

© 2026 г. Ю.Н. ЧЕЛНОКОВ, д-р физ.-мат. наук (chelnokovyun@gmail.com),
А.В. МОЛОДЕНКОВ, д-р техн. наук (molalexei@yandex.ru)
(Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов),
И.А. ПАНКРАТОВ, канд. техн. наук (pankratovia.mechanic@gmail.com)
(Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов;
Саратовский национальный исследовательский государственный
университет им. Н.Г. Чернышевского)

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ
МИНИМАЛЬНОГО ПО ВРЕМЕНИ И ЭНЕРГИИ ПРОГРАММНОГО
УПРАВЛЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ДВИЖЕНИЕМ
КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В КЛАССЕ ВИНТОВЫХ
ОБОБЩЕННЫХ КОНИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ**

Исследуется задача оптимального программного управления пространственным движением (в частности, маневрированием) космического аппарата (КА), рассматриваемого как свободное твердое тело произвольной динамической конфигурации с комбинированным функционалом, объединяющим время и энергию, затраченные на управляемое движение КА. В классе винтовых обобщенных конических движений получено оптимальное аналитическое решение задачи при произвольных граничных условиях по угловому и линейному положениям и по угловой и линейной скоростям КА, которое доведено до алгоритма. Для описания пространственного движения использованы четырехмерные дуальные параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона), которые являются компонентами дуального кватерниона (параболического бикватерниона) конечного перемещения Клиффорда. Решение получено с использованием теоремы Шаля о перемещении свободного твердого тела и принципа перенесения Котельникова–Штуди. Приводятся числовые примеры, показывающие эффективность предлагаемого решения задачи.

Ключевые слова: космический аппарат, программное оптимальное управление, пространственное движение, дуальный кватернион (бикватернион) Клиффорда, дуальный интегральный комбинированный функционал качества, аналитическое решение, алгоритм.

DOI: 10.7868/S2413977726020046

1. Введение

Известно, что общее пространственное перемещение свободного твердого тела эквивалентно его винтовому перемещению (теорема механики Шаля: всякое перемещение свободного твердого тела может быть осуществлено одним винтовым перемещением вдоль некоторой оси, называемой осью винтового конечного перемещения). Поэтому движение свободного твердого тела

представляет собой непрерывную последовательность мгновенных винтовых движений. При этом ориентация оси мгновенного винтового движения совпадает с ориентацией оси мгновенного вращения твердого тела, а поворот тела вокруг этой оси и поступательное перемещение тела вдоль этой оси образуют (с помощью комплексности Клиффорда) так называемый дуальный угол поворота: комплексную композицию вращательного и поступательного перемещений тела.

Ранее в литературе рассматривалась кинематическая задача построения оптимального в смысле быстродействия винтового перемещения свободного твердого тела, эквивалентного его общему пространственному перемещению [1, 2]. При этом программными управлениями являлись векторы угловой и линейной скоростей тела. Для получения точного (аналитического) решения задачи было использовано дуальное кватернионное (бикватернионное) кинематическое уравнение винтового движения свободного твердого тела, впервые предложенное Ю.Н. Челноковым в 1980 г. [3–5]. Также в [6–8] решены динамические задачи аналитического построения управления пространственным движением твердого тела (с использованием предложенных в этих работах дуальных кватернионных моделей движения свободного твердого тела) в рамках концепции управления по принципу обратной связи.

В [6] разработан в нелинейной динамической постановке с использованием дуальных кватернионов Клиффорда и дуальных матриц метод аналитического построения управления пространственным движением твердого тела, эквивалентным композиции углового (вращательного) и поступательного (орбитального) движений. Управления обеспечивают асимптотическую устойчивость «в большом» любого выбранного программного пространственного движения в инерциальной системе координат и желаемую динамику управляемого пространственного движения твердого тела. Для построения законов управления использованы дуальные кватернионные и матричные модели пространственного движения твердого тела, концепция решения обратных задач динамики, принцип управления с обратной связью и подход, основанный на приведении построенных в статье нелинейных дифференциальных уравнений возмущенного пространственного движения твердого тела к эталонным линейным стационарным дифференциальным формам выбранной структуры за счет использования предложенных нелинейных обратных связей в законах управления. Предложены различные дуальные матричные (винтовые) законы управления пространственным движением твердого тела, для которых нелинейные нестационарные дифференциальные уравнения возмущенного пространственного движения твердого тела принимают вид линейных стационарных дуальных матричных дифференциальных уравнений второго порядка (относительно винтовой части дуального кватерниона ошибки положения твердого тела), инвариантных относительно любого выбранного программного пространственного движения твердого тела. Постоянные коэффициенты (скалярные дуальные или матричные дуальные) этих уравнений являются коэффициентами усиления нелинейных обратных свя-

зей в предложенных дуальных законах управления, обеспечивающих нужное качество переходных процессов управления. Обсуждено определение коэффициентов усиления нелинейных обратных связей, свойства такого управляемого движения твердого тела.

В [7] разработан в нелинейной динамической постановке с использованием дуальных кватернионов (параболических бикватернионов Клиффорда) другой метод аналитического построения управления пространственным движением твердого тела (в частности, КА, рассматриваемого как свободное твердое тело). Управление обеспечивает асимптотическую устойчивость «в целом» любого выбранного программного движения в инерциальной системе координат и желаемую динамику управляемого движения тела. Для построения законов управления предложены новые дуальные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенного пространственного движения твердого тела, в которых, в отличие от [6], использованы ненормированные дуальные кватернионы конечных перемещений, дуальные кватернионы угловых и линейных скоростей и ускорений тела с ненулевыми дуальными скалярными частями (т.е. четырехмерные, а не трехмерные дуальные угловые и линейные скорости и ускорения), что позволило эффективно решить задачу синтеза управления, обеспечивающего асимптотическую устойчивость «в целом» любого выбранного программного движения. Для построения законов управления также использованы концепция решения обратных задач динамики, принцип управления с обратной связью и подход, основанный на приведении построенных уравнений возмущенного движения тела к линейным стационарным дифференциальным формам выбранной структуры, инвариантным относительно любого выбранного программного движения, за счет соответствующего выбора дуальных нелинейных обратных связей в предложенных дуальных кватернионных законах управления. Этот подход аналогичен подходу, использованному в [6], но применен к более общим дуальным кватернионным дифференциальным уравнениям возмущенного пространственного движения твердого тела. Построены аналитические решения дуальных кватернионных дифференциальных уравнений, описывающие динамику процесса управления пространственным движением тела с использованием предложенных дуальных кватернионных законов управления. Проанализированы свойства и закономерности такого управления.

В данной статье рассмотрена задача построения взаимосвязанного оптимального по времени и энергии программного управления пространственным движением КА, рассматриваемого как свободное твердое тело произвольной динамической конфигурации, совершающего в инерциальной системе координат оптимальное винтовое коническое движение, эквивалентное композиции поступательного (орбитального) движения центра масс КА и его углового движения (вращения) вокруг центра масс. КА находится под действием главного вектора и главного момента внешних сил, включающих в себя вектор управляющей силы и вектор управляющего момента. Для описания общего пространственного движения КА используются четырехмерные ду-

альные параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона) и трехмерные дуальные скорости КА, которые являются компонентами дуального кватерниона конечного перемещения Клиффорда и дуального кватерниона угловой и линейной скоростей соответственно, т.е. используются дуальные кватернионы с комплексными (дуальными) компонентами. Используемая для описания этого движения комплексность Клиффорда s обладает свойством равенства нулю ее квадрата: $s^2 = 0$.

Постановка задачи (при произвольных краевых условиях по угловому и линейному положениям КА в инерциальном пространстве и по его абсолютным угловой и линейной скоростям, дуальный вектор управления не ограничен) основана на использовании динамической модели общего пространственного движения КА, эквивалентного его винтовому движению. Для решения задачи использовано дуальное кватернионное (бикватернионное) кинематическое уравнение движения свободного твердого тела [3–5] (дуальная переменная в нем – дуальный кватернион (бикватернион) конечного перемещения тела в инерциальном пространстве), а также использованы полученные авторами в статье как явные функции времени аналитические выражения для четырехмерного дуального кватерниона конечного перемещения и для трехмерных дуальных кватернионов угловых и линейных скоростей и ускорений КА, описывающих обобщенное винтовое коническое движение КА в инерциальном пространстве. Для получения указанных аналитических выражений в статье построено новое аналитическое решение дуального кватернионного кинематического уравнения пространственного движения свободного твердого тела для его обобщенного винтового конического движения. С помощью этих аналитических выражений (после выделения в них главных и моментных частей) сформированы в соответствии с концепцией решения обратных задач динамики векторы программной управляющей силы и программного управляющего момента, приложенных к КА.

С использованием принципа перенесения Котельникова–Штуди, позволяющего распространить кватернионные формулы, описывающие управление угловым движением, на дуальные кватернионные (бикватернионные) формулы, описывающие управление общим пространственным движением твердого тела, получен оптимальный в смысле времени и минимума энергетических затрат в классе винтовых обобщенных конических движений алгоритм программного управления пространственным движением КА. Этот алгоритм строится на основе обобщения ранее полученного приближенного аналитического решения кватернионной задачи оптимального по времени и энергозатратам разворота КА как твердого тела при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА. Это решение было получено в рамках классической концепции Пуансо, интерпретирующей произвольное угловое движение твердого тела в терминах конусов прецессии, или иначе обобщенного конического углового движения [9–11].

Для нахождения оптимальных параметров обобщенного винтового конического движения и соответствующих им оптимальных угловых и линейных скоростей и ускорений КА использован принцип максимума Л.С. Понтрягина. Найденное аналитическое решение задачи может рассматриваться как решение задачи оптимального по времени и энергии программного управления пространственным движением КА при произвольных граничных условиях в классе обобщенных дуальных (винтовых) конических движений. Приведены результаты моделирования оптимального пространственного маневрирования КА в инерциальной системе координат с помощью предложенных дуальных кватернионных моделей и дуальных законов управления, которые показывают эффективность предложенного метода управления движением КА.

Предложенное оптимальное аналитическое решение задачи программного управления пространственным движением КА имеет не только теоретическую, но и прикладную значимость, так как позволяет использовать в системе управления движением КА полученные в нелинейной постановке аналитические выражения (как явные функции времени) для дуального кватерниона конечного перемещения КА и для дуального кватерниона его абсолютных угловой и линейной скоростей, описывающих оптимальное программное винтовое коническое движение КА в инерциальной системе координат. Также оно позволяет использовать оптимальные аналитические законы изменения во времени программной управляющей силы и программного управляющего момента, приложенные к КА. Это важно, в частности, для пространственного маневрирования КА при исключительно высоких темпах его перемещения, когда крайне ограничено время на расчет программной оптимальной пространственной траектории маневра КА и на расчет программных законов управления, позволяющих реализовать эту траекторию.

Статья продолжает исследования, начатые в [12].

2. Исходные уравнения пространственного движения свободного твердого тела

Рассмотрим свободное твердое тело, например КА, способное совершать относительно основной (инерциальной) системы координат произвольное пространственное движение, эквивалентное пространственному винтовому движению, а также эквивалентное композиции поступательного движения тела вместе с произвольно выбранной точкой тела и вращения тела вокруг этой точки. На тело действуют произвольный главный вектор и главный момент внешних сил. Они включают в себя вектор управляющей силы и вектор управляющего момента. Управляемое пространственное движение тела будем рассматривать относительно инерциальной системы координат $O_1\xi_1\xi_2\xi_3$ (ξ) (ее начало O_1 – центр масс Земли, ось $O_1\xi_3$ направлена по оси вращения Земли, а оси $O_1\xi_1$ и $O_1\xi_2$ лежат в плоскости экватора и не участвуют в суточном вращении Земли). С твердым телом жестко свяжем систему координат $CX_1X_2X_3$ (X) с началом в центре масс тела C .

Обозначим: \mathbf{r} и \mathbf{v} – радиус-вектор и вектор скорости центра масс твердого тела (КА) в инерциальной системе координат; $\boldsymbol{\lambda}$ – кватернион ориентации тела в этой системе координат, его компонентами являются параметры Родрига–Гамильтона (Эйлера) λ_j , $j = \overline{0, 3}$, одинаковые в базисах ξ и X (полагается, что в исходном положении (до поворота тела) ориентации систем координат ξ и X совпадают); $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ – векторы абсолютной угловой скорости и абсолютного углового ускорения тела; \mathbf{F}_c и \mathbf{M}_c – векторы управляющей силы и управляющего момента, приложенных к телу; $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ и $\mathbf{M} = \mathbf{M}(t, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega})$ – главный вектор других внешних сил, действующих на твердое тело (сил гравитации, сопротивления движению и других сил взаимодействия тела с внешней средой), и главный момент этих сил, вычисленный относительно центра масс тела, полагаемые известными функциями времени t и переменных \mathbf{r} , \mathbf{v} и $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\omega}$.

Исходные дифференциальные уравнения движения твердого тела, записанные в связанной с твердым телом системе координат X , имеют вид:

$$(2.1) \quad m [\dot{\mathbf{v}}_x + \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x)\mathbf{v}_x] = \mathbf{F}_x(t, \mathbf{r}_x, \mathbf{v}_x) + \mathbf{F}_{cx}, \quad \dot{\mathbf{r}}_x + \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x)\mathbf{r}_x = \mathbf{v}_x;$$

$$(2.2) \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_x = \mathbf{J}^{-1} [\mathbf{M}_x(t, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega}_x) - \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x)\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_x + \mathbf{M}_{cx}];$$

$$(2.3) \quad 2\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_x;$$

$$\mathbf{r}_x = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}, \quad \dot{\mathbf{r}}_x = \dot{x}_1\mathbf{i} + \dot{x}_2\mathbf{j} + \dot{x}_3\mathbf{k},$$

$$\mathbf{v}_x = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}, \quad \dot{\mathbf{v}}_x = \dot{v}_1\mathbf{i} + \dot{v}_2\mathbf{j} + \dot{v}_3\mathbf{k};$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}_v = \lambda_0 + \lambda_1\mathbf{i} + \lambda_2\mathbf{j} + \lambda_3\mathbf{k}, \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{\lambda}_0 + \dot{\boldsymbol{\lambda}}_v = \dot{\lambda}_0 + \dot{\lambda}_1\mathbf{i} + \dot{\lambda}_2\mathbf{j} + \dot{\lambda}_3\mathbf{k};$$

$$\boldsymbol{\omega}_x = \omega_1\mathbf{i} + \omega_2\mathbf{j} + \omega_3\mathbf{k}, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_x = \dot{\omega}_1\mathbf{i} + \dot{\omega}_2\mathbf{j} + \dot{\omega}_3\mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_x = \varepsilon_1\mathbf{i} + \varepsilon_2\mathbf{j} + \varepsilon_3\mathbf{k};$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_{11} & -J_{12} & -J_{13} \\ -J_{21} & J_{22} & -J_{23} \\ -J_{31} & -J_{32} & J_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь в уравнениях (2.1), (2.2) \mathbf{r}_x , \mathbf{v}_x , $\boldsymbol{\omega}_x$, $\boldsymbol{\varepsilon}_x$, \mathbf{F}_x , \mathbf{M}_x , \mathbf{F}_{cx} , \mathbf{M}_{cx} – вектор-столбцы размерами 3×1 или, далее, кватернионы с нулевыми скалярными частями, составленные из проекций x_k , v_k , ω_k , ε_k , F_k , M_k , F_{ck} , M_{ck} , $k = \overline{1, 3}$, векторов \mathbf{r} , \mathbf{v} , $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, \mathbf{F} , \mathbf{M} , \mathbf{F}_c , \mathbf{M}_c на оси связанной системы координат X ; m – масса тела, \mathbf{J} – постоянная матрица инерции твердого тела; $\mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x)$ – кососимметрическая матрица угловых скоростей тела, сопоставляемая вектору $\boldsymbol{\omega}$; \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} – орты гиперкомплексного пространства (векторные мнимые единицы Гамильтона); \mathbf{a}_y – отображение вектора \mathbf{a} на базис Y ($Y = \xi, X$), определяемое как кватернион $\mathbf{a}_y = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, компоненты которого – проекции a_k вектора \mathbf{a} на базис Y ; верхняя точка означает производную по времени t (при вычислении производной от кватерниона орты \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} полагаются неизменными), знак « \circ » означает кватернионное умножение.

Первое матричное уравнение (2.1) и матричное уравнение (2.2) являются динамическими, а второе матричное уравнение (2.1) и кватернионное уравнение (2.3) – кинематическими уравнениями пространственного движения твер-

дого тела, представляющего собой композицию поступательного (траекторного) и углового (вращательного) движений. Указанные уравнения представляют собой систему нелинейных, нестационарных дифференциальных уравнений тринадцатого порядка относительно переменных x_k , v_k и λ_j , ω_k . В случае, когда с твердым телом жестко связывается система координат $OX_1X_2X_3$ (X) с началом в другой произвольно выбранной точке O тела, в состав главного вектора \mathbf{F} и главного момента \mathbf{M} внешних сил включаются переносная сила инерции и ее момент относительно точки O твердого тела.

3. Постановка задачи управления КА с использованием дуальных кватернионов и концепции решения обратной задачи динамики

В соответствии с концепцией решения обратных задач динамики законы формирования вектор-столбца \mathbf{F}_{cx} управляющей силы \mathbf{F}_c и вектор-столбца \mathbf{M}_{cx} управляющего момента \mathbf{M}_c , составленных из проекций F_{ck} и M_{ck} , $k = \overline{1,3}$, векторов \mathbf{F}_c и \mathbf{M}_c на оси системы координат X , связанной с КА, получаются на основе уравнений движения (2.1), (2.2) и имеют вид:

$$(3.1) \quad \mathbf{F}_{cx} = m [\dot{\mathbf{v}}_x + \mathbf{K}(\omega_x)\mathbf{v}_x] - \mathbf{F}_x(t, \mathbf{r}_x, \mathbf{v}_x),$$

$$(3.2) \quad \mathbf{M}_{cx} = \mathbf{J}\boldsymbol{\varepsilon}_x + \mathbf{K}(\omega_x)\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_x - \mathbf{M}_x(t, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega}_x).$$

В векторно-матричный закон управления (3.1) входит вектор-столбец $\dot{\mathbf{v}}_x = \mathbf{w}_x$, составленный из первых производных по времени от проекций v_k вектора \mathbf{v} скорости центра масс тела C в инерциальной системе координат ξ (вектора абсолютной скорости центра масс КА) на оси вращающейся системы координат X , а в векторно-матричный закон управления (3.2) входит вектор-столбец $\boldsymbol{\varepsilon}_x$, составленный из проекций ε_k вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$ углового ускорения КА в инерциальной системе координат (вектора абсолютного углового ускорения тела) на оси системы координат X .

Эти вектор-столбцы $\dot{\mathbf{v}}_x = \mathbf{w}_x$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_x$ будем рассматривать как новые управления. Они могут быть построены, например, с помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина на основе векторно-матричных и кватернионных уравнений:

$$(3.3) \quad \dot{\mathbf{v}}_x = \mathbf{w}_x, \quad \dot{\mathbf{r}}_x + \mathbf{K}(\omega_x)\mathbf{r}_x = \mathbf{v}_x,$$

$$(3.4) \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_x, \quad 2\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_x,$$

вытекающих из уравнений движения твердого тела (2.1)–(2.3).

Подчеркнем, что новые управления \mathbf{w}_x и $\boldsymbol{\varepsilon}_x$ имеют ясный механический смысл. \mathbf{w}_x – это вектор-столбец, компонентами которого являются проекции на оси связанной системы координат X составляющей $\dot{\mathbf{v}} = (d\mathbf{v}/dt)_{\text{лок}}$ вектора \mathbf{W} абсолютного линейного ускорения центра масс КА C (проекция локальной производной $(d\mathbf{v}/dt)_{\text{лок}}$ от вектора \mathbf{v} абсолютной скорости точки C , вычисленной в этой системе координат). Полный вектор \mathbf{W} абсолютного линейного ускорения центра масс КА равен сумме векторов $\dot{\mathbf{v}}$ и $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$, определенных своими проекциями в системе координат X : $\mathbf{W}_x = \dot{\mathbf{v}}_x + \boldsymbol{\omega}_x \times \mathbf{v}_x = \mathbf{w}_x + \boldsymbol{\omega}_x \times \mathbf{v}_x$ (здесь « \times » – символ векторного произведения).

ε – это вектор абсолютного углового ускорения твердого тела (одна из основных характеристик абсолютного углового (вращательного) движения твердого тела), ε_x – вектор-столбец, компоненты которого – проекции вектора ε на оси системы координат X .

Введение в качестве управления составляющей $\dot{\mathbf{v}} = (dv/dt)_{\text{лок}}$ вектора абсолютного линейного ускорения центра масс КА позволяет предложить для описания пространственного движения КА бикватернионную дифференциальную модель пространственного движения КА, удобную для решения задачи управления пространственным движением КА с использованием дуальных кватернионов и принципа максимума.

После нахождения новых управлений \mathbf{w}_x и ε_x на основе дифференциальных уравнений (3.3) и (3.4) будут найдены и соответствующие этим управлениям фазовые переменные \mathbf{r}_x , \mathbf{v}_x , $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\omega}_x$, входящие в эти уравнения, а затем будут найдены управляющая сила \mathbf{F}_{cx} и управляющий момент \mathbf{M}_{cx} в соответствии с алгебраическими соотношениями (3.1), (3.2).

Таким образом, задача построения управляющей силы \mathbf{F}_{cx} и управляющего момента \mathbf{M}_{cx} с использованием концепции решения обратных задач динамики сводится авторами к построению требуемой составляющей \mathbf{w}_x абсолютного линейного ускорения и требуемого абсолютного углового ускорения ε_x , входящих в качестве новых управлений в дифференциальные уравнения (3.3), (3.4).

Очевидно, что уравнения (3.3), (3.4) верны для любого движущегося объекта (т.е. свободного твердого тела). Поэтому управления \mathbf{w}_x и ε_x для всех таких тел строятся одинаковым способом. Специфика объекта (его массово-инерционные и другие характеристики, действующие внешние возмущающие силы и их моменты) учитываются при построении управляющей силы \mathbf{F}_{cx} и управляющего момента \mathbf{M}_{cx} на основе конечных соотношений (3.1), (3.2); в их правые части включены главный вектор $\mathbf{F}_x(t, \mathbf{r}_x, \mathbf{v}_x)$ других внешних сил, действующих на твердое тело (сил гравитации, сопротивления движению и других сил взаимодействия тела с внешней средой) и главный момент $\mathbf{M} = \mathbf{M}(t, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega})$ этих сил, вычисленный относительно центра масс тела. Главный вектор и главный момент полагаются известными функциями времени t и переменных \mathbf{r} , \mathbf{v} и $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\omega}$.

Поставим задачу нахождения новых управлений \mathbf{w}_x и ε_x в терминах дуальных кватернионов. Введем в рассмотрение кинематический винт \mathbf{U} КА, отображение которого \mathbf{U}_x на связанный с телом (КА) базис X определяется дуальным кватернионом:

$$(3.5) \quad \mathbf{U}_x = U_1 \mathbf{i} + U_2 \mathbf{j} + U_3 \mathbf{k} = \boldsymbol{\omega}_x + s \mathbf{v}_x, \quad U_k = \omega_k + s v_k,$$

где $\boldsymbol{\omega}_x$ и \mathbf{v}_x – кватернионы: $\boldsymbol{\omega}_x = \omega_1 \mathbf{i} + \omega_2 \mathbf{j} + \omega_3 \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_x = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}$; s – символ (комплексность) Клиффорда, обладающий свойством $s^2 = 0$; $U_k = \omega_k + s v_k$, $k = \overline{1, 3}$ – дуальные ортогональные проекции кинематического винта \mathbf{U} на базис X .

Тогда векторно-матричные (3.3) и кватернионные (3.4) дифференциальные уравнения можно заменить двумя следующими дуальными кватернионными (бикватернионными) дифференциальными уравнениями [6–8]:

$$(3.6) \quad \dot{\mathbf{U}}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_x + s\mathbf{w}_x = \mathbf{H}_x;$$

$$(3.7) \quad 2\dot{\boldsymbol{\Lambda}} = \boldsymbol{\Lambda} \circ \mathbf{U}_x;$$

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \mathbf{U}_x &= U_1\mathbf{i} + U_2\mathbf{j} + U_3\mathbf{k}, & U_k &= \omega_k + sv_k, & \boldsymbol{\varepsilon}_x &= \varepsilon_1\mathbf{i} + \varepsilon_2\mathbf{j} + \varepsilon_3\mathbf{k}, \\ \mathbf{w}_x &= w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}, & \mathbf{H}_x &= H_1\mathbf{i} + H_2\mathbf{j} + H_3\mathbf{k}, & H_k &= \varepsilon_k + sw_k; \end{aligned}$$

$$(3.9) \quad \boldsymbol{\Lambda} = \Lambda_0 + \boldsymbol{\Lambda}_v = \Lambda_0 + \Lambda_1\mathbf{i} + \Lambda_2\mathbf{j} + \Lambda_3\mathbf{k} = \boldsymbol{\lambda} + s\boldsymbol{\lambda}^0, \quad \Lambda_j = \lambda_j + s\lambda_j^0.$$

Здесь искомыми переменными являются дуальный кватернион $\mathbf{U}_x = \boldsymbol{\omega}_x + s\mathbf{v}_x$ (отображение кинематического винта \mathbf{U} КА на связанный с КА базис X) и дуальный кватернион $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\lambda} + s\boldsymbol{\lambda}^0$ перемещения КА в инерциальном пространстве. Его главная часть (кватернион $\boldsymbol{\lambda}$) описывает ориентацию КА в инерциальной системе координат, а моментная (кватернион $\boldsymbol{\lambda}^0$) – местоположение КА в этой системе координат. Декартовы координаты x_k , $k = \overline{1, 3}$, центра масс КА в этой системе координат можно определить, зная компоненты кватернионов $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\lambda}^0$. Дуальное управление в этой задаче есть дуальный кватернион $\mathbf{H}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_x + s\mathbf{w}_x$, т.е. дуальная композиция требуемого абсолютного углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}_x$ и требуемой составляющей \mathbf{w}_x абсолютного линейного ускорения КА (дуальная композиция новых управлений \mathbf{w}_x и $\boldsymbol{\varepsilon}_x$).

Введение в качестве управления составляющей вектора абсолютного линейного ускорения центра масс КА (локальной производной от вектора абсолютной скорости центра масс) позволяет предложить для описания пространственного движения КА дифференциальное дуальное кватернионное уравнение (3.6) для кинематического винта, которое в совокупности с кинематическим дуальным кватернионным уравнением (3.7) пространственного движения КА образуют полную математическую модель его пространственного движения, удобную для решения задачи управления пространственным движением КА с использованием дуальных кватернионов и принципа максимума.

Координаты ξ_k центра масс КА в инерциальной системе координат ξ (т.е. проекции его радиус-вектора \mathbf{r}) и проекции x_k этого вектора на оси связанной с КА системы координат X связаны с компонентами кватернионов $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\lambda}^0$ соотношениями [3, 5]:

$$(3.10) \quad \mathbf{r}_\xi = \xi_1\mathbf{i} + \xi_2\mathbf{j} + \xi_3\mathbf{k} = 2\boldsymbol{\lambda}^0 \circ \tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \mathbf{r}_x = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} = \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \circ \boldsymbol{\lambda}^0,$$

где верхняя волна – символ кватернионного сопряжения.

Сформулируем следующую задачу для нахождения новых управлений \mathbf{w}_x и $\boldsymbol{\varepsilon}_x$ с использованием дуальных кватернионов: необходимо построить в классе оптимальных винтовых обобщенных конических движений дуальное кватернионное программное управление $\mathbf{H}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_x + s\mathbf{w}_x$ (дуальную композицию

составляющей вектора абсолютного линейного ускорения центра масс КА и вектора абсолютного углового ускорения твердого тела), обеспечивающее программный перевод КА, движение которого описывается уравнениями (3.6), (3.7), из его произвольного заданного начального состояния

$$(3.11) \quad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}(0) = \boldsymbol{\lambda}(0) + s\boldsymbol{\lambda}^0(0), \quad \mathbf{U}_x = \mathbf{U}_x(0) = \boldsymbol{\omega}_x(0) + s\mathbf{v}_x(0)$$

в его заданное конечное состояние

$$(3.12) \quad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}(t_1) = \mathbf{\Lambda}_k = \boldsymbol{\lambda}_k + s\boldsymbol{\lambda}_k^0, \quad \mathbf{U}_x = \mathbf{U}_x(t_1) = \mathbf{U}_x^k = \boldsymbol{\omega}_x^k + s\mathbf{v}_x^k$$

за время t_1 , подлежащее определению.

Краевые условия $\boldsymbol{\lambda}^0(0)$ и $\boldsymbol{\lambda}_k^0$ находятся через заданные начальные и конечные значения кватернионов $\boldsymbol{\lambda}$ и \mathbf{r}_ξ по формуле:

$$(3.13) \quad \boldsymbol{\lambda}^0 = (1/2) \mathbf{r}_\xi \circ \boldsymbol{\lambda} = (1/2) (\xi_1 \mathbf{i} + \xi_2 \mathbf{j} + \xi_3 \mathbf{k}) \circ (\lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i} + \lambda_2 \mathbf{j} + \lambda_3 \mathbf{k}),$$

где $\xi_k, k = \overline{1,3}$ – координаты объекта в инерциальной системе координат.

После решения поставленной задачи в построенном управлении $\mathbf{H}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_x + s\mathbf{w}_x$ необходимо выделить главную $\boldsymbol{\varepsilon}_x$ и моментную $\mathbf{w}_x = \dot{\mathbf{v}}_x$ части. После этого выделения законы формирования управляющей силы \mathbf{F}_{cx} и управляющего момента \mathbf{M}_{cx} получаются в соответствии с концепцией решения обратных задач динамики по формулам (3.1) и (3.2).

4. Аналитическое решение задачи оптимального программного управления

С использованием принципа перенесения Котельникова–Штуди, позволяющего распространить кватернионные формулы, описывающие управление угловым движением, на дуальные кватернионные формулы, описывающие управление общим пространственным движением твердого тела, получим оптимальный в классе винтовых обобщенных конических движений алгоритм программного управления пространственным движением КА для задачи раздела 3 статьи. Этот алгоритм строится с использованием дуальных кватернионов Клиффорда и принципа перенесения Котельникова–Штуди путем обобщения аналитического решения кватернионной задачи оптимального по времени и энергии разворота КА в классе обобщенных конических угловых движений твердого тела при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА [9–11], которое, в свою очередь, получено на основе точного решения введенной Я.Г. Сапунковым модифицированной задачи оптимального разворота твердого тела [13]. Приведем это бикватернионное решение.

В случае, когда свободное твердое тело совершает пространственное обобщенное винтовое коническое движение, для которого кинематический винт \mathbf{U}_x тела имеет вид

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \mathbf{U}_x(t) &= U_1 \mathbf{i} + U_2 \mathbf{j} + U_3 \mathbf{k} = \boldsymbol{\omega}_x + s\mathbf{v}_x = \\ &= \left(\dot{F}(t) \sin G(t) \right) \mathbf{i} + \left(\dot{F}(t) \cos G(t) \right) \mathbf{j} + \dot{G}(t) \mathbf{k}, \end{aligned}$$

где $F(t), G(t), \dot{F}(t), \dot{G}(t)$ – произвольные дифференцируемые дуальные функции времени:

$$\begin{aligned} F(t) &= f(t) + sf^0(t), & \dot{F}(t) &= \dot{f}(t) + s\dot{f}^0(t), \\ G(t) &= g(t) + sg^0(t), & \dot{G}(t) &= \dot{g}(t) + s\dot{g}^0(t), \end{aligned}$$

дуальное кватернионное кинематическое уравнение (3.7) общего пространственного движения твердого тела имеет построенное авторами аналитическое решение:

$$(4.2) \quad \Lambda(t) = \Lambda(0) \circ \exp \{-(G(0)/2) \mathbf{k}\} \circ \exp \{((F(t) - F(0))/2) \mathbf{j}\} \circ \exp \{(G(t)/2) \mathbf{k}\}$$

– дуальный аналог известного кватернионного решения [9–11] кинематического уравнения вращательного движения тела, « $\exp\{\cdot\}$ » обозначает дуальную кватернионную экспоненту [5].

Винтовое движение свободного твердого тела (КА), описываемое соотношениями (4.1), (4.2), можно обобщить, добавив произвольный дуальный поворот в инерциальной системе координат на дуальный постоянный угол вокруг некоторой оси. Такой дуальный поворот задается с помощью произвольного постоянного дуального кватерниона $\mathbf{K} = \kappa + s\kappa^0$, $\|\mathbf{K}\| = 1$ (в правые части формул (4.1), (4.2) добавятся умножения слева и справа на дуальные кватернионы $\tilde{\mathbf{K}}$ и \mathbf{K} соответственно, где $\tilde{\mathbf{K}} \circ \mathbf{K} = \mathbf{K} \circ \tilde{\mathbf{K}} = 1$):

$$(4.3) \quad \mathbf{U}_x(t) = \tilde{\mathbf{K}} \circ \left[\left(\dot{F}(t) \sin G(t) \right) \mathbf{i} + \left(\dot{F}(t) \cos G(t) \right) \mathbf{j} + \dot{G}(t) \mathbf{k} \right] \circ \mathbf{K},$$

$$(4.4) \quad \Lambda(t) = \Lambda(0) \circ \tilde{\mathbf{K}} \circ \exp \{-(G(0)/2) \mathbf{k}\} \circ \exp \{((F(t) - F(0))/2) \mathbf{j}\} \circ \exp \{(G(t)/2) \mathbf{k}\} \circ \mathbf{K}.$$

Формулы (4.3), (4.4) содержат (при $s = 0$) все найденные ранее точные кватернионные аналитические решения классической задачи оптимального разворота динамически-симметричного твердого тела в том случае, когда вектор угловой скорости во все время его движения сохраняет постоянное направление или описывает в пространстве круговой конус [14, 15], и их дуальные аналоги (при $s \neq 0$), построенные здесь в статье. Предлагаемая структура кинематического винта (4.1) или (4.3), в кватернионном случае – вектора угловой скорости КА, хорошо соотносится с концепцией Пуансо: всякое произвольное угловое движение твердого тела вокруг неподвижной точки можно рассматривать как некоторое обобщенное коническое движение твердого тела.

Ограничимся случаем, когда постоянный дуальный кватернион \mathbf{K} представляется в виде произведения двух постоянных дуальных кватернионов:

$$(4.5) \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1, \quad \mathbf{K}_1 = \exp \{(A_1/2) \mathbf{i}\}, \quad \mathbf{K}_2 = \exp \{(A_2/2) \mathbf{j}\},$$

где $A_1 = \alpha_1 + s\alpha_1^0$, $A_2 = \alpha_2 + s\alpha_2^0$ – некоторые дуальные скалярные постоянные. Отметим, что дуальные кватернионы \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 определяют дуальные повороты винта \mathbf{U}_x вокруг осей \mathbf{i} и \mathbf{j} . Дуальный поворот вокруг оси \mathbf{k} уже включен в (4.4), так как в дуальную функцию $G(t)$ входит аддитивная постоянная.

Сопряженный дуальный кватернион $\tilde{\mathbf{K}}$ будет представляться так:

$$(4.6) \quad \tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2, \quad \tilde{\mathbf{K}}_1 = \exp\{-(A_1/2)\mathbf{i}\}, \quad \tilde{\mathbf{K}}_2 = \exp\{-(A_2/2)\mathbf{j}\}.$$

Тогда кинематический винт \mathbf{U}_x свободного твердого тела (КА) и аналитическое решение дуального кватернионного кинематического уравнения (3.7) для рассматриваемого пространственного винтового движения КА примут вид:

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \mathbf{U}_x(t) = & \exp\{-(A_1/2)\mathbf{i}\} \circ \exp\{-(A_2/2)\mathbf{j}\} \circ \\ & \circ \left[\left(\dot{F}(t) \sin G(t) \right) \mathbf{i} + \left(\dot{F}(t) \cos G(t) \right) \mathbf{j} + \dot{G}(t) \mathbf{k} \right] \circ \\ & \circ \exp\{(A_2/2)\mathbf{j}\} \circ \exp\{(A_1/2)\mathbf{i}\}, \end{aligned}$$

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \mathbf{\Lambda}(t) = & \mathbf{\Lambda}(0) \circ \exp\{-(A_1/2)\mathbf{i}\} \circ \exp\{-(A_2/2)\mathbf{j}\} \circ \\ & \circ \exp\{-(G(0)/2)\mathbf{k}\} \circ \exp\{((F(t) - F(0))/2)\mathbf{j}\} \circ \\ & \circ \exp\{(G(t)/2)\mathbf{k}\} \circ \exp\{(A_2/2)\mathbf{j}\} \circ \exp\{(A_1/2)\mathbf{i}\}. \end{aligned}$$

Декартовы координаты ξ_k центра масс тела в инерциальной системе координат и проекции x_k радиус-вектора центра масс на оси связанной с твердым телом системы координат X находятся через компоненты кватернионов $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\lambda}^0$ по формулам (3.10), а проекции вектора скорости центра масс КА в инерциальной системе координат на ее же координатные оси – по кватернионной формуле

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \mathbf{v}_\xi = \dot{\mathbf{r}}_\xi = \dot{\xi}_1 \mathbf{i} + \dot{\xi}_2 \mathbf{j} + \dot{\xi}_3 \mathbf{k} = & 2 \left(\dot{\boldsymbol{\lambda}}^0 \circ \tilde{\boldsymbol{\lambda}} + \boldsymbol{\lambda}^0 \circ \tilde{\dot{\boldsymbol{\lambda}}} \right) = \\ = & 2\dot{\boldsymbol{\lambda}}^0 \circ \tilde{\boldsymbol{\lambda}} - \boldsymbol{\lambda}^0 \circ \boldsymbol{\omega}_x \circ \tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \left(2\dot{\boldsymbol{\lambda}}^0 - \boldsymbol{\lambda}^0 \circ \boldsymbol{\omega}_x \right) \circ \tilde{\boldsymbol{\lambda}}. \end{aligned}$$

Поставим задачу нахождения оптимальных параметров винтового конического движения КА (обобщающую задачу нахождения оптимальных параметров обобщенного углового конического движения КА [9–11]).

Будем рассматривать вторые производные от дуальных функций $F(t)$ и $G(t)$ (от дуальных параметров винтового конического движения) в качестве управляющих параметров. Пусть $\dot{F} = F_1$, $\dot{G} = G_1$ – дуальные фазовые координаты, а U_{c1} , U_{c2} – дуальные управляющие параметры. Тогда управляемая система будет описываться следующей системой скалярных дуальных дифференциальных уравнений:

$$(4.10) \quad \dot{F} = F_1, \quad \dot{G} = G_1, \quad \dot{F}_1 = U_{c1}, \quad \dot{G}_1 = U_{c2},$$

где $F = f + sf^0$, $G = g + sg^0$, $F_1 = f_1 + sf_1^0$, $G_1 = g_1 + sg_1^0$ – дуальные фазовые координаты, $U_{c1} = u_{c1} + su_{c1}^0$, $U_{c2} = u_{c2} + su_{c2}^0$ – дуальные управления.

Система (4.10) четырех скалярных дуальных дифференциальных уравнений эквивалентна системе восьми скалярных вещественных дифференциальных уравнений:

$$(4.11) \quad \dot{f} = f_1, \quad \dot{g} = g_1, \quad \dot{f}_1 = u_{c1}, \quad \dot{g}_1 = u_{c2};$$

$$(4.12) \quad \dot{f}^0 = f_1^0, \quad \dot{g}^0 = g_1^0, \quad \dot{f}_1^0 = u_{c1}^0, \quad \dot{g}_1^0 = u_{c2}^0.$$

Подсистемы вещественных дифференциальных уравнений (4.11) и (4.12) независимы, так как исходная система (4.10) дуальных дифференциальных уравнений линейна.

Тогда для дуальной управляемой системы (4.10) или вещественной управляемой системы (4.11), (4.12) можно сформулировать следующую задачу: требуется найти дуальные оптимальные управления $U_{c1}(t) = u_{c1}(t) + su_{c1}^0(t)$, $U_{c2}(t) = u_{c2}(t) + su_{c2}^0(t)$ или вещественные оптимальные управления $u_{c1}(t)$, $u_{c2}(t)$ и $u_{c1}^0(t)$, $u_{c2}^0(t)$, которые переводят управляемую систему (4.10) ((4.11), (4.12)) из начального состояния

$$(4.13) \quad \left. \begin{aligned} F &= F(0) = f(0) + sf^0(0), & G &= G(0) = g(0) + sg^0(0), \\ F_1 &= F_1(0) = f_1(0) + sf_1^0(0), & G_1 &= G_1(0) = g_1(0) + sg_1^0(0); \end{aligned} \right\} \sim \\ \sim \left\{ \begin{aligned} f &= f(0), & f^0 &= f^0(0), & g &= g(0), & g^0 &= g^0(0), \\ f_1 &= f_1(0), & f_1^0 &= f_1^0(0), & g_1 &= g_1(0), & g_1^0 &= g_1^0(0) \end{aligned} \right.$$

в конечное состояние

$$(4.14) \quad \left. \begin{aligned} F &= F(t_1) = f(t_1) + sf^0(t_1), & G &= G(t_1) = g(t_1) + sg^0(t_1), \\ F_1 &= F_1(t_1) = f_1(t_1) + sf_1^0(t_1), & G_1 &= G_1(t_1) = g_1(t_1) + sg_1^0(t_1) \end{aligned} \right\} \sim \\ \sim \left\{ \begin{aligned} f &= f(t_1), & f^0 &= f^0(t_1), & g &= g(t_1), & g^0 &= g^0(t_1), \\ f_1 &= f_1(t_1), & f_1^0 &= f_1^0(t_1), & g_1 &= g_1(t_1), & g_1^0 &= g_1^0(t_1) \end{aligned} \right.$$

доставляют минимум дуальному комбинированному функционалу:

$$(4.15) \quad J = \int_0^{t_1} (1 + U_{c1}^2 + U_{c2}^2) dt$$

и удовлетворяют соотношениям (4.7), (4.8) в начальный и конечный моменты времени (конечный момент времени t_1 не задан и подлежит определению):

$$(4.16) \quad \begin{aligned} &[(F_1(0) \sin G(0)) \mathbf{i} + (F_1(0) \cos G(0)) \mathbf{j} + G_1(0) \mathbf{k}] = \\ &= \mathbf{exp} \{(A_2/2) \mathbf{j}\} \circ \mathbf{exp} \{(A_1/2) \mathbf{i}\} \circ \mathbf{U}_x(0) \circ \\ &\quad \circ \mathbf{exp} \{-(A_1/2) \mathbf{i}\} \circ \mathbf{exp} \{-(A_2/2) \mathbf{j}\}, \end{aligned}$$

$$(4.17) \quad \begin{aligned} &[(F_1(t_1) \sin G(t_1)) \mathbf{i} + (F_1(t_1) \cos G(t_1)) \mathbf{j} + G_1(t_1) \mathbf{k}] = \\ &= \mathbf{exp} \{(A_2/2) \mathbf{j}\} \circ \mathbf{exp} \{(A_1/2) \mathbf{i}\} \circ \mathbf{U}_x(t_1) \circ \\ &\quad \circ \mathbf{exp} \{-(A_1/2) \mathbf{i}\} \circ \mathbf{exp} \{-(A_2/2) \mathbf{j}\}; \end{aligned}$$

$$(4.18) \quad \begin{aligned} &\Lambda(0) \circ \mathbf{exp} \{-(A_1/2) \mathbf{i}\} \circ \mathbf{exp} \{-(A_2/2) \mathbf{j}\} \circ \\ &\circ [\mathbf{exp} \{-(G(0)/2) \mathbf{k}\} \circ \mathbf{exp} \{((F(t_1) - F(0))/2) \mathbf{j}\} \circ \mathbf{exp} \{(G(t_1)/2) \mathbf{k}\}] \circ \\ &\quad \circ \mathbf{exp} \{(A_2/2) \mathbf{j}\} \circ \mathbf{exp} \{(A_1/2) \mathbf{i}\} = \Lambda(t_1) \end{aligned}$$

или

$$(4.19) \quad \begin{aligned} & \exp \{-(G(0)/2) \mathbf{k}\} \circ \exp \{((F(t_1) - F(0))/2) \mathbf{j}\} \circ \exp \{(G(t_1)/2) \mathbf{k}\} = \\ & = \exp \{(A_2/2) \mathbf{j}\} \circ \exp \{(A_1/2) \mathbf{i}\} \circ \tilde{\Lambda}(0) \circ \Lambda(t_1) \circ \\ & \circ \exp \{-(A_1/2) \mathbf{i}\} \circ \exp \{-(A_2/2) \mathbf{j}\}. \end{aligned}$$

Законы формирования управляющей силы \mathbf{F}_{cx} и управляющего момента \mathbf{M}_{cx} получаются в соответствии с концепцией решения обратных задач динамики по формулам:

$$(4.20) \quad \begin{aligned} \mathbf{F}_{cx} &= F_{c1} \mathbf{i} + F_{c2} \mathbf{j} + F_{c3} \mathbf{k} = m [\dot{\mathbf{v}}_x + \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x) \mathbf{v}_x] - \mathbf{F}_x(t, \mathbf{r}_x, \mathbf{v}_x) = \\ &= m [\mathbf{w}_x + \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x) \mathbf{v}_x] - \mathbf{F}_x(t, \mathbf{r}_x, \mathbf{v}_x), \end{aligned}$$

$$(4.21) \quad \mathbf{M}_{cx} = M_{c1} \mathbf{i} + M_{c2} \mathbf{j} + M_{c3} \mathbf{k} = \mathbf{J} \boldsymbol{\varepsilon}_x + \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x) \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_x - \mathbf{M}_x(t, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega}_x),$$

где кватернионы $\mathbf{v}_x = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k}$, $\boldsymbol{\omega}_x = \omega_1 \mathbf{i} + \omega_2 \mathbf{j} + \omega_3 \mathbf{k}$, $\dot{\mathbf{v}}_x = \mathbf{w}_x = \dot{v}_1 \mathbf{i} + \dot{v}_2 \mathbf{j} + \dot{v}_3 \mathbf{k}$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}_x = \dot{\omega}_1 \mathbf{i} + \dot{\omega}_2 \mathbf{j} + \dot{\omega}_3 \mathbf{k}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_x = \dot{\boldsymbol{\omega}}_x = \varepsilon_1 \mathbf{i} + \varepsilon_2 \mathbf{j} + \varepsilon_3 \mathbf{k}$ получаются в результате выделения главной и моментной частей в дуальном соотношении (4.7):

$$(4.22) \quad \begin{aligned} \omega_1 &= f_1 \sin g \cos \alpha_2 - g_1 \sin \alpha_2, \\ \omega_2 &= f_1 (\sin g \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + \cos g \cos \alpha_1) + g_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2, \\ \omega_3 &= f_1 (\sin g \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \cos g \sin \alpha_1) + g_1 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2; \end{aligned}$$

$$(4.23) \quad \begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= (u_{c1} \sin g + f_1 g_1 \cos g) \cos \alpha_2 - u_{c2} \sin \alpha_2, \\ \dot{\omega}_2 &= u_{c1} (\sin g \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + \cos g \cos \alpha_1) + \\ &+ f_1 g_1 (\cos g \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - \sin g \cos \alpha_1) + u_{c2} \sin \alpha_1 \cos \alpha_2, \\ \dot{\omega}_3 &= u_{c1} (\sin g \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \cos g \sin \alpha_1) + \\ &+ f_1 g_1 (\cos g \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + \sin g \sin \alpha_1) + u_{c2} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2; \end{aligned}$$

$$(4.24) \quad \begin{aligned} \mathbf{v}_x &= e^{-\frac{\alpha_1}{2} \mathbf{i}} \circ \left[\boldsymbol{\beta} \times (\alpha_1^0 \mathbf{i} + \alpha_2^0 \mathbf{j}) + e^{-\frac{\alpha_2}{2} \mathbf{j}} \circ ((f_1^0 \sin g + f_1 g^0 \cos g) \mathbf{i} + \right. \\ &+ (f_1^0 \cos g - f_1 g^0 \sin g) \mathbf{j} + g_1^0 \mathbf{k}) \circ e^{\frac{\alpha_2}{2} \mathbf{j}} \left. \right] \circ e^{\frac{\alpha_1}{2} \mathbf{i}}, \\ \boldsymbol{\beta} &= e^{-\frac{\alpha_2}{2} \mathbf{j}} \circ (f_1 \sin g \mathbf{i} + f_1 \cos g \mathbf{j} + g_1 \mathbf{k}) \circ e^{\frac{\alpha_2}{2} \mathbf{j}}; \end{aligned}$$

$$(4.25) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_x &= e^{-\frac{\alpha_1}{2} \mathbf{i}} \circ \left[\dot{\boldsymbol{\beta}} \times (\alpha_1^0 \mathbf{i} + \alpha_2^0 \mathbf{j}) + e^{-\frac{\alpha_2}{2} \mathbf{j}} \circ \left(((u_{c1}^0 - f_1 g^0 g_1) \sin g + \right. \right. \\ &+ (f_1^0 g_1 + u_{c1} g^0 + f_1 g_1^0) \cos g) \mathbf{i} + ((u_{c1}^0 - f_1 g^0 g_1) \cos g - \\ &\left. \left. - (f_1^0 g_1 + u_{c1} g^0 + f_1 g_1^0) \sin g) \mathbf{j} + u_{c2} \mathbf{k} \right) \circ e^{\frac{\alpha_2}{2} \mathbf{j}} \right] \circ e^{\frac{\alpha_1}{2} \mathbf{i}}, \end{aligned}$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = e^{-\frac{\alpha_2}{2} \mathbf{j}} \circ ((u_{c1} \sin g + f_1 g_1 \cos g) \mathbf{i} + (u_{c1} \cos g - f_1 g_1 \sin g) \mathbf{j} + u_{c2} \mathbf{k}) \circ e^{\frac{\alpha_2}{2} \mathbf{j}}.$$

Задача (4.3)–(4.25) решается авторами с помощью принципа максимума. Дуальная функция Гамильтона–Понтрягина для управляемой системы (4.10)

или (4.11) и (4.12) и комбинированного функционала (4.15) имеет вид:

$$(4.26) \quad H = -(1 + U_{c1}^2 + U_{c2}^2) + \Psi_1 F_1 + \Psi_2 G_1 + \Psi_3 U_{c1} + \Psi_4 U_{c2} = 0, \quad \forall t \in [0, t_1],$$

где $\Psi_1 = \psi_1 + s\psi_1^0$, $\Psi_2 = \psi_2 + s\psi_2^0$, $\Psi_3 = \psi_3 + s\psi_3^0$, $\Psi_4 = \psi_4 + s\psi_4^0$ – дуальные сопряженные переменные, удовлетворяющие дуальной системе уравнений:

$$(4.27) \quad \dot{\Psi}_1 = 0, \quad \dot{\Psi}_2 = 0, \quad \dot{\Psi}_3 = -\Psi_1, \quad \dot{\Psi}_4 = -\Psi_2,$$

которая эквивалентна двум системам вещественных уравнений:

$$(4.28) \quad \dot{\psi}_1 = 0, \quad \dot{\psi}_2 = 0, \quad \dot{\psi}_3 = -\psi_1, \quad \dot{\psi}_4 = -\psi_2;$$

$$(4.29) \quad \dot{\psi}_1^0 = 0, \quad \dot{\psi}_2^0 = 0, \quad \dot{\psi}_3^0 = -\psi_1^0, \quad \dot{\psi}_4^0 = -\psi_2^0.$$

Общие решения уравнений (4.27) или (4.28), (4.29), содержащие дуальные произвольные постоянные интегрирования $C_i = c_i + sc_i^0$, $i = \overline{0, 4}$, или вещественные произвольные постоянные интегрирования c_1, \dots, c_4 и c_1^0, \dots, c_4^0 , имеют вид:

$$(4.30) \quad \Psi_1 = C_1, \quad \Psi_2 = C_2, \quad \Psi_3 = -C_1 t + C_3, \quad \Psi_4 = -C_2 t + C_4;$$

$$(4.31) \quad \psi_1 = c_1, \quad \psi_2 = c_2, \quad \psi_3 = -c_1 t + c_3, \quad \psi_4 = -c_2 t + c_4,$$

$$(4.32) \quad \psi_1^0 = c_1^0, \quad \psi_2^0 = c_2^0, \quad \psi_3^0 = -c_1^0 t + c_3^0, \quad \psi_4^0 = -c_2^0 t + c_4^0.$$

Искомые оптимальные дуальные управления

$$(4.33) \quad U_{c1} = (-C_1 t + C_3)/2, \quad U_{c2} = (-C_2 t + C_4)/2$$

доставляют максимум функции Гамильтона–Понтрягина (4.26).

Выделим в дуальных управлениях (4.33), содержащих дуальные величины

$$U_{c1} = u_{c1} + su_{c1}^0, \quad U_{c2} = u_{c2} + su_{c2}^0, \\ \Psi_3 = \psi_3 + s\psi_3^0, \quad \Psi_4 = \psi_4 + s\psi_4^0, \quad C_i = c_i + sc_i^0, \quad i = \overline{0, 4},$$

главные и моментные части (скалярные вещественные управления u_{c1} , u_{c2} и u_{c1}^0 , u_{c2}^0):

$$U_{c1} = u_{c1} + su_{c1}^0 = (\psi_3 + s\psi_3^0)/2 = [(-c_1 t + c_3) + s(-c_1^0 t + c_3^0)]/2, \\ U_{c2} = u_{c2} + su_{c2}^0 = (\psi_4 + s\psi_4^0)/2 = [(-c_2 t + c_4) + s(-c_2^0 t + c_4^0)]/2.$$

Подставляя (4.33) в систему дуальных дифференциальных уравнений (4.10), найдем общее решение для фазовых координат F , G , F_1 , G_1 , содержащее восемь дуальных произвольных постоянных $C_1 = c_1 + sc_1^0, \dots, C_8 = c_8 + sc_8^0$:

$$(4.34) \quad F(t) = -C_1 t^3/12 + C_3 t^2/4 + C_5 t + C_6, \\ G(t) = -C_2 t^3/12 + C_4 t^2/4 + C_7 t + C_8, \\ F_1(t) = -C_1 t^2/4 + C_3 t/2 + C_5, \\ G_1(t) = -C_2 t^2/4 + C_4 t/2 + C_7.$$

Неизвестные дуальные постоянные C_1, \dots, C_8 подлежат определению. Так как постоянная C_6 входит в функцию F как аддитивная постоянная, то из формулы (4.8), содержащей выражение $\exp\{((F(t) - F(0))/2)\mathbf{j}\}$, видно, что эта дуальная постоянная не оказывает влияния. По этой причине постоянную C_6 можно положить равной нулю. Таким образом, для определения девяти неизвестных дуальных постоянных задачи $C_1, \dots, C_5, C_7, C_8, A_1, A_2$ и времени переходного процесса t_1 служит девять дуальных уравнений из системы (4.16), (4.17), (4.19) и скалярная часть условия (4.26) в момент времени t_1 (отметим, что в дуальном кватернионном уравнении (4.19) независимыми являются только три уравнения в дуальной скалярной форме из-за нормированности дуального кватерниона $\mathbf{\Lambda}$). Подставляя в (4.7), (4.8) формулы (4.33), (4.34), получим аналитические дуальные формулы для нахождения искомых оптимальных законов изменения кинематического винта \mathbf{U}_x свободного твердого тела и дуального кватерниона $\mathbf{\Lambda}$, описывающего оптимальные траектории углового (вращательного) и поступательного (орбитального) движений свободного твердого тела. Эти формулы опишут оптимальное в смысле комбинированного функционала перемещение тела в классе винтовых обобщенных конических движений. Законы формирования управляющей силы \mathbf{F}_{cx} и управляющего момента \mathbf{M}_{cx} находятся в соответствии с концепцией решения обратных задач динамики по формулам (4.20), (4.21).

Задача оптимального в смысле комбинированного функционала, объединяющего время и энергию, перемещения свободного твердого тела (КА) в классе винтовых обобщенных конических движений решена тем самым полностью.

Оптимальный алгоритм пространственного движения КА произвольной динамической конфигурации при произвольных краевых условиях имеет вид:

1) по заданным дуальным величинам $\mathbf{\Lambda}(0), \mathbf{\Lambda}(t_1), \mathbf{U}_x(0), \mathbf{U}_x(t_1)$ (формулы (3.11), (3.12) для краевых условий задачи) с помощью решения системы алгебраических дуальных уравнений (4.5), (4.6), (4.16), (4.17), (4.19), дополненной условием (4.26) для скалярной части функции Гамильтона–Понтрягина, вычисляются девять дуальных неопределенных констант $C_1, \dots, C_5, C_7, C_8, A_1, A_2$ и время t_1 ; далее находятся дуальные функции F, G, F_1, G_1 ;

2) используя (4.5), вычисляем постоянный дуальный кватернион \mathbf{K} ;

3) по формуле (4.7) определяем кинематический винт КА $\mathbf{U}_x(t)$;

4) по формуле (4.8) определяем дуальный кватернион пространственного винтового движения КА $\mathbf{\Lambda}(t)$;

5) по формулам (4.20), (4.21) строятся законы формирования управляющей силы \mathbf{F}_{cx} и управляющего момента \mathbf{M}_{cx} КА;

6) из выражения (4.15) находится значение критерия оптимизации задачи оптимального пространственного движения (маневрирования) КА.

Следует отметить, что в случаях кватернионных задач оптимального разворота сферически-симметричного КА в классах плоских эйлеровых разворотов и регулярных угловых конических движений известные оптимальные решения классической задачи и аналитические решения задачи управления угловым движением КА [9–11], оптимальные в классе обобщенных угловых конических движений, полностью совпадают. На основании принципа перенесения Котельникова–Штуди можно утверждать то же самое относительно дуальных пространственных аналогов этих управляемых движений КА.

5. Числовые примеры

В этом разделе рассматриваются примеры расчетов оптимального в классе обобщенных винтовых конических движений пространственного движения (маневрирования) КА по предложенному алгоритму, показывающие эффективность полученного аналитического решения задачи для различных динамических конфигураций КА.

Перейдем от размерных переменных задачи к безразмерным по формулам (кватернион λ является безразмерным) [16]:

$$\begin{aligned} J^{\text{масш}} &= ((J_1^2 + J_2^2 + J_3^2) / 3)^{1/2}, \quad J_k^{\text{безраз}} = J_k / J^{\text{масш}}; \\ \omega_x^{\text{безраз}} &= (J^{\text{масш}})^{1/2} a^{1/4} \omega_x, \quad t^{\text{безраз}} = (J^{\text{масш}})^{-1/2} a^{-1/4} t, \\ \mathbf{M}^{\text{безраз}} &= a^{1/2} \mathbf{M}, \end{aligned}$$

а также по формулам:

$$\lambda^0{}^{\text{безраз}} = \lambda^0 / L, \quad \varepsilon_x^{\text{безраз}} = J^{\text{масш}} a^{1/2} \varepsilon_x, \quad \mathbf{w}_x^{\text{безраз}} = L (J^{\text{масш}})^{-1} a^{-1/2} \mathbf{w}_x.$$

Здесь $a = 1(\text{Н} \cdot \text{м})^{-2} = 1 \text{ кг}^{-2} \cdot \text{м}^{-4} \cdot \text{с}^4$, L – масштабный множитель для расстояния.

В этом случае фазовые уравнения задачи и основные формулы предложенного алгоритма не изменятся.

Примем, что главный вектор других внешних сил $\mathbf{F}_x(t, \mathbf{r}_x, \mathbf{v}_x)$, входящий в формулу (4.20) для вычисления управляющей силы, вызван лишь центральной силой гравитационного притяжения КА к Земле, равной

$$\mathbf{F}_x(t, \mathbf{r}_x, \mathbf{v}_x) = \mathbf{F}_x(\mathbf{r}_x) = -G \frac{M_0 m}{r^3} \mathbf{r}_x,$$

где G – гравитационная постоянная, а M_0 – масса притягивающего тела (Земли), $r = |\mathbf{r}_x|$.

Гравитационный момент в этом центральном поле сил определяется следующим соотношением [17]:

$$\mathbf{M}_{\text{грав}} = 3\mu \frac{\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\gamma}}{r^3}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \frac{\mathbf{r}}{r},$$

где $\mu = GM_0$ – гравитационный параметр притягивающего тела (Земли).

Тогда выражения для управляющих силы и момента (4.20), (4.21) в безразмерном виде запишутся так:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \mathbf{F}_x &= \mathbf{w}_x + \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x)\mathbf{v}_x + N_G \mathbf{r}_x / |\mathbf{r}_x|^3, \\ \mathbf{M}_{cx} &= \mathbf{J}\boldsymbol{\varepsilon}_x + \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x)\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_x - 3N_G \mathbf{r}_x \times \mathbf{J}\mathbf{r}_x / |\mathbf{r}_x|^5. \end{aligned}$$

Здесь $N_G = GM_0T^2/L^3$ – безразмерный параметр задачи, $T = (J^{\text{массш}})^{1/2} \times a^{1/4}$ – масштабный множитель для времени.

Учтем, что $\|\boldsymbol{\lambda}\| = 1$, тогда формулы (5.1) для нахождения управляющей силы и управляющего момента в безразмерном виде примут вид

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \mathbf{F}_{cx} &= \mathbf{w}_x + \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x)\mathbf{v}_x + N_G \frac{\tilde{\boldsymbol{\lambda}} \circ \boldsymbol{\lambda}^0}{\|\boldsymbol{\lambda}^0\|^{3/2}}, \\ \|\boldsymbol{\lambda}^0\| &= (\lambda_0^0)^2 + (\lambda_1^0)^2 + (\lambda_2^0)^2 + (\lambda_3^0)^2. \\ \mathbf{M}_{cx} &= \mathbf{J}\boldsymbol{\varepsilon}_x + \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x)\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_x - 3N_G \frac{(\tilde{\boldsymbol{\lambda}} \circ \boldsymbol{\lambda}^0) \times \mathbf{J}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}} \circ \boldsymbol{\lambda}^0)}{\|\boldsymbol{\lambda}^0\|^{5/2}}. \end{aligned}$$

Отметим, что в выражения (5.1) и (5.2) для управляющей силы не входит тензор инерции \mathbf{J} , т.е. закон изменения управляющей силы не зависит от вида распределения масс КА.

Граничные условия по угловому положению в пространстве и угловой скорости КА имеют вид [16, с. 137] (в статье [16] рассматривалась задача оптимального разворота КА как твердого тела произвольной динамической конфигурации при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости разворота КА при отсутствии поступательного перемещения и гравитационного момента):

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}(0) &= (0,7951; 0,2981; -0,3975; 0,3478), \\ \boldsymbol{\omega}(0) &= (0,2739; -0,2388; -0,3), \end{aligned}$$

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}_k &= (0,8443; 0,3984; -0,3260; 0,1485), \\ \boldsymbol{\omega}_k &= (0,0; 0,0; -0,59). \end{aligned}$$

КА 1. Сферически-симметричное твердое тело: $J_1 = J_2 = J_3 = J^*$ кг · м². При этом $J^{\text{массш}} = J^*$ кг · м², тогда безразмерные моменты инерции равны $J_1 = J_2 = J_3 = J^*/J^{\text{массш}} = 1,0$.

КА 2. Международная космическая станция (МКС) [18]:

$J_1 = 4\,853\,000$ кг · м², $J_2 = 23\,601\,000$ кг · м², $J_3 = 26\,278\,000$ кг · м² (в размерном виде) или $J_1 = 0,2358$, $J_2 = 1,1466$, $J_3 = 1,2766$ (в безразмерном виде).

КА 3. КА «Спейс Шаттл» (почти осесимметричное твердое тело): $J_1 = 3\,400\,648$ кг · м², $J_2 \approx J_3 = 21\,041\,672$ кг · м² или $J_1 = 0,1967$, $J_2 \approx J_3 = 1,2168$.

Для того чтобы результаты расчетов можно было сравнить с тем, что получено в [16] при отсутствии поступательного перемещения КА, нужно положить начальное и конечное значения вектора линейной скорости КА равными нулевому вектору. Значения вещественных констант $\alpha_1, \alpha_2, c_1, \dots, c_8$, входящих в аналитическое решение задачи, полученное в [16], для углового движения с краевыми условиями (5.3), (5.4) таковы ($\alpha_1^0 = \alpha_2^0 = 0, c_1^0 = c_2^0 = \dots = c_8^0 = 0$):

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -0,0421; & \alpha_2 &= -0,2226; & c_1 &= 3,4020; & c_2 &= -2,0123; & c_3 &= 2,2293; \\ c_4 &= -1,7026; & c_5 &= -0,4156; & c_6 &= 0; & c_7 &= -0,2220; & c_8 &= -0,9216. \end{aligned}$$

Более того, значения компонент радиус-вектора центра масс КА (в инерциальной системе координат) в начальный и конечный моменты времени должны быть одинаковыми. В расчетах авторов координаты безразмерного радиус-вектора были вычислены по параметрам орбиты КА, приведенным в [19, с. 95]:

$$\begin{aligned} \xi_1^0 &= \xi_1^k = 23\,399\,727,8 \text{ м}, \\ \xi_2^0 &= \xi_2^k = 23\,962\,416,6 \text{ м}, \\ \xi_3^0 &= \xi_3^k = -18\,801\,552,4 \text{ м}. \end{aligned}$$

В [19] на примере данной орбиты КА исследовалась эффективность в численном прогнозировании преобразований, регуляризирующих и стабилизирующих уравнения движения.

В данной постановке задачи массово-инерционные характеристики КА входят лишь в формулы для нахождения управляющей силы и управляющего момента и не влияют на законы изменения оптимальных управлений (оптимального углового и линейного ускорений). Поэтому результаты расчетов в безразмерных переменных соответствуют расчетам, приведенным в [16] при решении задачи переориентации КА.

В случае, когда начальное и конечное положения КА совпадают, найденные авторами значения компонент безразмерного вектора управляющего момента \mathbf{M} в начале, середине и конце движения при отсутствии гравитационного момента близки к тем, что указаны в табл. 1, 4, 5 работы [16, с. 176–177] для сферически-симметричного КА, МКС и КА «Спейс Шаттл» соответственно.

Значение интеграла

$$(5.5) \quad J^{\text{модиф}} = \int_0^{t_1} (1 + \mathbf{M}^2) dt$$

(безразмерный минимизируемый функционал в [16]) в случае сферической симметрии КА оказалось равным 1,4746, что близко к указанному в конце

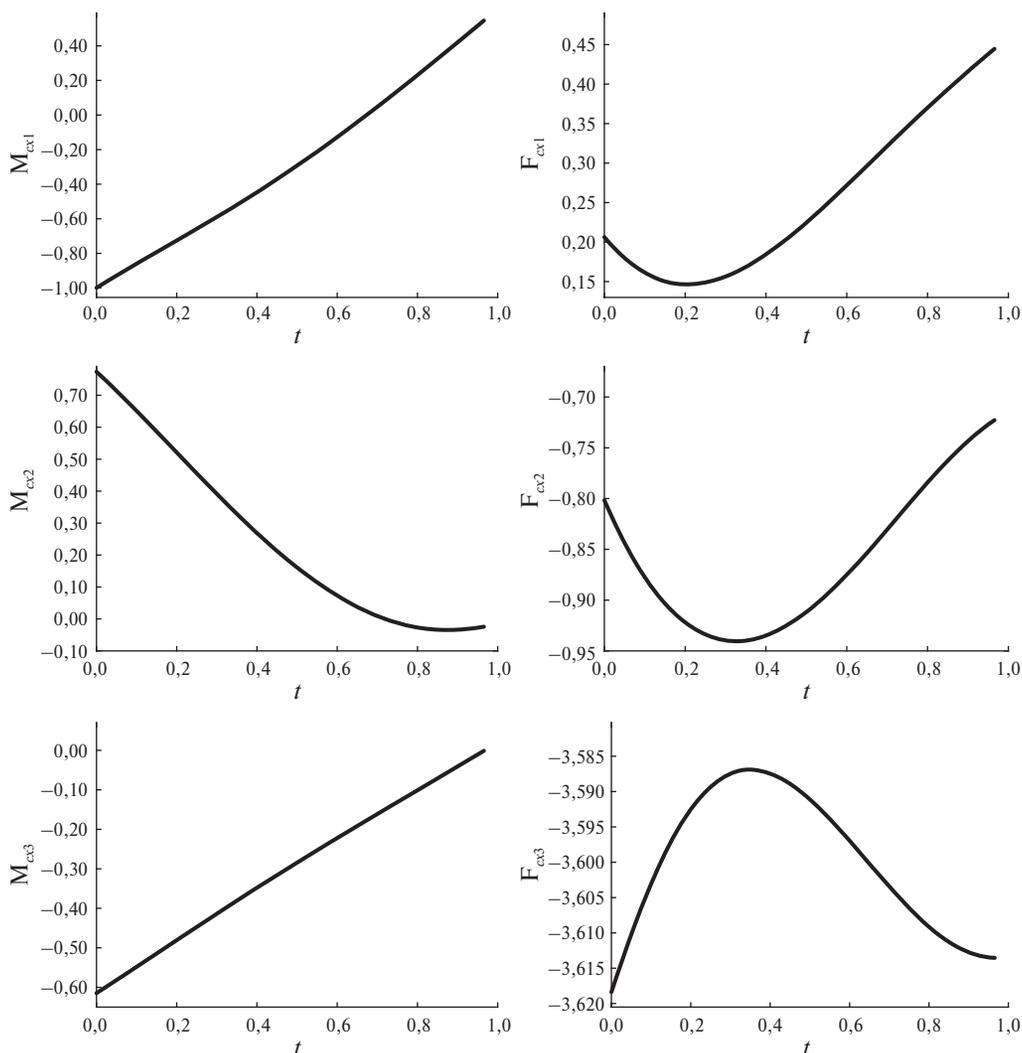


Рис. 1. Компоненты векторов управляющего момента и управляющей силы для КА 1 при отсутствии поступательного перемещения.

с. 176 статьи [16] числу 1,4749 для задачи оптимального управления угловым движением КА в классе угловых конических движений. Время окончания управляемого процесса оказалось равным 0,9657, что близко к указанному в табл. 1 числу 0,966.

При этом значение критерия оптимизации (4.15) задачи оптимального пространственного движения (маневрирования) КА оказалось равным $J = 1,4708 + 0 \cdot s$, т.е. значение функционала – это скаляр.

Рассмотрим далее случай, когда масштабные множители соответствуют работе [20]: $L = 37\,000\,000,0$ м, $T = 11\,272,855470$ с. Тогда при $M_0 = 5,9722 \times 10^{24}$ кг и $G = 6,67408 \times 10^{-11}$ Н·м²·кг⁻² безразмерный параметр задачи равен $N_G = 0,99997 \approx 1,0$.

Заметим, что в случае, когда начальное и конечное положения КА совпадают и не меняются при его угловом движении, конкретные значения компонент вектора \mathbf{r}_x не влияют на величины искомым постоянных $C_1, \dots, C_5, C_7, C_8, A_1, A_2$. Поэтому законы изменения фазовых переменных и оптимального управления также от них не зависят. Более того, проекции радиус-вектора КА на оси инерциальной системы координат ξ будут постоянными. Также в системе координат ξ будет постоянным вектором и управляющая сила. Вектор управляющей силы будет антиколлинеарным по отношению к вектору гравитационной силы (при этом модули указанных векторов будут одинаковыми). С течением времени проекции гравитационной силы на оси системы координат X , связанной с КА, будут изменяться (проекции этой силы на оси системы координат ξ изменяться не будут).

На рис. 1 приведены законы изменения компонент векторов управляющего момента и управляющей силы (они не зависят от тензора инерции КА) в системе координат, связанной с КА, при $N_G = 0,99997 \approx 1,0$ для сферически-симметричного КА (в этом случае гравитационный момент отсутствует). В системе координат ξ вектор управляющей силы является постоянным вектором.

Так же законы изменения компонент векторов управляющего момента были найдены для МКС и КА «Спейс Шаттл». При этом значения интеграла (5.5) при отсутствии гравитационного момента оказались равными 1,3671 (МКС) и 1,3680 (КА «Спейс Шаттл»), что близко к указанным на с. 177 статьи [16] для модифицированной задачи оптимального управления угловым движением числам 1,3674 и 1,3683 соответственно.

На рис. 2, 3 показаны безразмерные законы изменения компонент вектора управляющего момента в системе координат, связанной с телом, для МКС и КА «Спейс Шаттл» (в левом столбце – при отсутствии гравитационного момента, в правом столбце – при наличии) при совпадении координат начального и конечного положений КА.

Из результатов расчетов следует, что для всех КА диапазон изменения третьей компоненты вектора управляющей силы на порядок меньше диапазонов изменения двух других компонент.

Далее приведены расчеты для случая, когда КА помимо углового движения также совершает управляемое поступательное движение. Пусть положение и скорость КА в безразмерных переменных соответствуют следующим параметрам орбиты [21]:

начальное положение КА

$$\begin{aligned} \xi_1^0 &= -12\,194\,795,0 \text{ м}, & \xi_2^0 &= 21\,779\,195,0 \text{ м}, & \xi_3^0 &= 8\,278\,547,0 \text{ м}. \\ \dot{\xi}_1^0 &= -1080,750 \text{ м/с}, & \dot{\xi}_2^0 &= -1849,256 \text{ м/с}, & \dot{\xi}_3^0 &= 3274,225 \text{ м/с}, \end{aligned}$$

конечное положение КА

$$\begin{aligned} \xi_1^k &= -12\,110\,249,0 \text{ м}, & \xi_2^k &= 21\,643\,438,0 \text{ м}, & \xi_3^k &= 8\,744\,787,0 \text{ м}. \\ \dot{\xi}_1^k &= -1063,392 \text{ м/с}, & \dot{\xi}_2^k &= -1905,728 \text{ м/с}, & \dot{\xi}_3^k &= 3247,462 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

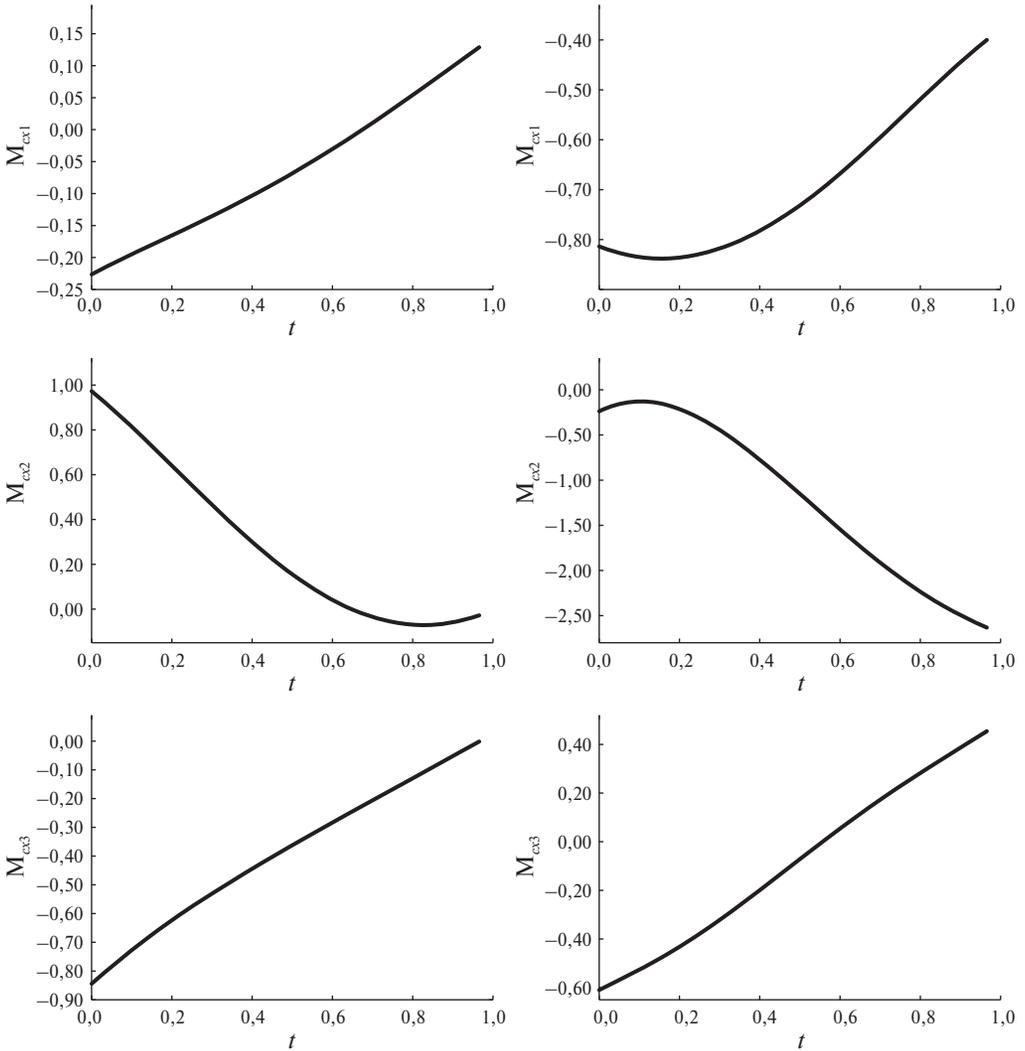


Рис. 2. Компоненты вектора управляющего момента для КА 2 при отсутствии поступательного перемещения.

В качестве начального приближения для неопределенных дуальных констант $C_1, \dots, C_5, C_7, C_8, A_1, A_2$ при наличии поступательного перемещения были взяты вещественные значения этих констант, соответствующие чистому развороту КА. При этом главные части указанных дуальных констант (они соответствуют чистому развороту КА) и время окончания управляемого процесса практически не изменились в результате решения системы нелинейных алгебраических уравнений.

Значение критерия оптимизации (4.15) задачи оптимального пространственного движения (маневрирования) КА оказалось равным $J = 1,4708 + 1,2897 \cdot s$ (его главная часть та же, что и в случае чистого разворота КА [16]).

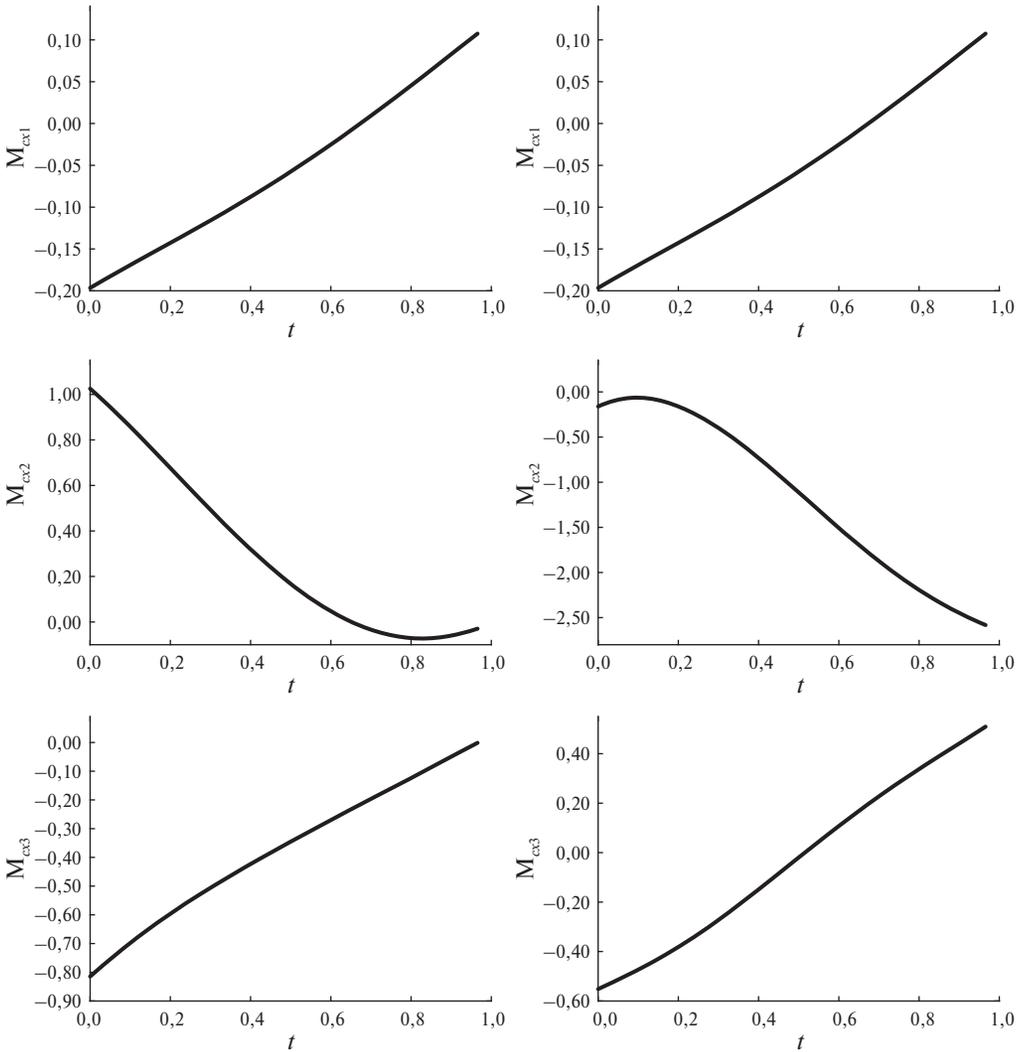


Рис. 3. Компоненты вектора управляющего момента для КА 3 при отсутствии поступательного перемещения.

Далее приведены результаты расчетов при наличии поступательного перемещения центра масс КА. Заметим, что погрешность определения компонент дуального кватерниона конечного перемещения КА в конечный момент времени как при отсутствии, так и при наличии поступательного перемещения составила примерно 10^{-16} безразмерных единиц. При этом погрешность определения компонент векторов линейной и угловой скоростей составила примерно 10^{-15} и 10^{-17} безразмерных единиц соответственно. Порядок указанных величин обусловлен порядком точности решения системы алгебраических дуальных уравнений (4.5), (4.6), (4.16), (4.17), (4.19) для нахождения неопределенных дуальных констант $C_1, \dots, C_5, C_7, C_8, A_1, A_2$, которая составила примерно 10^{-15} безразмерных единиц.

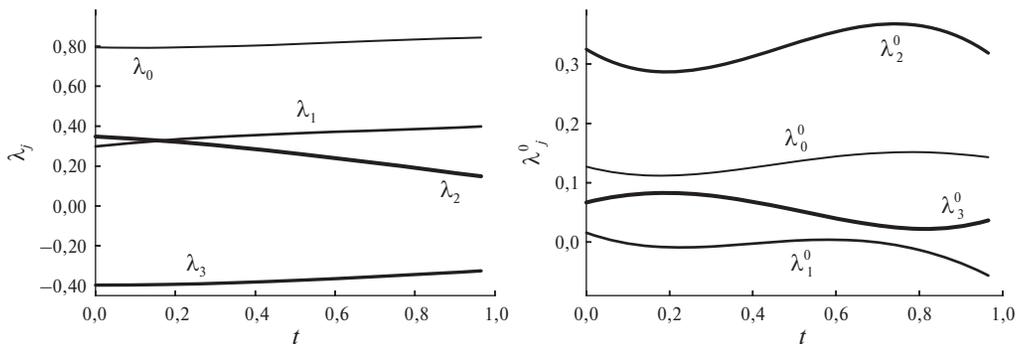


Рис. 4. Компоненты дуального кватерниона конечного перемещения для КА 1 при наличии поступательного перемещения.

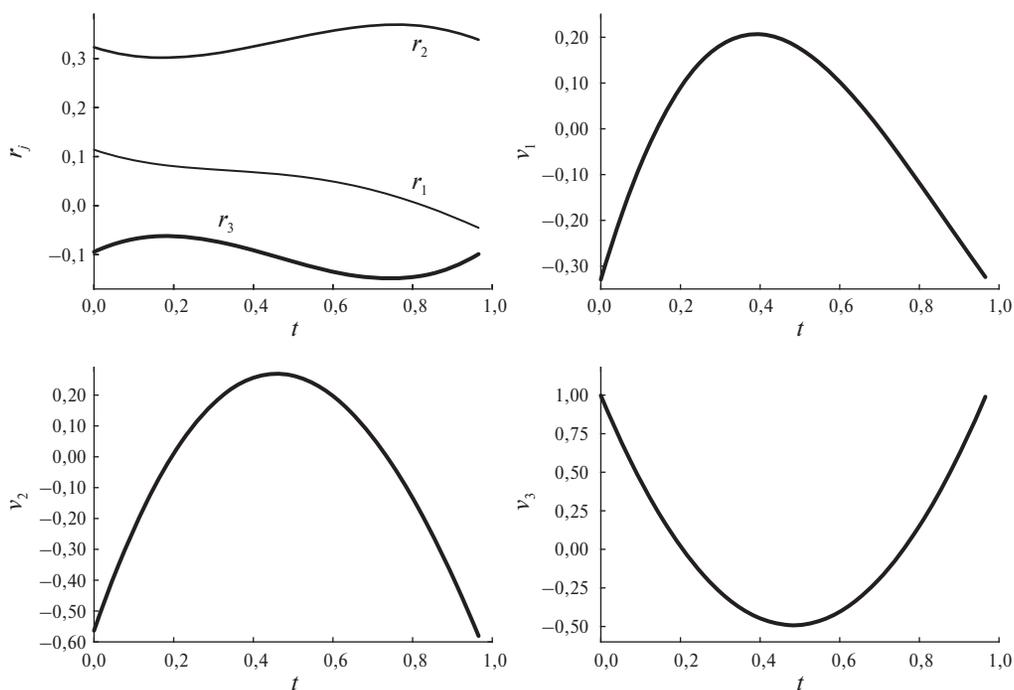


Рис. 5. Компоненты радиус-вектора и вектора линейной скорости для КА 1 при наличии поступательного перемещения.

На рис. 4, 5 показаны законы изменения компонент дуального кватерниона конечного перемещения КА в инерциальном пространстве, а также проекций r_j ($j = \overline{1, 3}$) радиус-вектора и проекций v_j ($j = \overline{1, 3}$) вектора скорости его центра масс на оси связанной с КА системы координат X для случая сферически-симметричного КА. Функции $r_j(t)$ и $\lambda_j^0(t)$ есть гармонические функции времени (здесь и далее обсуждаются законы изменения безразмерных величин). Законы изменения компонент вектора \mathbf{v}_x можно аппроксими-

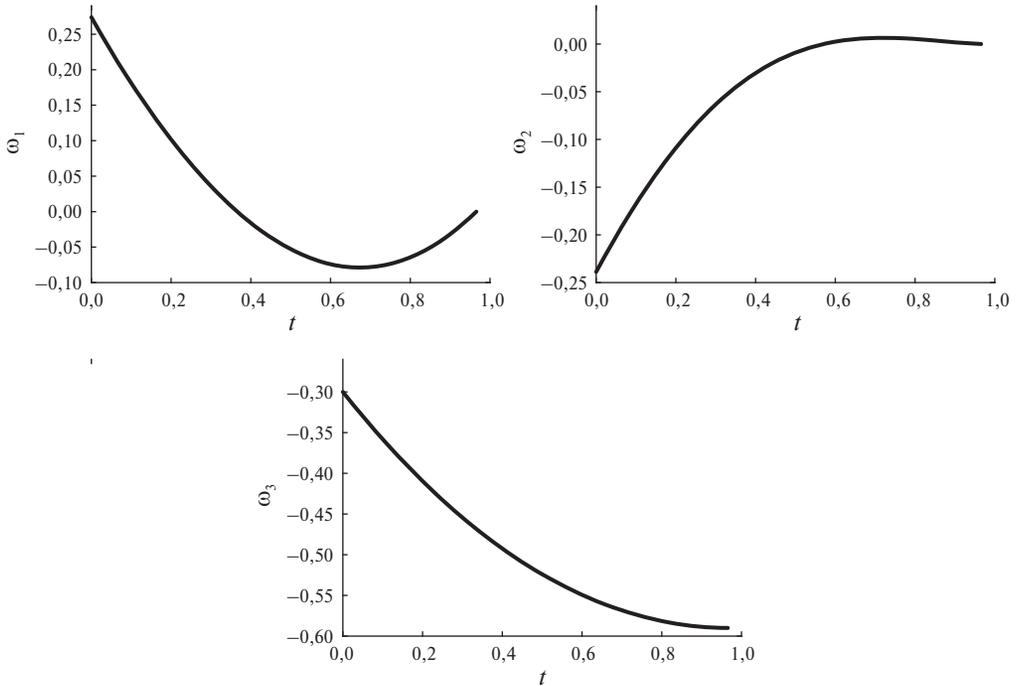


Рис. 6. Компоненты вектора угловой скорости для КА 1 при наличии поступательного перемещения.

ровать параболлами. Одна из компонент есть выпуклая вниз функция, а две другие – выпуклые вверх. Каждая из компонент вектора \mathbf{v}_x меняет знак два раза за время движения КА (компоненты указанного вектора меняют знак почти одновременно). Точки экстремума компонент вектора \mathbf{r}_x совпадают с моментами времени, в которые соответствующая компонента вектора \mathbf{v}_x равна нулю.

На рис. 6 показаны законы изменения компонент вектора угловой скорости для случая сферически-симметричного КА.

На рис. 7, 8 показаны законы изменения оптимального углового и линейного ускорений, управляющего момента и управляющей силы для случая сферически-симметричного КА. В случае сферически-симметричного КА оптимальные законы изменения компонент вектора углового ускорения полностью совпадают с законами изменения компонент вектора оптимального управляющего момента. Вторая и третья компоненты оптимального вектора углового ускорения близки к нулю в конце движения. Вторая и третья компоненты оптимального вектора линейного ускорения близки к линейным функциям времени. Точка смены знака каждой компоненты этого вектора соответствует точке экстремума соответствующей компоненты вектора линейной скорости КА. Первая компонента вектора управляющей силы является убывающей функцией, а третья – возрастающей. Вторая компонента указанного вектора меняется по гармоническому закону.

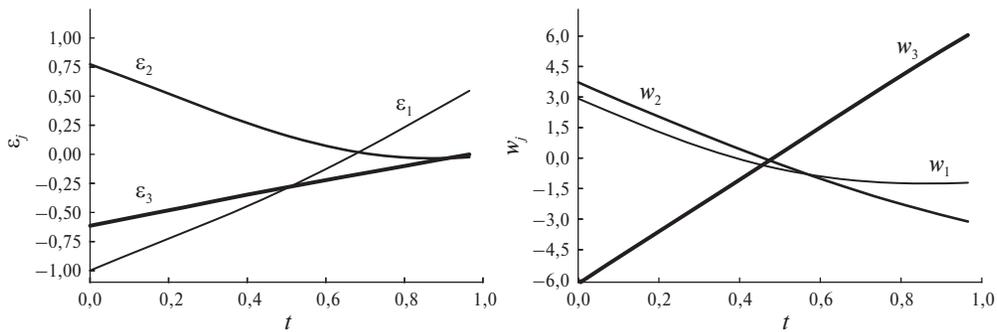


Рис. 7. Оптимальное управление для КА 1 при наличии поступательного перемещения.

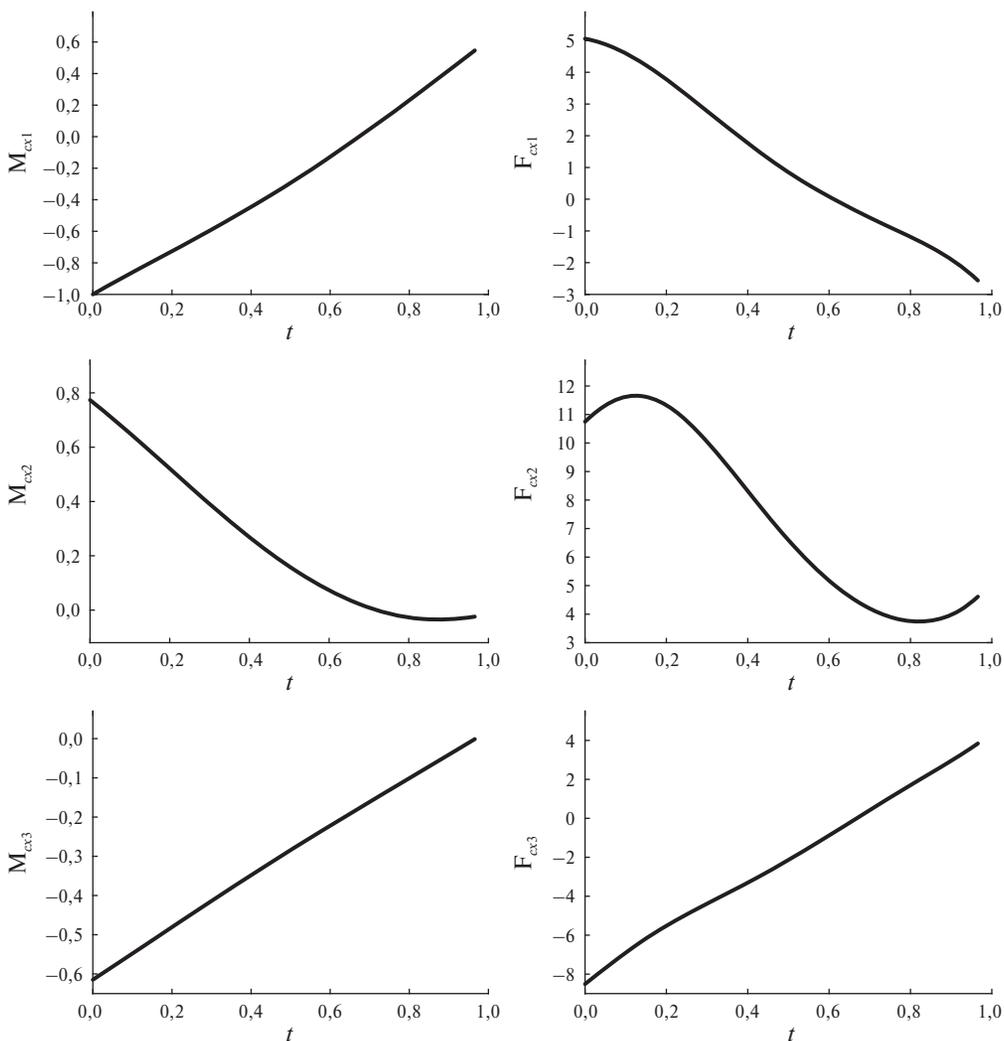


Рис. 8. Компоненты векторов управляющего момента и управляющей силы для КА 1 при наличии поступательного перемещения.

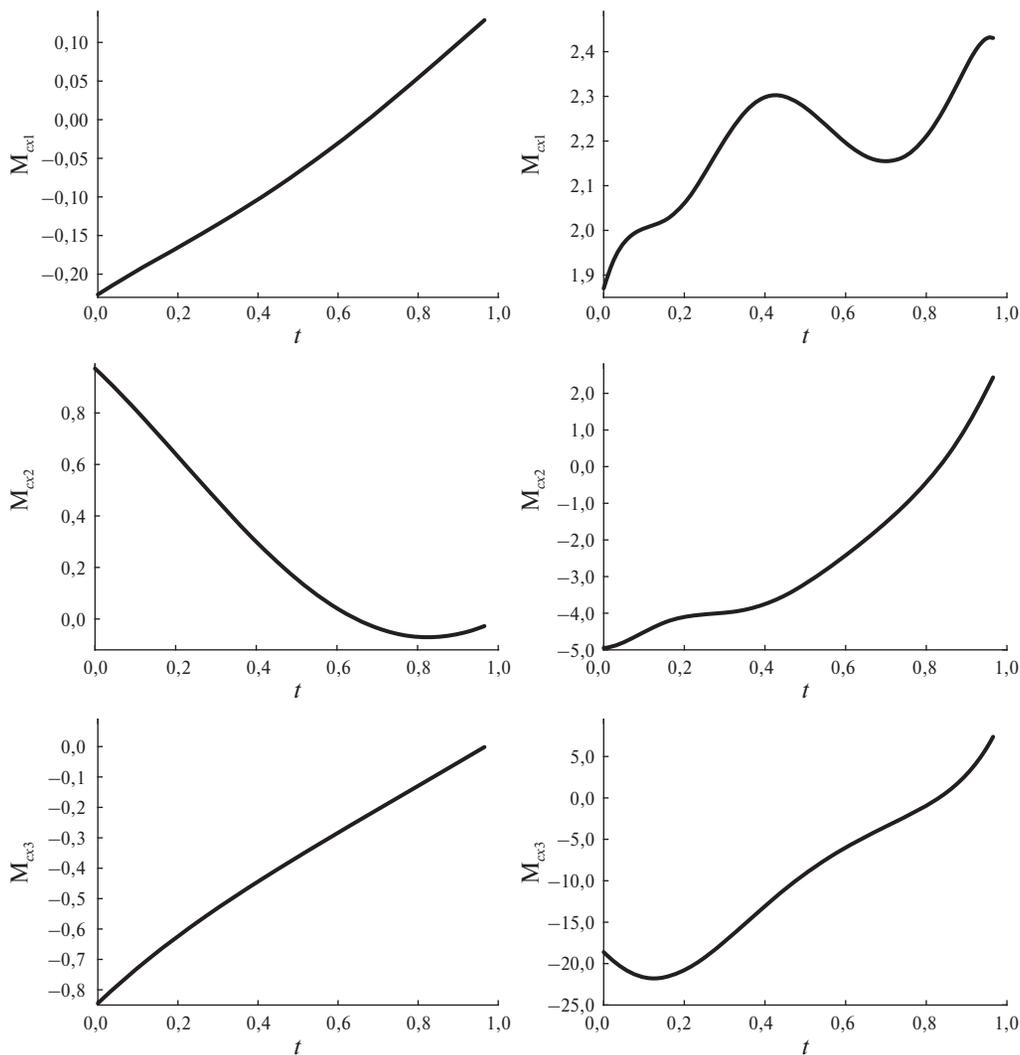


Рис. 9. Компоненты вектора управляющего момента для КА 2 при наличии поступательного перемещения.

Далее на рис. 9, 10 приведены законы изменения управляющего момента для случая, когда распределение масс КА соответствует МКС и КА «Спейс Шаттл» (в левом столбце – при отсутствии гравитационного момента, в правом столбце – при наличии). Заметим, что так как в выражения (5.1) и (5.2) для управляющей силы не входит тензор инерции \mathbf{J} , то законы изменения управляющей силы для МКС и КА «Спейс Шаттл» совпадают с законом, показанным во втором столбце рис. 8 для случая сферически-симметричного КА.

Отметим, что законы изменения остальных искомых величин при этом качественно остались такими же, как и в предыдущем случае.

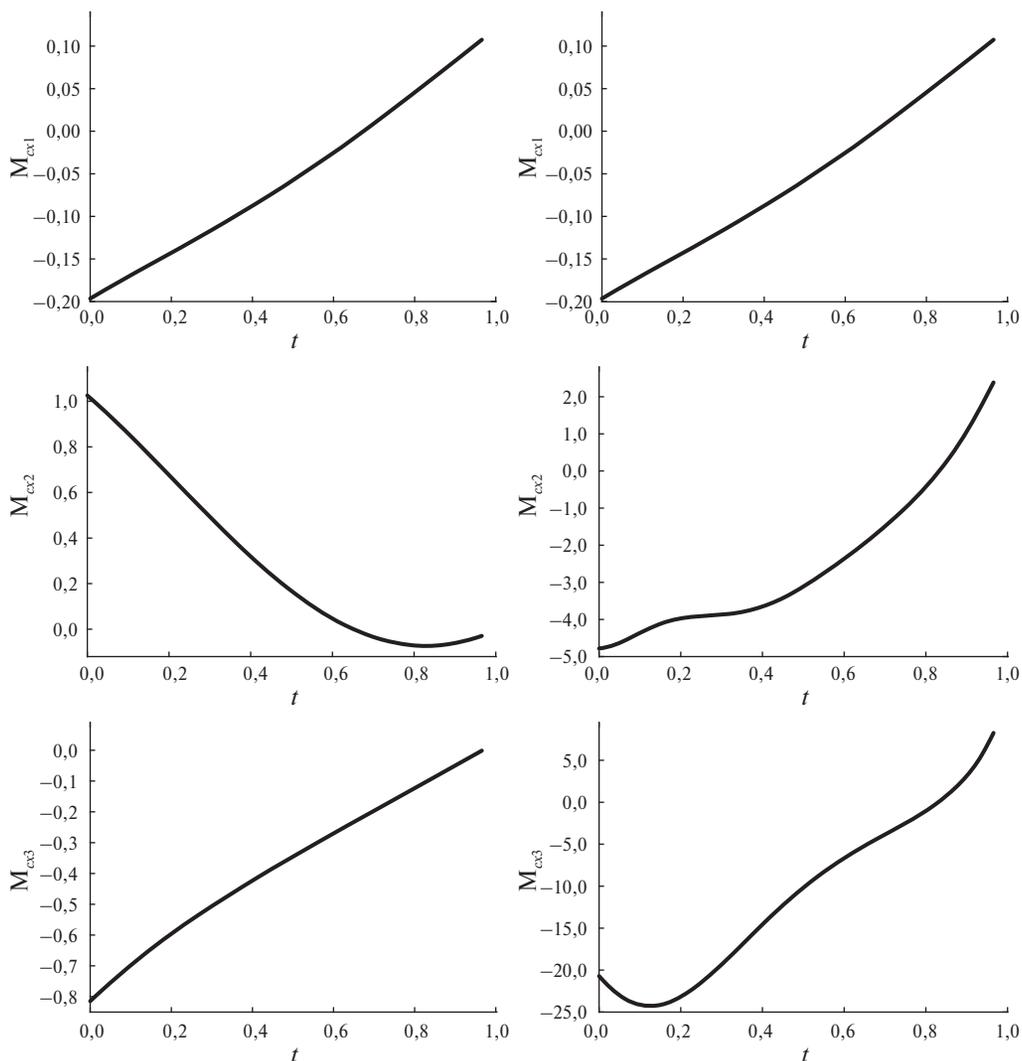


Рис. 10. Компоненты вектора управляющего момента для КА 3 при наличии поступательного перемещения.

6. Заключение

Построена дуальная кватернионная (бикватернионная) теория оптимального управления пространственным движением свободного твердого тела (КА) как взаимосвязанного управления его пространственным угловым (вращательным) и поступательным (орбитальным) движениями. В качестве оптимизируемых управлений используются вторые производные от параметров обобщенного винтового конического движения КА, эквивалентного его общему пространственному движению. Векторы программной управляющей силы и программного управляющего момента найдены в соответствии с концепцией решения обратных задач динамики.

Полученный на ее основе аналитический алгоритм управления пространственным движением (маневрированием) КА как свободного твердого тела произвольной динамической конфигурации с произвольными краевыми условиями является оптимальным в классе обобщенных винтовых конических движений и применим в системах управления КА. При этом он не требует численного решения сложной высокоразмерной дифференциальной краевой задачи оптимизации или иного сложного численного решения. Это важно, в частности, для пространственного маневрирования КА при исключительно высоких темпах его перемещения, когда крайне ограничено время на расчет оптимальной пространственной траектории маневра КА и на расчет законов управления, позволяющих реализовать эту траекторию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стрелкова Н.А.* Оптимальное по быстродействию кинематическое управление винтовым перемещением твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 4. С. 73–76.
2. *Маланин В.В., Стрелкова Н.А.* Оптимальное управление ориентацией и винтовым движением твердого тела. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004.
3. *Челмоков Ю.Н.* Об интегрировании кинематических уравнений винтового движения твердого тела // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 1. С. 32–39.
4. *Челмоков Ю.Н.* Об одной форме уравнений инерциальной навигации // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 5. С. 20–28.
5. *Челмоков Ю.Н.* Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения: Геометрия и кинематика движения. М.: Физматлит, 2006.
6. *Челмоков Ю.Н.* Управление пространственным движением твердого тела с использованием бикватернионов и дуальных матриц // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 1. С. 17–43.
7. *Челмоков Ю.Н.* Синтез управления пространственным движением твердого тела с использованием дуальных кватернионов // ПММ. 2019. Т. 83. Вып. 5–6. С. 704–733.
8. *Челмоков Ю.Н.* Управление пространственным движением твердого тела с использованием дуальных кватернионов // XII Всерос. съезд по фундамент. пробл. теоретич. и прикл. механ. Сб. трудов. 2019. С. 288–290.
9. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Аналитическое квазиоптимальное решение задачи разворота произвольного твердого тела при произвольных граничных условиях // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 2. С. 140–154.
10. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Аналитический квазиоптимальный алгоритм программного управления угловым движением космического аппарата // Изв. РАН. ГиСУ. 2023. № 4. С. 125–136.
11. *Sapunkov Y.G., Molodenkov A.V.* Quasioptimal Spacecraft Attitude Control Constructed According to the Poinot Concept // Aerospace. 2023. V. 10. No. 5. P. 402–417.

12. *Челноков Ю.Н., Молоденков А.В., Логинов М.Ю.* Бикватернионное квазиоптимальное аналитическое решение задачи программного управления пространственным движением космического аппарата // XXX Юб. СПб междунар. конф. по интегр. навигац. сист. Сб. трудов. 2023. С. 411–414.
13. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Решение задачи оптимального разворота сферически симметричного твердого тела при произвольных граничных условиях в классе обобщенных конических движений // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 5. С. 22–34.
14. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973.
15. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Аналитическое решение задачи оптимального разворота сферически-симметричного космического аппарата в классе конических движений // Изв. РАН. ТиСУ. 2013. № 3. С. 167–176.
16. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Аналитическое приближенное решение задачи оптимального разворота космического аппарата при произвольных граничных условиях // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 3. С. 131–141.
17. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965.
18. *Банит Ю.Р., Беляев М.Ю., Добринская Т.А. и др.* Определение тензора инерции международной космической станции по телеметрической информации // Препринт № 57. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2002.
19. *Бордовицына Т.В.* Современные численные методы в задачах небесной механики. М.: Наука, 1984.
20. *Панкратов И.А., Сапунков Я.Г., Челноков Ю.Н.* Кватернионные модели и алгоритмы решения общей задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20. Вып. 1. С. 93–104.
21. *Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А.* Теория движения искусственных спутников Земли. Аналитические и численные методы. Томск: Издат. Дом Томск. гос. ун-та, 2016.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Матасовым.

Поступила в редакцию 08.05.2025

После доработки 28.07.2025

Принята к публикации 29.07.2025