf{H}(t) &= -k_{M0} (\mathbf{U}_M(t) + \varepsilon_1 \mathbf{U}_L(t)), \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{U}_M(t) = \frac{\mathbf{S}_M(t)}{|\vec{B}(t)|^2}; \quad \mathbf{U}_L(t) = \frac{\mathbf{S}_L(t)}{Q|\vec{T}(t)|^2}.$$

Функция Ляпунова может быть выбрана в виде квадратичной формы с постоянной $\chi > 0$:

$$(15) \quad V(t, \vec{y}, \dot{\vec{y}}) = \frac{1}{2} \dot{\vec{y}}^\top \mathbf{D}(t) \dot{\vec{y}} + \frac{\chi}{2} \dot{\vec{y}}^\top \mathbf{J} \dot{\vec{y}} + \vec{y}^\top \mathbf{J} \dot{\vec{y}} + \frac{\chi}{2} \vec{y}^\top \mathbf{H}(t) \vec{y}.$$

Производная по времени функции (15) в силу системы (14) имеет вид:

$$(16) \quad \begin{aligned} \dot{V}(t, \vec{y}, \dot{\vec{y}})|_{(14)} &= -\chi \dot{\vec{y}}^\top \mathbf{D}(t) \dot{\vec{y}} - \vec{y}^\top \mathbf{G} \dot{\vec{y}} - \vec{y}^\top \mathbf{H}(t) \vec{y} - \chi \dot{\vec{y}}^\top \mathbf{G} \dot{\vec{y}} + \\ &+ \frac{1}{2} \dot{\vec{y}}^\top \dot{\mathbf{D}}(t) \dot{\vec{y}} + \dot{\vec{y}}^\top \mathbf{J} \dot{\vec{y}} + \frac{\chi}{2} \dot{\vec{y}}^\top \dot{\mathbf{H}}(t) \vec{y} - (\chi \dot{\vec{y}} + \vec{y})^\top \vec{F}(t, \vec{y}, \dot{\vec{y}}). \end{aligned}$$

Для квадратичных форм, входящих в выражения (15) и (16), верны следующие оценки для любых векторов $\vec{x}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ [36, 37]:

$$(17) \quad \begin{aligned} \vec{x}^\top \mathbf{D}(t) \vec{x} &\geq \mu k_{M0} \inf \lambda_{\min} (-A^{-1}\mathbf{J}\mathbf{U}_M(t) - \varepsilon_2 A^{-1}\mathbf{J}\mathbf{U}_L(t)) \|\vec{x}\|^2, \\ \vec{x}^\top \mathbf{H}(t) \vec{x} &\geq k_{M0} \inf \lambda_{\min} (-\mathbf{U}_M(t) - \varepsilon_1 \mathbf{U}_L(t)) \|\vec{x}\|^2, \\ \min\{A, B, C\} \|\vec{x}\|^2 &\leq \vec{x}^\top \mathbf{J} \vec{x} \leq \max\{A, B, C\} \|\vec{x}\|^2, \\ |\vec{x}^\top \mathbf{J} \vec{z}| &\leq \max\{A, B, C\} \|\vec{x}\| \|\vec{z}\|, \\ \vec{x}^\top \dot{\mathbf{D}}(t) \vec{x} &\leq \mu k_{M0} \sup \lambda_{\max} (-A^{-1}\mathbf{J}\dot{\mathbf{U}}_M(t) - \varepsilon_2 A^{-1}\mathbf{J}\dot{\mathbf{U}}_L(t)) \|\vec{x}\|^2, \\ \vec{x}^\top \dot{\mathbf{H}}(t) \vec{x} &\leq k_{M0} \sup \lambda_{\max} (-\dot{\mathbf{U}}_M(t) - \varepsilon_1 \dot{\mathbf{U}}_L(t)) \|\vec{x}\|^2, \\ |\vec{x}^\top \mathbf{G} \vec{z}| &\leq \omega_0 (A - B + C) \|\vec{x}\| \|\vec{z}\|, \quad \vec{x}^\top \mathbf{G} \vec{x} \leq \omega_0 (A - B + C) \|\vec{x}\|^2, \end{aligned}$$

где наибольшее и наименьшее собственные числа матрицы \mathbf{M} обозначены через $\lambda_{\min}(\mathbf{M})$ и $\lambda_{\max}(\mathbf{M})$ и операции \sup и \inf выполняются для всех $t \in \mathbb{R}$.

Обозначим:

$$(18) \quad d_1 = \min\{A, B, C\}, \quad d_2 = \max\{A, B, C\}, \quad d_3 = A - B + C, \\ d_{41} = \inf \lambda_{\min} [-A^{-1} \mathbf{J} (\mathbf{U}_M(t) + \varepsilon_2 \mathbf{U}_L(t))], \quad d_{42} = \inf \lambda_{\min} (-\mathbf{U}_M(t) - \varepsilon_1 \mathbf{U}_L(t)), \\ d_{51} = \sup \lambda_{\max} [-A^{-1} \mathbf{J} (\dot{\mathbf{U}}_M(t) + \varepsilon_2 \dot{\mathbf{U}}_L(t))], \quad d_{52} = \sup \lambda_{\max} (-\dot{\mathbf{U}}_M(t) - \varepsilon_1 \dot{\mathbf{U}}_L(t)).$$

В соответствии с (17), (18) функция Ляпунова может быть оценена снизу:

$$V(t, \vec{y}, \dot{\vec{y}}) \geq \frac{1}{2} \|\vec{y}\|^2 (\mu k_{M0} d_{41} + \chi k_{M0} d_{42} - d_2 a_1 \omega_0^2) + \frac{1}{2} \|\dot{\vec{y}}\|^2 \left(d_1 \chi - \frac{d_2}{a_1 \omega_0^2} \right),$$

где $a_1 > 0$ — некоторая постоянная величина.

Соответственно, если выполняются приведенные ниже неравенства

$$(19) \quad \chi > \frac{d_2}{d_1 a_1 \omega_0^2}, \quad \chi > \frac{d_2 a_1 \omega_0^2 - \mu k_{M0} d_{41}}{k_{M0} d_{42}},$$

то функция Ляпунова (15) будет положительно определенной.

Кроме того, числа $c > 0$ и $\delta_0 > 0$ могут быть выбраны таким образом, чтобы выполнялось неравенство:

$$\dot{V}(t, \vec{y}, \dot{\vec{y}})|_{(14)} \leq \frac{1}{2} \|\vec{y}\|^2 (a_2 \omega_0^2 d_3 + \mu k_{M0} d_{51} + \chi k_{M0} d_{52} - 2k_{M0} d_{42}) + \\ + \|\dot{\vec{y}}\|^2 \left(d_2 + \frac{d_3}{2a_2} - \chi \mu k_{M0} d_{41} \right) + c \left(\chi \|\dot{\vec{y}}\| + \|\vec{y}\| \right) \left(\|\dot{\vec{y}}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 \right)$$

для $t \geq 0$, $\|\vec{y}\| < \delta_0$, $\|\dot{\vec{y}}\| < \delta_0$, где $a_2 > 0$ — некоторая постоянная величина.

Таким образом, при выполнении условий

$$(20) \quad k_{M0} > \frac{a_2 \omega_0^2 d_3}{2d_{42} - \mu d_{51} - \chi d_{52}}, \quad \chi > \frac{d_2 + d_3 / (2a_2)}{\mu k_{M0} d_{41}}, \quad \chi < \frac{2d_{42} - \mu d_{51}}{d_{52}}$$

производная функции (16) в силу системы (14) отрицательно определена.

Теорема 1. Если для заданных параметров ИСЗ A, B, C, Q , параметров орбиты R, i и параметров управления $k_{L0}, k_{M0}, h_{L0}, h_{M0}$ имеются положительные числа a_1, a_2 и χ , для которых неравенства (19), (20) выполнены, тогда программное движение (2) для системы (7), (8) асимптотически устойчиво.

Доказательство теоремы дано в Приложении.

5. Численные эксперименты

Для оценки влияния предложенных модификаций диссипативного момента на процесс стабилизации углового движения ИСЗ проведем серию численных экспериментов для следующих параметров ИСЗ: $A = 1000 \text{ кг} \times \text{м}^2$,

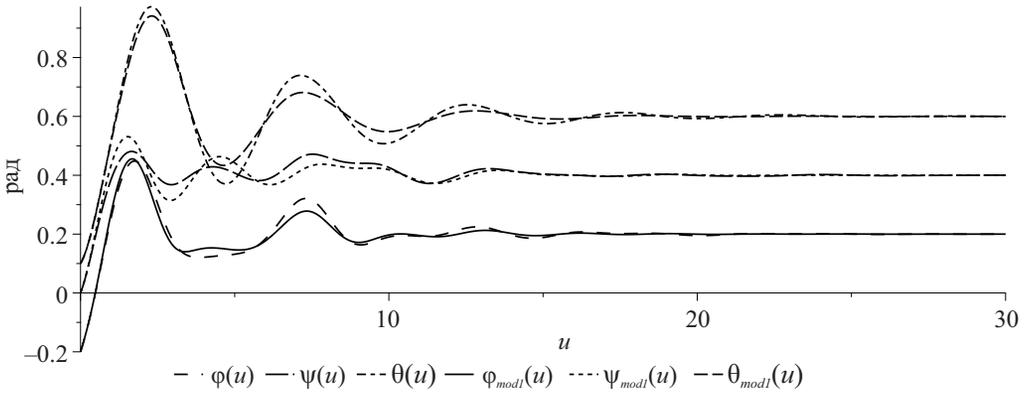


Рис. 2. Изменение «самолетных» углов $\varphi(u)$, $\psi(u)$, $\theta(u)$ ориентации ИСЗ при управлении (9) и $\varphi_{\text{mod1}}(u)$, $\psi_{\text{mod1}}(u)$, $\theta_{\text{mod1}}(u)$ при управлении (10).

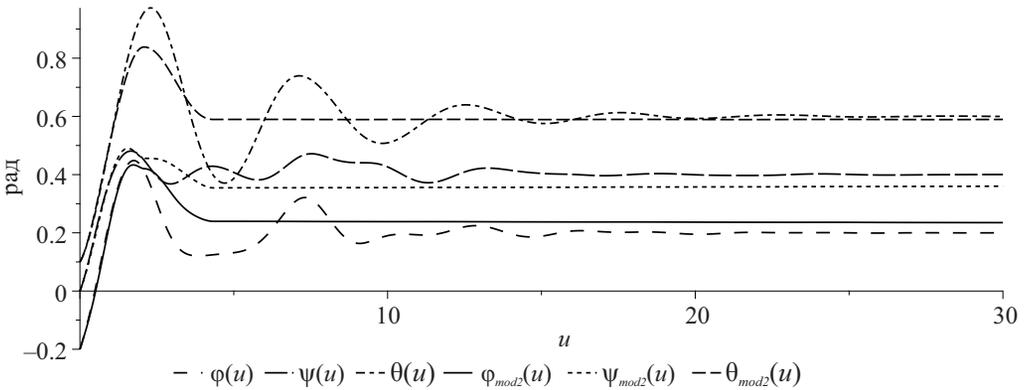


Рис. 3. Изменение «самолетных» углов $\varphi(u)$, $\psi(u)$, $\theta(u)$ ориентации ИСЗ при управлении (9) и $\varphi_{\text{mod2}}(u)$, $\psi_{\text{mod2}}(u)$, $\theta_{\text{mod2}}(u)$ при управлении (11).

$B = 1300 \text{ кг} \times \text{м}^2$, $C = 700 \text{ кг} \times \text{м}^2$, $Q = 15 \times 10^{-3} \text{ Кл}$, орбиты: $R = 7 \times 10^6 \text{ м}$, $i = 30^\circ$ и управления: $k_{L0} = 2,5 \times 10^{-3} \text{ Н} \times \text{м}$, $k_{M0} = 2 \times 10^{-3} \text{ Н} \times \text{м}$, $h_{L0} = 0,2 \text{ Н} \times \text{м} \times \text{с}$, $h_{M0} = 1,0 \text{ Н} \times \text{м} \times \text{с}$.

Желаемая ориентация ИСЗ определяется следующими значениями «самолетных» углов: $\varphi_0 = 0,2 \text{ рад}$, $\psi_0 = 0,4 \text{ рад}$, $\theta_0 = 0,6 \text{ рад}$.

При компьютерном моделировании геомагнитное поле моделируется с использованием октупольного приближения, гауссовы коэффициенты определяются согласно модели МПЗ (IGRF) 13-го поколения [38]. Следует отметить, что порядок аппроксимации модели МПЗ не ограничен для предлагаемого электродинамического метода управления, а именно, построенный метод управления позволяет использовать мультипольную модель МПЗ любого порядка.

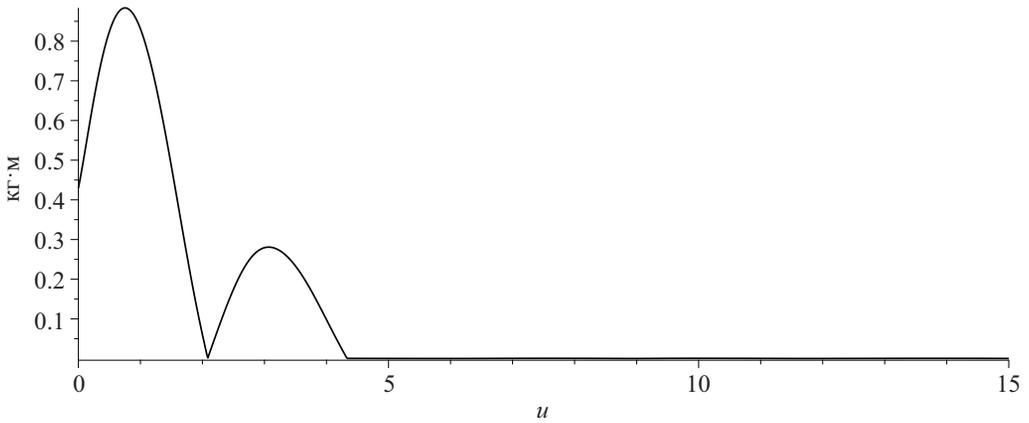


Рис. 4. Модуль вектора \vec{K} в случае закона формирования диссипативных компонент в виде (11).

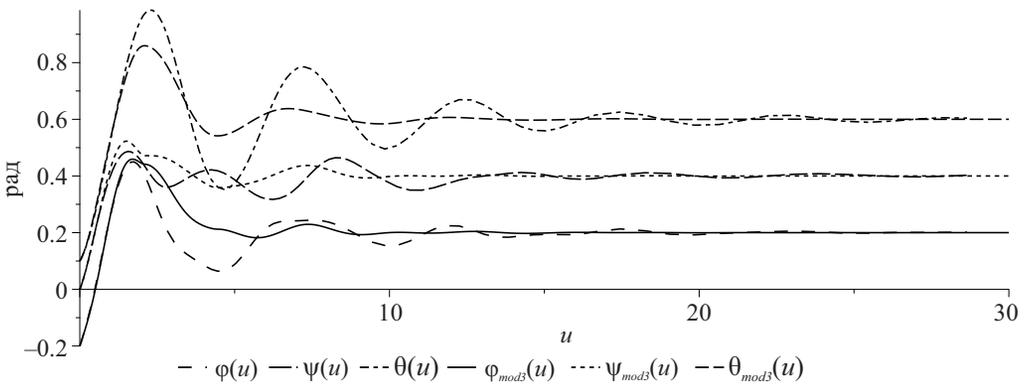


Рис. 5. Изменение «самолетных» углов $\varphi(u)$, $\psi(u)$, $\theta(u)$ ориентации ИСЗ при управлении (9) и $\varphi_{\text{mod}3}(u)$, $\psi_{\text{mod}3}(u)$, $\theta_{\text{mod}3}(u)$ при комбинации вариантов (10) и (11).

Для выбранных параметров ИСЗ, орбиты и управления, удовлетворяющих достаточным условиям асимптотической устойчивости, проведено численное интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений (7), (8).

Процесс стабилизации ИСЗ показан на рис. 2–5 для следующих начальных условий: $\varphi(0) = -0,2$ рад, $\psi(0) = 0,0$ рад, $\theta(0) = 0,1$ рад, $\Omega_x(0) = \omega_x(0)/\omega_0 = 0,3$, $\Omega_y(0) = \omega_y(0)/\omega_0 = 1,1$, $\Omega_z(0) = \omega_z(0)/\omega_0 = 0,5$. Здесь и далее на рисунках по горизонтальным осям откладывается безразмерная переменная u , для которой $u = 5$ соответствует $t = 4638,22$ с или примерно 1 ч 17 мин. На рис. 2 показан процесс стабилизации при модифицированных диссипативных составляющих управляемых векторов (10) и при использовании диссипативных компонент управляемых векторов в виде (9).

На рис. 3 показан процесс стабилизации при модифицированных диссипативных составляющих управляемых векторов (11) и при использовании

диссипативных компонент управляемых векторов в виде (9). При численном интегрировании дифференциальных уравнений в (12) было принято значение $\Delta = 0,001$.

Заметим, что переходный процесс стабилизации ИСЗ стал более гладким. Однако, заданная ориентация будет достигнута за достаточно продолжительное время. Это связано с тем, что $|\vec{K}|$ с некоторого момента времени становится малой величиной (рис. 4), что приводит к появлению малого знаменателя в формуле (11) и последующему снижению качества управления.

Для преодоления этого недостатка предлагается объединить подходы (10) и (11). На рис. 5 показан процесс стабилизации ИСЗ при использовании комбинации модифицированных диссипативных составляющих управляемых векторов (10) и (11).

Таким образом, при комбинированном подходе к формированию закона изменения диссипативных компонент управляемых векторов (4) удается достичь не только стабилизации ИСЗ в орбитальной системе координат в непрямом положении равновесия (2) (в общем случае), но и получить сравнительно более гладкий и быстрее сходящийся переходный процесс стабилизации ИСЗ с использованием уже имеющихся органов управления.

Следует заметить, что в процессе численных экспериментов анализировался вопрос о реализуемости управления с точки зрения ограниченности величин управляемых векторов (4). Установлено, что при таком выборе параметров управления управляющие моменты (3) не превосходят гравитационного момента по порядку величины.

6. Заключение

В статье рассмотрена задача электродинамического управления угловым движением заряженного ИСЗ, обладающего собственным магнитным моментом, и его стабилизации в орбитальной системе координат в произвольном положении. Предложены три варианта формирования диссипативного момента, которые могут быть реализованы с помощью имеющихся органов управления. Первые два, рассмотренные в отдельности, обладают недостатками, которые можно устранить, если объединить их в одну комбинированную систему формирования диссипативного момента (третий вариант). Такое комбинированное электродинамическое управление обладает преимуществами первого и второго вариантов, а именно позволяет как сократить время стабилизации, так и снизить амплитуду колебаний переходных процессов. Эти качества имеют первостепенное значение, когда на борту ИСЗ находится аппаратура или устройства, чувствительные к колебаниям. Приведенные результаты численных экспериментов демонстрируют работоспособность предложенного модифицированного метода управления угловым движением ИСЗ, а также его эффективность.

С помощью метода функций Ляпунова получены достаточные условия устойчивости программного движения, выраженные явным образом через параметры ИСЗ, орбиты и параметры управления.

Симметричные матрицы $\mathbf{S}_L(t) = \{l_{ij}\}_{i,j=1}^3$, $\mathbf{S}_M(t) = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^3$ с элементами l_{ij} и b_{ij} (см.раздел 4) имеют вид:

$$l_{11}(t) = Q(-B_\zeta(\sin \psi_0 v_{C\xi} - \cos \psi_0 v_{C\eta})(-B_\eta v_{C\xi} + B_\xi v_{C\eta}) \sin \theta_0 - \\ - B_\zeta^2 v_{C\xi}^2 \cos \psi_0 - B_\zeta^2 v_{C\xi} v_{C\eta} \sin \psi_0 - \cos \theta_0(-B_\eta v_{C\xi} + B_\xi v_{C\eta})^2) \cos \varphi_0 - \\ - B_\zeta(B_\xi v_{C\xi}(\sin \psi_0 v_{C\xi} - \cos \psi_0 v_{C\eta}) \sin \theta_0 + \\ + (B_\xi v_{C\eta} - B_\eta v_{C\xi})(\cos \theta_0 v_{C\xi} - \cos \psi_0 v_{C\xi} - \sin \psi_0 v_{C\eta})) \sin \varphi_0;$$

$$l_{12}(t) = l_{21}(t) = Qv_{C\eta}(((B_\eta v_{C\xi} - B_\xi v_{C\eta}) \cos \theta_0 + B_\zeta \sin \theta_0(\cos \psi_0 v_{C\eta} - \\ - \sin \psi_0 v_{C\xi})) \sin \varphi_0 - B_\zeta \cos \varphi_0(\cos \psi_0 v_{C\xi} + \sin \psi_0 v_{C\eta}))B_\zeta;$$

$$l_{13}(t) = l_{31}(t) = Qv_{C\eta}(((B_\eta v_{C\xi} - B_\xi v_{C\eta}) \cos \theta_0 + B_\zeta \sin \theta_0(\cos \psi_0 v_{C\eta} - \\ - \sin \psi_0 v_{C\xi})) \cos \varphi_0 + B_\zeta \sin \varphi_0(\cos \psi_0 v_{C\xi} + \sin \psi_0 v_{C\eta}))B_\zeta;$$

$$l_{22}(t) = -Q(-(B_\xi v_{C\eta} - B_\eta v_{C\xi})(B_\zeta \sin \theta_0(-\sin \psi_0 v_{C\xi} + \cos \psi_0 v_{C\eta}) - \\ - \cos \theta_0(B_\xi v_{C\eta} - B_\eta v_{C\xi})) \cos \varphi_0 + ((B_\xi v_{C\eta}^2 - B_\eta v_{C\eta} v_{C\xi}) \sin \theta_0 + \\ + B_\zeta v_{C\eta}(\cos \psi_0 v_{C\eta} - \sin \psi_0 v_{C\xi}) \cos \theta_0 - \\ - \sin \varphi_0(-B_\eta v_{C\xi} + B_\xi v_{C\eta})(\cos \psi_0 v_{C\xi} + \sin \psi_0 v_{C\eta}))B_\zeta);$$

$$l_{23}(t) = l_{32}(t) = -Qv_{C\xi}(((B_\eta v_{C\xi} - B_\xi v_{C\eta}) \cos \theta_0 + \\ + B_\zeta \sin \theta_0(\cos \psi_0 v_{C\eta} - \sin \psi_0 v_{C\xi})) \cos \varphi_0 + \\ + B_\zeta \sin \varphi_0(\cos \psi_0 v_{C\xi} + \sin \psi_0 v_{C\eta}))B_\zeta;$$

$$l_{33}(t) = -Q(-v_{C\xi}((B_\eta v_{C\xi} - B_\xi v_{C\eta}) \cos \theta_0 + \\ + B_\zeta \sin \theta_0(-\sin \psi_0 v_{C\xi} + \cos \psi_0 v_{C\eta})) \sin \varphi_0 + \\ + B_\zeta v_{C\eta}(-\sin \psi_0 v_{C\xi} + \cos \psi_0 v_{C\eta}) \cos \theta_0 + (-B_\eta v_{C\eta} v_{C\xi} + B_\xi v_{C\eta}^2) \sin \theta_0 + \\ + B_\zeta \cos \varphi_0 v_{C\xi}(\cos \psi_0 v_{C\xi} + \sin \psi_0 v_{C\eta}))B_\zeta;$$

$$b_{11}(t) = (-B_\zeta(B_\xi \cos \psi_0 + B_\eta \sin \psi_0) \sin \theta_0 + B_\xi B_\eta \sin \psi_0 - \\ - B_\eta^2 \cos \psi_0 - B_\zeta^2 \cos \theta_0) \cos \varphi_0 - ((B_\xi B_\eta \cos \psi_0 + B_\eta^2 \sin \psi_0) \sin \theta_0 + \\ + B_\zeta(B_\xi \sin \psi_0 - \cos \psi_0 B_\eta + B_\eta \cos \theta_0)) \sin \varphi_0;$$

$$b_{12}(t) = b_{21}(t) = ((B_\zeta \cos \theta_0 + \sin \theta_0(B_\xi \cos \psi_0 + B_\eta \sin \psi_0)) \sin \varphi_0 - \\ - \cos \varphi_0(B_\xi \sin \psi_0 - \cos \psi_0 B_\eta))B_\zeta;$$

$$b_{13}(t) = b_{31}(t) = B_\xi((B_\zeta \cos \theta_0 + \sin \theta_0(B_\xi \cos \psi_0 + B_\eta \sin \psi_0)) \cos \varphi_0 + \\ + \sin \varphi_0(B_\xi \sin \psi_0 - \cos \psi_0 B_\eta));$$

$$b_{22}(t) = -B_\zeta(B_\zeta \cos \theta_0 + \sin \theta_0(B_\xi \cos \psi_0 + B_\eta \sin \psi_0)) \cos \varphi_0 - (B_\xi^2 \cos \psi_0 + \\ + B_\xi B_\eta \sin \psi_0) \cos \theta_0 + B_\zeta(\sin \theta_0 B_\xi - \sin \varphi_0(B_\xi \sin \psi_0 - \cos \psi_0 B_\eta));$$

$$b_{23}(t) = b_{32}(t) = B_\eta((B_\zeta \cos \theta_0 + \sin \theta_0(B_\xi \cos \psi_0 + B_\eta \sin \psi_0)) \cos \varphi_0 + \\ + \sin \varphi_0(B_\xi \sin \psi_0 - \cos \psi_0 B_\eta));$$

$$b_{33}(t) = -B_\eta(B_\zeta \cos \theta_0 + \sin \theta_0(B_\xi \cos \psi_0 + B_\eta \sin \psi_0)) \sin \varphi_0 - (B_\xi^2 \cos \psi_0 + \\ + B_\xi B_\eta \sin \psi_0) \cos \theta_0 + \sin \theta_0 B_\xi B_\zeta + \cos \varphi_0 B_\eta(B_\xi \sin \psi_0 - \cos \psi_0 B_\eta).$$

Доказательство теоремы 1. Разрешим неравенства (19), (20) относительно χ и перепишем их в виде:

$$\begin{aligned}
 & 1) \quad \chi > \frac{d_2}{d_1 a_1 \omega_0^2}, \\
 & 2) \quad \chi > \frac{d_2 a_1 \omega_0^2 - \mu k_{M0} d_{41}}{k_{M0} d_{42}}, \\
 \text{(П.1)} \quad & 3) \quad \chi < \frac{2k_{M0} d_{42} - \mu k_{M0} d_{51} - a_2 \omega_0^2 d_3}{k_{M0} d_{52}} = \frac{2d_{42} - \mu d_{51}}{d_{52}} - \frac{a_2 \omega_0^2 d_3}{k_{M0} d_{52}}, \\
 & 4) \quad \chi > \frac{d_2 + d_3 / (2a_2)}{\mu k_{M0} d_{41}}, \\
 & 5) \quad \chi < \frac{2d_{42} - \mu d_{51}}{d_{52}}.
 \end{aligned}$$

Неравенства 1), 2) и 4) системы (П.1) определяют нижнюю границу для числа χ .

Обозначим: $\chi_1 = \frac{d_2}{d_1 a_1 \omega_0^2}$; $\chi_2 = \frac{d_2 a_1 \omega_0^2 - \mu k_{M0} d_{41}}{k_{M0} d_{42}}$; $\chi_4 = \frac{d_2 + d_3 / (2a_2)}{\mu k_{M0} d_{41}}$. Заметим, что χ_1 , и χ_2 зависят от параметра a_1 , причем с ростом параметра a_1 значение $\chi_1(a_1)$ убывает по гиперболическому закону, а $\chi_2(a_1)$ растет линейно. Таким образом, чтобы минимизировать $\max\{\chi_1, \chi_2\}$, параметр a_1^* выбирается так, чтобы $\chi_1(a_1^*) = \chi_2(a_1^*)$.

Неравенства 3) и 5) системы (П.1) определяют верхнюю границу допустимых значений параметра χ . Если $\frac{a_2 \omega_0^2 d_3}{k_{M0} d_{52}} > 0$, то неравенство 5) является следствием неравенства 3). Обозначим искомую границу: $\chi_3 = \frac{2k_{M0} d_{42} - \mu k_{M0} d_{51} - a_2 \omega_0^2 d_3}{k_{M0} d_{52}}$. Следовательно, система неравенств (П.1) упрощается до следующего неравенства:

$$\max\{\chi_1(a_1^*), \chi_4\} < \chi_3.$$

Аналогично заметим, что χ_3 и χ_4 зависят от параметра a_2 . При этом χ_3 убывает линейно, в то время как χ_4 убывает гиперболически. Чтобы определить значение χ , требуется определить непустой интервал $[a_2^{(1)}, a_2^{(2)}]$, где неравенство $\chi_4 < \chi_3$ выполняется для каждой точки внутри этого отрезка. Из уравнения $\chi_3(a_2) = \chi_4(a_2)$ найдем корни $a_2^{(1)}$ и $a_2^{(2)}$.

Если длина искомого отрезка $[a_2^{(1)}, a_2^{(2)}]$ стремится к нулю, то она уменьшается до точки a_2^* , где значение a_2^* можно найти из равенства угловых коэффициентов прямой $\chi_3(a_2)$ и касательной к кривой $\chi_4(a_2)$. Следовательно, $a_2^* = \sqrt{d_{52} / (2\mu \omega_0^2 d_{41})}$. Такой выбор константы a_2 может быть рекомендован для численного анализа достаточных условий асимптотической устойчивости. Окончательно, система неравенств (П.1) сводится к неравенству

$$\text{(П.2)} \quad \max\{\chi_1(a_1^*), \chi_4(a_2^*)\} < \chi_3(a_2^*).$$

Если неравенство (П.2) не выполняется, потому что $\chi_1(a_1^*) > \chi_3(a_2^*)$, то можно выбрать соответствующее значение a_2 , уменьшив его до $a_2^{(1)}$.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника Земли относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
2. *Сарычев В.А., Овчинников М.Ю.* Магнитные системы ориентации искусственных спутников Земли // Итоги науки и техники. Сер. Исследование космического пространства. М.: ВИНТИ АН СССР, 1985. Т. 23. 104 с.
3. *Rodriguez-Vazquez A., Prats M.M.* Spacecraft Magnetic Attitude Control Using Approximating Sequence of Riccati Equations // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 2014. V. 51. <https://doi.org/10.1109/TAES.2015.130478>
4. *Ovchinnikov M.Y., Roldugin D.S., Penkov V.I.* Three-axis active magnetic attitude control asymptotical study // Acta Astronautica. 2015. V. 110. P. 279–286. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2014.11.030>
5. *Giri D., Mukherjee B., T N B., Sinha M.* Three-Axis global magnetic attitude control of Earth-pointing satellites in circular orbit: Three-Axis Global Magnetic Attitude Control // Asian Journal of Control. 2017. V. 19(3). <https://doi.org/10.1002/asjc.1506>
6. *Пеньков В.И., Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С.* Трехосная ориентация спутника в орбитальных осях посредством магнитного момента. Управление по вектору конечного поворота // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 7. 21 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2018-7>
7. *Морозов В.М., Каленова В.И.* Управление с помощью магнитных моментов ориентацией спутника, движущегося по полярной орбите // Инженерный журнал: наука и инновации. 2018. № 9(81). С. 8–23. <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2018-9-1798>
8. *Ovchinnikov M., Roldugin D.* Magnetic attitude control and periodic motion for the in-orbit rotation of a dual-spin satellite // Acta Astronautica. 2021. V. 186. P. 203–210. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2021.05.035>
9. *Морозов В.М., Каленова В.И.* Управление спутником при помощи магнитных моментов: управляемость и алгоритмы стабилизации // Космические исследования. 2020. Т. 58. № 3. С. 199–207.
10. *Тихонов А.А.* Метод полупассивной стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле // Космические исследования. 2003. Т. 41. № 1. С. 69–79.
11. *Giri D.K., Sinha M.* Magneto-Coulombic attitude control of earth-pointing satellites // J. Guid. Control. Dyn. 2014. No. 37(6). P. 1946–1960. <https://doi.org/10.2514/1.G000030>
12. *Giri D.K., Sinha M.* Three-axis attitude control of earth-pointing isoinertial magneto-Coulombic satellites // Int. J. Dyn. Control. 2017. No. 5(3). P. 644–652. <https://doi.org/10.1007/s40435-015-0206-x>
13. *Aleksandrov A.Yu., Tikhonov A.A.* Averaging technique in the problem of Lorentz attitude stabilization of an Earth-pointing satellite // Aerospace Science and Technology. 2020. V. 104. P. 105963. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2020.105963>

14. *Prabhat H., Mukherjee B.K., Giri D.K., Sinha M.* Fault-tolerant sliding mode satellite attitude stabilization using magneto-Coulombic torquers // *Aerosp. Sci. Technol.* 2022. V. 121. DOI: 107316, <https://doi.org/10.1016/j.ast.2021.107316>
15. *Антипов К.А., Тихонов А.А.* Параметрическое управление в задаче о стабилизации космического аппарата в магнитном поле Земли // *АиТ.* 2007. № 8. С. 44–56.
Antipov K.A., Tikhonov A.A. Parametric control in the problem of spacecraft stabilization in the geomagnetic field // *Autom. Remote Control.* 2007. V. 68. No. 8. P. 1333–1344.
16. *Tikhonov A.A., Antipov K.A., Korytnikov D.G., Nikitin D.Yu.* Electrodynamical compensation of disturbing torque and attitude stabilization of a satellite in J2 perturbed orbit // *Acta Astronautica.* 2017. V. 141. P. 219–227.
<https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2017.10.009>
17. *Сомов Е.И., Бутырин С.А.* Энергосберегающее цифровое управление магнитным приводом в аварийном режиме ориентации спутника // *Известия Самарского научного центра РАН.* 2018. Т. 20. № 1. С. 37–44.
18. *Белецкий В.В., Яншин А.М.* Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. Киев: Наукова думка, 1984. 188 с.
19. *Белоконов И.В., Тимбай И.А., Баринова Е.В.* Выбор проектных параметров наноспутника формата CUBESAT с пассивной системой стабилизации // *Гироскопия и навигация.* 2020. Т. 28. № 1 (108). С. 81–100.
<https://doi.org/10.17285/0869-7035.0025>
20. *Баринова Е.В., Белоконов И.В., Тимбай И.А.* Технология проектирования углового движения малоразмерного космического аппарата стандарта CUBESAT с пассивной системой стабилизации // *Гироскопия и навигация.* 2024. Т. 32. № 4. С. 74–87.
21. *Баринова Е.В., Белоконов И.В., Елисов Н.А. и др.* Особенности динамики и некоторые вопросы управления угловым движением малоразмерных космических аппаратов нанокласса на низких орбитах // *Гироскопия и навигация.* 2023. Т. 31. № 3. С. 3–35.
22. *Lovera M., Astolfi A.* Global magnetic attitude control of spacecraft in the presence of gravity gradient // *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems.* 2006. V. 42. No. 3. P. 796–805.11
23. *Chesi S., Gong Q., Romano M.* Aerodynamic Three-Axis Attitude Stabilization of a Spacecraft by Center-of-Mass Shifting // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics.* 2017. V. 40. No. 7. P. 1613–1626.
24. *Maksimenko M.V., Tikhonov A.A.* Electrodynamic attitude stabilization of a satellite in an indirect position // *Acta Astronautica.* 2025. V. 232. P. 516–524.
<https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2025.03.018>
25. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 495 с.
26. *Петров К.Г., Тихонов А.А.* Момент сил Лоренца, действующих на заряженный спутник в магнитном поле Земли. Ч.2: Вычисление момента и оценки его составляющих // *Вест. СПб.-го ун-та.* 1999. Вып. 3 (№ 15). С. 81–91.
27. *Tikhonov A.A.* On electrodynamic compensation of a torque disturbing satellite orientation // 2015 International Conference “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov (SCP), October 5–9, Saint Petersburg. 2015. P. 132–134.
<https://doi.org/10.1109/SCP.2015.7342069>

28. *Сарычев В.А.* Д.Е. Охоцимский и его роль в создании систем пассивной ориентации спутников // Прикладная небесная механика и управление движением. Сб. статей, посвящ. 90-летию со дня рождения Д.Е. Охоцимского / сост.: Т.М. Эннеев и др.; редкол.: Э.Л. Аким (гл. ред.) и др. М.: ИПМ, 2010. 367 с.
29. *Тихонов А.А., Спасич Д.Т., Антипов К.А., Саблина М.В.* Оптимизация электродинамического метода стабилизации искусственного спутника Земли // АИТ. 2011. № 9. С. 112–120.
Tikhonov A.A., Antipov K.A., Sablina M.V., Spasic D.T. Optimizing the electro-dynamical stabilization method for a man-made Earth satellite // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 9. P. 1898–1905.
30. *Dosaev M., Samsonov V., Hwang S.-S.* Construction of control algorithm in the problem of the planar motion of a friction-powered robot with a flywheel and an eccentric weight // Applied Mathematical Modelling. 2021. V. 89. P. 1517–1527. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.08.022>
31. *Смольников Б.А.* Проблемы механики и оптимизации роботов. М.: Наука, 1991. 232 с.
32. *Бирюков В.Г., Челноков Ю.Н.* Построение оптимальных законов изменения вектора кинетического момента твердого тела // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2014. № 5. С. 3–21.
33. *Левский М.В.* Оптимальное управление кинетическим моментом во время пространственного разворота твердого тела (космического аппарата) // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2019. № 1. С. 115–140.
<https://doi.org/10.1134/S0572329919010069>
34. *Смирнов А.С., Смольников Б.А.* Построение и анализ рациональных режимов управления движением твердого тела // Труды МАИ. 2022. № 124.
<https://doi.org/10.34759/trd-2022-124-03>
35. *Aleksandrov A.Yu., Tikhonov A.A.* Asymptotic stability of a satellite with electrodynamic attitude control in the orbital frame // Acta Astronautica. 2017. V. 139. P. 122–129. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2017.06.033>
36. *Kosov A.* The exponential stability and stabilization of non-autonomous mechanical systems with non-conservative forces // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2007. V. 71. P. 371–384.
<https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2007.07.011>
37. *Aleksandrov A.Y., Kosov A.A.* Asymptotic stability of equilibrium positions of mechanical systems with a nonstationary leading parameter // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2008. V. 47. No. 3. P. 332–345. <https://doi.org/10.1134/S1064230708030027>
38. *Alken P., Thebault E., Beggan C.D., et al.* International Geomagnetic Reference Field: the 13th generation // International Geomagnetic Reference Field: the thirteenth generation. Earth Planets Space. 2021. V. 73(49).
<https://doi.org/10.1186/s40623-020-01288-x>

Статья представлена к публикации членом редколлегии О.А. Степановым.

Поступила в редакцию 05.05.2025

После доработки 05.11.2025

Принята к публикации 01.12.2025