Стохастические системы

© 2026 г. **Г.Ш. ЦИЦИАШВИЛИ, д-р физ.-мат. наук (guram@iam.dvo.ru)**
(Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток),
М.А. ОСИПОВА, канд. физ.-мат. наук (mao1975@list.ru)
(Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток;
Дальневосточный федеральный университет, Владивосток)

ИНВАРИАНТНОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СЕТЕЙ С ЗАПРЕТАМИ[1]

Рассматриваются сети массового обслуживания с запретами на переходы между узлами сети, определяющими протокол их работы. В графе переходных интенсивностей сети выделяется множество базовых вершин (пропорциональное числу ребер) и ставится вопрос об удалении некоторого его подмножества так, чтобы стационарное распределение марковского процесса, описывающего функционирование сети, сохранялось. Чтобы это условие выполнялось, достаточно, чтобы множество вершин графа переходных интенсивностей после удаления подмножества базовых вершин совпадало с множеством состояний марковского процесса и этот граф был связным. Доказано, что отношения числа оставшихся базовых вершин к общему их числу n сходится к $1/2$ при $n \to \infty$.

Ключевые слова: сеть массового обслуживания, граф переходных интенсивностей, базовые вершины.

DOI: 10.7868/S2413977726030023

1. Введение

Граф переходных интенсивностей сети массового обслуживания определяет протокол ее работы, и удаление его элементов приводит к уменьшению возможных переходов между состояниями сети. Такое изменение графа переходных интенсивностей означает изменение протокола работы сети массового обслуживания и связано, например, с решением задач о конструировании транспортной или компьютерной сети (см. [1–6]). Одним из способов изменения протокола работы сети является введение блокирующих вероятностей переходов между состояниями сети [7–9]. Но этот способ не подразумевает введения запретов на переходы, что является актуальной прикладной задачей и требует связности графа переходных интенсивностей.

Авторы имеют свои наработки в этом направлении [10, 11], и настоящая работа есть их продолжение. В этих работах исследованы экспоненциальные

[1] Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН № 075-00460-26-00.

сети с различными протоколами их работы, в том числе со случайно меняющимися, при моделировании которых строится граф переходных интенсивностей. Вычисляются стационарные распределения рассматриваемых сетей при условиях связности графа переходных интенсивностей.

В настоящей работе определяются условия, при которых удаление некоторых ребер графа переходных интенсивностей, определяющих функционирование сети массового обслуживания, не меняет стационарного распределения в ней. Речь идет об открытой сети Джексона, в том числе и с суммарным ограниченным числом заявок, и о замкнутой сети Гордона–Ньюэлла [12, 13]. Поиск требуемых условий основан на представлении графа переходных интенсивностей как объединения базовых графов. Каждый базовый граф состоит из базовой вершины и является полным, пересечение множества ребер любых двух базовых графов пусто. Такое представление (декомпозиция) позволяет определить набор базовых вершин и соответствующих им графов, удаление которых сохраняет общее множество вершин графа и связность графа переходных интенсивностей. Декомпозиция графа приводит к декомпозиции в мультипликативной теореме.

Основным результатом работы является конструктивное удаление некоторого подмножества базовых вершин, при котором сохраняется стационарное распределение марковского процесса, описывающего функционирование сети. Удаление любой вершины из множества оставшихся базовых вершин приводит к нарушению условия сохранения этого распределения, что приводит к оптимальному в определенном смысле решению. Множество вершин графа переходных интенсивностей после удаления подмножества базовых вершин совпадает с множеством состояний марковского процесса, и этот граф связный. Доказано, что отношение числа оставшихся базовых вершин к общему числу вершин n сходится к $1/2$ при $n \to \infty$.

2. Декомпозиция в открытой сети

Рассмотрим открытую сеть Джексона G с пуассоновским входным потоком интенсивности λ, состоящую из m одноканальных систем массового обслуживания с экспоненциальными временами обслуживания интенсивности μ_i, $i = 1, \ldots, m$. Динамика перемещения заявки в сети задается маршрутной матрицей $\Theta = ||\theta_{ij}||\,|_{i,j=0}^{m}$, где θ_{ij} – вероятность перехода после обслуживания из i-го узла в j-й, $\theta_{00} = 0$, узел с номером 0 – внешний источник. Предполагается, что маршрутная матрица неразложимая:

$$\forall i, j \in \{0, 1, \ldots, m\} \; \exists \, i_1, i_2, \ldots, i_r \in \{1, \ldots, m\} : \; \theta_{ii_1} > 0, \theta_{i_1 i_2} > 0, \ldots, \theta_{i_r j} > 0.$$

Тогда вектор $\Lambda = (\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ является единственным решением системы балансовых соотношений

$$\Lambda = \Lambda\Theta. \qquad (1)$$

Функционирование сети (число заявок в узлах) описывается дискретным марковским процессом $y(t)$ с множеством состояний $\mathbf{N} = \{\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_m) : n_1, \ldots, n_m \geqslant 0\}$ и переходными интенсивностями:

$$L(\mathbf{n}, \mathbf{n} + \mathbf{e}_k) = \lambda\theta_{0k}, \quad L(\mathbf{n} + \mathbf{e}_k, \mathbf{n}) = \mu_k\theta_{k0},$$
$$L(\mathbf{n} + \mathbf{e}_k, \mathbf{n} + \mathbf{e}_i) = \mu_k\theta_{ki}, \quad 1 \leqslant k \neq i \leqslant m, \quad \mathbf{n} \in \mathbf{N}. \tag{2}$$

Здесь элемент $\mathbf{e}_k \in \mathbf{N}$, у которого k-я координата равна 1, остальные – 0.

Рассмотрим граф $\Gamma(\mathbf{n})$ с множеством вершин $V(\mathbf{n}) = \{\mathbf{n},\ \mathbf{n} + \mathbf{e}_k,\ k = \overline{1, m}\}$ и множеством ребер $\{(\mathbf{n}, \mathbf{n} + \mathbf{e}_k),\ (\mathbf{n} + \mathbf{e}_i, \mathbf{n} + \mathbf{e}_j),\ i \neq j,\ 1 \leqslant k, i, j \leqslant m\}$, $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$, их соединяющих ($\Gamma(\mathbf{n}_1)$, $\Gamma(\mathbf{n}_2)$, $\mathbf{n}_1 \neq \mathbf{n}_2$, не имеют общих ребер). Назовем вершину $\mathbf{n}$, определяющую граф $\Gamma(\mathbf{n})$, базовой, соответствующий ей граф $\Gamma(\mathbf{n})$ базовым, а множество всех таких вершин $\mathbf{N}_0$ – базовым множеством. Заметим, что $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N}$ в случае открытой сети G.

Для некоторого $\mathbf{N}_* \subseteq \mathbf{N}_0$ положим

$$\Gamma(\mathbf{N}_*) = \bigcup_{\mathbf{n} \in \mathbf{N}_*} \Gamma(\mathbf{n}), \quad V(\mathbf{N}_*) = \bigcup_{\mathbf{n} \in \mathbf{N}_*} V(\mathbf{n}).$$

Опишем сеть G с запретами, сопоставив ей граф $\Gamma(\mathbf{N}_*)$ (обозначим ее через G_*). Отсутствие ребра $(\mathbf{n}, \mathbf{n} + \mathbf{e}_k)$ в графе $\Gamma(\mathbf{N}_*)$ означает, что в узел k извне заявки не поступают и после обслуживания в нем вовне не уходят. Отсутствие ребра $(\mathbf{n} + \mathbf{e}_k, \mathbf{n} + \mathbf{e}_i)$ в графе $\Gamma(\mathbf{N}_*)$ означает, что после обслуживания в узле k заявки не поступают в узел i, $k \neq i$. Такие разрешения и запреты на переходы между узлами сети определяют протокол ее работы.

Теорема 1. Если $\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i} < 1$, $i = 1, \ldots, m$, $V(\mathbf{N}_*) = \mathbf{N}$, *а граф* $\Gamma(\mathbf{N}_*)$ *связный, то марковский процесс* $y(t)$, *описывающий функционирование сети* G_*, *эргодический и его стационарное распределение* $\pi(\mathbf{n})$, $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$, *вычисляется по формуле*

$$\pi(\mathbf{n}) = C^{-1} \prod_{i=1}^{m} \rho_i^{n_i}, \quad C = \sum_{\mathbf{n} \in N} \prod_{i=1}^{m} \rho_i^{n_i}, \quad \mathbf{n} \in \mathbf{N}. \tag{3}$$

Под связностью неориентированного графа $\Gamma(\mathbf{N}_*)$ понимается существование пути между любыми двумя его вершинами.

Замечание 1. Стационарное распределение (3) марковского процесса $y(t)$, описывающего функционирование сети G, осталось неизменным и для сети G_*.

Замечание 2. Аналогичную теорему можно сформулировать и доказать для случая многоканальных узлов.

Замечание 3. Теорему 1 можно распространить на случай конечного множества состояний $\mathbf{N}$ марковского процесса $y(t)$ без ограничений $\rho_i < 1$, $i = 1, \ldots, m$, где $\mathbf{N}_* \subseteq \mathbf{N}_0 \subseteq \mathbf{N}$, $\mathbf{N}_0$ – множество базовых вершин, также удовлетворяющее условиям $V(\mathbf{N}_0) = \mathbf{N}$, граф $\Gamma(\mathbf{N}_0)$ связный.

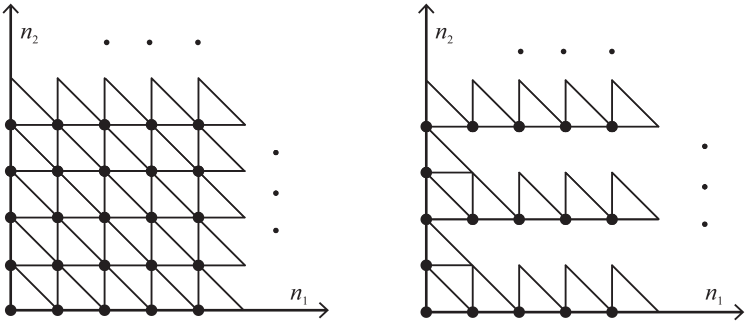

Рис. 1. Граф $\Gamma(\mathbf{N})$ (слева) и граф $\Gamma(\mathbf{N}_*)$ (справа), множества $\mathbf{N}_0$ (слева) и $\mathbf{N}_*$ (справа) выделены жирными точками.

Задачей данной работы является построение подмножества $\mathbf{N}_*$ множества базовых вершин $\mathbf{N}_0$ так, чтобы, с одной стороны, стационарное распределение марковского процесса сохранялось, а с другой стороны, отношения числа вершин множества $\mathbf{N}_*$ к числу вершин множества $\mathbf{N}_0$ стремилось к $1/2$ при увеличении числа заявок в сети. Для сохранения стационарного распределения в открытой сети достаточно потребовать выполнение равенства $V(\mathbf{N}_*) = \mathbf{N}$ и связности графа $\Gamma(\mathbf{N}_*)$.

Неограниченное число заявок. Рассмотрим открытую сеть, функционирование которой описывается дискретным марковским процессом $y(t)$ с множеством состояний $\mathbf{N} = \{\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_m) :\ n_1, \ldots, n_m \geqslant 0\}$ и переходными интенсивностями (2). Построим сеть с запретами. Введем подмножество множества базовых вершин $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N}$:

$$\mathbf{N}_* = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Big(\mathbf{N}_*(2k) \bigcup (2k+1)\mathbf{e}_m\Big) \subset \mathbf{N}_0, \tag{4}$$

$$\mathbf{N}_*(k) = \{\mathbf{n} \in \mathbf{N} :\ n_1, \ldots, n_{m-1} \geqslant 0,\ n_m = k\}.$$

В качестве примера (для случая $m = 2$) на рис. 1 построены графы $\Gamma(\mathbf{N})$ и $\Gamma(\mathbf{N}_*)$, жирными точками выделено множество базовых вершин $\mathbf{N}_0$, а также его подмножество $\mathbf{N}_*$.

Теорема 2. *Для построенной открытой сети с запретами (множество базовых вершин определяется по формуле (4)) равенство $V(\mathbf{N}_*) = \mathbf{N}$ выполняется и граф $\Gamma(\mathbf{N}_*)$ является связным. Удаление из множества $\mathbf{N}_*$ вершины нарушает или равенство $V(\mathbf{N}_*) = \mathbf{N}$, или связность графа $\Gamma(\mathbf{N}_*)$.*

Определим множество $\Pi(2k) = \{\mathbf{n} \in \mathbf{N} :\ 0 \leqslant n_1, \ldots, n_m \leqslant 2k\}$ и обозначим через $|D|$ число элементов множества D.

Теорема 3. *Для построенной открытой сети с запретами (множество базовых вершин определяется по формуле (4)) справедливо соотношение*

$$\frac{|\mathbf{N}_* \bigcap \Pi(2k)|}{|\mathbf{N}_0 \bigcap \Pi(2k)|} \to \frac{1}{2}, \quad k \to \infty, \tag{5}$$

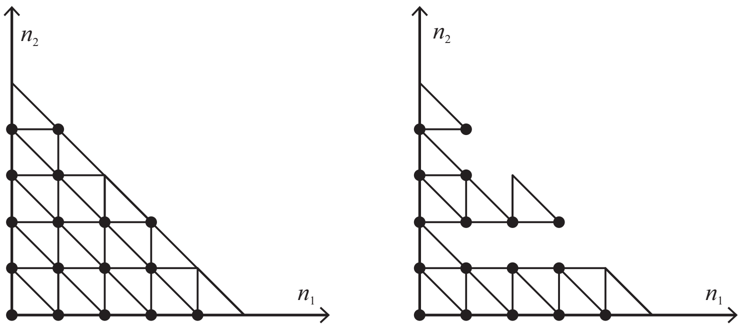

Рис. 2. Граф $\Gamma(\mathbf{N})$ (слева) и граф $\Gamma(\mathbf{N}_*)$ (справа), множества $\mathbf{N}_0$ (слева) и $\mathbf{N}_*$ (справа) выделены жирными точками.

при этом

$$\frac{|\mathbf{N}_* \bigcap \Pi(2k)|}{|\mathbf{N}_0 \bigcap \Pi(2k)|} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2(2k+1)} + \frac{k}{(2k+1)^m} \to 0, \quad k \to \infty. \tag{6}$$

В таблице приведены результаты вычислений $\frac{|\mathbf{N}_* \bigcap \Pi(2k)|}{|\mathbf{N}_0 \bigcap \Pi(2k)|} - \frac{1}{2}$ при различных значениях m и k.

Оценка скорости сходимости

k	$m = 2$	$m = 3$
5	0,08677686	0,049211119
10	0,046485261	0,024889321
20	0,024092802	0,012485309
50	0,009851975	0,004999025

Ограниченное суммарное число заявок. Рассмотрим открытую сеть, функционирование которой описывается дискретным марковским процессом $y(t)$ с конечным множеством состояний $\mathbf{N} = \big\{\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_m) : \ n_1, \ldots, n_m \geqslant 0, \sum_{k=1}^m n_k \leqslant 2K+1\big\}$ и переходными интенсивностями (2). Построим сеть с запретами, определив множество базовых вершин $\mathbf{N}_0 = \{\mathbf{n} \in \mathbf{N} : \sum_{k=1}^m n_k \leqslant 2K\}$. Множество $\mathbf{N}_0$ максимально в том смысле, что добавление к нему вершины $\mathbf{n} \notin \mathbf{N}_0$ приводит к соотношению $V(\mathbf{N}_0 \bigcup \mathbf{n}) \neq \mathbf{N}$. Введем подмножество множества базовых вершин

$$\mathbf{N}_* = \bigcup_{k=0}^{K} \mathbf{N}_*(2k) \bigcup \{(2k+1)\mathbf{e}_m, \ k = 0, \ldots, K-1\} \in \mathbf{N}_0, \tag{7}$$

$$\mathbf{N}_*(k) = \left\{ \mathbf{n} \in \mathbf{N} : \ \sum_{k=1}^{m} n_k \leqslant 2K - k, \ n_m = k \right\}.$$

В качестве примера (для случая $m = 2$) на рис. 2 построены графы $\Gamma(\mathbf{N})$ и $\Gamma(\mathbf{N}_*)$, жирными точками выделено множество базовых вершин $\mathbf{N}_0$, а также его подмножество $\mathbf{N}_*$.

Теорема 4. Для построенной открытой сети с запретами (множество базовых вершин определяется по формуле (7)) равенство $V(\mathbf{N}_*) = \mathbf{N}$ выполняется и граф $\Gamma(\mathbf{N}_*)$ является связным. Удаление из множества $\mathbf{N}_*$ вершины нарушает или равенство $V(\mathbf{N}_*) = \mathbf{N}$ или связность графа $\Gamma(\mathbf{N}_*)$.

Теорема 5. Для построенной открытой сети с запретами (множество базовых вершин определяется по формуле (7)) справедливо соотношение

$$\frac{|\mathbf{N}_*|}{|\mathbf{N_0}|} \to \frac{1}{2}, \quad K \to \infty. \tag{8}$$

3. Декомпозиция в замкнутой сети

Рассмотрим замкнутую сеть (сеть Гордона–Ньюэлла) G, в которой циркулирует постоянное число заявок $2K+1$ и число обслуживающих узлов $m > 2$. Перемещения заявок в сети описываются маршрутной матрицей $\Theta = ||\theta_{ij}||_{i,j=1}^{m}$, которая предполагается неразложимой. Тогда для любого $B > 0$ решение $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ системы балансовых соотношений $\Lambda = \Lambda\Theta$ при условии $B = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i > 0$ существует и единственно.

Функционирование сети (число заявок в узлах) описывается дискретным марковским процессом $y(t)$ с конечным множеством состояний

$$\mathbf{N} = \left\{ \mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_m) : \ n_1, \ldots, n_m \geqslant 0, \ \sum_{k=1}^{m} n_k = 2K+1 \right\}$$

и переходными интенсивностями:

$$L(\mathbf{n} + \mathbf{e}_i, \mathbf{n} + \mathbf{e}_k) = \mu_i \theta_{ik}, \quad 1 \leqslant i \neq k \leqslant m, \quad \mathbf{n} + \mathbf{e}_i, \mathbf{n} + \mathbf{e}_k \in \mathbf{N}. \tag{9}$$

Определим множество всех базовых вершин $\mathbf{N}_0$ равенством

$$\mathbf{N}_0 = \{\mathbf{n} \in \mathbf{N} : \ n_m > 0\}.$$

Равенства (9) перепишем для $\mathbf{n} \in \mathbf{N}_0$:

$$\begin{gathered} L(\mathbf{n}, \mathbf{n} - \mathbf{e}_m + \mathbf{e}_i) = \mu_m \theta_{mi}, \\ L(\mathbf{n} - \mathbf{e}_m + \mathbf{e}_i, \mathbf{n} - \mathbf{e}_m + \mathbf{e}_k) = \mu_i \theta_{ik}, \quad 1 \leqslant i \neq k < m. \end{gathered} \tag{10}$$

С помощью равенств (10) определим для $\mathbf{n} \in \mathbf{N}_0$ множество

$$V(\mathbf{n}) = \{\mathbf{n}, \mathbf{n} - \mathbf{e}_m + \mathbf{e}_i, \ 1 \leqslant i < m\}.$$

Рассмотрим граф $\Gamma(\mathbf{n})$, $\mathbf{n} \in \mathbf{N}_0$, с множеством вершин $V(\mathbf{n})$ и множеством ребер, их соединяющих ($\Gamma(\mathbf{n}_1)$, $\Gamma(\mathbf{n}_2)$, $\mathbf{n}_1 \neq \mathbf{n}_2$, не имеют общих ребер). Очевидно, что $V(\mathbf{N}_0) = \mathbf{N}$.

Пусть $\mathbf{N}_* \subset \mathbf{N}_0$. Аналогично случаю открытой сети можно описать замкнутую сеть G с запретами, сопоставив ей граф $\Gamma(\mathbf{N}_*)$, обозначим ее через G_*.

Теорема 6. Если $V(\mathbf{N}_*) = \mathbf{N}$, а граф $\Gamma(\mathbf{N}_*)$ связный, то марковский процесс $y(t)$, описывающий функционирование сети G_*, эргодический и его стационарное распределение $\pi(\mathbf{n})$, $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$, вычисляется по формуле

$$\pi(\mathbf{n}) = C^{-1} \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{n_i}, \quad C = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbf{N}} \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{n_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Построим $\mathbf{N}_* \subset \mathbf{N}_0$ так, чтобы стационарное распределение марковского процесса сохранялось и отношение $\frac{|\mathbf{N}_*|}{|\mathbf{N}_0|} \to \frac{1}{2}$ при $K \to \infty$. Вследствие теоремы 6 для сохранения стационарного распределения в замкнутой сети достаточно потребовать выполнение равенства $V(\mathbf{N}_*) = \mathbf{N}$ и связности графа $\Gamma(\mathbf{N}_*)$.

Для построения множества базовых вершин $\mathbf{N}_*$ сопоставим каждой точке множества $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_m) \in \mathbf{N}$ точку $\mathbf{n}' = (n_1, \ldots, n_{m-1}, 0)$ и множество таких точек обозначим через $\mathbf{N}' = \left\{\mathbf{n}' : \sum_{k=1}^{m-1} n_k \leqslant 2K + 1\right\}$. Тогда множеству $\mathbf{N}_0$ будет соответствовать множество $\mathbf{N}'_0 = \left\{\mathbf{n}' \in \mathbf{N}' : \sum_{k=1}^{m-1} n_k \leqslant 2K\right\}$. Определим теперь

$$\mathbf{N}'_* = \bigcup_{k=0}^{K} \mathbf{N}'_*(2k) \bigcup \{(2k+1)\mathbf{e}_{m-1},\ k = 0, \ldots, K-1\},$$

$$\mathbf{N}'_*(k) = \left\{\mathbf{n}' \in \mathbf{N}' : \sum_{k=1}^{m-1} n_k \leqslant 2K - k,\ n_{m-1} = k\right\}.$$

Тогда построим множество

$$\mathbf{N}_* = \{\mathbf{n} \in \mathbf{N}_0 :\ \mathbf{n}' \in \mathbf{N}'_*\}. \tag{11}$$

Теорема 7. Для построенной замкнутой сети с запретами (множество базовых вершин определяется по формуле (11)) равенство $V(\mathbf{N}_*) = \mathbf{N}$ выполняется и граф $\Gamma(\mathbf{N}_*)$ является связным. Удаление из множества $\mathbf{N}_*$ вершины нарушает или равенство $V(\mathbf{N}_*) = \mathbf{N}$ или связность графа $\Gamma(\mathbf{N}_*)$.

Теорема 8. Для построенной замкнутой сети с запретами (множество базовых вершин определяется по формуле (11)) справедливо соотношение

$$\frac{|\mathbf{N}_*|}{|\mathbf{N}_0|} \to \frac{1}{2}, \quad K \to \infty. \tag{12}$$

4. Заключение

Во всех рассмотренных моделях массового обслуживания множество базовых вершин $\mathbf{N}_0$ по числу вершин и, значит, по числу ребер в графе переходных интенсивностей примерно вдвое меньше подмножества базовых вершин

$\mathbf{N}_* \subset \mathbf{N}_0$. Построить экспоненциальные системы массового обслуживания с запретами, сохраняя стационарное распределение, удалось за счет перехода к графу переходных интенсивностей специального вида. Начиналась эта работа с частного случая: со случая $m = 2$ для открытой сети и $m = 3$ для замкнутой. Предложенные в работе варианты множества $\mathbf{N}_*$ не единственны. Планируется продолжить работу в этом направлении, обобщив полученные результаты и распространив их на системы массового обслуживания, функционирование которых описывается марковскими процессами.

В настоящее время авторы сотрудничают со специалистами по логистике морского транспорта и планируют совместно с ними применить полученные результаты к проектированию логистической сети контейнерных перевозок с одного вида транспорта на другой (автомобильный, железнодорожный и морской) для обеспечения бесперебойной доставки товаров.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Доказательство формулы (3) основано на теореме эргодичности, сформулированной в [14] для дискретного марковского процесса. Проверим ее достаточные условия. 1) Чтобы убедиться, что распределение (3) удовлетворяет уравнениям Колмогорова–Чепмена

$$\sum_{\mathbf{n}' \in V(\mathbf{N}_0)} \pi(\mathbf{n}) L(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = \sum_{\mathbf{n}' \in V(\mathbf{N}_0)} \pi(\mathbf{n}') L(\mathbf{n}', \mathbf{n}), \quad \mathbf{n} \in \mathbf{N}, \tag{П.1}$$

достаточно убедиться, что оно удовлетворяет для $\mathbf{n}_0 \in \mathbf{N}_0$ равенствам

$$\sum_{\mathbf{n}' \in V(\mathbf{n}_0)} \pi(\mathbf{n}) L(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = \sum_{\mathbf{n}' \in V(\mathbf{n}_0)} \pi(\mathbf{n}') L(\mathbf{n}', \mathbf{n}), \quad \mathbf{n} \in \mathbf{V}(\mathbf{n_0}). \tag{П.2}$$

Подстановка распределения (3) в формулу (П.2) приводит к балансовым соотношениям (1), при этом $C < \infty$. 2) Состояния процесса $y(t)$ сообщающиеся, что следует из предположения связности графа $\Gamma(\mathbf{N}_*)$. 3) Условие регулярности тоже выполняется, так как для любого $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство $\sum_{\mathbf{n}' \in \mathbf{N}} L(\mathbf{n}, \mathbf{n}') < \text{const}$. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Очевидно, что

$$V(\mathbf{N}_*) = \bigcup_{k=0}^{\infty} (\mathbf{N}_*(2k) \cup \mathbf{N}_*(2k+1)) = \mathbf{N}.$$

Так как граф $\Gamma(\mathbf{N}_*(2k))$ является связным и ребро $((2k+1)\mathbf{e}_m, (2k+2)\mathbf{e}_m)$ соединяет графы $\Gamma(\mathbf{N}_*(2k))$, $\Gamma(\mathbf{N}_*(2k+2))$, $k = 0, 1, \ldots$, то граф $\Gamma(\mathbf{N}_*)$ также является связным.

Проверим выполнение второго утверждения теоремы. Сначала рассмотрим случай $m = 2$, возможны следующие варианты.

1. Если $\mathbf{n} = (0, 2k)$ и $k > 0$, то граф $\Gamma(\mathbf{N}_*\backslash\mathbf{n})$ не содержит пути между вершинами $\mathbf{n} = (0, 2k)$, $(0, 2k+1)$ и, следовательно, является несвязным. Если же $k = 0$, то $\mathbf{n} \notin V(\mathbf{N}_*\backslash\mathbf{n})$ и, значит, $V(\mathbf{N}_*\backslash\mathbf{n}) \neq V(\mathbf{N}_*)$.

2. Если $\mathbf{n} = (0, 2k+1)$, $k \geqslant 0$, тогда в графе $\Gamma(\mathbf{N}_*\backslash\mathbf{n})$ нет пути между вершинами $(0, 2k+1)$, $(0, 2k+2)$ и, значит, граф $\Gamma(\mathbf{N}_*\backslash\mathbf{n})$ несвязный.

3. Если $\mathbf{n} = (n_1, 2k)$, $k \geqslant 0$, и $n_1 > 1$, то $(n_1, 2k+1) \notin V(\mathbf{N}_*\backslash\mathbf{n})$ и, следовательно, $V(\mathbf{N}_*\backslash\mathbf{n}) \neq V(\mathbf{N}_*)$. Если же $n_1 = 1$, то вершина $\mathbf{n} = (1, 2k)$ не связана с вершиной $(2, 2k)$ в графе $\Gamma(\mathbf{N}_*\backslash\mathbf{n})$ и, значит, граф $\Gamma(\mathbf{N}_*\backslash\mathbf{n})$ является несвязным.

Перейдем теперь к случаю $m > 2$. Проверка условий **1**, **2** при замене $(0, 2k)$ на $(0, \ldots, 0, 2k)$, а $(0, 2k+1)$ на $(0, \ldots, 0, 2k+1)$ аналогична. При проверке условия **3** полагаем $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_{m-1}, 2k)$. Если $n_1 + \ldots + n_{m-1} > 1$, то нетрудно установить, что $(n_1, \ldots, n_{m-1}, 2k+1) \notin V(\mathbf{N}_*\backslash\mathbf{n})$. Если же $n_1 + \ldots + n_{m-1} = 1$, то в графе $\Gamma(\mathbf{N}_*\backslash\mathbf{n})$ отсутствует связь между вершинами $\mathbf{n} = \mathbf{e}_i + 2k\mathbf{e}_m$ и $2\mathbf{e}_i + 2k\mathbf{e}_m$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Число вершин $|\mathbf{N}_0 \bigcap \Pi_m(2k)| = (2k+1)^m$. В свою очередь число вершин $|\mathbf{N}_* \bigcap \Pi_m(2k)| = (2k+1)^{m-1}(k+1) + k$. Отсюда следуют формулы (5), (6). Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Доказательство теоремы 4 почти дословно повторяет доказательство теоремы 2.

Доказательство теоремы 5. Из [15] следует, что число решений Диафантова уравнения $n_1 + \ldots + n_m = n$ в неотрицательных целых числах равно C^n_{n+m-1}. Тогда

$$|\mathbf{N}_*(k)| = \sum_{i=0}^{2K-k} C^{m-2}_{i+m-2} = C^{m-1}_{2K-k+m-1}, \quad |\mathbf{N}_*| = \sum_{k=0}^{K} |\mathbf{N}_*(2k)| + K. \tag{П.3}$$

Из (П.3) получаем соотношения $1 = \mathbf{N}_*(2K) < \mathbf{N}_*(2K-1) < \ldots < \mathbf{N}_*(0)$. Следовательно, имеют место неравенства

$$\sum_{k=0}^{K} |\mathbf{N}_*(2k)| > \sum_{k=1}^{K} |\mathbf{N}_*(2k-1)| > \sum_{k=0}^{K} |\mathbf{N}_*(2k)| - |\mathbf{N}_*(0)|. \tag{П.4}$$

Из (П.4) имеем

$$2\sum_{k=0}^{K} |\mathbf{N}_*(2k)| - |\mathbf{N}_*(0)| < |\mathbf{N}_0| = \sum_{k=0}^{K} |\mathbf{N}_*(2k)| + \sum_{k=1}^{K} |\mathbf{N}_*(2k-1)| < 2\sum_{k=0}^{K} |\mathbf{N}_*(2k)|,$$

$$\frac{|\mathbf{N}_0|}{2} < \sum_{k=0}^{K} |\mathbf{N}_*(2k)| < \frac{|\mathbf{N}_0| + |\mathbf{N}_*(0)|}{2},$$

$$\frac{|\mathbf{N}_0|}{2} + K < |\mathbf{N}_*| < \frac{|\mathbf{N}_0| + |\mathbf{N}_*(0)|}{2} + K. \tag{П.5}$$

В свою очередь при $K \to \infty$ справедливы асимптотические оценки

$$|\mathbf{N}_0| = \sum_{i=0}^{2K} C_{i+m-1}^{m-1} = C_{2K+m}^{m} \sim \frac{(2K)^m}{m!}, \quad |\mathbf{N}_*(0)| = C_{2K+m-1}^{m-1} \sim \frac{(2K)^{m-1}}{(m-1)!},$$

$$\frac{K}{|\mathbf{N}_0|} \to 0, \ \frac{|\mathbf{N}_*(0)|}{|\mathbf{N}_0|} \to 0.$$

Таким образом, соотношение (8) выполняется из неравенства (П.5). Теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 6. Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Доказательство теоремы 7. По построению существует взаимно однозначное соответствие между множествами $\mathbf{N}'_*$ и $\mathbf{N}_*$, а также между множествами $\mathbf{N}'$ и $\mathbf{N}$, поэтому графы $\Gamma(\mathbf{N}'_*)$ и $\Gamma(\mathbf{N}_*)$ изоморфны. В свою очередь из теоремы 4 следует, что $V(\mathbf{N}'_*) = \mathbf{N}'$ и граф $\Gamma(\mathbf{N}'_*)$ связный, а удаление из множества $\mathbf{N}'_*$ вершины нарушает хотя бы одно из этих утверждений. Утверждение теоремы есть следствие перечисленных фактов. Теорема 7 доказана.

Доказательство теоремы 8. Так как

$$|\mathbf{N}'_*| = |\mathbf{N}_*|, \quad |\mathbf{N}'_0| = |\mathbf{N}_0|,$$

то из утверждения теоремы 5 следует утверждение теоремы 8.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Квитко К.Б.* Сравнительный анализ международных транспортных систем: инфраструктура, рейтинги, транспортные коридоры // Транспортные системы и технологии. 2020. Т. 6. № 1. С. 15–29.
2. *Комов М.С.* Современные тенденции развития и значение международных транспортных коридоров на рынке транспортных услуг // Экономика и предпринимательство. 2022. № 6(143). С. 243–246.
3. *O'Hara J.* Toward a Commodity Enterprise Middleware: Can AMQP enable a new era in messaging middleware? A look inside standards-based messaging with AMQP // Queue. 2007. V. 5. No. 4. P. 48–55.
4. *Gudehus T., Kotzab H.* Comprehensive Logistics. Heidelberg: Springer Science+ Business Media, 2012.
5. *Konfino K.V.* Topical issues of development of international transport corridors and realization of transport potential of Russia // Labour and Social Relations Journal. 2019. V. 30. No. 5. P. 101–108.
6. *Vinoski S.* Advanced Message Queuing Protocol // IEEE Internet Computing. 2006. V. 10. No. 6. P. 87–89.
7. *Balsamo S., De Nitto V.* A survey of Product-form Queueing Networks with Blocking and their Equivalences // Annals of Operations Research. 1994. V. 48. P. 31–61.
8. *Balsamo S., Clo M.C.* A Convolution Algorithm for Product-form Queueing Networks with Blocking // Annals of Operations Research. 1998. V. 79. P. 97–117.

9. *Boucherie R.J., van Dijk N.M.* On the arrival theorem for product form queueing networks with blocking // Performance Evaluation. 1997. V. 29. P. 155–176.
10. *Цициашвили Г.Ш., Осипова М.А.* Новые мультипликативные теоремы для сетей массового обслуживания // Проблемы передачи информации. 2005. Т. 41. № 2. С. 111–122.
11. *Цициашвили Г.Ш., Осипова М.А.* Вероятностное распределение в сетях массового обслуживания с переменной структурой // Проблемы передачи информации. 2006. Т. 42. № 2. С. 101–108.
12. *Башарин Г.П., Толмачев А.Л.* Теория сетей массового обслуживания и ее приложения к анализу информационно-вычислительных систем. Итоги науки и техники, сер. “Теория вероятностей”. М.: ВИНИТИ, 1983.
13. *Balbo G., Marin A., Olliaro D., Sereno M.* Computational Algorithms for the Product Form Solution of Closed Queuing Networks with Finite Buffers and Skip-Over Policy // arXiv:2409.08075v1 [cs.PF]. 2024.
14. *Ивченко Г.И., Каштанов В.А., Коваленко И.Н.* Теория массового обслуживания. М.: Высшая школа, 1982.
15. *Виленкин Н.Я.* Комбинаторика. М.: Наука, 1969.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Ляховым.

Поступила в редакцию 25.02.2025

После доработки 11.12.2025

Принята к публикации 24.12.2025