

© 2026 г. Р.П. АГАЕВ, д-р физ.-мат. наук (agaraf3@gmail.com),
Д.К. ХОМУТОВ (homutov_dk@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ОЦЕНКА ЗАПАЗДЫВАНИЯ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩЕГО МАКСИМАЛЬНУЮ СТЕПЕНЬ СХОДИМОСТИ, В ЗАДАЧАХ СОГЛАСОВАНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК

С помощью W -функции Ламберта исследована линейная модель согласования характеристик в многоагентных системах с запаздыванием. В частности, рассмотрен случай, когда все ненулевые собственные значения лапласовской матрицы действительны. Найдено выражение для значения запаздывания, обеспечивающего максимальную степень сходимости. Выведена формула для максимальной степени сходимости. Доказано, что на максимальную степень сходимости влияют только максимальное и минимальное ненулевые собственные значения, в то время как остальные собственные значения не влияют на данную характеристику. Полученные результаты служат основой для одной до сих пор нерешенной задачи — непосредственной оценки скорости сходимости в многоагентных системах с направленной структурой.

Ключевые слова: W -функция Ламберта, степень сходимости, степень устойчивости, управление с запаздыванием, лапласовская матрица, многоагентная система, консенсус.

DOI: 10.7868/S2413977726020037

1. Введение

В [1–9] был получен ряд результатов по теории многоагентных систем с информационными связями и запаздыванием. Однако зависимость скорости сходимости таких систем с запаздыванием от их спектральных свойств по-прежнему остается актуальной темой для исследований. Введенное в настоящей работе понятие степени сходимости и ее оценка могут служить основой для оценки скорости сходимости. Причем это справедливо не только для моделей многоагентных систем с лапласовской матрицей, но и для систем с произвольной устойчивой матрицей (при оценке скорости достижения точки равновесия).

В данной статье будет применяться W -функция Ламберта, на основе которой получены основные результаты. Так как W -функции Ламберта в отечественной литературе по теории управления посвящено относительно мало работ, далее приведем некоторые ключевые результаты, посвященные данной теме.

За последние 20 лет после знаменитой статьи [10] появилась серия работ [11–16] по теории управления системами с запаздыванием, где применяется W -функция Ламберта. W -функция Ламберта $W(z)$ определяется как $z = W(z)e^{W(z)}$, т.е. $W(z)$ является обратной функцией к $f(z) = ze^z$. Применение этой функции оказалось очень эффективным и в ряде случаев позволяет доказать необходимые утверждения более коротким способом.

В [12] исследована система

$$(1) \quad \dot{y}(t) = Ay(t) + By(t - \tau),$$

в которой матрицы A и B одновременно триангуляризуемы, что позволяет свести матричное уравнение к скалярному. Было приведено необходимое и достаточное условие робастной устойчивости соответствующей системы при выполнении некоторых неравенств с неопределенными коэффициентами. Аналогично результатам из [12] в [13] также получено выражение для спектра системы (1) с одновременно приводимыми к треугольной форме или коммутирующими матрицами A и B (пересекающиеся утверждения из [12] и [13] были получены одновременно и независимо).

Более подробно рассмотрим метод вычисления первичной (primary) матричной W -функции Ламберта, изложенный в [14]. Предложенный в [14] итерационный метод (4.4) авторы называют устойчивым вариантом упрощенного метода Ньютона, а именно итераций $y_{k+1} = (y_k^2 + ae^{-y_k})/(y_k + 1)$. Поскольку данная формула непосредственно получается из $y_{k+1} = y_k - f(y_k)/f'(y_k)$, в [14] речь идет о методе Ньютона–Рафсона. Для определения первичной (primary) W -функции Ламберта, удовлетворяющей уравнению $We^W - A = 0$, выражающейся многочленом от A , используется разложение Шура для A , т.е. вместо матрицы A используется ее форма Шура $T = Q^T A Q$, где T – блочно-диагональная матрица, диагональные блоки которой имеют порядок 1, если он соответствует действительному собственному значению, и – порядок 2, если он соответствует паре комплексных собственных значений. Также матрица Шура T представляется в виде блочно-треугольной матрицы с двумя блоками на диагонали:

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}.$$

Предложенный метод Ньютона с выбранными начальными матрицами для каждого диагонального блока T_{11} и T_{22} приводит к матрицам $X_{11} = W_k(T_{11})$ и $X_{22} = W_k(T_{22})$. Недостающий блок X_{12} находится уравнением Сильвестра (см. [14]). Таким образом получается

$$W_k(T) = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix}.$$

Обратным преобразованием $A = QTQT^T$ вычисляется первичная матрица $W_k(A)$, удовлетворяющая уравнению $W_k(A)e^{W_k(A)} - A = 0$.

С помощью W -функции Ламберта в [16] для скалярного случая также была построена область устойчивости системы со звеном запаздывания.

С другими применениями W -функции Ламберта в физических задачах читатель может ознакомиться по книге [17], где, в частности, приведены результаты по конформным отображениям с помощью W -функции Ламберта, действующим на прямоугольные области на z -плоскости. В работе [18] этих же авторов для системы, описываемой уравнением $x^{(\alpha)}(t) = Bx(t - 1)$ с единичной задержкой и производной целого или дробного порядка α , приведен анализ устойчивости с помощью W -функции Ламберта.

2. Необходимые понятия и вспомогательные результаты

В этом разделе при изложении некоторых свойств W -функции Ламберта будем пользоваться результатами из знаменитой статьи [10] (см. также [19]). Со свойствами W -функции Ламберта читатель также может ознакомиться в [17].

Действительная W -функция Ламберта $W(x)$, как и в случае комплексной переменной, определяется как решение функционального уравнения $W(x)e^{W(x)} = x$.

Функция $W(x)$ определена на промежутке $-e^{-1} \leq x < +\infty$, где принимает значение от $-\infty$ до $+\infty$. Для отрицательных значений аргумента $W(x)$ отрицательна и двузначна. В точке $(-e^{-1}, -1)$ график делится на две ветви: верхняя ветвь – главная или нулевая ветвь $W_0(x)$; нижняя ветвь или минус первая ветвь $W_{-1}(x)$. На рис. 1 нулевая ветвь нарисована сплошной линией, а -1 -я – пунктирной.

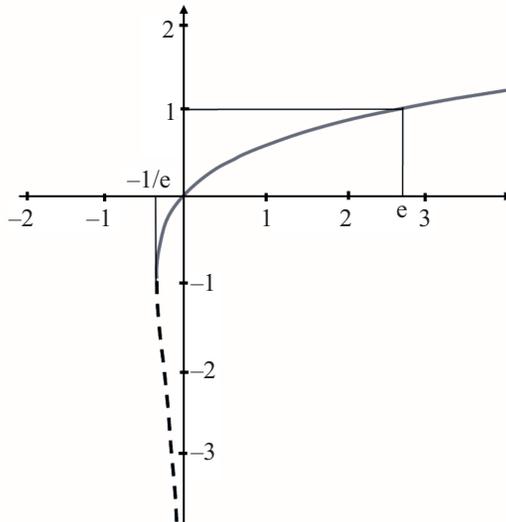


Рис. 1. Две ветви функции Ламберта для действительного случая.

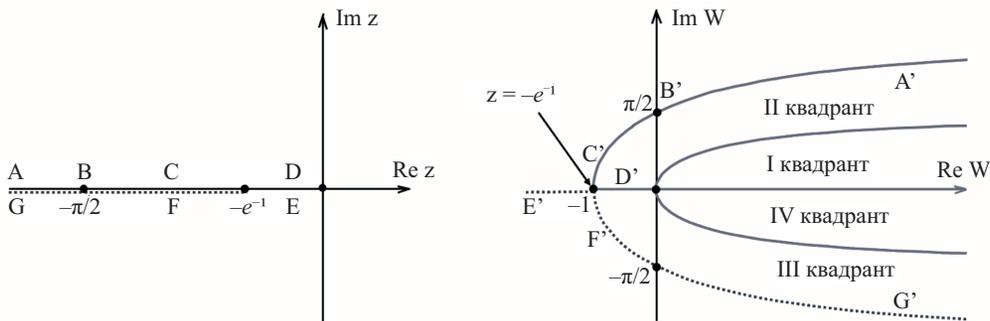


Рис. 2. Отображение мнимой и действительной осей функцией $W_0(z)$ нарисовано сплошной линией. Пунктирной линией, определяющей верхнюю границу ветви $W_{-1}(z)$, указаны отображения разреза и интервала $(-e^{-1}, 0)$ функцией $W_{-1}(z)$.

В комплексной области W -функция Ламберта является многозначной. Комплексной плоскости ставится в соответствие множество значений функций $w = W_k(z)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $z = x + iy$, $w = u + iv$. Областью определения для $W_0(z)$ является вся комплексная плоскость с разрезом $(-\infty, -e^{-1}]$, т.е. с разрезом вдоль отрицательной действительной полуоси: $\{z : -\infty < \text{Re}(z) \leq -e^{-1}, \text{Im}(z) = 0\}$. Для других ветвей ($k \neq 0$) область определения представляет собой всю плоскость с разрезом $(-\infty, 0]$, т.е. $\{z : -\infty < \text{Re}(z) \leq 0, \text{Im}(z) = 0\}$. Отметим, что приведенные разрезы до точек разветвления позволяют определить однозначные ветви функции Ламберта, которые не переходят друг в друга. В силу $W(z)e^{W(z)} = z$ имеет место:

$$(2) \quad \begin{cases} x = e^u (u \cos v - v \sin v); \\ y = e^u (v \cos v + u \sin v). \end{cases}$$

В (2) из условия $y = 0$ получим выражение $u = -v \text{ctg } v$, $-\pi < v < \pi$, определяющее границу между множеством значений ветви W_0 и множествами значений ветвей W_{-1} и W_1 (см. рис. 2).

Замечание 1. Для кривой $u = -v \text{ctg } v$ точка $v = 0$ является точкой устранимого разрыва. Однако в силу того, что $W_0(-e^{-1}) = -1$ и $W_{-1}(-e^{-1}) = -1$, граница между областями не будет иметь разрыва.

Кривые, разделяющие области значений других ветвей, определяются следующим множеством точек (см. [10]):

$$\{(u, v) : u = -v \text{ctg } v, 2\pi k < \pm v < (2k + 1)\pi\}, k = 1, 2, \dots$$

Заметим, что при одном значении k получаются две кривые, задающие границы между ветвями W_k , W_{k+1} и W_{-k} , W_{-k-1} .

При доказательстве основных результатов понадобится следующая лемма (лемма 3 в [12]).

Лемма 1. Для любого $z \in \mathbb{C}$ верно

$$\max\{\operatorname{Re}(W_k(z)) : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} = \operatorname{Re}(W_0(z)).$$

Многоагентную систему с множеством агентов $V = \{1, \dots, n\}$ удобно представить в виде орграфа связей $\Gamma = (V, E)$, где $E \subset V \times V$ – множество взвешенных дуг. Если агент j влияет на агента i с весом a_{ij} , то существует дуга из вершины j в вершину i с тем же весом.

Определение 1. Лапласовская матрица $L = (l_{ij})$, соответствующая орграфу Γ , строится следующим образом:

$$l_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & j \neq i; \\ \sum_{k \neq i} a_{ik}, & j = i. \end{cases}$$

Рассмотрим базовый протокол консенсуса в многоагентной системе первого порядка с запаздыванием

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = -Lx(t - \tau), & t > 0; \\ x(\theta) = \phi(\theta), & \theta \in [-\tau, 0], \end{cases}$$

где $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ – вектор-столбец характеристик агентов в момент времени t ($x_i(t)$ – характеристика i -го агента). Запаздывание по времени τ в системе может возникнуть при передаче данных, измерении, управлении и т.п.

Определение 2. Протокол (3) сходится к консенсусу, если существует конечный предел $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = c\mathbf{1}$, где $x(t)$ – решение системы (3), $\mathbf{1}$ – вектор-столбец из единиц, c – некая константа, значение консенсуса. В таком случае говорят, что в системе (3) достигается асимптотический консенсус или просто – достигается консенсус.

В определении 2 для каждой начальной функции требуется только существование константы c . Однако в [21] доказано, что для протокола (3) значение такой константы c зависит от начальной функции.

Для L ноль всегда является собственным значением, и его алгебраическая кратность совпадает с геометрической. В настоящей работе будем рассматривать такую систему, для которой L имеет только действительный спектр с простым нулевым собственным значением и простую структуру. Условие простого нулевого собственного значения для графа эквивалентно связности, а для орграфа – наличию остовного дерева, и является необходимым условием достижения консенсуса при любом векторе начальных значений (а при $\tau = 0$ – и достаточным). Класс лапласовских матриц L , удовлетворяющих этим двум условиям, является минимальным расширением класса

связных симметричных матриц L . Ненулевые собственные значения произвольной матрицы L имеют положительные действительные части, что можно проверить, например, с помощью теоремы Гершгорина.

Для сходимости протокола необходимо, чтобы действительные части всех ненулевых корней характеристической функции были отрицательны. Корни характеристической функции зависят от τ . Граничное значение τ_0 – это такое значение запаздывания, для которого при $\tau < \tau_0$ в системе достигается консенсус при любой начальной функции $\phi(\theta)$, а при $\tau > \tau_0$ консенсус не достигается. Зависимость граничного значения запаздывания от спектральных свойств соответствующей матрицы была исследована многими авторами. Например, в [20] рассматривалась система (3) с симметричной матрицей, для которой было установлено, что граничное значение запаздывания τ_0 равно $\frac{\pi}{2\lambda_{\max}}$. Однако ранее в [22] рассматривалась линейная система с произвольной устойчивой матрицей A , спектр которой мог содержать комплексные числа. Так авторы привели достаточно сложное доказательство теоремы, где получили выражение для граничного значения τ_0 . Данный результат для задачи консенсуса ниже представлен в виде теоремы 1, для которой приведем короткое доказательство с помощью W -функции Ламберта.

Характеристической функцией системы (3) будет

$$(4) \quad F(s) = \det(sI + e^{-\tau s}L) = s \prod_{\lambda \in \sigma(L) \setminus \{0\}} (s + \lambda e^{-\tau s}) = s \prod_{\lambda \in \sigma(L) \setminus \{0\}} f_{\lambda}(s),$$

где $\sigma(L)$ – спектр матрицы L .

Уравнение

$$(5) \quad s + \lambda e^{-\tau s} = 0$$

представим в виде $\tau s e^{\tau s} = -\tau \lambda$.

Поскольку $W(z)e^{W(z)} = z$, то τs (s – корень уравнения (5)) будет значением W -функции Ламберта в $-\tau \lambda$, т.е.

$$(6) \quad W(-\tau \lambda) = \tau s.$$

Аналогично определению *степени устойчивости*, которое определяется для устойчивых матриц, для системы (3) определим понятие степени сходимости к согласованному значению.

Определение 3. Назовем степенью сходимости к согласованному значению для системы (3) величину $\zeta_0 = -\max(\operatorname{Re}(s))$, где s – ноль функции $G(s) = \prod_{\lambda \in \sigma(L) \setminus \{0\}} f_{\lambda}(s)$.

Цель настоящей работы – найти значение запаздывания τ^* , при котором степень сходимости является максимальной. Однако для матрицы даже с действительным спектром степень сходимости для систем с запаздыванием не всегда характеризует скорость сходимости соответствующего протокола

(для симметричных сетей без запаздывания степень сходимости характеризует скорость сходимости и называется *числом Фидлера*). Поэтому понятие степени сходимости в большей степени характеризует «запас» сходимости к согласованному значению (как «запас» устойчивости в теории управления). В [23] $\gamma^* = -\zeta_0$ называют спектральной функцией абсциссы, а соответствующий корень характеристического квазимногочлена – доминантным корнем. Основываясь на доминантных корнях, в [23] авторы утверждают, что при некотором $\gamma \in \mathbb{R}$, значение $\gamma^* = -\gamma$ аппроксимирует экспоненциальную скорость убывания состояний агентов посредством самых правых корней.

Если в системе достигается консенсус, то $\zeta_0 > 0$. В силу леммы 1 для исследования степени сходимости, как и для нахождения граничного значения запаздывания, достаточно рассмотреть корень, соответствующий нулевой ветви W -функции Ламберта.

Как было отмечено выше, следующая теорема для любой устойчивой матрицы A была доказана в [22] (см. теорему 3.4). Здесь приведем ее короткое доказательство для системы (3). Таким же образом может быть доказана теорема 3.4 из [22].

Теорема 1. Если 0 – простое собственное значение для L , то протокол консенсуса (3) сходится для любых $\tau < \tau_0 = \min_{\lambda \in \sigma(L) \setminus \{0\}} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)$, где $\rho = |\lambda|$, $\varphi = |\arg(\lambda)|$.

3. Основные результаты

Рассмотрим систему (3), в которой матрица L имеет действительный спектр, т.е. $\sigma(L) = \{0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n\}$. Для такой системы рассмотрим следующую задачу: найти значение τ^* , которое обеспечивает максимальную степень сходимости. С этой целью при фиксированном $\lambda \neq 0$ понадобится проанализировать поведение функции $s = \frac{1}{\tau} W_0(-\tau\lambda)$ на промежутке $-\pi/2 < -\tau\lambda < 0$ (при $-\tau\lambda < -\pi/2$ действительные части $W_0(-\tau\lambda)$ положительны).

Утверждение 1. 1) Действительная часть функции $s = \frac{1}{\tau} W_0(-\tau\lambda)$ возрастает на промежутке $-\pi/2 < -\tau\lambda < -e^{-1}$; 2) на промежутке $-e^{-1} < -\tau\lambda < 0$ эта функция убывает.

Утверждение 2. Пусть s_0 – решение уравнения $f_\lambda(s) = s + \lambda e^{-\tau s} = 0$ ($\lambda > 0$) с максимальной действительной частью. Тогда $\arg \min_{\tau} \operatorname{Re}(s_0) = \tau_\lambda^ = \frac{1}{e\lambda}$.*

Утверждение 3. Пусть для каждого $\lambda_i > 0, i = 2, \dots, n$, минимальная действительная часть решения уравнения (5) достигается при $\tau_{\lambda_i}^$. Тогда:*

1) если $\lambda_2 < \lambda_n$, то максимальная степень сходимости системы (3) достигается при $\tau^ \in (\tau_{\lambda_n}^*, \tau_{\lambda_2}^*)$; 2) если $\lambda_2 = \lambda_n = \lambda$, то $\tau^* = \tau_\lambda^*$.*

Таким образом, для любого $\tau \in (\tau_{\lambda_n}^*, \tau_{\lambda_2}^*)$, значение $W_0(-\tau\lambda_n)$ будет находиться на дуге AC , а $W_0(-\tau\lambda_2)$ будет принадлежать интервалу $(-1, 0)$ (см. рис. 3,а).

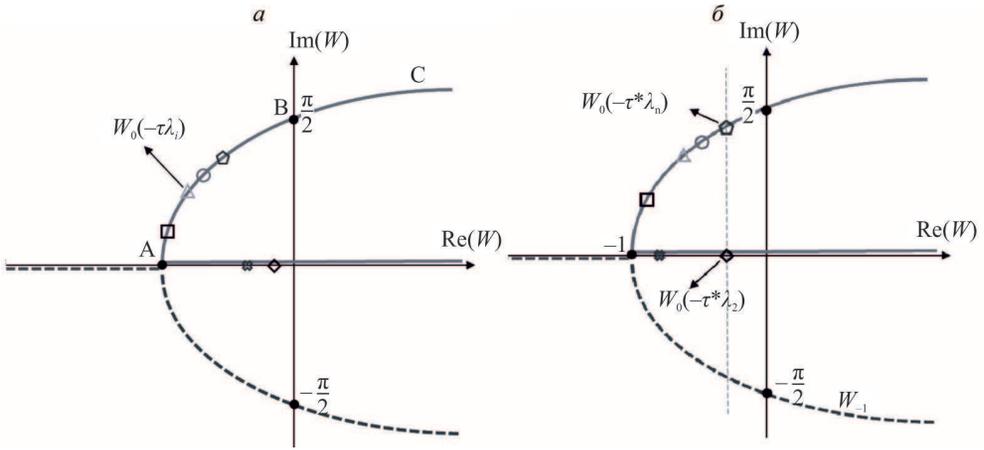


Рис. 3. *a* – Значения $W_0(-\tau\lambda)$. *б* – Значения $W_0(-\tau^*\lambda_2)$ и $W_0(-\tau^*\lambda_n)$ при $\tau = \tau^*$. Пунктирной линией указано отображение $W_{-1}(z)$, отображение $W_0(z)$ приведено сплошной линией.

Если действительная часть $W_0(-\tau\lambda_n)$ меньше $W_0(-\tau\lambda_2)$, то, увеличивая τ , можно добиться случая, когда $\text{Re}(W_0(-\tau\lambda_n)) = W_0(-\tau\lambda_2)$. А если $\text{Re}(W_0(-\tau\lambda_n)) > W_0(-\tau\lambda_2)$, то, убавляя τ , можно достичь их равенства (см. рис. 3, б).

В следующей теореме получено выражение для τ , которая обеспечивает максимальную степень сходимости ζ_0 .

Теорема 2. Пусть $q = \frac{\lambda_2}{\lambda_n}$ и $\xi = -\arccos(q) \cdot \frac{q}{\sqrt{1-q^2}}$. Тогда максимальная степень сходимости ζ_0 достигается при $\tau = \tau^* = \frac{-\xi e^\xi}{\lambda_2}$, значение которой равно $\zeta_0 = \frac{\lambda_2}{e^\xi}$.

В работе [24] для не ориентированного графа и случая запаздывания число ζ_0 используется для характеристики скорости достижения консенсуса в протоколе консенсуса второго порядка с некоторым параметром γ . Решение такой задачи авторы сводят к оптимизационной задаче, где в условие ограничения входят значение параметра γ и первое ненулевое собственное значение матрицы L . Тем не менее, для двух систем со степенями сходимости ζ_0^1 и ζ_0^2 , при $\zeta_0^1 > \zeta_0^2$ скорость сходимости первой системы может быть меньше второй. Это может быть связано, например, с жордановой клеткой размерности больше единицы у лапласовской матрицы. Поэтому для исследования системы с действительным спектром у L , проблема скорости сходимости должна быть исследована с учетом скорости сходимости функционального ряда, выражающего данное решение.

4. Числовой пример

В этом разделе приведен пример для многоагентной системы с информационными влияниями и запаздыванием, орграф в которой соответствует

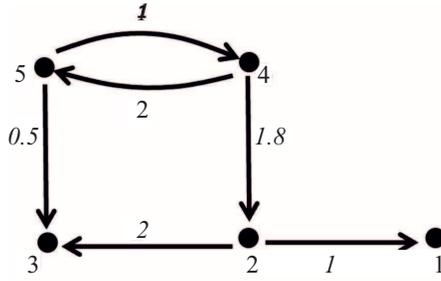


Рис. 4. Орграф связей для пяти агентов.

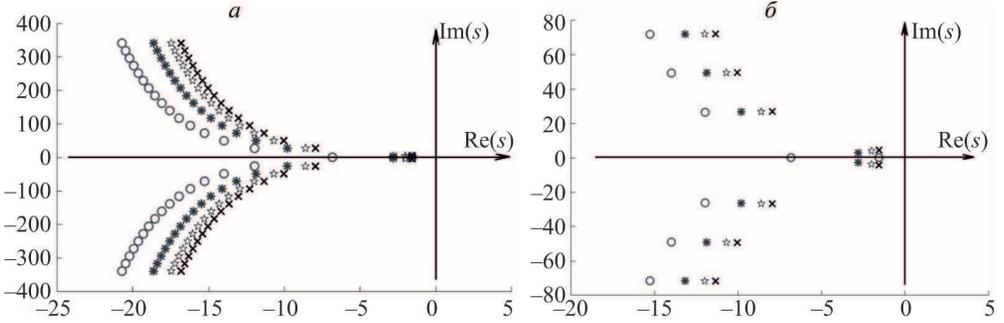


Рис. 5. *a* – Локализация корней s квазимногочлена, вычисленных с помощью W -функции Ламберта для четырнадцати ветвей. *б* – Локализация корней s для четырех ветвей. $\frac{1}{\tau^*} W_0(-\tau^* \lambda_2) = \frac{1}{\tau^*} \text{Re}(W_0(-\tau^* \lambda_n)) = -1,545$.

лапласовской матрице простой структуры с действительным спектром. На рис. 4 приведен орграф для пяти агентов. На дугах указаны веса влияний агентов. Лапласовская матрица орграфа имеет вид:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,8 & 0 & -1,8 & 0 \\ 0 & -2 & 2,5 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

L имеет следующий спектр: $\sigma(L) = \{0; 1; 1,8; 2,5; 3\}$. Согласно теореме 2 определяем: $\lambda_2 = 1$; $\lambda_5 = 3$; $q = 1/3$. $-\xi = \arccos(q) \frac{q}{\sqrt{1-q^2}} = \arccos(1/3) \frac{1/3}{\sqrt{8/9}} \approx 0,4352$. Тогда при запаздывании $\tau^* = -\frac{\xi e^\xi}{\lambda_2} \approx 0,2816$ степень сходимости к консенсусу будет максимальной и ее значение равно $\zeta_0 = \frac{\lambda_2}{e^\xi} = 1,545$. Корни характеристической функции (4), кроме нулевого, отмечены на рис. 5. Заметим, что граничное значение запаздывания τ_0 будет равно $\frac{\pi}{2 \cdot 3} \approx 0,5236$.

На рис. 6, *a* приведен график достижения консенсуса без запаздывания с вектором начальных значений x_0 . Видно, что при запаздывании $\tau^* \approx 0,2816$ и с начальной функцией $\phi(\theta) = x_0$ агенты приходят к консенсусу быстрее, чем

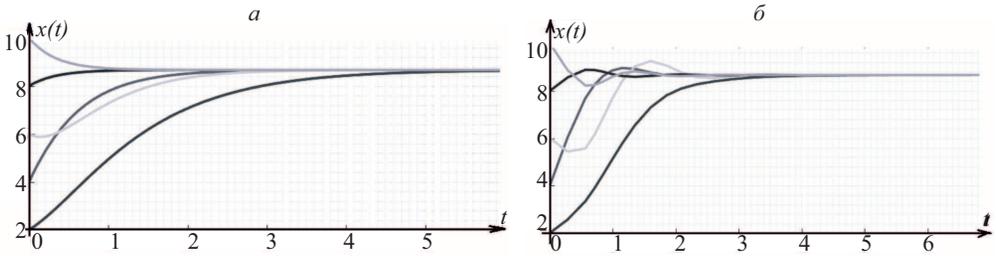


Рис. 6. *a* – Достижение консенсуса без запаздывания. *б* – Достижение консенсуса с запаздыванием $\tau^* \approx 0,2816$.

без запаздывания (рис. 6,*б*). Для обоих случаев вектор $x_0 = (2, 4, 6, 8, 10)^T$. Значение консенсуса при вышеприведенном начальном условии не зависит от запаздывания и определяется выражением $px_0 = \frac{26}{3}$, где $p = (0, 0, 0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ – строка собственного проектора единичного ранга для лапласовской матрицы. Отметим, что p – левый собственный вектор нулевого собственного значения для L .

В этом примере видно, что для несимметричной матрицы простой структуры увеличение степени сходимости привело к увеличению скорости сходимости. Однако, если несимметричная матрица содержит жордановы клетки размерности больше единицы, то такое соответствие может нарушаться. Иначе говоря, увеличение степени сходимости не всегда приводит к увеличению скорости сходимости.

Заметим, что как следует из числового примера, увеличение скорости сходимости приводит к появлению колебаний в переходном процессе. В отличие от традиционных систем управления, где для подавления колебаний могут быть использованы фильтры, демпфирующие устройства и т.п., в многоагентных системах пока не известны методы решения этой проблемы. Действительно, при групповом движении это может привести к столкновениям между агентами. Считаем, что это – интересная и актуальная задача и является предметом дальнейшего изучения.

5. Заключение

В работе с помощью W -функции Ламберта была исследована зависимость степени сходимости от запаздывания в многоагентной системе первого порядка. Для линейной системы с запаздыванием, в которой лапласовская матрица имеет действительный спектр, получено выражение для запаздывания τ^* , обеспечивающего максимальную степень сходимости. Доказано, что значение τ^* зависит только от минимального ненулевого и максимального собственных значений лапласовской матрицы с действительным спектром. Благодаря W -функции Ламберта было получено новое, короткое доказательство для граничного значения запаздывания. Полученные результаты могут быть применены для произвольной системы с несимметричной матрицей, у которой спектр состоит только из действительных чисел.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим характеристическую функцию (4) системы (3), где $f_\lambda(s) = s + \lambda e^{-\tau s}$, $\lambda = a + ib \in \sigma(L) \setminus \{0\}$. Напомним, что для лапласовской матрицы всегда справедливо $a > 0$. Тогда в силу (6) и леммы 1 граничное значение запаздывания, обеспечивающее отрицательность действительных частей нулей функции $f_\lambda(s)$, будет определяться равенством

$$W_0(-\tau\lambda) = iv,$$

которое можно записать как

$$(П.1) \quad ive^{iv} = -\lambda\tau.$$

Из (П.1) непосредственно получим

$$(П.2) \quad \begin{cases} v \sin v = a\tau; \\ v \cos v = -b\tau. \end{cases}$$

Тогда из (П.2) получим $\operatorname{tg} v = -\frac{a}{b}$.

Пусть $\varphi = |\arg(\lambda)|$, $\rho = |\lambda|$. Рассмотрим все возможные случаи b .

а) $b = 0$. В этом случае $-\tau\lambda$ принадлежит отрицательной части действительной оси и $W_0(-\tau\lambda) = W_0(-\frac{\pi}{2})$ (см. рис. 2). Очевидно, что $-\tau\lambda = -\frac{\pi}{2}$ и $\tau = \frac{\pi}{2\lambda}$.

б) $b < 0$. В этом случае $-\tau\lambda$ принадлежит второму квадранту и, как видно из рис. 2, $0 < v < \pi/2$. Поэтому $\operatorname{tg} v = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \varphi) \Rightarrow v = \frac{\pi}{2} - \varphi$.

в) Если $b > 0$, то $-\tau\lambda$ принадлежит третьему квадранту и, согласно рис. 2, $-\pi/2 < v < 0$. Поэтому $\operatorname{tg} v = -\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \varphi)$. Следовательно, $v = \varphi - \frac{\pi}{2}$.

В случае б) подставив $v = \frac{\pi}{2} - \varphi$ в (П.1), получим

$$i \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) e^{i(\frac{\pi}{2} - \varphi)} = -\rho\tau e^{-i\varphi}.$$

Умножив обе части на $-i$, получим:

$$(П.3) \quad \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) e^{i(\frac{\pi}{2} - \varphi)} = \rho\tau e^{i(\frac{\pi}{2} - \varphi)} \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \varphi = \rho\tau.$$

В случае в) подставив $v = \varphi - \frac{\pi}{2}$ в (П.1), получим

$$(П.4) \quad \begin{aligned} & i \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) e^{i(\varphi - \frac{\pi}{2})} = -\rho\tau e^{i\varphi}, \\ & \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) e^{i(\varphi - \frac{\pi}{2})} = -i\rho\tau e^{i\varphi} = \rho\tau e^{i(\varphi - \frac{\pi}{2})} \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \varphi = \rho\tau. \end{aligned}$$

Итак, из (П.3) и (П.4) следует

$$\tau = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right).$$

Тогда с учетом пункта а) граничным значением запаздывания для системы (3) будет $\tau_0 = \min_{\lambda \in \sigma(L) \setminus \{0\}} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)$. \square

Доказательство утверждения 1. 1) При $-\tau\lambda < -\frac{1}{e}$, т.е. при $\tau > \frac{1}{e\lambda}$, функция $s = \frac{1}{\tau} W_0(-\tau\lambda)$ принимает комплексные значения. В силу того, что $W_0(-\frac{\pi}{2}) = i\frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{Re}(W_0(x)) < 0$ при $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, при $-\frac{\pi}{2} < -\tau\lambda < -\frac{1}{e}$, т.е. при $\frac{1}{e\lambda} < \tau < \frac{\pi}{2\lambda}$, $\operatorname{Re}(s) < 0$. На данном интервале с увеличением τ уменьшается величина $\frac{1}{\tau}$, как и модуль действительной части $W_0(-\tau\lambda)$. Таким образом действительная часть $s = \frac{1}{\tau} W_0(-\tau\lambda)$ приобретает отрицательное значение и по модулю убывает с увеличением τ , т.е. возрастает на рассматриваемом промежутке.

2) В силу того, что

$$W'(x) = \frac{W(x)}{x(1+W(x))},$$

имеет место

$$s' = \left(\frac{W_0(-\tau\lambda)}{\tau} \right)'_{\tau} = -\frac{W_0^2(-\tau\lambda)}{\tau^2(1+W_0(-\tau\lambda))}.$$

С другой стороны, на промежутке $-\frac{1}{e} < -\tau\lambda < 0$, т.е. при $0 < \tau < \frac{1}{e\lambda}$, значения функции $W_0(-\tau\lambda)$ отрицательны и больше -1 (см. рис. 1). Поэтому функция $s = \frac{1}{\tau} W_0(-\tau\lambda)$ убывает на промежутке $0 < \tau < \frac{1}{e\lambda}$ по τ . На данном промежутке $-e\lambda < s < -\lambda$. \square

Доказательство утверждения 2. Если s_0 – решение уравнения $s + \lambda e^{-\tau s} = 0$, то согласно (5) и (6) τs_0 определится многозначной функцией $W(-\tau\lambda)$. С другой стороны, в силу леммы 1 максимальная действительная часть s_0 можно определить функцией $\frac{1}{\tau} W_0(-\tau\lambda)$. Также, в силу утверждения 1 минимальная действительная часть функции $\frac{1}{\tau} W_0(-\tau\lambda)$ достигается при $-\tau\lambda = -\frac{1}{e}$, т.е. при $\tau = \frac{1}{e\lambda}$. \square

Доказательство утверждения 3. 1) Очевидно, что $\tau_{\lambda_n}^* < \dots < \tau_{\lambda_2}^*$. Пусть τ^* – значение запаздывания, которое обеспечивает максимальную степень сходимости для системы (3). Покажем, что $\tau^* \in (\tau_{\lambda_n}^*, \tau_{\lambda_2}^*)$. Действительно, если $\tau^* \leq \tau_{\lambda_n}^*$, то все значения $W_0(-\tau^* \lambda_i)$, $i = 2, \dots, n$, действительны и принадлежат интервалу $(-1, 0)$ действительной оси. При этом ближе всего к мнимой оси будет лежать корень, соответствующий λ_2 . Тогда при увеличении значения τ^* корень, соответствующий λ_2 , будет отодвигаться от мнимой оси, тем самым увеличивая степень сходимости системы. А если $\tau^* \geq \tau_{\lambda_2}^*$, то все значения $W_0(-\tau^* \lambda_i)$, $i = 2, \dots, n$, содержат мнимую часть и принадлежат дуге AC (см. рис. 3, а). При этом наибольшую действительную часть будет иметь корень, соответствующий λ_n . В этом случае, уменьшая значение τ^* , можно увеличить степень сходимости системы.

Итак, максимальная степень сходимости системы (3) будет достигнута при $\tau = \tau^* \in (\tau_{\lambda_n}^*, \tau_{\lambda_2}^*)$, при котором

$$(II.5) \quad W_0(-\tau^* \lambda_2) = \operatorname{Re}(W_0(-\tau^* \lambda_n)).$$

2) Если у лапласовской матрицы все ненулевые собственные значения λ равны между собой, то степень сходимости определится тем ненулевым числом λ и будет равна $e\lambda$. \square

Доказательство теоремы 2. Как следует из утверждения 3, собственные значения λ_i , $i = 3, \dots, n-1$, не влияют на τ^* . Поэтому τ^* можно найти исходя из равенства (II.5).

Обозначим: $W_0(-\tau^*\lambda_2) = u$, $W_0(-\tau^*\lambda_n) = u + iv$.

Отметим, что $-\tau^*\lambda_n$ принадлежит лучу $(-\infty, -e^{-1}]$ (см. рис. 2). Тогда для $W_0(-\tau^*\lambda_n)$ справедливо, что $u = -v \operatorname{ctg} v$.

Итак, из $W_0(-\tau^*\lambda_2) = \operatorname{Re}(W_0(-\tau^*\lambda_n))$ имеем:

$$(II.6) \quad \begin{cases} -\tau^*\lambda_2 = ue^u; \\ -\tau^*\lambda_n = e^u(u \cos v - v \sin v); \\ u = -v \operatorname{ctg} v. \end{cases}$$

Преобразуем второе уравнение системы (II.6):

$$-\tau^*\lambda_n = ue^u \left(\cos v - \frac{v}{u} \sin v \right).$$

В силу того, что $u = -v \operatorname{ctg} v$, имеет место

$$\cos v - \frac{v}{u} \sin v = \cos v + \frac{\sin^2 v}{\cos v} = \frac{1}{\cos v}.$$

Тогда система (II.6) примет вид

$$\begin{cases} -\tau^*\lambda_2 = ue^u; \\ -\tau^*\lambda_n = ue^u \frac{1}{\cos v}; \\ u = -v \operatorname{ctg} v. \end{cases}$$

Из первого и второго уравнений получим

$$v = \arccos(q),$$

где $q = \frac{\lambda_2}{\lambda_n}$. Подставляя полученное выражение в третье уравнение, получим

$$u = -\arccos(q) \operatorname{ctg}(\arccos(q)).$$

Стоит отметить, что

$$\operatorname{ctg}(\arccos(q)) = \frac{\cos(\arccos(q))}{\sin(\arccos(q))} = \frac{q}{\sqrt{1-q^2}}.$$

Тогда $u = -\frac{q}{\sqrt{1-q^2}} \cdot \arccos(q)$. Обозначим это значение через ξ . Тогда значение τ^* можно получить из первого уравнения системы (II.6):

$$\tau^* = -\frac{\xi e^\xi}{\lambda_2},$$

а значение максимальной степени сходимости будет $\zeta_0 = -\frac{\xi}{\tau^*} = \frac{\lambda_2}{e^\xi}$. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Furtat I., Fridman E., Fradkov A.* Disturbance compensation with finite spectrum assignment for plants with input delay // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2017. V. 63. No. 1. P. 298–305.
2. *Seuret A., Dimarogonas D.V., Johansson K.H.* Consensus under communication delays // *47th IEEE Conference on Decision and Control*. Cancun, Mexico. 2008. P. 4922–4927.
3. *Амелина Н.О., Ананьевский М.С., Проскурников А.В. и др.* Проблемы сетевого управления / Под ред. А.Л. Фрадкова. Ижевск: Ин-т комп. исслед., 2015.
4. *Munz U., Papachristodoulou A., Allgower F.* Delay robustness in consensus problems // *Automatica*. 2010. V. 46. No. 8. P. 1252–1265.
5. *Hou W., Fu M., Zhang H., Wu Z.* Consensus conditions for general second-order multi-agent systems with communication delay // *Automatica*. 2017. V. 75. P. 293–298.
6. *Hara S., Hayakawa T., Sugata H.* Stability analysis of linear systems with generalized frequency variables and its applications to formation control // *46-th IEEE Conference on Decision and Control*. New Orleans, USA, 2007. P. 1459–1466.
7. *Агаев Р.П., Хомутов Д.К.* О граничном значении запаздывания и асимптотике непрерывного протокола консенсуса первого порядка // *АиТ*. 2024. № 6. С. 83–96.
8. *Yang W., Wang X., Shi H.* Fast consensus seeking in multi-agent systems with time delay // *Syst. Control Lett.* 2013. V. 62. No. 3. P. 269–276.
9. *Yang W., Bertozzi A.L., Wang X.* Stability of a second order consensus algorithm with time delay // *47th IEEE Conference on Decision and Control*. Cancun, Mexico, 2008. P. 2926–2931.
10. *Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D., et. al.* On the Lambert W function // *Advances in Computational mathematics*. 1996. No. 5. P. 329–359.
11. *Asl F.M., Ulsoy A.G.* Analysis of a system of linear delay differential equations // *J. Dyn. Sys., Meas., Control*. 2003. V. 125. No. 2. P. 215–223.
12. *Shinozaki H., Mori T.* Robust stability analysis of linear time-delay systems by Lambert W function: Some extreme point results // *Automatica*. 2006. V. 42. No. 10. P. 1791–1799.
13. *Jarlebring E., Damm T.* The Lambert W function and the spectrum of some multi-dimensional time-delay systems // *Automatica*. 2007. V. 43. No. 12. P. 2124–2128.
14. *Fasi M., Higham N.J., Iannazzo B.* An algorithm for the matrix Lambert W function // *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. 2015. V. 36. No. 2. P. 669–685.
15. *Yi S., Nelson P.W., Ulsoy A.G.* Analysis and control of time delayed systems via the Lambert W function // *IFAC Proceedings Volumes*. 2008. V. 41. No. 2. P. 13414–13419.
16. *Мичурин Р.А., Николаев В. Т.* Использование W -функций Ламберта при построении области устойчивости систем автоматического управления со звеном запаздывания // *Вест. МГПУ. Серия «Экономика»*. 2013. № 3. Т. 24. С. 191–197.
17. *Дубинов А.Е., Дубинова И.Д., Сайков С.К.* W -функция Ламберта и ее применение в математических задачах физики / РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2006.

18. *Дубинов А.Е., Дубинова И.Д., Сайков С.К.* Характеристические корни и область устойчивости одной динамической системы с запаздыванием // *АиТ.* 2005. № 8. С. 22–23.
19. *Corless R.M., Hare D.E., Jeffrey D.J.* Unwinding the branches of the Lambert W function // *The Mathematical Scientist.* 1996. V. 21. P. 1–7.
20. *Olfati-Saber R.M., Murray R.M.* Consensus Problems in Networks of Agents with Switching Topology and Time-Delays // *IEEE Trans. Automat. Control.* 2004. V. 49. No. 9. P. 1520–1533.
21. *Хомутов Д.К.* Протокол латентного консенсуса со слабыми фоновыми связями и запаздыванием // *Управление большими системами.* 2025. Т. 114. С. 138–155.
22. *Hara T., Sugie J.* Stability region for systems of differential-difference equations // *Funkcialaj Ekvacioj.* 1996. V. 39. No. 1. P. 69–86.
23. *Ramirez A., Sipahi R., Mondie S., Garrido R.* Fast consensus in a large-scale multi-agent system with directed graphs using time-delayed measurements // *Philosophical Transactions of the Royal Society A.* 2019. V. 377. No. 2153. P. 20180130.
24. *Yang W., Wang X., Shi H.* Fast consensus seeking in multi-agent systems with time delay // *Systems & Control Letters.* 2013. V. 62. No. 3. P. 269–276.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.Ю. Чеботарёвым.

Поступила в редакцию 24.05.2025

После доработки 29.10.2025

Принята к публикации 06.11.2025