*Автоматика и телемеханика, № 3, 2026*

*Робастное, адаптивное и сетевое управление*

© 2026 г. **Д.В. СПЕРАНСКИЙ, д-р техн. наук (Speranskiy.dv@gmail.com)**
**(Российский университет транспорта, Москва)**

# ОПТИМАЛЬНЫЕ ПОКРЫВАЮЩИЕ ДЕРЕВЬЯ В ЗАДАЧАХ ДИАГНОСТИКИ И СИНТЕЗА НЕЧЕТКИХ УСТРОЙСТВ

Введено понятие реализуемости нечеткого графа и сформулированы две оптимизационные задачи, сводящиеся к построению оптимальных покрывающих деревьев для нечетких графов. Критериями оптимальности являются реализуемость графа и минимальность длины дерева с учетом реализуемости. Эти задачи являются многокритериальными, чем принципиально отличаются от аналогичной задачи для четких графов. Описан точный метод решения упомянутых задач, имеющий достаточно высокую вычислительную сложность. Для построения минимального покрывающего дерева нечеткого графа предложен простой эвристический алгоритм с невысокой вычислительной сложностью, но не гарантирующий абсолютной его минимальности. Метод проиллюстрирован на примере.

*Ключевые слова*: нечеткий граф, покрывающие деревья, реализуемость и минимальность дерева, точные методы построения, эвристический метод.

**DOI:** 10.7868/S2413977726030033

## 1. Введение

При разработке электронных устройств часто необходимо электрически соединить несколько контактов. Желательно получить схему с минимальным количеством проводников. Решение этой задачи можно получить с использованием модели связного неориентированного графа $G(V, E)$, где $V$ – множество вершин, $E$ – множество возможных соединений между парами вершин. Для каждого ребра $(u, v) \in E$ можно задать вес $w(u, v)$, определяющий стоимость соединения $u$ и $v$. Для минимизации затрат на соединение вершин необходимо найти ациклическое подмножество $T \subseteq E$, соединяющее все вершины, чей общий вес $w(T) = \sum_{(u,v)\in T} w(u, v)$ минимален. Поскольку множество $T$ ациклическое и связывает все вершины, оно должно образовывать дерево, называемое минимальным покрывающим (остовом).

Рассмотрим еще один случай, когда исходное устройство представляет собой совокупность подсхем и задано множество пар подсхем, которые могут взаимно диагностировать друг друга. Предположим, что эти пары имеют многоканальные связи для взаимной диагностики. Каждая многоканальная связь пары подсхем имеет вес, равный ее стоимости. По аналогии с предыдущей задачей требуется построить ациклическое подмножество подсхем, соединяющих все взаимно диагностируемые пары и имеющих минимальный вес. Понятно, что решение этой задачи также сводится к построению минимального покрывающего дерева.

Приведенные задачи относятся к теории графов, имеющих многие практические приложения, которые связаны с решением разнообразных оптимизационных задач в различных областях. Обширная литература, посвященная их решению, в значительной части относится к классической теории графов. В ней граф является детерминированным и его описание не содержит никаких неопределенностей. Такие графы принято называть четкими. Полученные для них многочисленные результаты, а также основные понятия и конструкции теории графов представлены в монографиях [1, 2]. Поэтому в тексте статьи, как правило, ссылки на них не даются, предполагая знакомство с ними читателя.

Задача построения покрывающих деревьев для классических графов активно исследовалась с 20-х гг. прошлого века. Так, в 1926 г. был опубликован алгоритм ее решения, предложенный Борувкой, который позже неоднократно переоткрывался (Флорек, Перкалели, Соллини). Для решения задачи использовались различные подходы. Так, на основе алгоритма Боровки был реализован рандомизированный алгоритм, работающий в среднем за линейное время. Автором монографии [3] Майникой Э. был предложен его собственный алгоритм; в этой монографии, 2-я глава которой полностью посвящена упомянутой задаче, излагаются также ныне широко используемые алгоритмы Прима [4] и Крускала [5]. Упомянутые выше алгоритмы основывались на использовании идеи упорядочения ребер графа по весу и их инцидентности.

В связи с распространением ныне компьютерных сетей и разработками нового математического аппарата (например, генетических алгоритмов) в последнее время появились публикации, к примеру [6, 7], в которых для построения покрывающих деревьев возникли новые подходы, относящиеся к эволюционным вычислениям.

К сожалению, модель четкого графа не применима во многих реальных ситуациях, когда точное описание объекта исследования и его функционирования отсутствует и получить его принципиально невозможно. В этом случае нужны новые средства, отражающие возникающие неопределенности. В статье Л. Заде [8] такие средства были предложены: им введено понятие нечеткого множества, ставшего основой для создания ныне широко используемой в приложениях теории нечетких множеств.

Сейчас к одному из активно развивающихся направлений относится теория нечетких графов. Интерес к ней в последнее десятилетие связан с использованием ее результатов в важных практических приложениях. В качестве примеров, кроме упомянутых выше, приведем проблему живучести систем, оценки информационной надежности сложных систем, моделирования гетерогенных систем. Феномен нечеткости присутствует и при решении многих оптимизационных проблем экономического характера. Так, укажем на известную проблему проектирования сети дорог для некоторого региона с минимальными затратами на ее строительство. Если перечень дорог и их параметров между городами региона точно известен, то с использованием модели четкого графа проблема имеет точное решение. Для его получения разработано несколько эффективных алгоритмов [3].

Если вопрос о целесообразности прокладки отдельных дорог между некоторыми парами городов не имеет однозначного ответа, то возникающая неопределенность требует для решения упомянутой выше проблемы иной модели.

Для иллюстрации метода решения задачи построения покрывающего дерева для нечеткого графа далее используем задачу проектирования сети дорог региона. Это связано с ее популярностью, легко понимаемой постановкой и интерпретацией.

В теории четких графов проблема проектирования сети дорог сводится к построению для графа покрывающего дерева. При возникающей неопределенности эта проблема может быть решена с привлечением модели нечеткого графа и сводится она тоже к построению покрывающего дерева. Предлагаемая статья посвящена построению покрывающих деревьев для нечетких графов, оптимальных по критериям, которые отличны от критерия, принятого в четких графах.

## 2. Некоторые понятия и определения

Вначале напомним необходимые понятия, используемые далее. Все они трактуются так, как это изложено в монографии А. Кофмана [9]. Начнем с понятия нечеткого множества. Пусть множество $A$ есть подмножество множества $E (A \subset E)$. Принадлежность элемента $x \in A$ записывается с помощью функции $\mu_A(x)$, принимающей любое неотрицательное значение в упорядоченном множестве $M$, в частности из отрезка [0,1]. Математический объект, представленный в виде

$$A = \{(x_1|\mu_A(x_1)), (x_2|\mu_A(x_2)), \ldots, (x_n|\mu_A(x_n))\},$$

где $\mu_A(x_i)$ определяет степень принадлежности элемента $x_i$ множеству $A$, называется нечетким подмножеством множества $E$. Теперь напомним определение нечеткого графа [9]. Пусть $E_1, E_2$ – два множества и пусть $x \in E_1$, а $y \in E_2$. Множество пар $(x, y)$ определяет прямое произведение $E_1 \times E_2$. Нечеткое подмножество $G$ такое, что

$$\forall (x, y) \in E_1 \times E_2 \, \mu_G(x, y) \in M,$$

где $M$ – множество степеней принадлежности $E_1 \times E_2$, называется нечетким графом. Если пары $(x, y)$ рассматривать как упорядоченные, то соответствующий граф обычно называют нечетким ориентированным графом. Нечеткие графы, как и четкие, изображаются в виде вершин и ребер (дуг), связывающих их.

Встречающиеся в тексте статьи термины обычно имеют тот же смысл, что и в теории четких графов. Если же некоторые понятия для нечетких графов не совпадают с аналогичными понятиями для четких графов, то это будет оговариваться особо. Условимся для нечетких неориентированных графов длину ребра $(x, y)$ обозначать как $a(x, y)$. Напомним теперь понятие покрывающего (остовного) дерева графа: это ациклический связный подграф данного связного графа, в который входят все его вершины.

## 3. Содержательная формулировка задач

Вначале приведем некоторые комментарии к задаче о построении покрывающего дерева для нечеткого графа. В регионе, содержащем несколько городов, рассматривается проект строительства дорог, связывающих каждую пару его городов (не обязательно непосредственно, возможна связь транзитом). Задано множество пар городов, для которых строительство связывающей их непосредственно дороги возможно (разрешено). Длины дорог между парами городов из заданного множества известны. Для каждой такой дороги имеется также оценка целесообразности включения ее в проект (например, исходя из приносимого ею экономического эффекта и затрат на строительство). Такая оценка задается в виде числа из некоторого упорядоченного множества $M$ (в частности, из отрезка [0,1]), понимаемого как степень принадлежности дороги создаваемому проекту сети.

В качестве математической модели сети дорог далее используется нечеткий граф, где множество городов региона – это множество вершин, а множество дорог проекта – множество его ребер. В отличие от четкого графа, где весом каждого ребра $(x, y)$ обычно является одно число, интерпретируемое как его длина, для нечеткого графа весом является упорядоченная пара чисел $(a(x, y), \mu_G(x, y))$. Первое число – длина ребра, второе – степень его принадлежности. Понятно, что теперь оптимальность проекта может оцениваться по двум критериям, ассоциируемым с компонентами пары. Поэтому в статье рассматриваются две задачи оптимизации, содержательные формулировки которых приводятся ниже. Требуется разработать проект сети дорог (построить покрывающее дерево), связывающий все города региона, который:

1) обеспечивает максимальную вероятность его построения (максимальную сумму степеней принадлежности ребер) при минимально возможной сумме длин всех дорог, входящих в проект, с использованием параметров заданного нечеткого графа, являющегося моделью проекта сети;

2) обеспечивает минимальную сумму длин всех дорог сети при максимально возможной сумме степеней их принадлежности, используя параметры заданного нечеткого графа, являющегося моделью проекта сети. Далее в основном используется терминология, в которой проект сети дорог и ее мате-

матическая модель (покрывающее дерево нечеткого графа) являются синонимами.

Известно [3], что при решении аналога этой задачи для четкого графа в качестве критерия оптимальности используется минимальность суммарной длины дорог проекта сети. В этом случае задача сводится к построению минимального покрывающего дерева для графа, в котором вершинами являются города, а длины ребер (дорог), связывающих пары городов, известны. Решение сформулированных задач для нечеткого графа также сводится очевидным образом к построению для него некоторых оптимальных покрывающих деревьев, но в ином толковании (понимании) различного вида его оптимальностей. Поиск публикаций в приведенной здесь или близкой к ней постановкам задач для нечеткого графа общего вида показал их отсутствие.

### 4. Реализуемость и минимальность покрывающего дерева

Чтобы пояснить вводимые ниже понятия, выскажем соображения и мотивацию их введения для нечетких графов. Если нечеткий граф $G(X, E)$ есть математическая модель сети для решения рассматриваемой задачи, то множество $E$ в ней состоит только из «разрешенных» ребер, для которых $\mu_G(x, y) > 0$. Как было сказано выше, вес каждого ребра $(x, y)$ есть упорядоченная пара чисел $a(x, y), \mu_G(x, y)$, где второе число в паре – степень принадлежности ребра $(x, y)$ множеству $E$. Эту величину всегда можно трансформировать в вероятность $P(x, y)$ принадлежности ребра $(x, y)$ множеству $E$. Легко видеть, что функция принадлежности нечеткого множества напоминает плотность распределения вероятностей. Отличие состоит только в том, что сумма вероятностей по всем возможным значениям случайной величины всегда равна 1, а сумма $S$ значений функции принадлежности всех дуг в нечетком графе может быть любым неотрицательным числом. В связи с этим и возникает возможность преобразования функции принадлежности ребра графа в функцию распределения вероятностей. Такое сведение осуществляется просто нормированием функции принадлежности делением ее значения для каждого ребра нечеткого графа на величину $S$ (при $S \neq 0$ ). Этот способ использовался и ранее в ряде публикаций.

В теории нечетких множеств ненулевая степень принадлежности ребра трактуется только как потенциальная возможность его включения в граф. Естественно, что эта возможность тем выше, чем больше эта степень. Однако понятно, что реальное включение ребра (с ненулевой оценкой вероятности) в граф не обязательно осуществится. Это сопоставимо с аналогичной ситуацией в теории вероятностей, когда некоторое событие имеет ненулевую вероятность появления, но это не означает, что оно обязательно произойдет.

Заданный нечеткий граф предполагается связным, поскольку иначе у него не будет существовать покрывающего дерева. Однако реально в графе могут отсутствовать некоторые ребра, имеющие ненулевое значение принадлежности, из-за чего он может утратить свойство связности. Чтобы по возможности избежать этого, требуется обеспечить для каждого ребра (дороги), включаемого в покрывающее дерево, максимальное значение принадлежности и тем самым максимальную вероятность реального существования покрывающего дерева.

Для дальнейшего изложения предварительно введем следующие обозначения: $E = \{(a_1, b_1), \ldots, (a_z, b_z)\}$ – множество ребер нечеткого графа $G(X, E)$, $Rect\ (G(X, E))$ – реализуемость графа $G(X, E)$, $Lect\ (G(X, E))$ – суммарная длина всех ребер графа $G(X, E)$, $Pbe\ (x, y)$ – вероятность принадлежности ребра $(x, y)$ множеству $E = \{(a_1, b_1), \ldots, (a_z, b_z)\}$, $Mct\ (G(X, E))$ – минимальное покрывающее дерево графа $G(X, E)$, $Lct\ (G(X, E))$ – длина покрывающего дерева графа $G(X, E)$. Используя эти обозначения, приведем некоторые определения.

Реализуемостью покрывающего дерева нечеткого графа $G(X, E)$ назовем число, являющееся суммой вероятностей принадлежности всех ребер, входящих в это дерево, т.е. $Rect\ (G(X, E)) = \sum_{i=1}^{z} Pbe_G(a_i, b_i)$. Таким образом, реализуемость проекта сети дорог – это оценка (в виде вероятности) возможности реального существования покрывающего дерева для заданного нечеткого графа при заданных вероятностях принадлежности его ребер. Заметим, что понятие реализуемости хорошо согласуется со здравым смыслом: чем больше значение реализуемости, тем больше шансов реально построить для него покрывающее дерево.

*Длиной покрывающего дерева* нечеткого графа назовем число, равное сумме длин всех входящих в него ребер, т.е. $Lect\ (G(X, E)) = \sum_{i=1}^{z} a(a_i, b_i)$. Покрывающее дерево минимальной длины нечеткого графа $Mct\ (G(X, E))$ будем называть *минимальным покрывающим деревом.*

*Покрывающее дерево*, имеющее максимальную реализуемость и при этом минимально возможную длину (*оптимальность по длине дерева*) при заданных оценках вероятности принадлежности его ребер, назовем *оптимальным по реализуемости.*

Теперь дадим строгую формулировку сформулированной в предыдущем разделе статьи первой задачи: для заданного нечеткого неориентированного графа требуется построить *оптимальное по реализуемости* покрывающее дерево. Вторая задача теперь формулируется так: для заданного нечеткого неориентированного графа требуется построить *минимальное покрывающее дерево.*

## 5. Метод поиска оптимальных покрывающих деревьев

Поскольку в задании нечеткого графа присутствует функция принадлежности, то возникает проблема ее получения. Ее исследование началось с введения понятия нечеткого графа, но продолжается и поныне. По этой тематике имеется много публикаций, например, [10–12]. Заметим, что для вычисления значения вероятности некоторого события с заданной точностью требуется проведение значительного количества экспериментов (в принципе стремящегося к бесконечности). Поскольку это не всегда целесообразно из-за большой трудоемкости, часто ограничиваются некоторым приближенным значением. Отметим, что методы определения значений необходимых параметров для получения значения результатов с заданной точностью ныне хорошо разработаны в теории выборочных исследований. Укажем, например, на монографию [13], в которой эти вопросы освещены подробно. Проблема построения функции принадлежности лежит вне рамок данной статьи, поэтому далее предполагается, что при задании нечеткого графа эта функция уже построена.

Для построения оптимального по реализуемости покрывающего дерева нечеткого графа ниже предлагается метод, который использует результаты, полученные для решения аналогичной задачи поиска минимального покрывающего дерева в классической теории графов. Так, в [1, гл. 7, п. 2] представлена с доказательством корректности процедура построения всех покрывающих деревьев четкого графа. Если в заданном нечетком графе удалить из веса каждого его ребра вторую компоненту (значение принадлежности) соответствующей пары, то в результате получим соответствующий ему четкий граф $\hat{G}(X, E)$. Этот граф является частным случаем исходного нечеткого графа, у которого все ребра заданного графа присутствуют независимо от значений их принадлежности. Воспользовавшись упомянутой процедурой, построим для $\hat{G}(X, E)$ множество всех его покрывающих деревьев, которое обозначим через $Ct(\hat{G}(X, E)) = \{G_1, \ldots, G_k\}$. Далее для каждого из ребер покрывающих деревьев множества вернем в его вес вторую компоненту (значение принадлежности), тем самым превратив эти деревья в нечеткие. Очевидно, что после этого преобразования четкие покрывающие деревья множества $Ct(\hat{G}(X, E))$ по-прежнему остались покрывающими деревьями и трансформировались во множество $Ct(G(X, E)) = \{\bar{G}_1, \ldots, \bar{G}_k\}$ всех покрывающих деревьев заданного нечеткого графа $G(X, E)$.

Для каждого нечеткого покрывающего дерева из множества $Ct(G(X, E))$ вычислим его реализуемость $Rect\ (\bar{G}_i)$, $i = 1, \ldots, k$ и найдем среди них дерево (их может быть несколько) с максимальной реализуемостью. Далее для каждого нечеткого покрывающего дерева из множества $Ct(G(X, E))$ вычислим $Lect\ (\bar{G}_i)$, $i = 1, \ldots, k$, – его длину. Оптимальное покрывающее дерево по реализуемости для заданного графа можно найти, используя полученные данные.

Условимся, что все покрывающие деревья множества $Ct(G(X, E))$ пронумерованы. Пусть $MaxR$ – это множество номеров деревьев с максимальной реализуемостью, а $ML$ – это множество номеров деревьев из множества $Ct(G(X, E))$, длины которых были подсчитаны.

Пусть $MaxR = \{v_1, \ldots, v_z\}$. Образуем множество всех пар ($v_i$, *длина дерева* $v_i$), где $i = 1, \ldots, z$. Среди всех этих пар найдем такую, у которой длина дерева минимальна, пусть у нее соответствующее дерево имеет номер $i_0$. Понятно, что покрывающее дерево с номером $i_0$ является оптимальным по реализуемости. Если множество $MaxR$ содержит только один элемент, то оптимальное дерево имеет именно этот номер. Если таких деревьев окажется несколько, то среди элементов ($v_i$, *длина дерева* $v_i$) упомянутого выше множества выберем дерево $j_0$ с минимальной длиной. Понятно, что тогда оптимальным по реализуемости является дерево с номером $j_0$.

Вторая задача оптимизации (по минимизации покрывающего дерева) решается аналогичным образом. Сначала во множестве пар ($v_i$, *длина дерева* $v_i$) выберем минимальное покрывающее дерево. Если это только одно дерево с номером $i_0$, то это дерево со значением реализуемости $Rect(G_{i_0})$ является оптимальным по минимальности. Если таких деревьев несколько (с номерами $i_0^1, i_0^2, \ldots, i_0^r$), то найдем среди них дерево $j_0$ с максимальным значением реализуемости. Очевидно, что именно это дерево является оптимальным по минимальности покрывающего дерева.

Предложенный метод базировался на возможности построения множества всех покрывающих деревьев графа. Такая необходимость возникает иногда при потребности отбора «лучшего» покрывающего дерева, но сам критерий отбора очень трудоемок. В этой ситуации решение задачи оптимизации может оказаться практически невыполнимым. В [1] указано, что еще в XIX в. была получена формула для вычисления числа всех покрывающих деревьев полного связного неориентированного графа с $n$ вершинами. Это число равно $n^{n-2}$. Из формулы очевидно, что число покрывающих деревьев растет очень быстро с ростом $n$. Этот факт роста справедлив не только для полных, но и для всех других видов графов. В связи с этим нужен эффективный метод порождения исчерпывающего, но без повторений, множества всех упомянутых деревьев. Такие методы были предложены, но, к сожалению, практически они тоже не всегда решают задачу из-за достаточно высокой трудоемкости.

## 6. Эвристический алгоритм построения минимального по длине покрывающего дерева

По высказанным выше причинам желательно располагать методами приближенного решения рассматриваемой задачи вместо точного, но более приемлемыми при практической реализации.

Отметим, что принципиальное отличие рассматриваемых здесь задач для нечеткого графа от аналогичной задачи для четкого графа заключается в том, что в данном случае она превращается в задачу многокритериальной оптимизации [14]. В большинстве реальных практических задач приходится выполнять оптимизацию по многим критериям и в общем случае их можно сформулировать следующим образом:

$$\max\{z_1 = f_1(x), \ldots, z_q = f_q(x)\}, \quad g_i(x) \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad x \geqslant 0.$$

Здесь пространство поиска решений таково:

$$S = \{x \in R^n | g_i(x) \geqslant 0, \ i = 1, \ldots, m, \ x \geqslant 0\}.$$

При решении многокритериальных задач ищется решение, которое лучше всех остальных. Однако не обязательно существует такое решение, которое является лучшим относительно всех критериев. Это происходит вследствие наличия всевозможных конфликтов. Очевидно, что решение может быть лучшим относительно одного критерия и в то же время худшим относительно других критериев. Поэтому при многокритериальной оптимизации выполняется поиск решений, которые являются оптимальными по концепции Парето [15, 16].

В рассматриваемых задачах имеется фактически два критерия: первый – значение реализации покрывающего дерева, которое надо максимизировать, а второй – длина покрывающего дерева, которую надо минимизировать. Многокритериальная оптимизация является естественным развитием обычной численной или комбинаторной оптимизации. Поэтому многие разработанные методы были распространены на этот общий случай. Отметим, что для многокритериальной оптимизации центральным вопросом является построение целевой функции. За последние десятилетия разработано несколько подходов к этой проблеме, в том числе векторная оценка, ранжирование по Парето, использование взвешенных сумм.

Надо отметить, что подход со взвешенными суммами в последние годы один из популярных, где новая общая целевая функция строится из отдельных целевых функций в виде взвешенной суммы

$$F(x) = \sum_{i=1}^{k} w_i f_i(x), w_i \in [0,1], \quad \sum_{i=1}^{k} w_i = 1.$$

Здесь каждой целевой функции $f_i(x)$ присваивается свой вес, и задача сводится к скалярному случаю. При этом различные веса $w_i$ дают разные решения в смысле Парето. Понятно, что с учетом разнообразия природы отдельных целевых функций задача выбора весовых коэффициентов является достаточно сложной.

Предлагаемый ниже подход также будет сводить задачу к скалярному случаю, но метод сведения отличен от метода взвешенных сумм.

Известно [2, гл. 23], что для решения задачи о поиске минимального покрывающего дерева для четкого графа разработано несколько алгоритмов. К числу наиболее популярных относятся алгоритмы Прима и Краскала. Они оба являются жадными алгоритмами, т.е. используют стратегию выбора варианта, наилучшего в данный момент. Эта стратегия в общем случае не гарантирует получения абсолютного оптимума. Однако было доказано, что названные алгоритмы действительно строят минимальные покрывающие деревья. Важным также является то, что оба алгоритма реализуются для четкого графа $G(X, E)$ за время работы $O(XlgE)$ [2], что является хорошим показателем. Исходя из сказанного можно сделать вывод, что если свести рассматриваемую задачу для нечеткого графа к той же задаче для четкого, чтобы можно было воспользоваться алгоритмами Прима или Краскала, то это было бы приемлемым решением.

Возможной реализацией высказанной идеи является предложение подходящего способа преобразования заданного нечеткого графа в четкий. Представляется, что такое преобразование должно сохранить структуру исходного графа (множества вершин и ребер, а также связей между ними), но произвести подходящим способом замену веса каждого ребра (упорядоченной пары значений) одним скалярным значением. Фактически это означает, что значение скаляра должно каким-то образом отражать в себе информацию о вероятности принадлежности ребра и его длине.

Понятно, что такое сведение не должно быть трудоемким и должно ограничиваться выполнением достаточно простых действий с компонентами веса. С точки зрения простоты подходящими являются, например, арифметические операции с ними. Понятно, что поскольку эти компоненты имеют различную и при том иногда несовместимую природу, то операции сложения, вычитания и деления с ними часто не имеют какого-либо содержательного смысла, и поэтому наиболее подходящей является операция умножения.

Далее будет предложен эвристический алгоритм для решения задачи построения минимального покрывающего дерева для нечеткого графа, базирующийся на высказанной идее. В нечетком графе $G(X,E)$ каждое ребро $(x,y)$ принадлежит графу с заданной вероятностью $P(x,y)$. Этот факт может трактоваться следующим образом: при достаточно большом числе $N$ испытаний (моделирования транспортных потоков в сети) вся дорога $(x,y)$ будет востребована для проезда не $N$ раз, а только $P(x,y)N$ раз. Аналогично, при каждом отдельном испытании (моделировании конкретного маршрута движения транспорта) можно условно считать, что дорога $(x,y)$ длиной $a(x,y)$ используется не полностью, а только ее часть, длина которой равна $P(x,y)\ a(x,y)$. При проведении $N$ испытаний общая длина пути, пройденного по дороге $(x,y)$, равна $N(P(x,y)\ a(x,y))$. Тогда за одно испытание в среднем будет пройден путь $P(x,y)\ a(x,y)$. В этом случае упомянутую часть можно трактовать как «длину ребра» $(x,y)$, но теперь уже «взвешенную» с учетом абсолютной его длины и вероятности принадлежности. Таким образом, вес ребра в заданном исходном нечетком графе $G(X,E)$, представляющий собой упорядоченную пару, будет заменен одним числом, и теперь граф превращается в четкий. Заметим, что предложенный вариант замещения длины $a(x,y)$ ребра на $P(x,y)\ a(x,y)$, конечно, не может претендовать на строго обоснованную замену. Это попытка только указать мотив, который привел к предлагаемой эвристической замене.

После получения эвристическим алгоритмом четкого графа к нему возможно теперь применить алгоритмы Прима и Краскала для построения минимального покрывающего дерева. После построения в полученном покрывающем дереве на каждом его ребре в качестве его веса восстановим ту упорядоченную пару, которая этому ребру соответствовала в исходном нечетком графе. В результате будет получено минимальное покрывающее дерево для заданного нечеткого графа, которое и будет играть роль некоторого приближения к минимальному.

Понятно, что предложенный эвристический алгоритм не гарантирует построения оптимального покрывающего дерева в соответствии с принятым критерием минимальности. В общем случае по этому алгоритму будет получено минимальное (по длине) покрывающее дерево, но значение реализуемости которого может и не оказаться максимальным. В качестве достоинств предложенного алгоритма отметим его простоту и невысокую сложность вычислений.

Для оценки эффективности алгоритма, конечно, необходимо располагать достаточными статистическими данными результатов его применения, которые сейчас отсутствуют. Небольшой опыт его апробации показал, что при гарантированном им построении минимального по длине покрывающего дерева отклонения значений его реализуемости от максимальных значений были сравнительно незначительны. Проиллюстрируем работу предложенного алгоритма на небольшом примере. Рассмотрим нечеткий граф, представленный на рис. 1. Параметры этого графа представлены в таблице.

Параметры примера нечеткого графа

| № | Ребро $(x,\ y)$ | Вероятность принадлежности ребра $Pbe(x,y)$ | Длина ребра $a(x,y)$ | Замещающая длина $Pbe(x,y) \times a(x,y)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | (1,2) | 0,099 | 70 | 6,93 |
| 2 | (1,4) | 0,099 | 60 | 5,94 |
| 3 | (1,6) | 0,099 | 50 | 4,95 |
| 4 | (2,3) | 0,096 | 30 | 2,88 |
| 5 | (2,4) | 0,089 | 30 | 2,67 |
| 6 | (3,7) | 0,092 | 50 | 4,60 |
| 7 | (4,5) | 0,089 | 20 | 1,78 |
| 8 | (4,6) | 0,080 | 40 | 3,20 |
| 9 | (5,6) | 0,094 | 40 | 3,76 |
| 10 | (5,7) | 0,091 | 60 | 5,46 |
| 11 | (6,7) | 0,072 | 90 | 6,48 |

В отдельном столбце таблицы представлены значения $P(x,y)\ a(x,y)$, которые замещают веса ребер (упорядоченные пары) нечеткого графа одним числом. По этим данным при помощи алгоритма Прима было построено два различных покрывающих дерева. На рис. 2 приведено дерево, если построение начиналось с вершины 1; на рис. 3 – начальной была выбрана вершина 7. Легко проверить, что оба дерева имеют одну и ту же длину, равную 220, и являются минимальными для соответствующего четкого графа. Каждому из этих деревьев соответствует нечеткое покрывающее дерево. Если по таблице

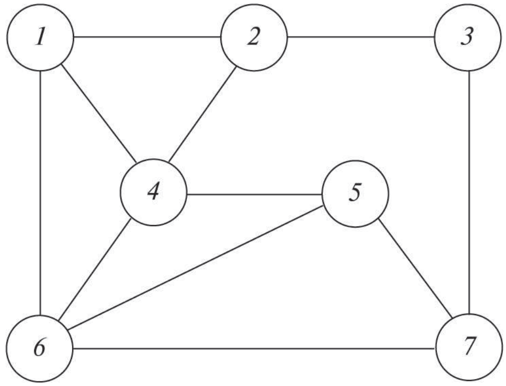


Рис. 1. Пример заданного нечеткого графа.

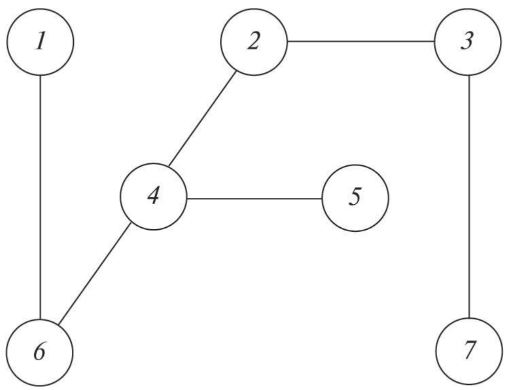


Рис. 2. Первый вариант дерева.

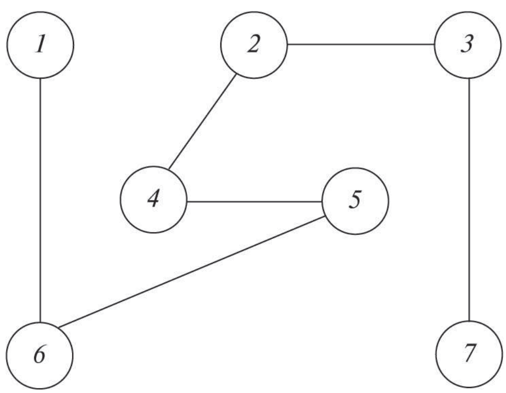


Рис. 3. Второй вариант дерева.

всем ребрам этих графов приписать вероятности принадлежностей входящих в них ребер, тогда можно вычислить соответствующие им значения реализуемости. Для графа на рис. 2 значение реализуемости равно числу 0,545, для графа на рис. 3 – числу 0,559.

Из этих данных следует, что эвристическим алгоритмом может быть получено покрывающее дерево, не имеющее максимальной реализуемости. Заметим, что если по данным из таблицы построить минимальное покрывающее дерево для четкого графа алгоритмом Прима, то оно по структуре совпадает с графом на рис. 2 и имеет ту же длину 220.

## 7. Заключение

В статье введено понятие реализуемости покрывающего дерева нечеткого графа и с его использованием сформулированы две оптимизационные задачи построения оптимальных покрывающих деревьев. Ранее в такой постановке аналогичные задачи не рассматривались. В качестве критериев оптимальности используются максимум значения реализуемости дерева и минимальность длины покрывающего дерева. Предложен метод получения точных решений упомянутых задач, недостатком которого является его трудоемкость. В связи с этим в статье описан эвристический алгоритм построения минимального по длине покрывающего дерева с учетом его реализуемости. Этот алгоритм достаточно прост и имеет невысокую вычислительную сложность, но не гарантирует получения максимума реализуемости. Алгоритм основан на сведении исходной многокритериальной задачи к задаче с одним критерием (минимальности по длине покрывающего дерева), что эффективно решается, например, алгоритмами Прима и Краскала.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978.
2. *Кармен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К.* Алгоритмы: построение и анализ. М.: Изд-во «Вильямс», 2011.
3. *Майника Э.* Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. М.: Мир, 1981.
4. *Prim R.C.* Shortest connection network and some general realization // Bell System Technical Journal. 1957. V. 36. P. 1389–1401.
5. *Kruskal J.B.* On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and Traveling Salesman Problem // Proc. AMS. 1956. V. 7. P. 48–50.
6. *Кузьмин Р.А., Молчанов В.А.* Алгоритм построения минимальных остовных деревьев в компьютерных сетях // Математика. Механика. 2023. № 25. С. 46–50.
7. *Мешков А.Н.* Построение покрывающего дерева генетическим алгоритмом Штайнера / Актуальные вопросы современных исследований. Сб. статей V Международной научно-практической конференции. Пенза: Наука и просвещение (ИП Гуляев Г.Ю.). 05 июля 2023. С. 74–76.
8. *Zadeh L.A.* Fuzzy sets // Information and Control. 1965. V. 8. I. 3. P. 338–353.
9. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств. М.: Радио и связь, 1982.
10. *Норвич А.М., Турксен И.Б.* Построение функций принадлежности. М.: Радио и связь, 1982.
11. *Каид В.А.А.* Метод построения функций принадлежности нечетких множеств // Известия ЮФУ. Технические науки. 2013. № 2(139). С. 144–153.

12. *Федорова Е.В., Грязнов С.М.* Особенности формирования функций принадлежности при построении нечетких систем управления / Сб. «Интеллектуальные системы управления и мехатроника. 2017». Материалы III Всероссийской научно-технической конференции аспирантов и студентов. 2017. С. 170–174.

13. *Кокрен У.* Методы выборочного исследования. М.: Статистика, 1976.

14. *Кини Р.Л., Райфа Х.* Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. М.: Радио и связь, 1981.

15. *Pareto V.* Manual di Economica Politica, Societa Editrice Libraia. Milan, Italia, 1906; translated into English by A.S. Schwier, as Manual of Political Economy. New York: Macmillan, 1971.

16. *Gen Mitsuo, Cheng Runwei, Lin Lin.* Network models and optimization. Springer-Verlag London Limited, 2008.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии О.Н. Граничиным.*

Поступила в редакцию 16.09.2023

После доработки 28.11.2025

Принята к публикации 30.12.2025