

© 2026 г. Н.М. МАРКОВИЧ, д-р физ.-мат. наук (nat.markovich@gmail.com)
(Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН, Москва)

КОЛИЧЕСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ В ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ КЛАСТЕРНОГО ПРИСОЕДИНЕНИЯ¹

Модель кластерного присоединения (КП) была предложена в статье Багроу и Брокманна (2013) в качестве альтернативы моделям предпочтительного присоединения для эволюции случайных графов. В статье Вайчулис и Маркович (2024) предложена обобщенная модель кластерного присоединения (ОМКП), включающая произвольную функцию присоединения f . В настоящей статье изучается поведение математического ожидания количества треугольников при слабых ограничениях на функцию f . Доказан логарифмический рост математического ожидания количества треугольников. Более точные результаты, включая центральную предельную теорему для количества треугольников, получены при постоянной функции f . Математическое ожидание количества треугольников в ОКП с почти всюду постоянной функцией f изучается средствами моделирования.

Ключевые слова: обобщенная модель кластерного присоединения, количество треугольников, коэффициент кластеризации, вес узла, случайный граф, эволюция.

DOI: 10.7868/S2413977726030013

1. Введение

Пусть $G_n = (V_n, E_n)$, $n = 1, 2, \dots$ обозначает последовательность случайных графов, где V_n – множество узлов, а E_n – множество ребер. Последовательность G_n , $n = 1, 2, \dots$ формируется во время эволюции, т.е. динамики графа во времени и пространстве. Модель предпочтительного присоединения (МПП) для эволюции графа была впервые предложена в [1, 2]. Большая часть моделей эволюции случайных графов относится к МПП, см. [3–8] среди прочих, ввиду применения к многочисленным реальным графам. Приведем определение линейной МПП, рассмотренное в [9].

Определение 1. Зафиксируем $t \geq 2$ и $\delta > -t$. Тогда линейная МПП – это последовательность случайных графов $G_n = (V_n, E_n)$, $n \geq 1$, определенная следующим образом:

- (i) граф G_1 состоит из единичного узла без ребер;

¹ Исследование Маркович Н.М. выполнено за счет средств Российского научного фонда (грант № 24-21-00183).

- (ii) граф G_2 состоит из двух узлов с t ребрами между ними;
 (iii) граф G_{n+1} , $n \geq 2$ генерируется рекурсивно следующим образом: имея граф G_n , прикрепим к нему новый узел $n+1$ t новыми ребрами. Новые ребра соединяют узел $n+1$ и узлы $i_1, \dots, i_m \in V_n$, которые выбираются взвешенным случайным выбором с возвращением. Все узлы графа G_n имеют веса

$$(1) \quad p_{i,n}(\delta) = \frac{D_{i,n} + \delta}{2m(n-1) + \delta n}, \quad i \in V_n,$$

которые пересчитываются после выбора каждого из узлов $i_1, \dots, i_m \in V_n$. Здесь и далее $D_{i,n}$ обозначает степень узла $i \in V_n$.

В [10] функция присоединения f включена в определение МПП, а именно, (1) заменено на

$$(2) \quad p_{i,n}(f, \delta) = \frac{f(D_{i,n}) + \delta}{\sum_{j \in V_n} (f(D_{j,n}) + \delta)}, \quad i \in V_n,$$

где функция предпочтительного присоединения f детерминированная, неубывающая и неотрицательная.

Модель кластерного присоединения (МКП) была предложена в [11] как альтернатива МПП, см. [11] для аргументации. Эта модель менее известна, хотя часто наблюдается на практике и может быть применима к локальным сетям, например к локальным социальным сетям и «системам, в которых узлы стремятся присоединиться не к крупным хамам, а к сильно связанным группам» [11].

Прежде чем дать определение так называемой обобщенной МКП (ОМКП), напомним определение коэффициента кластеризации. Коэффициент кластеризации узла $i \in V_n$ определяется как

$$c_{i,n} = \begin{cases} 0, & D_{i,n} = 0 \text{ или } D_{i,n} = 1, \\ 2\Delta_{i,n} / (D_{i,n}(D_{i,n} - 1)), & D_{i,n} \geq 2, \end{cases}$$

где $\Delta_{i,n}$ – количество треугольников, в которые входит узел i [12].

Коэффициент кластеризации $c_{i,n}$ был предложен впервые в [13] как «склонность двух соседних узлов одного и того же узла также быть соседями друг другу, образуя треугольник соединения в сети». Этот коэффициент измеряет способность i -го узла формировать треугольники из ближайших узлов в своей окрестности.

Обозначим через $\#A$ мощность произвольного конечного множества A , т.е. число его элементов. Следующее определение ОМКП представляет собой небольшую модификацию определения, предложенного в [14].

Определение 2. Зафиксируем $t \geq 2$ и $\epsilon \geq 0$. Тогда ОМКП – это последовательность случайных графов $G_n = (V_n, E_n)$, $n \geq 1$, определенных следующим образом:

(i) G_1 – неслучайный, конечный, простой граф, состоящий по меньшей мере из t узлов, т.е.

$$(3) \quad \#V_1 \geq t.$$

(ii) Каждый узел $i \in V_n$, $n \geq 1$ снабжен весом

$$(4) \quad p_{i,n}(f, \epsilon) = \frac{f(c_{i,n}) + \epsilon}{\sum_{j \in V_n} (f(c_{j,n}) + \epsilon)},$$

где функция присоединения f детерминированная, неубывающая, неотрицательная на $[0, 1]$ и $f(1) < \infty$.

(iii) Для $n \geq 1$ граф G_{n+1} генерируется рекурсивно следующим образом: имея граф G_n , прикрепим к нему новый узел $\#V_1 + n$ m новыми ребрами. Новые ребра соединяют пары узлов

$$\{\#V_1 + n, i_1\}, \{\#V_1 + n, i_2\}, \dots, \{\#V_1 + n, i_m\},$$

где узлы $i_1, \dots, i_m \in V_n$ выбираются взвешенным случайным выбором с возвращением.

Легко заметить, что МКП в [11], т.е. ОМКП с функцией присоединения

$$(5) \quad f(x) = x^\alpha, \quad x \geq 0, \quad \alpha > 0,$$

получена заменой $D_{i,n}$ на $c_{i,n}$ в соответствующей МПП. То же можно заметить, сравнивая веса (2) и (4).

Сравнивая линейную МПП и ОМКП, отметим следующее.

1) Мощности множеств $\#V_n$ и $\#E_n$ детерминированы для обеих моделей. В частности, из определения 2 (iii) следует, что для любого $n \geq 1$

$$(6) \quad \#V_n = \#V_1 + n - 1, \quad \#E_n = \#E_1 + m(n - 1).$$

Для линейной МПП имеем $\#V_n = n$ и $\#E_n = m(n - 1)$.

2) Из определения 2 (iii) следует, что для любого $n \geq 1$ G_n – простой граф. Другая ситуация для ОМПП. Из определения 1 (iii) следует, что в линейной МПП возможны несколько связей между узлами.

3) В линейной МПП с $m \geq 2$ и $\delta > 0$ степени узлов асимптотически распределены по степенному закону с показателем степени $3 + \delta/m$, см., например, [9], т.е. их распределения имеют тяжелые хвосты. Насколько известно, распределение степеней узлов для ОМКП еще не получено. С использованием эвристик и моделирования, в [11] показано, что распределение степеней узлов для МКП имеет легкие хвосты. Результаты моделирования в [15] подтверждают этот вывод.

4) Главное отличие между линейной МПП и ОМКП следующее. Рассматривая линейную МПП, можно заметить, что узел i с большим числом связей в графе G_n с большей вероятностью будет соединен с

новым узлом $n + 1$. Это означает, что $D_{i,n} < D_{i,n+1}$. Поэтому линейная МПП обладает феноменом «богатые становятся богаче» (эффект Мэтью). ОМКП не имеет такого свойства. Например, если $c_{i,n} = 1$ для некоторого узла $i \in V_n$ и этот узел соединен с новым узлом $\#V_1 + n$, то $c_{i,n} > c_{i,n+1}$. Действительно, предположим сначала, что выбранные взвешенным случайным выбором с возвращением узлы $i \in V_n$ и $j \in V_n$ не соединены ребром. Тогда $D_{i,n+1} = D_{i,n} + 1$ и $\Delta_{i,n+1} = \Delta_{i,n}$. Последние равенства вместе с равенством $2\Delta_{i,n} = D_{i,n}(D_{i,n} - 1)$ позволяют получить $c_{i,n+1} = (\Delta_{i,n} - 1)/(\Delta_{i,n} + 1) < 1$. Нетрудно убедиться, что когда узлы $i \in V_n$ и $j \in V_n$ соединены ребром, то $c_{i,n+1} = (D_{i,n}(D_{i,n} - 1) + 2)/(\Delta_{i,n}(\Delta_{i,n} + 1)) < 1$ ввиду $D_{i,n} \geq 2$.

Количество треугольников Δ_n в случайном графе G_n определено, как

$$\Delta_n = \frac{1}{3} \sum_{i \in V_n} \Delta_{i,n}.$$

Цель данной статьи – исследовать поведение последовательности $E(\Delta_n) - \Delta_1$, $n \geq 2$ для ОМКП с $m = 2$ и $\epsilon > 0$. ОМКП с $m = 2$ можно рассматривать как базовую. А именно, коэффициент кластеризации вновь добавленного узла равен 1, когда пара выбранных узлов i_1 и i_2 соединены, или 0 в противном случае.

Структура статьи следующая. Обзор существующих результатов, касающихся математического ожидания количества треугольников, описан в разделе 2. Основные результаты, включающие теоремы 1 и 2, представлены в разделе 3. Алгоритм и результаты моделирования последовательности $E\Delta_n - \Delta_1$, $n \geq 2$ рассматриваются в разделе 4. Выводы изложены в разделе 5. Доказательства содержатся в Приложении.

2. Обзор результатов для математического ожидания количества треугольников

Треугольник является наиболее изученным подграфом, и его можно рассматривать как базовое сообщество. Вероятно, впервые он был предложен для изучения в [13].

В [16] показано, что $E(\Delta_n)$ в модели Барабаши–Альберта (т.е. линейной МПП с $\delta = 0$, $m \geq 2$) имеет порядок $\ln^3(n)$. Тот же порядок получен в [17] для МПП, где все m ребер из очередной новой вершины проводятся одновременно и независимо, а вероятности проведения ребра в вершину i зависят линейным образом от степени этой вершины в G_n , но не пересчитываются после проведения очередного ребра, как в определении 1.

$E(\Delta_n)$ для линейной МПП с двумя параметрами δ, m было исследовано в [18], см. также [19]. В [18] показано, что для $\delta > 0$ и $m \geq 2$ выполнено

$$|E(\Delta_n) - C_1(\beta, m) \ln(n)| \leq C_2, \quad n \geq 2,$$

где C_1 и C_2 – некоторые положительные константы. Обобщая, скажем так: теорема 2.5 в [9] утверждает, что для параметров линейной МПП $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ и $\delta > -m$ выполнено

$$E(\Delta_n) = C_1(m, \delta)g_1(n) + g_2(n), \quad n \rightarrow \infty,$$

где функция g_2 такая, что $|g_2(n)| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, тогда как функция g_1 имеет вид

$$g_1(n) = \begin{cases} n^{-\delta/(2m+\delta)}, & -m < \delta < 0, \\ \ln^3(n), & \delta = 0, \\ \ln(n), & \delta > 0. \end{cases}$$

Точный вид константы $C_1(m, \delta)$ приведен в теореме 2.5 работы [9].

Перечислим статьи, содержащие результаты о количестве треугольников Δ_n . Асимптотическое поведение Δ_n в неоднородном случайном графе с различной вероятностью образовывать ребра получено в [20, 21], а краткий обзор можно найти в [22]. Показано, что Δ_n сходится по распределению к распределению Пуассона. Асимптотическое математическое ожидание Δ_n в равномерных случайных графах со степенным законом распределения степеней узлов изучалось в [23]. Обзор литературы по Δ_n для однородных случайных графов приведен в [21].

3. Основные результаты

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $m = 2$ и $\epsilon > 0$ – параметры ОМКП. Тогда для $n \geq 2$ выполнено

$$(7) \quad \frac{1}{\mu^2} + g_1(n) \leq \frac{E(\Delta_n) - \Delta_1}{4 \ln(n)} \leq \mu^2 + g_2(n),$$

где

$$(8) \quad \mu = \frac{\epsilon + f(1)}{\epsilon + f(0)}$$

и $g_i(n) = O(1/\ln(n))$, $n \rightarrow \infty$, $i = 1, 2$.

Без ограничения общности можно считать, что $f(1) = 1$ в (4). Действительно, если $f(1) \neq 1$, то $p_{i,n}(f, \epsilon) = p_{i,n}(f/f(1), \epsilon/f(1))$.

Рассматривая частный случай функции присоединения f , получим следующий результат.

Теорема 2. Пусть $m = 2$ и $\epsilon > 0$ – параметры ОМКП и функция f постоянна, а именно,

$$(9) \quad f(x) = \lambda, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \lambda \geq 0.$$

Тогда

$$(10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(\Delta_n) - \Delta_1}{4 \ln(n)} = 1$$

и

$$(11) \quad \frac{\Delta_n - 4 \ln(n)}{2 \ln^{1/2}(n)} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1), \quad n \rightarrow \infty,$$

где \xrightarrow{d} обозначает сходимость по распределению, а $\mathcal{N}(0, 1)$ – стандартное нормальное распределение.

Утверждение (11) является центральной предельной теоремой (ЦПТ). Аналог для линейной МПП автору не встречался. Обзор литературы по локальной ЦПТ в применении к Δ_n в случайных графах Эрдеша–Реньи содержится в [24].

4. Компьютерное моделирование

Классический подход к анализу количества треугольников заключается в моделировании «достаточно длинной» последовательности графов G_1, \dots, G_n и создании выборки $\Delta_1, \dots, \Delta_n$. Однако такая процедура может потребовать длительного времени моделирования. Для преодоления проблемы приведем аппроксимацию для $E(\Delta_n) - \Delta_1$, $n \geq 2$, опирающуюся на теоретические исчисления, приведенные в Приложении, на которое ниже будет несколько ссылок.

Пусть $U_k^{(j)}$, $1 \leq j \leq N$, $1 \leq k \leq n - 1$ – независимые и равномерно распределенные случайные величины (сл.в.) на $(0, 1)$, а случайное событие B_k определено в (П.4). Тогда

$$(12) \quad \overline{D_{n,N}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{n-1} I \left\{ U_k^{(j)} < P(B_k) \right\}, \quad n \geq 2,$$

является аппроксимацией для $E(\Delta_n) - \Delta_1$. Действительно, используя (П.6) и (П.7), получим $E(\overline{D_{n,N}}) = E(\Delta_n) - \Delta_1$. Кроме того, для любого фиксированного n последовательность $\overline{D_{n,N}}$, $N = 1, 2, \dots$ сходится почти всюду к $E(\Delta_n) - \Delta_1$ при $N \rightarrow \infty$. Это следует из усиленного закона больших чисел (см., например, теорему 14 в [28]), поскольку слагаемые в сумме (12) по j являются независимыми и одинаково распределенными сл.в., имеющими математическое ожидание $E(\Delta_n) - \Delta_1$.

Пусть $\tilde{n} \geq 2$ обозначает некоторое натуральное число. Используя (12), можно быстро генерировать аппроксимацию для последовательности $E(\Delta_n) - \Delta_1$, $2 \leq n \leq \tilde{n}$, для чего нужно считать вероятности $P(B_k)$, $1 \leq k \leq \tilde{n} - 1$. В самом простом случае, когда f – постоянная функция

(см. (9)), имеем

$$P(B_k) = \frac{2(\#E_1 + 2(k-1))}{(\#V_1 + k - 1)(\#V_1 + k - 2)}, \quad k \geq 1,$$

см. (П.13). Подсчет вероятностей $P(B_k)$, $1 \leq k \leq \tilde{n} - 1$ значительно усложняется при замене постоянной функции на почти всюду постоянную (по мере Лебега) функцию

$$(13) \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Для функции f , приведенной в (13), веса (4) имеют форму

$$(14) \quad p_{i,n}(f, \epsilon) = \frac{1}{(1 + \epsilon)V_{n,1} + \epsilon V_{n,2}} \begin{cases} \epsilon, & i \in V_{n,2}, \\ 1 + \epsilon, & i \in V_{n,1}, \end{cases}$$

где $V_{n,1} = \{i : c_{i,n} > 0\}$, $V_{n,2} = V_n \setminus V_{n,1}$. Разложим также множество ребер E_n на непересекающиеся множества. Положим $E_{n,1} = \{\{i, j\} : \{i, j\} \in E_n, i \in V_{n,1}, j \in V_{n,1}\}$, $E_{n,3} = \{\{i, j\} : \{i, j\} \in E_n, i \in V_{n,2}, j \in V_{n,2}\}$ и $E_{n,2} = E_n \setminus (E_{n,1} \cup E_{n,3})$. Например, если $G_1 = (V_1, E_1)$ с

$$(15) \quad V_1 = \{1, 2, \dots, 9\}, \quad E_1 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{6, 7\}\},$$

то $V_{1,1} = \{1, 2, 3\}$, $V_{1,2} = \{4, 5, \dots, 9\}$, $E_{1,1} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$, $E_{1,2} = \{\{2, 5\}, \{3, 4\}\}$, $E_{1,3} = \{\{6, 7\}\}$.

С учетом введенных обозначений (П.7) можно переписать следующим образом:

$$P(B_k) = q_{k,1} + q_{k,2} + q_{k,3}, \quad k \geq 1,$$

где

$$q_{k,\ell} = \sum_{\{i_1, i_2\} \in E_{k,\ell}} \left(\frac{p_{i_1,k}(f, \epsilon)p_{i_2,k}(f, \epsilon)}{1 - p_{i_1,k}(f, \epsilon)} + \frac{p_{i_1,k}(f, \epsilon)p_{i_2,k}(f, \epsilon)}{1 - p_{i_2,k}(f, \epsilon)} \right), \quad \ell = 1, 2, 3.$$

Здесь и далее предполагаем, что начальный граф G_1 и параметр ϵ выбраны так, чтобы выполнялось $\mu < \#V_1$. Используя (14), находим

$$\begin{aligned} q_{k,1} &= \frac{2(1 + \epsilon)^2 \#E_{k,1}}{\lambda_k (\lambda_k - 1 - \epsilon)}, \\ q_{k,2} &= \frac{\epsilon(1 + \epsilon) \#E_{k,2}}{\lambda_k (\lambda_k - 1 - \epsilon)} + \frac{\epsilon(1 + \epsilon) \#E_{k,2}}{\lambda_k (\lambda_k - \epsilon)}, \\ q_{k,3} &= \frac{2\epsilon^2 \#E_{k,3}}{\lambda_k (\lambda_k - \epsilon)}, \end{aligned}$$

где $\lambda_k = (1 + \epsilon)\#V_{k,1} + \epsilon\#V_{k,2}$. Кроме того, введем величины

$$\bar{q}_{k,1} = \frac{2(1 + \epsilon)^2 (\#V_{k,1}(\#V_{k,1} - 1)/2 - \#E_{k,1})}{\lambda_k (\lambda_k - 1 - \epsilon)},$$

$$\bar{q}_{k,2} = \frac{\epsilon(1 + \epsilon) (\#V_{k,1}\#V_{k,2} - \#E_{k,2})}{\lambda_k (\lambda_k - 1 - \epsilon)} + \frac{\epsilon(1 + \epsilon) (\#V_{k,1}\#V_{k,2} - \#E_{k,2})}{\lambda_k (\lambda_k - \epsilon)},$$

$$\bar{q}_{k,3} = \frac{2\epsilon^2 (\#V_{k,2}(\#V_{k,2} - 1)/2 - \#E_{k,3})}{\lambda_k (\lambda_k - \epsilon)}.$$

Нетрудно заметить, что $q_{k,1}$ – вероятность выбрать неупорядоченную пару узлов, соединенную ребром из $E_{k,1}$, а $\bar{q}_{k,1}$ вероятность выбрать несвязанную неупорядоченную пару узлов такую, что оба узла принадлежат $V_{k,1}$. Аналогично могут быть интерпретированы величины $q_{k,\ell}$ и $\bar{q}_{k,\ell}$, $\ell = 2, 3$.

Напомним, что для образования графа G_{k+1} в граф G_k добавляется новый узел $\#V_1 + k$. В зависимости от связи выбранной (с помощью взвешенного случайного выбора без удаления) неупорядоченной пары узлов вновь введенный узел добавляется во множество $V_{k+1,1}$ или во множество $V_{k+1,2}$. Также добавим в одно из непересекающихся множеств $E_{k+1,1}$, $E_{k+1,2}$ или $E_{k+1,3}$ два ребра, связанные с узлом $\#V_1 + k$. В частности, мощности множеств $\#V_{k+1,\ell}$, $\ell = 1, 2$, $k \geq 1$ и $\#E_{k+1,\ell}$, $\ell = 1, 2, 3$, $k \geq 1$ контролируются следующими правилами:

1. Если случилось событие $\{U_k^{(j)} < q_{k,1}\}$ (т.е. оба выбранных узла принадлежат $V_{k,1}$ и они соединены ребром из $E_{k,1}$), то $\#V_{k+1,1} = \#V_{k,1} + 1$ и $\#E_{k+1,1} = \#E_{k,1} + 2$. Если случилось $\{q_{k,1} + q_{k,2} + q_{k,3} \leq U_k^{(j)} < q_{k,1} + q_{k,2} + q_{k,3} + \bar{q}_{k,1}\}$ (т.е. оба выбранных узла принадлежат $V_{k,1}$ и не соединены), то $\#V_{k+1,2} = \#V_{k,2} + 1$ и $\#E_{k+1,2} = \#E_{k,2} + 2$.
2. Если случилось $\{q_{k,1} \leq U_k^{(j)} < q_{k,1} + q_{k,2}\}$ (т.е. один из выбранных узлов принадлежит $V_{k,1}$, другой принадлежит множеству $V_{k,2}$ и узлы соединены ребром из $E_{k,2}$), то $\#V_{k+1,1} = \#V_{k,1} + 2$, $\#V_{k+1,2} = \#V_{k,2} - 1$, $\#E_{k+1,1} = \#E_{k,1} + 3$ и $\#E_{k+1,2} = \#E_{k,2} - 1$. Если случилось $\{q_{k,1} + q_{k,2} + q_{k,3} + \bar{q}_{k,1} \leq U_k^{(j)} < q_{k,1} + q_{k,2} + q_{k,3} + \bar{q}_{k,1} + \bar{q}_{k,2}\}$ (т.е. один из выбранных узлов принадлежит $V_{k,1}$, другой принадлежит множеству $V_{k,2}$ и узлы не соединены), то $\#V_{k+1,2} = \#V_{k,2} + 1$, $\#E_{k+1,2} = \#E_{k,2} + 1$ и $\#E_{k+1,3} = \#E_{k,3} + 1$.
3. Если произошло $\{q_{k,1} + q_{k,2} \leq U_k^{(j)} < q_{k,1} + q_{k,2} + q_{k,3}\}$ (т.е. оба выбранных узла принадлежат $V_{k,2}$ и они соединены ребром из $E_{k,3}$), то $\#V_{k+1,1} = \#V_{k,1} + 3$, $\#V_{k+1,2} = \#V_{k,2} - 2$, $\#E_{k+1,1} = \#E_{k,1} + 3$ и $\#E_{k+1,3} = \#E_{k,3} - 1$. Если случилось $\{U_k^{(j)} \geq 1 - \bar{q}_{k,3}\}$ (т.е. оба выбранных узла принадлежат $V_{k,2}$ и не соединены), то $\#V_{k+1,2} = \#V_{k,2} + 1$ и $\#E_{k+1,3} = \#E_{k,3} + 2$.

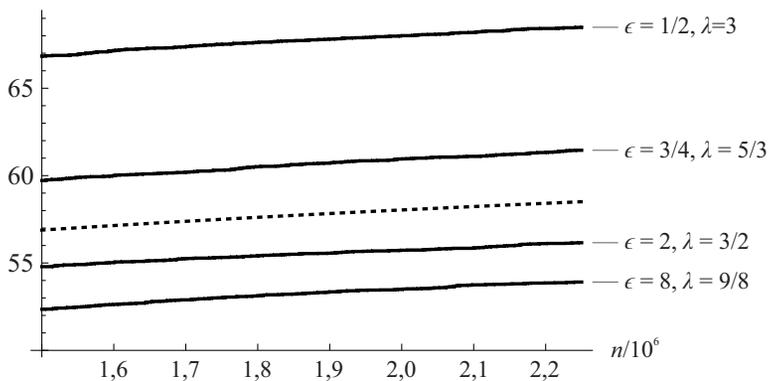


Рис. 1. График $g(n) = 4 \ln(n)$ (пунктир) и $\overline{D_{n,100}}$, $1,5 \times 10^6 \leq n \leq 2,25 \times 10^6$ при начальном графе $G_1^{(1)}$.

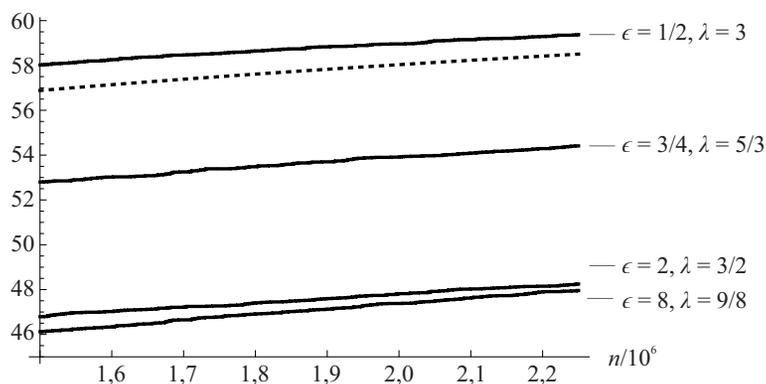


Рис. 2. График $g(n) = 4 \ln(n)$ (пунктир) и $\overline{D_{n,100}}$, $1,5 \times 10^6 \leq n \leq 2,25 \times 10^6$ при начальном графе $G_1^{(2)}$.

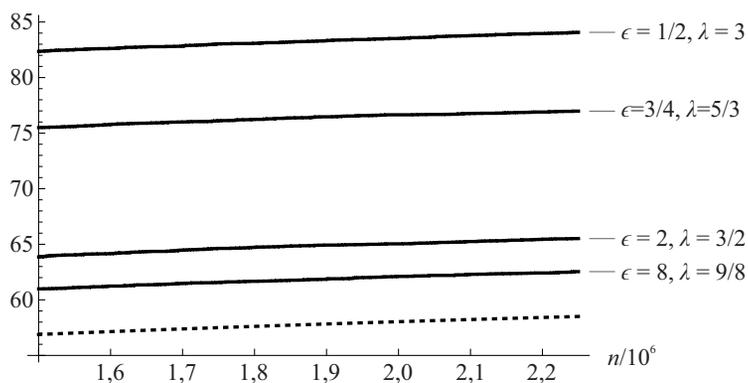


Рис. 3. График $g(n) = 4 \ln(n)$ (пунктир) и $\overline{D_{n,100}}$, $1,5 \times 10^6 \leq n \leq 2,25 \times 10^6$ при начальном графе $G_1^{(3)}$.

В моделировании использованы следующие начальные графы $G_1 = (V_1, E_1)$:

- а) полный граф $G_1^{(1)}$, в котором три узла и три ребра;
- б) граф $G_1^{(2)} = (V_1, E_1)$, где V_1 и E_1 заданы в (15);
- с) полный граф $G_1^{(3)}$, в котором 17 узлов и 136 ребер.

В моделировании разность $E(\Delta_n) - \Delta_1$ аппроксимируется эмпирическим средним $\overline{D_{N,n}}$. Значения $\overline{D_{n,N}}$ рассчитаны по (12) с использованием $N = 100$ независимых последовательностей количеств треугольников. Значения аппроксимации $\overline{D_{n,100}}$, $2 \leq n \leq 2,25 \times 10^6$ рассчитаны для $\epsilon = 1/2, 3/4, 2, 8$ и для каждого начального графа. Результаты моделирования представлены на рис. 1–3, гладкость кривых которых указывает, что выбранное значение N достаточно большое. Чтобы показать, что $\overline{D_{n,100}}$, как функция от n , медленно меняется при больших n , результаты моделирования приведены на интервале натуральных чисел $[1,5 \times 10^6, 2,25 \times 10^6]$.

В соотношении (10) утверждается, что для $\lambda = 1$ математическое ожидание количества треугольников $E(\Delta_n) - \Delta_1$ асимптотически равно $g(n) = 4 \ln(n)$ при $n \rightarrow \infty$. График функции g также приведен на рис. 1–3.

Видим, что графики $\overline{D_{n,100}}$ на рис. 1–3 примерно параллельны $g(n) = 4 \ln(n)$. Поэтому можно предположить, что для каждого начального графа G_1 и $\epsilon > 0$ существует положительный параметр ν , вероятно зависящий от G_1 и ϵ , такой что математическое ожидание $E(\Delta_n) - \Delta_1$ асимптотически равно $\nu \ln(n)$ при $n \rightarrow \infty$.

Результаты моделирования следующие:

1. графики $\overline{D_{n,100}}$ на рис. 1–3 позволяют заключить, что ν зависит от параметра ϵ , что также подтверждается оценками параметра $\hat{\nu}$, полученными методом наименьших квадратов и приведенными в таблице;
2. таблица показывает, что $\bar{D} = \overline{D_{2,5 \times 10^6, 100}}$ и ν зависят от задания начального графа;
3. для всех аппроксимаций $\overline{D_{2,5 \times 10^6, 100}}$ верно

$$\lambda^{-2} \leq \frac{\overline{D_{2,5 \times 10^6, 100}}}{4 \ln(2,5 \times 10^6)} \leq \lambda^2, \quad \lambda = \frac{1 + \epsilon}{\epsilon},$$

что не противоречит теоретическому результату (7);

Эмпирические характеристики $\bar{D} = \overline{D_{2,5 \times 10^6, 100}}$ и $\hat{\nu}$

		Начальный граф											
		$G_1^{(1)}$				$G_1^{(2)}$				$G_1^{(3)}$			
ϵ		1/2	3/4	2	8	1/2	3/4	2	8	1/2	3/4	2	8
\bar{D}		68	61	56	54	59	54	48	48	84	77	66	62
$\hat{\nu}$		4,69	4,20	3,85	3,69	4,07	3,71	3,29	3,26	5,77	5,29	4,49	4,28

4. аппроксимацию (12) можно применить и для следующей функции присоединения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Составляя алгоритм для вычисления $P(B_k)$, $1 \leq k \leq n - 1$, в данном случае важно иметь в виду, что $c_{i,n} = 1$ тогда и только тогда, когда i – вершина полного графа.

5. Заключение

В статье исследуется математическое ожидание количества треугольников для ОМКП с $m = 2$, любым $\epsilon > 0$ и произвольной функции присоединения f , удовлетворяющей определению 2.

Функция f не обязательно непрерывна в определении 2 (ii) и, следовательно, в теореме 1. Эта функция может быть разрывной с одним или несколькими устранимыми разрывами.

Для начального графа $G_1 = (V_1, E_1)$, с которого начинается эволюция, теорема 1 справедлива для любого множества E_1 , включая пустое. Техническое предположение (3) при $m = 2$ гарантирует, что каждый граф G_n , $n \geq 1$ содержит не менее двух вершин, которые можно выбрать, применив взвешенный случайный выбор без удаления. Доказано, что математическое ожидание числа треугольников имеет порядок $\ln(n)$. В разделе 2 отмечено, что количество треугольников в линейной МПП с $m \geq 2$ и $\delta > 0$ имеет такой же порядок $\ln(n)$, см. [9, 18].

Предложен быстрый алгоритм для генерирования последовательности $E\Delta_n - \Delta_1$, $n \geq 2$ большой длины для ОМКП с функцией присоединения (13). Результаты моделирования подтверждают утверждение теоремы 1.

Веса $p_{i,n}(f, \epsilon)$, $i \in V_n$ в (4) равномерно распределены на V_n , если функция присоединения постоянна. В данном случае найдена асимптотика для $E\Delta_n - \Delta_1$ и доказана асимптотическая нормальность, см. (10) и (11), соответственно, в теореме 2.

Случай $m > 2$ требует дополнительных вычислений из-за сложной комбинаторики. Как отмечено в [11], исследовать рост количества треугольников с помощью моделирования уже непростая задача. Можно полагать, что математическое ожидание количества треугольников имеет порядок $\ln(n)$ и в случае $m > 2$.

Имея информацию о поведении последовательности $E\Delta_n$, $n \geq 2$, можно исследовать поведение усредненного коэффициента кластеризации

$$\bar{C}_n = \frac{3\Delta_n}{\text{количество пар соединенных ребер в графе } G_n}.$$

Это предмет дальнейшего исследования.

Приведем здесь доказательства утверждений.
Дигамма-функция ψ определяется, как

$$(II.1) \quad \psi(x) = \frac{d}{dx} \ln(\Gamma(x)), \quad x > 0,$$

где $\Gamma(x) = \int_0^\infty y^{x-1} e^{-y} dy$ – гамма-функция Эйлера, см., например, [25]. Определим функцию

$$\Upsilon_n(\mu, \#V_1, \#E_1) = 4\mu^2 \psi(n + \#V_1 - 1 - \mu) + 2\mu(2\#V_1 - \#E_1) (\psi(n + \#V_1 - 1) - \psi(n + \#V_1 - 1 - \mu)),$$

где μ определена в (8), начальный граф $G_1 = (V_1, E_1)$ удовлетворяет определению 2 (i), а натуральное число n такое, что $n \geq n_0$, где натуральное n_0 удовлетворяет условию $n_0 + \#V_1 - 1 - \mu > 0$.

Лемма 1. Пусть последовательности $\#V_k, k \geq 1$ и $\#E_k, k \geq 1$ определены в (6) и β вещественное положительное число, а натуральные числа $1 \leq n' < n'' < \infty$ такие, что $n' + \#V_1 - 1 - \beta > 0$. Тогда

$$(II.2) \quad 2\beta^2 \sum_{k=n'}^{n''-1} \frac{\#E_k}{\#V_k(\#V_k - \beta)} = \Upsilon_{n''}(\beta, \#V_1, \#E_1) - \Upsilon_{n'}(\beta, \#V_1, \#E_1).$$

Доказательство леммы 1. Левая часть (II.2) равна сумме

$$2\beta(\#E_1 - 2\#V_1) \sum_{k=n'}^{n''-1} \frac{1}{k + \#V_1 - 1} + 2\beta(2\beta - (\#E_1 - 2\#V_1)) \sum_{k=n'}^{n''-1} \frac{1}{k + \#V_1 - 1 - \beta}.$$

Равенство (II.2) следует из тождества

$$(II.3) \quad \sum_{k=n'}^{n''-1} \frac{1}{k + \gamma} = \psi(n'' + \gamma) - \psi(n' + \gamma), \quad n' + \gamma > 0.$$

Чтобы доказать (II.3), разложим левую часть (II.3) следующим образом:

$$\sum_{k=n'}^{\infty} \frac{1}{k + \gamma} - \sum_{k=n''}^{\infty} \frac{1}{k + \gamma} = - \left\{ -\gamma_E + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+1} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+n'+\gamma} \right\} + \left\{ -\gamma_E + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+1} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+n''+\gamma} \right\},$$

где $\gamma_E \approx 0,5772$ – постоянная Эйлера–Маскерони. Теперь остается использовать разложение

$$\psi(x) = -\gamma_E + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+1} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+x}, \quad x > 0,$$

(см., например, [25]).

Лемма 2. Пусть β – вещественное положительное число, а натуральные числа $1 \leq n' < n < \infty$ такие, что $n' + \#V_1 - 1 - \beta > 0$. Тогда

$$\Upsilon_n(\beta, \#V_1, \#E_1) - 4\beta^2 \ln(n) = g(n),$$

где $g(n) = O(1/n)$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство леммы 2. Можно записать $\Upsilon_n(\beta, \#V_1, \#E_1) - 4\beta^2 \ln(n) = g(n)$, где

$$\begin{aligned} g(n) = & 2\beta(2\beta - (2\#V_1 - \#E_1))(\psi(n + \#V_1 - 1 - \beta) - \ln(n + \#V_1 - 1 - \beta)) + \\ & + 2\beta(2\#V_1 - \#E_1)(\psi(n + \#V_1 - 1) - \ln(n + \#V_1 - 1)) + \\ & + 4\beta^2 \ln\left(1 + \frac{\#V_1 - 1 - \beta}{n}\right) + 2\beta(2\#V_1 - \#E_1) \ln\left(1 + \frac{\beta}{n + \#V_1 - 1 - \beta}\right). \end{aligned}$$

Используя неравенства $x/(1+x) \leq \ln(1+x) \leq x$, $x > -1$ и $|\psi(x) - \ln(x)| < 1/x$, $x > 0$ (см., например, [26]), получаем $|g(n)| \leq C/n$, где $0 < C < \infty$ – некоторая константа.

Доказательство теоремы 1. Очевидно, что случайные события $\{\Delta_{n+1} = \Delta_n + 1\}$ и

$$(II.4) \quad B_n = \{\text{неупорядоченная пара узлов, выбираемая из } V_n \text{ методом взвешенного выбора без удаления, соединена ребром из } E_n\}$$

эквивалентны. Тогда имеем

$$(II.5) \quad \Delta_n - \Delta_1 = \sum_{k=1}^{n-1} I(B_k), \quad n \geq 2,$$

где $I(B_k)$ обозначает индикатор события B_k . Отсюда, учитывая, что граф G_1 неслучайный, получим

$$(II.6) \quad E(\Delta_n) - \Delta_1 = \sum_{k=1}^{n-1} P(B_k), \quad n \geq 2.$$

Применяя взвешенный выбор без удаления, первый узел множества V_k выбирается случайным образом с учетом весов $p_{i,k}(f, \epsilon)$, $i \in V_k$, $k \geq 1$. Тот же узел,

скажем узел i' , не может быть выбран снова. Второй узел выбирается с использованием перенормированных весов $p_{i,k}(f, \epsilon) / (1 - p_{i',k}(f, \epsilon))$, $i \in V_k \setminus \{i'\}$. Если $\#E_k = 0$, то немедленно следует, что $P(B_k) = 0$. Для случая $\#E_k \neq 0$ имеем

$$(П.7) \quad P(B_k) = \sum_{\{i_1, i_2\} \in E_k} \left(\frac{p_{i_1, k}(f, \epsilon) p_{i_2, k}(f, \epsilon)}{1 - p_{i_1, k}(f, \epsilon)} + \frac{p_{i_1, k}(f, \epsilon) p_{i_2, k}(f, \epsilon)}{1 - p_{i_2, k}(f, \epsilon)} \right), \quad k \geq 1.$$

Здесь сумма берется по всем неупорядоченным парам узлов $\{i_1, i_2\}$, принадлежащих множеству ребер E_k . Из предположения $\epsilon > 0$ следует $0 < p_{i,k}(f, \epsilon) < 1$ для любых $i \in V_k$, $k \geq 1$. Таким образом, все слагаемые в правой части (П.7) положительные.

В принятых предположениях (см., определение 2 (ii)) функция f не убывает на $[0, 1]$, т.е., $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$ для всех $0 \leq x \leq 1$. Ввиду грубого неравенства $0 \leq c_{i,k} \leq 1$, $i \in V_k$, $k \geq 1$, это приводит к $f(0) \leq f(c_{i,k}) \leq f(1)$, $i \in V_k$, $k \geq 1$. Отсюда следуют неравенства для весов (4):

$$(П.8) \quad \frac{1}{\mu \#V_k} \leq p_{i,k}(f, \epsilon) \leq \frac{\mu}{\#V_k}, \quad i \in V_k, \quad k \geq 1.$$

Рассмотрим верхнюю оценку для $E(\Delta_n) - \Delta_1$. Предположим сначала, что $\#V_1 - \mu > 0$. Используя (6), (П.7) и (П.8), получим

$$(П.9) \quad P(B_k) \leq 2\mu^2 \frac{\#E_k}{\#V_k(\#V_k - \mu)}$$

для $k \geq 1$. Вместе с (П.6) это дает

$$E(\Delta_n) - \Delta_1 \leq 2\mu^2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\#E_k}{\#V_k(\#V_k - \mu)}.$$

Применяя лемму 1, получим

$$\begin{aligned} E(\Delta_n) - \Delta_1 &\leq \Upsilon_n(\mu, \#V_1, \#E_1) - \Upsilon_1(\mu, \#V_1, \#E_1) \leq \\ &\leq 4\mu^2 \ln(n) + |\Upsilon_n(\mu, \#V_1, \#E_1) - 4\mu^2 \ln(n)| + |\Upsilon_1(\mu, \#V_1, \#E_1)|. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\frac{E(\Delta_n) - \Delta_1}{4 \ln(n)} \leq \mu^2 + \frac{|\Upsilon_n(\mu, \#V_1, \#E_1) - 4\mu^2 \ln(n)|}{4 \ln(n)} + \frac{|\Upsilon_1(\mu, \#V_1, \#E_1)|}{4 \ln(n)}.$$

Теперь из леммы 2 следует

$$(П.10) \quad \frac{E(\Delta_n) - \Delta_1}{4 \ln(n)} \leq \mu^2 + g_2(n),$$

где $g_2(n) = O(1/\ln(n))$, $n \rightarrow \infty$.

Предположим теперь, что $\#V_1 - \mu \leq 0$. Тогда существует натуральное число k_0 такое, что $\#V_k - \mu \leq 0$ для $1 \leq k \leq k_0$ и $\#V_k - \mu > 0$ для $k > k_0$. Разложим сумму в правой части (П.6) следующим образом:

$$(П.11) \quad \mathbb{E}(\Delta_n) - \Delta_1 = \sum_{k=1}^{k_0} P(B_k) + \sum_{k=k_0+1}^{n-1} P(B_k).$$

Используя грубую оценку $P(B_k) \leq 1$, получаем, что первая сумма в правой части (П.11) не превосходит k_0 . Чтобы найти оценку сверху второй суммы, применим неравенства (П.9), которые выполнены для $k > k_0$. Тогда имеем

$$\mathbb{E}(\Delta_n) - \Delta_1 \leq k_0 + \Upsilon_n(\mu, \#V_1, \#E_1) - \Upsilon_{k_0+1}(\mu, \#V_1, \#E_1).$$

Остается применить лемму 2 еще раз, чтобы убедиться, что (П.10) выполнено.

Аналогичные рассуждения можно применить и для получения оценки снизу для $(\mathbb{E}(\Delta_n) - \Delta_1) / (4 \ln(n))$.

Доказательство теоремы 2. Подставляя (9) в (4), получим, что для любого $\epsilon > 0$

$$(П.12) \quad p_{i,k}(f, \epsilon) = 1/\#V_k, \quad i \in V_k, \quad k \geq 1.$$

Объединяя (П.6), (П.7) и (П.12), имеем

$$(П.13) \quad \mathbb{E}(\Delta_n) - \Delta_1 = 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\#E_k}{\#V_k(\#V_k - 1)}, \quad n \geq 2,$$

и, следовательно,

$$(П.14) \quad \mathbb{E}(\Delta_n) - \Delta_1 = \Upsilon_n(1, \#V_1, \#E_1) - \Upsilon_1(1, \#V_1, \#E_1), \quad n \geq 2.$$

Теперь (10) следует, если применить лемму 2 с $\beta = 1$.

Докажем (11). Имеем

$$(П.15) \quad \frac{\Delta_n - 4 \ln(n)}{2 \ln^{1/2}(n)} = \frac{\mathbb{E}(\Delta_n) - \Delta_1 - 4 \ln(n)}{2 \ln^{1/2}(n)} + \frac{\Delta_1}{2 \ln^{1/2}(n)} + \frac{\Delta_n - \mathbb{E}(\Delta_n)}{2 \ln^{1/2}(n)}.$$

Используя (П.14), нетрудно убедиться, что первое слагаемое в правой части (П.15) равно соотношению

$$\frac{\{\Upsilon_n(1, \#V_1, \#E_1) - 4 \ln(n)\} - \Upsilon_1(1, \#V_1, \#E_1)}{2 \ln^{1/2}(n)},$$

которое по лемме 2 стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$. Очевидно, что второе слагаемое в правой части (П.15) тоже стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$. Поэтому остается доказать, что

$$(П.16) \quad \frac{\Delta_n - \mathbb{E}(\Delta_n)}{2 \ln^{1/2}(n)} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Применяя (П.5) и (П.6), получим

$$\Delta_n - \mathbb{E}(\Delta_n) = \sum_{k=1}^{n-1} (I(B_k) - \mathbb{P}(B_k)).$$

Слагаемые в сумме по k независимы, поскольку появление событий B_1, \dots, B_{k-1} не влияет на вероятность $\mathbb{P}(B_k)$. Кроме того, $(I(B_k) - \mathbb{P}(B_k))$, $k \geq 1$ являются неодинаково распределенными сл.в. с нулевым средним значением.

Определим

$$\sigma_n^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(I(B_k) - \mathbb{P}(B_k))^2.$$

По теореме Ляпунова (см., например, теорему 27.3 в [27]) соотношение (П.16) будет доказано, если покажем, что выполнено

$$(П.17) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n^2}{4 \ln(n)} = 1$$

и

$$(П.18) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma_n^{2+\eta}} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}|I(B_k) - \mathbb{P}(B_k)|^{2+\eta} = 0$$

для некоторого положительного η .

Сначала докажем (П.17). Нетрудно убедиться, что

$$(П.19) \quad \sigma_n^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(B_k) - \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}^2(B_k).$$

Из (П.13) следует, что $\mathbb{P}(B_k) \leq C_1/(k + \#V_1 - 2)$, $k \geq 1$, где $C_1 = 4 + 2|\#E_1 - 2\#V_1 + 2|$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}^2(B_k) \leq C_1^2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k + \#V_1 - 2)^2} \leq C_1^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{C_1^2 \pi^2}{6}.$$

Отсюда следует, что $\ln^{-1}(n) \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}^2(B_k) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Последнее соотношение с (10), (П.6) и (П.19) влечет (П.17).

Условие Ляпунова (П.18) выполняется при $\eta = 1$. Чтобы это проверить, запишем

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}|I(B_k) - \mathbb{P}(B_k)|^3 = \\ & = \sum_{k=1}^{n-1} \{\mathbb{P}(B_k) - \mathbb{P}^2(B_k)\} \{(1 - \mathbb{P}(B_k))^2 + \mathbb{P}^2(B_k)\} \leq 2\sigma_n^2. \end{aligned}$$

Теперь очевидно, что левая часть (П.18) (с $\eta = 1$) не превышает $\lim_{n \rightarrow \infty} 2/\sigma_n = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Barabási A.-L., Albert R.* Statistical mechanics of complex networks // *Rev. Modern Phys.* 1999. No. 74. P. 47–97.
2. *Albert R., Barabási A.-L.* Emergence of scaling in random networks // *Science.* 2002. No. 286. P. 509–512.
3. *Bollobás B., Borgs C., Chayes J., Riordan O.* Directed Scale-Free Graphs. Society for Industrial and Applied Mathematics, USA, SODA '03. 132–139 (2003).
4. *Ghoshal G., Chi L., Barabasi A.L.* Uncovering the role of elementary processes in network evolution // *Scientific Reports.* 2013. V. 3. No. 6. P. 2920.
5. *Markovich N.M., Vaičiulis M.* Extreme Value Statistics for Evolving Random Networks // *Mathematics.* 2023. V. 11. No. 9. P. 2171.
<https://doi.org/10.3390/math11092171>
6. *Norros I., Reittu H.* On a conditionally poissonian graph process // *Advances in Applied Probability.* 2006. V. 38. No. 1. P. 59–75.
7. *Wan P., Wang T., Davis R.A., Resnick S.I.* Are extreme value estimation methods useful for network data? // *Extremes.* 2020. No. 23. P. 171–195.
<https://doi.org/10.1007/s10687-019-00359-x>
8. *Wang T., Resnick S.I.* Poisson Edge Growth and Preferential Attachment Networks // *Methodol. Comput. Appl. Probab.* 2023. V. 25. No. 8.
<https://doi.org/10.1007/s11009-023-09997-y>
9. *Garavaglia A., Stegehuis C.* Subgraphs in preferential attachment models // *Advances in Applied Probability.* 2019. No. 51. P. 898–926.
10. *Wang T., Resnick S.I.* Consistency of Hill estimators in a linear preferential attachment model // *Extremes.* 2019. No. 22. P. 1–28.
11. *Bagrow J.P., Brockmann D.* Natural Emergence of Clusters and Bursts in Network Evolution // *Phys. Rev. X.* 2013. No. 3. P. 021016.
12. *Newman M.E.J.* Networks: an introduction. New York, Oxford. 2010.
13. *Newman M.E.J.* Random Graphs with Clustering // *Phys. Rev. Lett.* 2009. V. 103. No. 5. P. 058701.
14. *Markovich N.M., Vaičiulis M.* Investigation of triangle counts in graphs evolved by clustering attachment // *Autom. Remote Control.* 2024. No. 85. P. 978–989.
15. *Маркович Н.М., Рыжов М.С., Кулик М.Р.* Исследование зависимостей и распределений в случайных сетях для смешанных моделей эволюции и при удалении узлов // *УБС.* 2024. № 109. С. 89–121.
16. *Bollobás B., Riordan O.M.* Mathematical Results on Scale-Free Random Graphs. Weinheim: Wiley-WCH, 2002.
17. *Рябченко А.А., Самосват Е.А.* О числе подграфов в случайном графе Барабаш–Альберт // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2012. № 76:3. С. 183–202.
18. *Eggemann N., Noble S.D.* The clustering coefficient of a scale-free random graph // *Discrete Appl. Math.* 2011. No. 159. P. 953–965.
19. *Móri T.F.* On random trees // *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.* 2002. V. 39. No. 1–2. P. 143–155.
20. *Bobkov S.G., Danshina M.A., Ulyanov V.V.* Rate of Convergence to the Poisson Law of the Numbers of Cycles in the Generalized Random Graphs // *Operator Theory and Harmonic Analysis.* Springer: Cham, 2021. P. 109–133.

21. *Liu Q., Dong Z.* Limit laws for the number of triangles in the generalized random graphs with random node weights // *Statistics and Probability Letters*. 2020. V. 161. No. 6. P. 108733.
22. *Michielan R., Litvak N., Stegehuis C.* Detecting hyperbolic geometry in networks: why triangles are not enough // *Phys. Rev. E*. 2022. V. 106. No. 5. P. 054303.
23. *Gao P., van der Hofstad R., Southwell A., Stegehuis C.* Counting triangles in power-law uniform random graphs // *Electron.J.Combinat.* 2020. V. 27. No. 3. P. 1–28.
24. *Araujo P., Mattos L.* Local central limit theorem for triangle counts in sparse random graphs // [arXiv:2307.09446v3\[math.CO\]](https://arxiv.org/abs/2307.09446v3) 28 Apr 2025.
25. *Batir N.* On some properties of digamma and polygamma functions // *J. Math. Anal. Appl.* 2007. No. 328. P. 452–465.
26. *Alzer H.* On some inequalities for the gamma and psi functions // *Math. Comp.* 1997. V. 66. No. 217. P. 373–389.
27. *Bilingsley P.* *Probability and Measures*, 3rd Edition. New York: John Wiley and Sons, 1995.
28. *Fristedt B., Gray L.* *A Modern Approach to Probability Theory*. Boston: Birkhäuser, 1997.

Статья представлена к публикации членом редколлегии И.В. Родионовым.

Поступила в редакцию 05.02.2025

После доработки 12.09.2025

Принята к публикации 31.10.2025