

© 2026 г. М.В. ХЛЕБНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (khlebnik@ipu.ru),
Д.В. ШАТОВ, канд. техн. наук (dvshatov@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

НАСТРОЙКА НЕХРУПКИХ ПИ-РЕГУЛЯТОРОВ: АНАЛИЗ¹

Статья посвящена анализу хрупкости ПИ-регуляторов. Для оценки хрупкости предзаданного ПИ-регулятора предлагаются два различных подхода, которые могут использоваться независимо друг от друга. Первый основан на идеях эллипсоидального оценивания и технике линейных матричных неравенств. Во втором подходе, опирающемся на так называемое *размыкание по параметру*, исследуемый параметр «выносятся» из системы объект-регулятор, формируя фиктивный контур управления, который после размыкания анализируется классическими частотными методами (критерий Найквиста, D -разбиение). Описаны особенности обоих методов анализа хрупкости, приведены численные примеры.

Ключевые слова: линейная система управления, ПИ-регулятор, хрупкость, линейные матричные неравенства, неравенство Ляпунова, критерий Найквиста, D -разбиение.

DOI: 10.7868/S2413977726020028

1. Введение

ПИД- и ПИ-регуляторы являются наиболее распространенными типами автоматических регуляторов; по различным оценкам (см., например, [1, 2]) к ним относится более 90% используемых в настоящее время регуляторов, и согласно прогнозам на среднесрочный период эта доля по-прежнему останется исключительно большой, около 80%. Столь обширное применение ПИД- и ПИ-регуляторов в промышленности обусловлено рядом обстоятельств. Помимо пригодности для решения большинства практических задач, невысокой стоимости, их востребованность связана с простотой: для настройки ПИ-регулятора необходимо правильно выбрать всего два коэффициента.

Вместе с тем сами процедуры их практической настройки во многом остаются эвристичными: в реальных установках ПИД- и ПИ-регуляторы часто настраиваются вручную исходя из интуитивного понимания технологического процесса и влияния на него отдельных составляющих ПИД-управления. Соответственно, проблема разработки регулярных подходов к их настройке по-прежнему сохраняет свою содержательность и актуальность.

¹ Результаты исследований, представленные в разделах 3 и 5, получены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 25-29-20062), <https://rscf.ru/project/25-29-20062/>

Общий тренд последних десятилетий – это переход к численным методам синтеза ПИ- и ПИД-регуляторов (и их модификаций, называемых регуляторами низкого порядка) на основе решения задач оптимизации, когда выбирается некоторый качественный показатель, по которому осуществляется оптимизация: LQR-подход [3, 4], оптимизация по H_∞ -критерию [5, 6] и другие [7, 8].

В практических задачах в систему управления неизбежно привносится неопределенность, обусловленная неточностью технической реализации самого регулятора или необходимостью настройки его параметров в процессе эксплуатации. При этом оптимальный (в том или ином отношении) регулятор может оказаться «хрупким» в том смысле, что малые вариации его параметров могут привести к значительному снижению качества регулирования или даже к потере устойчивости замкнутой системы. Как следствие, задача построения нехрупких регуляторов, восходящая к работе [9], и, в частности, ПИ-/ПИД-регуляторов, обладает очевидной практической значимостью.

В настоящей работе ставится задача оценки нехрупкости *предзаданных* (или *номинальных*) ПИ-регуляторов и предлагаются два подхода к ее решению.

Первый подход использует для решения этой задачи специальным образом сформированное неравенство Ляпунова, выполнение которого означает существование общей квадратичной функции Ляпунова у множества возмущений параметров предзаданного ПИ-регулятора, лежащего в некотором эллипсе. Подход гарантирует устойчивость при любых (в том числе одновременных и нестационарных) возмущениях параметров, а также позволяет получить эллипсоидальные оценки выходного сигнала системы при действии ограниченных внешних возмущений. В качестве технического средства задействован аппарат линейных матричных неравенств [10, 11].

Второй подход основан на так называемом *размыкании по параметру* [12], используемому для решения задач робастного анализа. Суть метода заключается в представлении замкнутой системы объект-регулятор в специальном виде, когда исследуемый параметр «выносится» из нее, формируя *фиктивный контур управления*. Далее этот контур исследуется с помощью классического метода анализа устойчивости – критерия Найквиста [13]. Подход позволяет проанализировать статические возмущения по каждому из параметров ПИ-регулятора (т.е. найти множество интервалов устойчивости по отдельным параметрам).

Предложенные подходы основаны на различных идеях и могут применяться как независимо, так и совместно, дополняя друг друга. Например, если для объекта заранее не известен стабилизирующий ПИ-регулятор, то пользуясь вторым подходом, можно «нащупать» область стабилизирующих регуляторов, внутри которой естественно воспользоваться первым подходом.

Статья организована следующим образом: раздел 2 посвящен формальной постановке задачи, разделы 3 и 4 содержат основные результаты, раздел 5 – примеры.

В статье используются следующие обозначения: $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора и спектральная норма матрицы, T – символ транспонирования, I – единичная матрица соответствующей размерности, $\lambda_i(A)$ – собственные значения матрицы A , $\sigma(A) \doteq -\max_i \operatorname{Re}(\lambda_i(A)) > 0$ – степень устойчивости гурвицевой матрицы A , а все матричные неравенства понимаются в смысле знакоопределенности матриц; s – символ преобразования Лапласа.

2. Постановка задачи

Рассмотрим линейную непрерывную систему управления

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu + Dw, & x(0) &= x_0, \\ y &= c^T x, \\ z &= Cx, \end{aligned}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$, с состоянием $x(t) \in \mathbb{R}^n$, измеряемым выходом $y(t) \in \mathbb{R}$, регулируемым выходом $z(t) \in \mathbb{R}^r$ и внешним возмущением $w(t) \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющим ограничению

$$(2) \quad \|w(t)\| \leq 1 \quad \text{при всех } t \geq 0,$$

и управлением $u(t) \in \mathbb{R}$ в виде ПИ-регулятора

$$(3) \quad u(t) = -k_1 y(t) - k_2 \int_0^t y(\tau) d\tau.$$

Коэффициенты k_1 и k_2 будем называть *параметрами* ПИ-регулятора (а иногда отождествлять с самим регулятором) и объединять в вектор

$$k = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Следуя [14] и введя в рассмотрение вспомогательную скалярную переменную ξ следующим образом:

$$\dot{\xi} = y, \quad \xi(0) = 0,$$

приходим к уравнениям замкнутой системы

$$\begin{aligned} \dot{g} &= A_{cl}(k)g + D_{cl}w = \begin{pmatrix} A - k_1 bc^T & -k_2 b \\ c^T & 0 \end{pmatrix} g + \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} w, & g(0) &= \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ z &= C_{cl}g = (C \ 0)g, \end{aligned}$$

относительно расширенного вектора состояния

$$g = \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Пусть из каких-либо соображений выбраны числовые параметры

$$k = k^0 = \begin{pmatrix} k_1^0 \\ k_2^0 \end{pmatrix}$$

предзаданного (номинального) ПИ-регулятора (3), стабилизирующего замкнутую систему (1). Далее представляет интерес

Задача 1. В каких пределах могут быть варьированы параметры номинального ПИ-регулятора с параметрами k^0 так, чтобы замкнутая им система (1) сохраняла устойчивость?

Эта задача является частным случаем следующей задачи.

Задача 2. Найти множество стабилизирующих ПИ-регуляторов для системы (1), т.е. построить множество $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^2$ такое, что

$$\max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A_{cl}(k)) < 0 \quad \forall k \in \mathcal{K}.$$

Точное решение задачи 2 дает использование метода D -разбиения [15], позволяющего аналитически построить границу $\partial\mathcal{K}$ множества \mathcal{K} . Однако для практического решения аналогичной задачи для ПИД-регулятора, включающего уже три параметра, D -разбиение не столь удобно.

В следующих разделах предлагаются два подхода к приближенному решению задачи 1, которые предоставляют простые внутренние оценки искомого множества. А именно, в разделе 3 задача исследуется с позиций квадратичной устойчивости и предлагается простой и эффективный подход, дающий эллипсоидальные оценки множества \mathcal{K} , а также строится нехрупкий ограничивающий эллипсоид. Второй подход, описанный в разделе 4, позволяет строить множество \mathcal{K} в виде интервалов устойчивости по каждому из параметров ПИ-регулятора в отдельности, описано применение данного подхода в качестве граничного оракула.

3. Анализ хрупкости ПИ-регулятора на основе эллипсоидального оценивания

3.1. Оценка радиуса нехрупкости ПИ-регулятора

Введем обозначения

$$A_0 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ c^T & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} c^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

при этом

$$A_{cl}(k) = A_0 + Fk^T H.$$

Придавая параметрам (3) стабилизирующего ПИ-регулятора k^0 возмущения

$$k_1^0 + \delta_1, \quad k_2^0 + \delta_2,$$

получаем вектор $k^0 + \delta$ возмущенных параметров регулятора. При этом полагаем, что возмущения принадлежат некоторому эллипсу

$$(4) \quad \delta = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}(R) = \{\delta \in \mathbb{R}^2: \delta^T R^{-1} \delta \leq 1\}, \quad R \succ 0.$$

Зададимся задачей отыскания наибольшего (по некоторому критерию) эллипса (4) такого, что система (1), замкнутая стабилизирующим ПИ-регулятором с параметрами k^0 , сохраняет устойчивость при всех возмущениях

$$\delta = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} \in \text{int}\mathcal{E}(R)$$

его параметров. В частности, важен вопрос нахождения наибольшего *радиуса нехрупкости* $\rho(k)$ – такого, что система (1) сохраняет устойчивость при всех возмущениях $\delta: \|\delta\| < \rho$ параметров заданного ПИ-регулятора.

Рассмотрим матрицу так называемой *возмущенной* системы – замкнутой регулятором с «возмущенными» параметрами:

$$(5) \quad A_{\text{cl}}(k^0 + \delta) = A_0 + F(k^0 + \delta)^T H = A_{\text{cl}}(k^0) + F\delta^T H.$$

Как хорошо известно (см., например, [11]), выполнение неравенства Ляпунова

$$(A_{\text{cl}}(k^0) + F\delta^T H)^T Q + Q(A_{\text{cl}}(k^0) + F\delta^T H) \prec 0$$

с некоторой матрицей $0 \prec Q \in \mathbb{S}^{n+1}$ при всех *допустимых* неопределенностях δ означает, что у семейства (5) есть общая квадратичная функция Ляпунова $V(x) = x^T Q x$, а само семейство робастно квадратично устойчиво.

Перепишем последнее неравенство в виде

$$A_{\text{cl}}^T(k^0)Q + QA_{\text{cl}}(k^0) + H^T \delta F^T Q + QF\delta^T H \prec 0$$

или

$$A_{\text{cl}}^T(k^0)Q + QA_{\text{cl}}(k^0) + H^T R^{1/2} \bar{\delta} F^T Q + QF\bar{\delta}^T R^{1/2} H \prec 0$$

относительно неопределенности $\bar{\delta} \doteq R^{-1/2} \delta$, $\|\bar{\delta}\| \leq 1$, и воспользуемся леммой Питерсена [16].

В результате приходим к матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} A_{\text{cl}}^T(k^0)Q + QA_{\text{cl}}(k^0) + \varepsilon H^T R H & QF \\ F^T Q & -\varepsilon I \end{pmatrix} \prec 0$$

относительно скалярной переменной ε и матричных переменных $Q, R \succ 0$. Заметив, что полученное ЛМН однородно по совокупности переменных, положим $\varepsilon = 1$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Разрешимость ЛМН

$$\begin{pmatrix} A_{\text{cl}}^{\text{T}}(k^0)Q + QA_{\text{cl}}(k^0) + H^{\text{T}}RH & QF \\ F^{\text{T}}Q & -I \end{pmatrix} \prec 0$$

относительно матричных переменных $0 \prec Q \in \mathbb{S}^{n+1}$ и $0 \prec R \in \mathbb{S}^2$ эквивалентна квадратичной устойчивости семейства $A_{\text{cl}}(k^0 + \delta)$ при всех допустимых неопределенностях δ .

Теперь несложно предложить простые внутренние оценки области допустимости неопределенности δ , минимизируя тот или иной критерий при ЛМН-ограничении, установленном в лемме 1.

Как известно (см. подробнее [11]), объем эллипсоида вида

$$(6) \quad \mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^{\text{T}}P^{-1}x \leq 1\}, \quad P \succ 0$$

равен $c_n \sqrt{\det P}$, где c_n – объем единичного шара в n -мерном пространстве, при этом функция $f(X) = -\log \det X$ матричного аргумента $X \succ 0$ является выпуклой. Соответственно, максимизация объема (в рассматриваемом двумерном случае – площади) эллипса производится следующим образом.

Лемма 2. Пусть \hat{R}_{area} – решение задачи

$$\min(-\log \det R)$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} A_{\text{cl}}^{\text{T}}(k^0)Q + QA_{\text{cl}}(k^0) + H^{\text{T}}RH & QF \\ F^{\text{T}}Q & -I \end{pmatrix} \prec 0, \quad Q \succ 0, \quad R \succ 0,$$

где оптимизация проводится по матричным переменным $Q \in \mathbb{S}^{n+1}$ и $R \in \mathbb{S}^2$. Тогда система (1), замкнутая стабилизирующим ПИ-регулятором (3) с параметрами k^0 , сохраняет устойчивость при всех возмущениях $\delta = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$ его параметров таких, что

$$\delta^{\text{T}} \hat{R}_{\text{area}}^{-1} \delta < 1.$$

Оптимизировать эллипс неопределенностей можно и по другим критериям, например максимизируя радиус содержащегося в нем круга (в то же время это позволяет найти максимальный размах неопределенности δ). Как известно, условие вида

$$P \succcurlyeq \gamma I$$

означает, что эллипсоид вида (6) содержит шар радиуса $\sqrt{\delta}$ с центром в начале координат (см. подробнее [11, Замечание 2.2.3]). Это приводит к следующему утверждению.

Лемма 3. Пусть $\hat{\gamma}$, \hat{R}_{axis} – решение задачи

$$\max \gamma$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} A_{\text{cl}}^T(k^0)Q + QA_{\text{cl}}(k^0) + H^T R H & QF \\ F^T Q & -I \end{pmatrix} \prec 0, \quad R \succcurlyeq \gamma I, \quad Q \succ 0,$$

где оптимизация проводится по матричным переменным $Q \in \mathbb{S}^{n+1}$, $R \in \mathbb{S}^2$ и скалярной переменной γ . Тогда система (1), замкнутая стабилизирующим ПИ-регулятором (3) с параметрами k^0 , сохраняет устойчивость при всех возмущениях $\delta = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$ его параметров таких, что

$$\delta^T \hat{R}_{\text{axis}}^{-1} \delta < 1,$$

и, в частности, таких что

$$\|\delta\| < \sqrt{\hat{\gamma}}.$$

Таким образом, радиус нехрупкости $\rho(k^0)$ заданного ПИ-регулятора с параметрами k^0 определяется величиной $\sqrt{\hat{\gamma}}$.

Замечание 1. Последнее утверждение леммы 3 можно получить проще: достаточно положить $R = rI$, что приводит к следующему утверждению. Пусть \hat{r} – решение задачи

$$\max r \quad \text{при ограничениях} \quad \begin{pmatrix} A_{\text{cl}}^T(k^0)Q + QA_{\text{cl}}(k^0) + rH^T H & QF \\ F^T Q & -I \end{pmatrix} \prec 0, \quad Q \succ 0,$$

где оптимизация проводится по матричной переменной $Q \in \mathbb{S}^{n+1}$ и скалярной переменной r . Тогда система (1), замкнутая стабилизирующим ПИ-регулятором (3) с параметрами k^0 , сохраняет устойчивость при всех возмущениях $\delta = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$ его параметров таких, что

$$\|\delta\| < \sqrt{\hat{r}}.$$

3.2. Нехрупкий ограничивающий эллипсоид

Теперь естественно задаться оценением влияния неопределенностей в параметрах регулятора на критерий качества в той или иной задаче управления, ассоциированной с системой (1). В настоящей работе рассмотрим классическую задачу подавления неслучайных ограниченных внешних возмущений (2). Один из эффективных подходов к ее решению предполагает нахождение минимального ограничивающего эллипсоида, содержащего регулируемый выход системы (1) (см. подробнее [11]).

В рамках задачи анализа по-прежнему предполагаем предзаданным стабилизирующий ПИ-регулятор (3) с параметрами k^0 . Задача состоит в нахождении минимального эллипсоида, который будет ограничивающим по выходу z при всех возмущениях δ параметров этого регулятора таких, что $\|\delta\| \leq \gamma < \rho$. Будем его называть *нехрупким ограничивающим эллипсоидом*, соответствующим уровню нехрупкости γ .

Согласно [11] минимальный (по так называемому критерию следа – путем минимизации суммы квадратов длин его полуосей) ограничивающий эллипсоид для регулируемого выхода системы (1), замкнутой ПИ-регулятором с параметрами k^0 , задается матрицей $C_{cl} \tilde{P} C_{cl}^T$, где \tilde{P} – решение параметризованной задачи полуопределенного программирования

$$\min \operatorname{tr} C_{cl} P C_{cl}^T$$

при ограничении

$$A_{cl}(k^0)P + P A_{cl}^T(k^0) + \alpha P + \frac{1}{\alpha} D_{cl} D_{cl}^T \preceq 0,$$

а оптимизация проводится по матричной переменной $0 \prec P \in \mathbb{S}^{n+1}$ и скалярному параметру $\alpha > 0$.

Воспользовавшись этим результатом и перейдя к матрице (5) возмущенной системы, имеем условие

$$(A_{cl}(k^0) + F\delta^T H)P + P(A_{cl}(k^0) + F\delta^T H)^T + \alpha(\delta)P + \frac{1}{\alpha(\delta)} D_{cl} D_{cl}^T \preceq 0,$$

которое должно выполняться при всех δ : $\|\delta\| \leq \gamma$. Предположим, что существует число α такое, что полученное матричное неравенство выполняется при всех допустимых значениях δ . Представим его в виде

$$A_{cl}(k^0)P + P A_{cl}^T(k^0) + \alpha P + \frac{1}{\alpha} D_{cl} D_{cl}^T + P H^T \delta F^T + F \delta^T H P \preceq 0$$

и воспользуемся леммой Питерсена [16], учитывая уровень нехрупкости γ путем соответствующего масштабирования матрицы F . В результате приходим к соотношению

$$A(k^0)P + P A^T(k^0) + \alpha P + \frac{1}{\alpha} D_{cl} D_{cl}^T + \varepsilon \gamma^2 F F^T + \frac{1}{\varepsilon} P H^T H P \preceq 0$$

или эквивалентно

$$\begin{pmatrix} A_{cl}(k^0)P + P A_{cl}^T(k^0) + \alpha P + \frac{1}{\alpha} D_{cl} D_{cl}^T + \varepsilon \gamma^2 F F^T & P H^T \\ H P & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

которое должно выполняться при некотором скалярном $\varepsilon > 0$. Таким образом, установлена справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. Пусть \widehat{P} – решение задачи

$$\min \operatorname{tr} C_{\text{cl}} P C_{\text{cl}}^{\text{T}}$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} A_{\text{cl}}(k^0)P + P A_{\text{cl}}^{\text{T}}(k^0) + \alpha P + \frac{1}{\alpha} D_{\text{cl}} D_{\text{cl}}^{\text{T}} + \varepsilon \gamma^2 F F^{\text{T}} & P H^{\text{T}} \\ H P & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preceq 0, \quad P \succ 0,$$

где оптимизация проводится по матричной переменной $P \in \mathbb{S}^{n+1}$, скалярной переменной ε и скалярному параметру $\alpha > 0$.

Тогда эллипсоид с матрицей $C_{\text{cl}} \widehat{P} C_{\text{cl}}^{\text{T}}$ является нехрупким ограничивающим эллипсоидом для выхода z системы (1) при $x_0 = 0$, замкнутой стабилизирующим ПИ-регулятором (3) с параметрами k^0 , соответствующим допустимому уровню нехрупкости γ .

Замечание 2. В рамках обсуждаемого подхода несложно учесть и случай ненулевого начального условия. При этом к ограничениям теоремы добавляется ЛМН

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0^{\text{T}} \\ x_0 & P \end{pmatrix} \succ 0,$$

означающее, что точка x_0 принадлежит инвариантному эллипсоиду с матрицей P , см. подробнее [11].

4. Анализ хрупкости ПИ-регулятора методом размыкания по параметру

4.1. Идея подхода

В данном разделе описан подход к анализу хрупкости ПИ-регулятора в частотной области на основе так называемого *размыкания по параметру* [12]. Этот подход позволяет найти следующую оценку множества \mathcal{K} из задачи 2: для известного стабилизирующего регулятора с параметрами k^0 при одном фиксированном параметре $k_i^0 = \text{const}$, $i = 1, 2$, определяется интервал (или объединение интервалов) устойчивости по второму параметру k_j , $j = 1, 2$, $i \neq j$.

Объект управления (1) при записи в форме «вход–выход» имеет вид

$$(7) \quad a(s)y = b(s)u,$$

где $b(s)$ и $a(s)$ – полиномы числителя и знаменателя передаточной функции объекта $b(s)/a(s) = c^{\text{T}}(sI - A)^{-1}b$.

Преобразуем по Лапласу уравнение ПИ-регулятора (3):

$$(8) \quad u = -\frac{k_1 s + k_2}{s} y.$$

Это дает передаточную функцию разомкнутой системы (с учетом замыкания отрицательной обратной связью в критерии Найквиста)

$$w_o(s) = \frac{b(s)}{a(s)} \frac{k_1 s + k_2}{s},$$

которой соответствует характеристический полином замкнутой системы

$$D(s) = a(s)s + b(s)(k_1 s + k_2).$$

Критерий Найквиста [13] позволяет по годографу амплитудно-фазовой частотной характеристики $w_o(j\omega)$ проанализировать устойчивость полинома $D(s)$. При этом мерой робастности системы управления в классической теории автоматического управления являются запасы устойчивости по фазе и модулю (частотные «отрезковые» критерии устойчивости в [13]).

Эти же классические инструменты анализа устойчивости и робастности используются при размыкании по параметру [12]. Продемонстрируем использование этого метода для анализа хрупкости номинального стабилизирующего ПИ-регулятора k^0 по параметру k_1 .

Введем обозначения:

$$\tilde{u} \doteq -k_1^0 \tilde{y}, \quad \tilde{y} \doteq y,$$

где \tilde{u} и \tilde{y} – фиктивные управление и выход объекта соответственно; тогда уравнения объекта (7) можно представить как

$$\begin{aligned} a(s)y = b(s)\left(\tilde{u} - \frac{k_2^0}{s}y\right) &\Rightarrow \left(a(s) + \frac{k_2^0 b(s)}{s}\right)\tilde{y} = b(s)\tilde{u} \Rightarrow \\ \Rightarrow \tilde{y} = \frac{sb(s)}{sa(s) + k_2^0 b(s)}\tilde{u} &\Rightarrow \tilde{y} = \tilde{w}_1(s)\tilde{u}. \end{aligned}$$

Получаем фиктивный контур управления, состоящий из передаточной функции $\tilde{w}_1(s)$ фиктивного объекта управления, замкнутого статическим регулятором $-k_1^0$. Выполнив аналогичное размыкание по параметру k_2 (обозначив $\tilde{u} = -k_2^0 \tilde{y}$), получим следующую передаточную функцию фиктивного объекта управления:

$$\tilde{w}_2(s) = \frac{b(s)}{s(a(s) + k_1^0 b(s))}.$$

Легко убедиться в справедливости следующего утверждения.

Лемма 4. Характеристические полиномы, полученные при замыкании передаточных функций разомкнутых фиктивных контуров, совпадают с характеристическим полиномом $D(s)$ исходной замкнутой системы (7), (8).

Действительно, указанные разомкнутые передаточные функции записываются как

$$(9) \quad \tilde{w}_{oi}(s) = k_i^0 \tilde{w}_i(s), \quad i = 1, 2,$$

что дает при замыкании $D(s)$ и где знак обратной связи в критерии Найквиста учитывается аналогично $w_o(s)$. Это означает, что по (9) можно судить об устойчивости системы (7), (8).

Отметим еще один важный факт: обе передаточные функции (9) содержат параметры ПИ-регулятора в качестве сомножителей. Тогда поиск интервалов устойчивости замкнутой системы по параметрам k_i , $i = 1, 2$, сводится к исследованию точек пересечения вещественной оси соответствующими годографами Найквиста $\text{Im}\{\tilde{w}_{oi}(j\omega)\} = 0$, $i = 1, 2$. В [15] показано, что такой подход эквивалентен одномерному D -разбиению полинома $D(s) = \tilde{a}_i(s) + k_i \tilde{b}_i(s)$, где $\tilde{b}_i(s)$ и $\tilde{a}_i(s)$ – числитель и знаменатель соответствующей передаточной функции $\tilde{w}_{oi}(s)$.

4.2. Процедура анализа хрупкости

На примере параметра k_1 опишем процедуру поиска интервалов устойчивости по $\tilde{w}_{o1}(s)$ при условии, что все корни $b(s)$ ненулевые, а среди корней $\tilde{a}(s)$ нет нулевых или чисто мнимых.

1. Годограф $\tilde{w}_{o1}(j\omega)$ начинается и заканчивается в точке $(0, j0)$ при изменении ω от 0 до ∞ , т. е. он образует замкнутый контур. Решим полиномиальное уравнение $\text{Im}\{\tilde{w}_{o1}(j\omega)\} = 0$, $\omega \in [0, \infty)$, и обозначим его решения через ω_i , $i = 1, \dots, r$.

Вычислим значения $g_i = \text{Re}\{\tilde{w}_{o1}(j\omega_i)\}$, $i = 1, \dots, r$, и каждому g_i поставим в соответствие показатель $f_i \in \{0, \pm 1/2, \pm 1\}$, $i = 1, \dots, r$, определяемый по следующему правилу [13, с. 141]:

$$f_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \text{Im}\{\tilde{w}_{o1}(j(\omega_i - \epsilon))\} < 0 \text{ и } \text{Im}\{\tilde{w}_{o1}(j(\omega_i + \epsilon))\} > 0; \\ 1/2, & \text{если } \tilde{w}_{o1}(\omega_i) - \text{начало годографа и } \text{Im}\{\tilde{w}_{o1}(j(\omega_i + \epsilon))\} > 0; \\ 0, & \text{если } \text{Im}\{\tilde{w}_{o1}(j(\omega_i - \epsilon))\} \cdot \text{Im}\{\tilde{w}_{o1}(j(\omega_i + \epsilon))\} > 0, \quad i = 1, \dots, r, \\ -1/2, & \text{если } \tilde{w}_{o1}(\omega_i) - \text{начало годографа и } \text{Im}\{\tilde{w}_{o1}(j(\omega_i + \epsilon))\} < 0; \\ -1, & \text{если } \text{Im}\{\tilde{w}_{o1}(j(\omega_i - \epsilon))\} > 0 \text{ и } \text{Im}\{\tilde{w}_{o1}(j(\omega_i + \epsilon))\} < 0, \end{cases}$$

где $\epsilon > 0$ – достаточно малое число, для которого выполняется

$$\epsilon \ll \min_i |\omega_i - \omega_{i-1}|, \quad i = 2, 3, \dots, r.$$

2. По критерию устойчивости Найквиста [13] для того, чтобы замкнутая система была устойчивой, число охватов частотной характеристикой $\tilde{w}_{o1}(j\omega)$ против часовой стрелки критической точки $-1/k_1$ должно равняться $s_{\bar{a}}/2$, где $s_{\bar{a}}$ – число неустойчивых корней полинома $\tilde{a}(s)$, для устойчивой $\tilde{w}_{o1}(j\omega)$ имеем $s_{\bar{a}} = 0$, следовательно, для устойчивости в замкнутом виде ее частотная характеристика не должна охватывать критическую точку.

Число охватов критической точки может меняться только в точках вещественной оси g_i , $i = 1, \dots, r$. Охват по часовой стрелке происходит при $f_i > 0$, а против – при $f_i < 0$; при $f_i = 0$ число охватов не меняется.

Отсортируем значения g_i , $i = 1, \dots, r$, по возрастанию и изменим соответствующим образом индексацию g_i и f_i .

3. Рассмотрим сначала случай, когда $g_i < 0$, $i = 1, \dots, r - 1$, и $g_r = 0$.

Разобьем вещественную ось на открытые интервалы

$$(-\infty, g_1), (g_1, g_2), \dots, (g_{r-1}, g_r), (g_r, \infty).$$

Для первого интервала $(-\infty, g_1)$ число охватов частотной характеристикой критической точки равно нулю, и замкнутая система будет устойчива только, если $\tilde{w}_1(s)$ устойчива, при этом имеем следующие границы изменений параметра k_1 :

$$k_1^{[-\infty]} \in \left[0, -\frac{k_1^0}{g_1}\right).$$

Левая граница включена в интервал, так как разомкнутая система (7) устойчива.

Для остальных интервалов, начиная со второго, будем проверять выполнение равенства

$$(10) \quad \sum_{i=1}^q f_i = -\frac{s_{\bar{a}}}{2}, \quad q = 1, \dots, r - 1,$$

где q – индекс левой границы рассматриваемого интервала (g_q, g_{q+1}) .

Для всех интервалов, где выполняется (10), замкнутая система устойчива, тогда для конкретного q -го интервала имеем следующие границы изменений параметра k_1 :

$$k_1^{[-q]} \in \left(-\frac{k_1^0}{g_q}, -\frac{k_1^0}{g_{q+1}}\right).$$

Полная область устойчивости представляет собой объединение всех интервалов устойчивости $\bigcup k_1^{[-q]}$.

4. В общем случае g_i , $i = 1, \dots, r$, могут быть разных знаков или равняться нулю.

Для всех $g_i < 0$ выполняем действия из п. 3. При $g_i = 0$ устойчивость замкнутой системы определяется по передаточной функции разомкнутой системы (9).

Для оставшихся $g_i > 0$ выполняем следующий прием: меняем знаки одновременно у $g_i > 0$ и соответствующих им f_i , что соответствует смене знака обратной связи в замкнутой системе, и далее выполняем действия из п. 3 с той разницей, что для q -го интервала устойчивости его границы вычисляются как

$$k_1^{[+q]} \in \left(\frac{k_1^0}{g_q}, \frac{k_1^0}{g_{q+1}}\right),$$

при этом для интервала (g_r, ∞) соответствующий интервал устойчивости обозначим как

$$k_1^{[+\infty]} \in \left(\frac{k_1^0}{g_r}, 0 \right).$$

Полная область устойчивости определяется так же, как в п. 3.

Отметим, что если одновременно имеется устойчивость в интервалах $k_1^{[-\infty]}$ и $k_1^{[+\infty]}$, то их можно объединить в один общий интервал $k_1^{[\infty]}$. Однако для точек g_i , которым соответствуют $f_i = 0$ (число охватов не меняется!), при устойчивых интервалах $k_1^{[-(i-1)]}$ и $k_1^{[-i]}$ такое объединение проводить нельзя.

Замечание 3. При исследовании передаточной функции \tilde{w}_{oi} общего вида, содержащей нулевые или чисто мнимые полюсы, описанная выше процедура сохраняется, однако усложняется учет числа охватов (см. исследование передаточной функции \tilde{w}_{o2} , имеющей один нулевой полюс, в примере 2).

Развитый подход дает полное описание интервалов устойчивости, даже если регулятор k^0 не является стабилизирующим. В этом случае подход также позволяет обнаружить интервалы устойчивости (при их наличии) по одному параметру регулятора при фиксированном втором.

4.3. Процедура анализа хрупкости как граничный оракул

Предложенная в предыдущем разделе процедура анализа хрупкости может эффективно использоваться в качестве *граничного оракула* для приближенного описания области стабилизирующих ПИ- (а также и ПИД-) регуляторов. Оно основывается на модификации известного в англоязычной литературе под названием *Hit-and-Run* [15, 17] варианта метода Монте-Карло, позволяющего эффективно генерировать точки, равномерно распределенные внутри некоторой области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$, которая в общем случае не предполагается ни выпуклой, ни связной.

Идея метода Hit-and-Run состоит в последовательном выполнении трех следующих шагов:

1) через текущую точку $x_i \in \mathcal{D}$ в случайном направлении $d \in \mathbb{R}^m$ проводится прямая $x_i + \tau d$, $\tau \in (-\infty, \infty)$;

2) с помощью так называемого граничного оракула находятся точки пересечения этой прямой с границей области \mathcal{D} ;

3) следующая точка x_{i+1} выбирается на полученном отрезке (в многосвязном случае – отрезках) случайным образом, после чего процесс повторяется.

Результаты раздела 4.2 позволяют реализовать граничный оракул, предоставляя точки пересечения границы области \mathcal{K} стабилизирующих ПИ-регуляторов с прямой $k + \tau d$, где k – некоторый стабилизирующий ПИ-регулятор, а $d \in \mathbb{R}^2$ – одно из двух направлений

$$\tilde{d}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{d}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

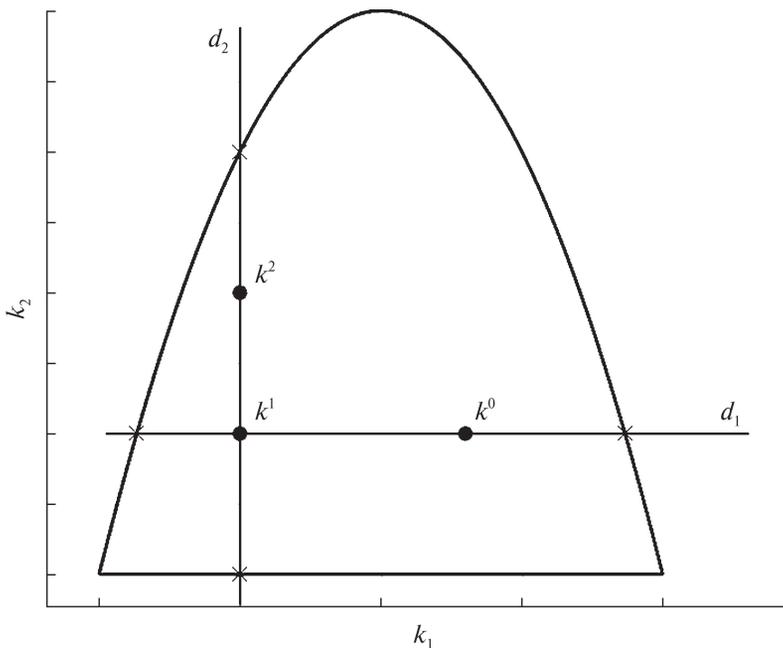


Рис. 1. Общая схема покоординатной версии метода Hit-and-Run.

совпадающих с направлениями координатных осей плоскости (k_1, k_2) . Соответственно, в предлагаемой – покоординатной – модификации метода Hit-and-Run в текущей точке k^i направление $d^i \in \mathbb{R}^2$ выбирается не случайным образом, а как

$$d^i = \begin{cases} \tilde{d}_1, & \text{если } i \bmod 2 = 1; \\ \tilde{d}_2, & \text{если } i \bmod 2 = 0, \end{cases}$$

т.е. направления \tilde{d}_1 и \tilde{d}_2 выбираются поочередно.

На рис. 1 в плоскости параметров (k_1, k_2) показаны первые две итерации метода Hit-and-Run в предложенной модификации. Поскольку размерность области \mathcal{K} стабилизирующих ПИ-регуляторов равна двум (для ПИД-регулятора – трем), это упрощение не является излишне ограничительным; рассматриваемые ниже примеры подтверждают эффективность соответствующей процедуры.

5. Примеры

Пример 1. Рассмотрим линейризованную модель объекта первого порядка с запаздыванием, широко распространенную на практике [18]:

$$(11) \quad \frac{\kappa}{Ts + 1} e^{-\tau s} \rightarrow \frac{\kappa(-\tau s/2 + 1)}{(Ts + 1)(\tau s/2 + 1)},$$

где κ – коэффициент усиления, T – постоянная времени, τ – запаздывание.

В пространстве состояний модель описывается системой вида (1) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где

$$(12) \quad a_1 = \frac{2T + \tau}{T\tau}, \quad a_2 = \frac{2}{T\tau}, \quad b_1 = -\frac{\kappa}{T}, \quad b_2 = \frac{2\kappa}{T\tau}.$$

Приняв в качестве параметров исходной модели

$$(13) \quad \kappa = 2,7, \quad T = 8,4, \quad \tau = 1,6,$$

имеем

$$A = \begin{pmatrix} -1,3690 & 1 \\ -0,1488 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -0,3214 \\ 0,4018 \end{pmatrix}.$$

Зададимся стабилизирующим регулятором с параметрами [19]

$$k^0 = \begin{pmatrix} 0,832 \\ 0,120 \end{pmatrix}.$$

Леммы 2 и 3 дают эллипсы допустимых возмущений с матрицами

$$\widehat{R}_{\text{area}} = \begin{pmatrix} 0,6343 & 0 \\ 0 & 0,0135 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \widehat{R}_{\text{axis}} = \begin{pmatrix} 0,1021 & 0 \\ 0 & 0,0144 \end{pmatrix}$$

соответственно; при этом радиус нехрупкости $\rho(k^0) = 0,12$.

На рис. 2 жирными линиями показано множество \mathcal{K} стабилизирующих ПИ-регуляторов, найденное с помощью D -разбиения (см. подробнее [15]), а также эллипсы допустимых возмущений: точечной линией показан эллипс $\mathcal{E}_{\text{area}}$, полученный путем максимизации его площади, пунктирной линией – эллипс $\mathcal{E}_{\text{axis}}$, полученный путем максимизации длины его наименьшей полуоси, а тонкой сплошной линией – круг с радиусом нехрупкости $\rho(k^0)$. Точкой показан ПИ-регулятор с параметрами k^0 .

Выберем в качестве регулируемого выхода все состояние системы: $z = x$, т.е. $C = I$ и положим $D = b$. Минимальный ограничивающий эллипс для системы, замкнутой ПИ-регулятором с параметрами k^0 , определяется матрицей

$$C_{\text{cl}} \widetilde{P} C_{\text{cl}}^T = \begin{pmatrix} 3,5473 & 3,5892 \\ 3,5892 & 6,2562 \end{pmatrix}.$$

Теперь зададимся уровнем нехрупкости $\gamma = 0,02$. Теорема 1 дает матрицу

$$C_{\text{cl}} \widehat{P} C_{\text{cl}}^T = \begin{pmatrix} 5,0026 & 5,0881 \\ 5,0881 & 9,0666 \end{pmatrix}$$

нехрупкого ограничивающего эллипса, соответствующего заданному уровню нехрупкости.

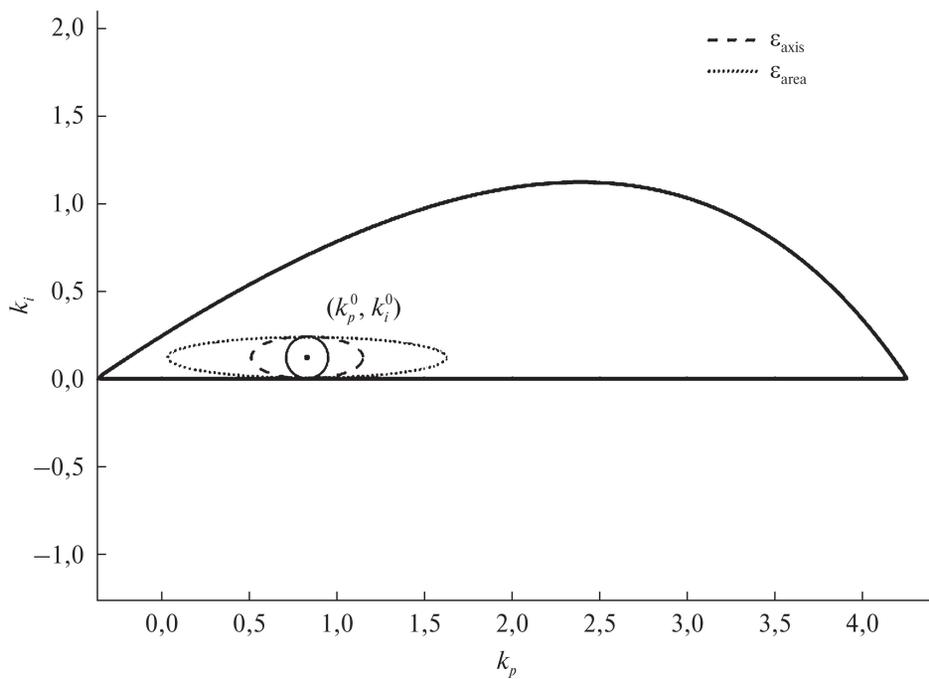


Рис. 2. Эллипсы допустимых возмущений.

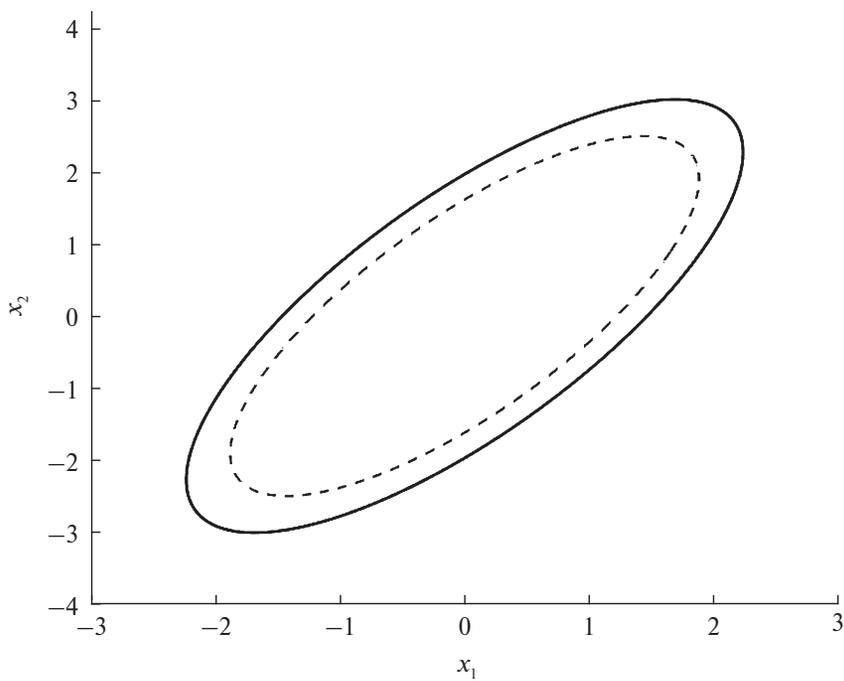


Рис. 3. Нехрушкий ограничивающий эллипс.

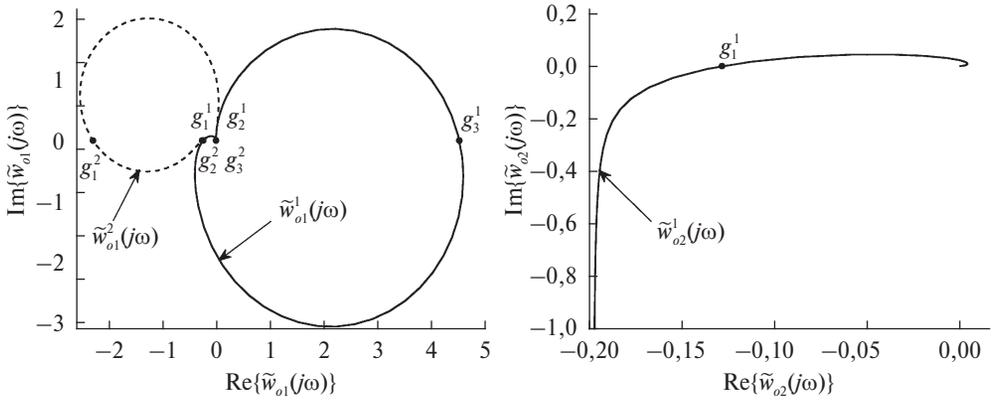


Рис. 4. Частотная характеристика разомкнутой системы: слева – $\tilde{w}_{o1}^i(j\omega)$, $i = 1, 2$, справа – $\tilde{w}_{o2}^1(j\omega)$.

На рис. 3 пунктиром показан минимальный ограничивающий эллипс, построенный без учета требования нехрупкости, а сплошной линией – найденный нехрупкий ограничивающий эллипс; по критерию следа он превышает минимальный примерно на 40%.

Здесь и далее численное моделирование выполнялось в среде MATLAB с использованием программного пакета *svx* [20].

Пример 2. Вернемся к объекту из примера 1. Передаточная функция (11), записанная в форме (7), имеет вид

$$(s^2 + a_1s + a_2)y = (b_1s + b_2)u$$

или, с учетом (12)–(13),

$$(s^2 + 1,369s + 0,149)y = (-0,321s + 0,402)u.$$

Исследуем описанной в разделе 4 процедурой хрупкость двух стабилизирующих ПИ-регуляторов с параметрами

$$k^1 = \begin{pmatrix} k_1^1 \\ k_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,1 \end{pmatrix}, \quad k^2 = \begin{pmatrix} k_1^2 \\ k_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}.$$

Начнем с параметра k_1 . В соответствующих передаточных функциях (9) верхним индексом укажем параметр какого из ПИ-регуляторов k^1 или k^2 исследуется (аналогичные обозначения будем использовать и для всех параметров процедуры анализа хрупкости), что дает

$$\tilde{w}_{o1}^1(s) = \frac{-0,321s^2 + 0,402s}{s^3 + 1,369s^2 + 0,117s + 0,0402},$$

$$\tilde{w}_{o1}^2(s) = \frac{-0,321s^2 + 0,402s}{s^3 + 1,369s^2 - 0,012s + 0,201}.$$

Их частотные характеристики показаны на рис. 4 слева: сплошной линией показана $\tilde{w}_{o1}^1(j\omega)$, а пунктирной – $\tilde{w}_{o1}^2(j\omega)$.

Полиномиальные уравнения $\text{Im}\{\tilde{w}_{o1}^i(j\omega)\} = 0$, $i = 1, 2$, имеют решения:

$$\begin{aligned}\omega_1^1 &= 0, & \omega_2^1 &= 0,1670, & \omega_3^1 &= 1,3417; \\ \omega_1^2 &= 0, & \omega_2^2 &= 0,4043, & \omega_3^2 &= 1,2393,\end{aligned}$$

что дает соответствующие пары значений g_i^j и f_i^j , $j = 1, 2$, $i = 1, 2, 3$ (отсортированные по возрастанию g_i^j):

$$\begin{aligned}\{g_1^1 = -0,2387, f_1^1 = 1\}, & \quad \{g_2^1 = 0, f_2^1 = 1/2\}, & \quad \{g_3^1 = 4,5263, f_3^1 = -1\}; \\ \{g_1^2 = -2,2907, f_1^2 = -1\}, & \quad \{g_2^2 = -0,2596, f_2^2 = 1\}, & \quad \{g_3^2 = 0, f_3^2 = 1/2\},\end{aligned}$$

которые изображены на рис. 4 слева: значения g_i^1 – над вещественной осью, а g_i^2 – под ней.

Сначала рассмотрим $\tilde{w}_{o1}^2(j\omega)$, так как для нее расположение точек g_i^2 , $i = 1, 2, 3$, совпадает с предположением из п. 3 процедуры анализа хрупкости. Передаточная функция $\tilde{w}_{o1}^2(s)$ имеет пару неустойчивых комплексно-сопряженных полюсов, следовательно, для нее $s_a^2 = 1$, а условие (10) выполняется только для $q = 1$ на интервале (g_1^2, g_2^2) , что дает следующий интервал изменений:

$$k_1^{[-1]} \in (0,4366, 3,8523).$$

Передаточная функция $\tilde{w}_{o1}^1(s)$ устойчивая ($s_a^1 = 0$), но g_i^1 , $i = 1, 2, 3$, имеют разные знаки и необходимо пользоваться п. 4 процедуры анализа хрупкости ПИ-регулятора. Анализ g_i^1 показывает, что устойчивыми являются $k_1^{[-\infty]}$ и $k_1^{[+\infty]}$, которые можно объединить, окончательно получив

$$k_1^{[\infty]} \in (-0,2209, 4,1898).$$

При исследовании параметра k_2 можно выбрать любой из регуляторов k^1 и k^2 , так как $k_1^1 = k_1^2 = 1$. Будем использовать k^1 , соответствующая передаточная функция (9) имеет вид

$$\tilde{w}_{o2}^1(s) = \frac{-0,0321s + 0,0402}{s(s^2 + 1,048s + 0,551)},$$

которая является нейтральной: имеет один нулевой полюс при остальных устойчивых ($s_a^1 = 0$).

Частотная характеристика $\tilde{w}_{o2}^1(j\omega)$ изображена на рис. 4 справа. Полиномиальное уравнение $\text{Im}\{\tilde{w}_{o2}^1(j\omega)\} = 0$ имеет решение $\omega_1 = 0,547$, которое дает пару

$$\{g_1^2 = -0,128, f_1^2 = 1\}.$$

Устойчивость имеет место на интервале $(-\infty, g_1^2)$ или в пересчете в параметр k_2

$$k_2^{[-\infty]} \in (0, 0,781),$$

где нуль не включен в левую границу, так как $\tilde{w}_{o2}^1(s)$ не является асимптотически устойчивой.

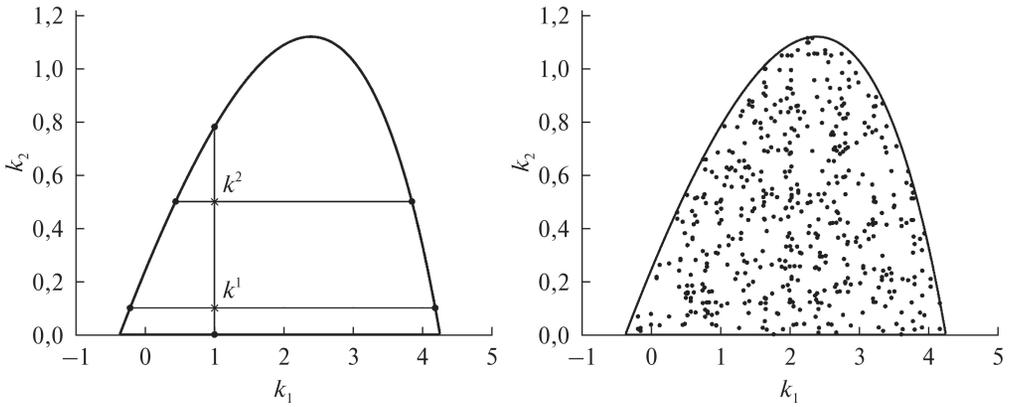


Рис. 5. Сравнение с D -разбиением: слева – анализ хрупкости k^1 и k^2 ; справа – реализация метода Hit-and-Run.

На рис. 5 слева в плоскости параметров (k_1, k_2) жирными линиями показано множество стабилизирующих ПИ-регуляторов, найденное с помощью D -разбиения [15], крестиками отмечены регуляторы с параметрами k^1 и k^2 , а тонкими линиями – найденные интервалы устойчивости для каждого рассмотренного параметра.

На рис. 5 справа показаны результаты работы покоординатной версии метода Hit-and-Run (см. раздел 4.3). В качестве стартовой точки был выбран ПИ-регулятор с параметрами $k^2 = (1, 0,5)^T$ и сгенерировано 500 точек.

Пример 3. Рассмотрим объект (7) вида

$$(s^3 + s^2 + s + 1)y = (s^2 + 2s + 5)u,$$

который управляется ПИ-регулятором с параметрами $k = (2, 0,01)^T$.

Проведем анализ хрупкости по параметру $k_1 = 2$ с помощью процедуры из раздела 4. Передаточная функция (9) запишется как

$$\tilde{w}_{o1}(s) = \frac{2s^3 + 4s^2 + 10s}{s^4 + s^3 + 1,01s^2 + 1,02s + 0,05};$$

она имеет одну пару неустойчивых комплексно-сопряженных полюсов и для нее $s_{\bar{a}} = 1$. Частотная характеристика $\tilde{w}_{o1}(j\omega)$ показана на рис. 6.

Полиномиальное уравнение $\text{Im}\{\tilde{w}_{o1}(j\omega)\} = 0$ имеет решение

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0,3045, \quad \omega_3 = 0,944, \quad \omega_4 = 1,7396,$$

что дает соответствующие пары значений g_i и f_i , $i = 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned} \{g_1 = -1,9679, f_1 = -1\}, \quad \{g_2 = 0, f_2 = 1/2\}, \\ \{g_3 = 10,5841, f_3 = -1\}, \quad \{g_4 = 63,8024, f_4 = 1\}, \end{aligned}$$

которые показаны на рис. 6.

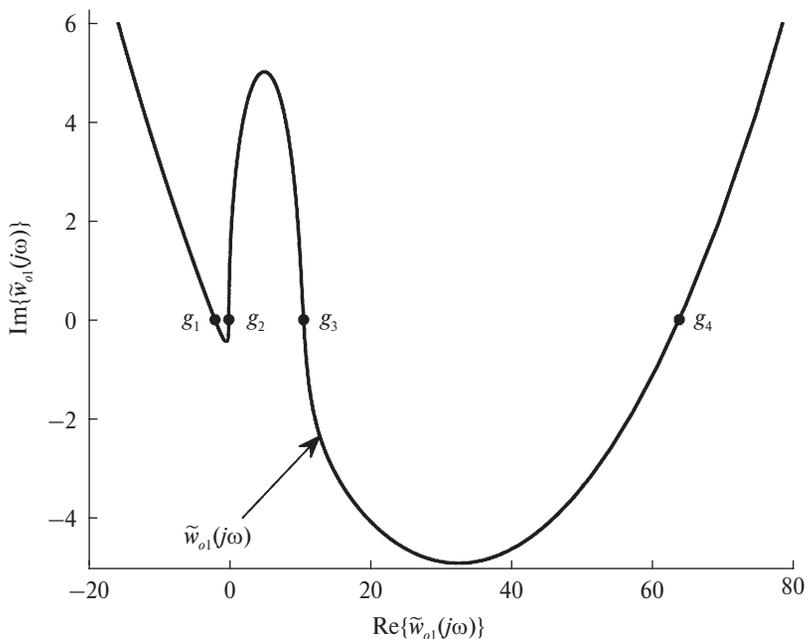


Рис. 6. Частотная характеристика разомкнутой системы $\tilde{w}_{o1}(j\omega)$.

Условие (10) выполняется на интервалах (g_1, g_2) и (g_3, g_4) , поэтому при $k_2 = 0,01$ замкнутая система будет устойчивой на интервалах

$$\bigcup_q k_1^{[q]}, \quad q \in \{-1, +3\},$$

где

$$k_1^{[-1]} \in (1,0163, \infty), \quad k_1^{[+3]} \in (-0,189, -0,0313).$$

6. Заключение

В статье предлагаются два подхода к анализу хрупкости ПИ-регуляторов. Первый из них, основанный на технике линейных матричных неравенств, позволяет для номинального стабилизирующего ПИ-регулятора эффективно строить эллипсоидальные оценки допустимых неопределенностей параметров ПИ-регулятора, при которых система остается квадратично устойчивой. Также предложен метод построения нехрупкого ограничивающего эллипсоида.

Второй подход, использующий критерий Найквиста, предоставляет интервалы статических изменений по каждому из параметров ПИ-регулятора, при которых сохраняется устойчивость замкнутой системы. Описано использование данного подхода в качестве граничного оракула в версии метода Hit-and-Run.

Оба подхода просты в реализации и используют стандартные функции большинства современных программных средств, предназначенных для инженеров.

Естественным дальнейшим развитием является распространение полученных результатов на анализ хрупкости ПИД-регуляторов, а также применение предложенных подходов для решения задач синтеза нехрупких ПИ- и ПИД-регуляторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А.Г., Паленов М.В. Состояние и перспективы развития адаптивных ПИД-регуляторов // *АиТ*. 2014. № 2. С. 16–30.
Alexandrov A.G., Palenov M.V. Adaptive PID controllers: State of the art and development prospects // *Autom. Remote Control*. 2014. V. 75. No. 2. P. 188–199.
2. The IFAC Newsletter. No. 2. April, 2019. URL https://www.ifac-control.org/newsletter_archive/IFAC_Newsletter_2019_2_April.pdf
3. He J.-B., Wang Q.-G., Lee T.-H. PI/PID controller tuning via LQR approach // *Chemical Engineering Science*. 2000. V. 55. I. 13. P. 2429–2439.
4. Поляк Б.Т., Хлебников М.В. Новые критерии настройки ПИД-регуляторов // *АиТ*. 2022. № 11. С. 62–82.
Polyak B.T., Khlebnikov M.V. New criteria for tuning PID Controllers // *Autom. Remote Control*. 2022. V. 83. No. 11. P. 1724–1741.
5. Грязина Е.Н., Поляк Б.Т., Тремба А.А. Синтез регуляторов низкого порядка по критерию H_∞ : параметрический подход // *АиТ*. 2007. № 3. С. 94–105.
Gryazina E.N., Polyak B.T., Tremba A.A. Design of the low-order controllers by the H_∞ criterion: A parametric approach // *Autom. Remote Control*. 2007. V. 68. No. 3. P. 456–466.
6. Han S., Keel L.H., Bhattacharyya S.P. PID controller design with an H_∞ criterion // *IFAC-PapersOnLine*. 2018. V. 51. I. 4. P. 400–405.
7. Jin L., Kim Y.C. Fixed, low-order controller design with time response specifications using non-convex optimization // *ISA Transactions*. 2008. V. 47. I. 4. P. 429–438.
8. Hast M., Astrom K.J., Bernhardsson B., Boyd S. PID Design by convex-concave optimization // *Proc. 2013 European Control Conference (ECC)*. Zurich, Switzerland, 2013. P. 4460–4465.
9. Keel L.H., Bhattacharyya S.P. Robust, fragile, or optimal? // *IEEE Trans. Autom. Control*. 1997. V. 42. No. 8. P. 1098–1105.
10. Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia: SIAM, 1994.
11. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
12. Честнов В.Н. Подход к задаче синтеза допусков на параметры линейных многомерных систем // *Известия АН. Теория и системы управления*. 1995. № 2. С. 72–79.
13. Цыпкин Я.З. *Основы теории автоматического управления*. М.: Наука, 1977.

14. *Хлебников М.В.* Синтез ПИ-регулятора для подавления внешних возмущений // *АиТ.* 2023. № 8. С. 3–23.
Khlebnikov M.V. PI controller design for suppressing exogenous disturbances // *Autom. Remote Control.* 2023. V. 84. No. 8. P. 901–917.
15. *Грязина Е.Н., Поляк Б.Т., Тремба А.А.* Современное состояние метода D-разбиения // *АиТ.* 2008. № 12. С. 3–40.
Gryazina E.N., Polyak B.T., Tremba A.A. D-Decomposition technique state-of-the-art // *Autom. Remote Control.* 2008. V. 69. No. 12. P. 1991–2026.
16. *Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Лемма Питерсена о матричной неопределенности и ее обобщения // *АиТ.* 2008. № 11. С. 125–139.
Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. Petersen’s lemma on matrix uncertainty and its generalization // *Autom. Remote Control.* 2008. V. 69. No. 11. P. 1932–1945.
17. *Smith R.L.* Efficient Monte Carlo procedures for generating points uniformly distributed over bounded regions // *Oper. Res.* 1984. V. 32. No. 6. P. 1296–1308.
18. *Åström K.J., Hägglund T.* Benchmark Systems for PID Control // *IFAC Proceedings Volumes.* 2000. V. 33. No. 4. P. 165–166.
19. *Shatov D.V.* PI and PID controllers design for tracking systems via LQ criterion // *Proc. 2023 5th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA).* Lipetsk, 2023. P. 551–556.
20. *Grant M., Boyd S.* CVX: Matlab software for disciplined convex programming, version 2.1. URL <http://cvxr.com/cvx>

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.В. Пакиным.

Поступила в редакцию 09.07.2025

После доработки 27.08.2025

Принята к публикации 01.09.2025