

© 2026 г. А.И. ГЛУЩЕНКО, д-р техн. наук (aiglush@ipu.ru),
К.А. ЛАСТОЧКИН, канд. физ.-мат. наук (lastconst@yandex.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ОБЗОР МЕТОДОВ ПОСТРОЕНИЯ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ СОСТОЯНИЙ ДЛЯ СИСТЕМ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В обзоре дается сравнительная характеристика условий реализуемости основных методов построения наблюдателей состояний линейных динамических SISO систем (систем с одним входом и одним выходом) с неизвестными параметрами. Отличительной особенностью работы является сравнение между собой наблюдателей состояний, синтезируемых на базе методов робастного, инвариантного и адаптивного управления. Обзор написан без излишних математических деталей и своей целью ставит ознакомление широкого круга читателей с основными принципами построения и функционирования наблюдателей состояний линейных систем с неизвестными параметрами.

Ключевые слова: наблюдатели состояний, параметрическая неопределенность, робастность, инвариантность, адаптивность.

DOI: 10.7868/S2413977726020019

1. Введение

Наблюдатели состояний – это специальные алгоритмы, реализуемые в программной среде и позволяющие по доступной априорной информации и онлайн измерениям входа и выхода в каждый момент времени восстанавливать неизмеряемые состояния системы. Появление и развитие наблюдателей состояний является ответом математического сообщества на стремление инженеров повысить надежность и упростить конструкцию системы измерений как составной части автоматизированной системы управления. Наиболее широкое внедрение наблюдатели получили в автоматизированном электроприводе, где на сегодняшний день большинство систем управления синхронными и асинхронными приводами реализуется средствами бездатчикового управления [1]. Такого успеха невозможно было бы достичь без глубокой теоретической проработки задачи оценивания состояний.

Математическая теория построения наблюдателей зародилась с работами Д. Люенбергера [2] и Р. Калмана [3], которые соответственно поставили детерминированную и стохастическую задачи оценивания. К настоящему времени эти две параллельные задачи получили невероятное число расщеплений и обобщений как в непрерывном, так и в дискретном времени. Это

обстоятельство заставляет авторов этой работы ограничиться рассмотрением и анализом лишь только малой части из имеющихся результатов и наработок. Читателям, желающим более глубоко погрузиться и широко охватить проблематику, рекомендуем обратиться к обзорам [4, 5] и книгам [6–12].

В этой работе будем рассматривать самый простой случай линейной динамической системы с одним входом и одним выходом, причем будем изучать восстановление состояний такой системы в ее исходной форме записи (физических состояний), а не виртуальных состояний ее канонических форм. Если матрицы такой системы заранее точно известны и выполнен критерий наблюдаемости, то наблюдатель Люенбергера [2] является решением задачи оценивания и позволяет с заданной экспоненциальной скоростью сходимости восстановить неизмеряемые состояния. Однако как решать задачу, если матрицы системы неизвестны или известны недостаточно точно? Поиск ответа на этот вопрос параллельно занимаются теории робастного [8–10], инвариантного [7, 8, 11] и адаптивного [12] управления¹.

Робастные наблюдатели. Эта группа в основном связана с совершенствованием (и созданием новых) оффлайн методов расчета параметров корректирующей обратной связи в базовой структуре наблюдателя Люенбергера. Разрабатываются и совершенствуются различные методы расчета, позволяющие на этапе параметрического синтеза наблюдателя заложить гарантии качества оценивания неизмеряемых состояний системы в условиях параметрической неопределенности и дополнительно решить некоторые задачи оптимизации (\mathcal{H}_2 -, \mathcal{H}_∞ -норм передаточной функции, квадратичного функционала в линейно-квадратичной задаче, размера инвариантного (или ограничивающего) эллипсоида в задачах, связанных с подавлением внешних возмущений и пр.). Общими ограничениями робастных методов является необходимость *i*) априорного знания амплитуды возмущения и размаха параметрической неопределенности, *ii*) удовлетворения параметрической неопределенности системы специальным параметризацией. Подходы этой группы в разное время развивали зарубежные и отечественные исследователи, такие как S. Bhattacharyya, J. Doyle, K. Zhou, H. Kwakernaak, I. Petersen, B. Barmish, R. Tempo, W. Schmitendorf, F. Jabbari, D. Bernstein, M. Corless, C.H. Lien, de Souza C.E., Geromel J.C., D. Peaucelle, Б.Т. Поляк, М.В. Хлебников, П.С. Щербаков, И.Г. Владимиров, А.П. Курдюков, Д.В. Баландин, М.М. Коган, А.Г. Александров, В.Н. Честнов, С.К. Коровин, В.В. Фомичев, А.В. Ушаков, Р.О. Оморов и др.

Оценивание на базе теории инвариантности. Основанием методов этой группы является идея обеспечения нечувствительности процесса восстановления неизмеряемых состояний по отношению к параметрическим и/или сигнальным возмущениям. Инвариантность достигается с помощью алгебраического исключения обобщенного возмущения из уравнений ошибки на-

¹ Здесь приведены ссылки на книги, обобщающие и систематизирующие основные результаты в упомянутых областях.

блюдения или с помощью силового подавления его влияния на ошибку оценивания корректирующими обратными связями в классе функций с большими коэффициентами или разрывными сигналами. Условиями реализуемости наблюдателей на базе теории инвариантности является, во-первых, знание размаха неопределенности системы (для попадания на поверхность скольжения), а во-вторых, выполнение строгих условий согласованности по выходу (для существования поверхности скольжения). Приложение методов теории инвариантности к задаче восстановления состояний прежде всего связано с именами С. Edwards, S.K. Spurgeon, B.L. Walcott, T. Floquet, J.-P. Barbot, M. Darouach, P. Kudva, S. Zak, A. Levant, L. Fridman, Y. Shtessel, K. Khalil, J. Slotine, В.И. Уткин, А.С. Позняк, С.А. Краснова, В.А. Уткин, А.Н. Жирабок и др.

Адаптивные наблюдатели. Наблюдатели из этой группы одновременно выполняют оценку неизмеряемых состояний и идентификацию неизвестных параметров системы. Благодаря этой, в сущности простой, идее использование информации о размахе параметрической неопределенности при синтезе не требуется. Вместо этого классические адаптивные наблюдатели для асимптотической сходимости оценок состояний к истинным значениям требуют выполнения условия неисчезающего возбуждения некоторой функции от измеряемых сигналов (управления и выхода). В течение продолжительного периода времени это условие ограничивало практический интерес к методам адаптивного восстановления состояний, поскольку в различных интерпретациях и трактовках оказалось эквивалентно *i)* глобальному частотному богатству управления со степенью, равной динамическому порядку системы, *ii)* полной наблюдаемости расширенной системы (состояния + неизвестные параметры). Усилиями G. Chowdharry, R. Ortega, Y. Pan, S.B. Roy, А.А. Бобцова, С.В. Арановского и многих других исследователей это условие удалось ослабить до требования конечного возбуждения регрессора, эквивалентного частотному богатству управления на интервале времени или локальной полной наблюдаемости расширенной системы. Развитие методов синтеза адаптивных наблюдателей состояний во многом определили К. Narendra, G. Luders, R. Carroll, D. Lindorf, G. Kreisselmeier, A. Annaswamy, P. Ioannou, R. Marino, P. Tomei, A. Isidori, R. Ortega, S.B. Roy, D. Efimov, А.А. Бобцов, В.О. Никифоров, А.А. Пыркин, С.В. Арановский, Н.Н. Карабутов и др.

Целью этой работы является сравнение между собой условий реализуемости наблюдателей состояний, синтезируемых на базе этих трех теорий. Актуальность проведения такого сравнительного анализа авторы видят в двух обстоятельствах. Во-первых, использование наблюдателей в практических задачах требует от инженера выбора алгоритма, наилучшим образом соответствующего условиям решаемой прикладной задачи. Это, в свою очередь, требует знания основных методов построения наблюдателей состояний и условий их применимости. В компактной форме такую информацию и предоставляет эта обзорная работа, позволяющая ознакомиться с основными существующими подходами. Во-вторых, исследователи, развивающие одну теорию оцени-

вания (робастную, инвариантную или адаптивную), не всегда, но очень часто говорят на разных языках с коллегами, работающими над решением той же задачи, но с помощью методов из другой теории. Авторы надеются, что этот обзор позволит улучшить ситуацию и достичь большего взаимопонимания между упомянутыми группами, что в перспективе приведет к обогащению новыми подходами всех трех теорий.

Разумеется, представить исчерпывающе полный обзор невозможно, поэтому заметим, что в этой работе обсуждаются результаты, наиболее интересные с субъективной точки зрения авторов и в основном касающиеся задачи восстановления физических, а не виртуальных координат состояний. При этом авторы не только не снимают с себя ответственности перед *i*) читателями за субъективизм и неполноту информации, *ii*) исследователями за возможное отсутствие ссылок на их работы по рассматриваемой тематике, но и надеются получить обратную связь, которая несомненно будет полезна.

Обзор имеет следующую структуру. В разделе 2 актуальность задачи оценивания вектора состояний демонстрируется с точки зрения задачи стабилизации линейного объекта с постоянными параметрами. В разделах 3–5 подробно рассмотрены существующие подходы к построению наблюдателей с помощью методов робастного, инвариантного и адаптивного управления соответственно. Раздел 6 посвящен анализу применимости оценок, формируемых рассмотренными наблюдателями, для целей управления по обратной связи. Обзор завершается общими выводами, представленными в разделе 7. Область научных интересов авторов связана с адаптивной теорией управления, поэтому в структуре обзора методам построения адаптивных наблюдателей уделено большее внимание.

В дальнейшем тексте использованы следующие обозначения: $|\cdot|$ есть абсолютное значение, $\|\cdot\|$ – векторная или матричная норма, $I_{n \times n} = I_n$ – единичная матрица размерности $n \times n$, $0_{n \times n}$ – нулевая матрица размерности $n \times n$, 0_n – нулевой вектор длины n , $\det\{\cdot\}$ обозначает определитель, $\text{adj}\{\cdot\}$ – союзная матрица, $\text{tr}\{\cdot\}$ – след матрицы, $\text{rank}(\cdot)$ – ранг матрицы, $\dim(\cdot)$ – размерность вектора или матрицы, $\sigma\{\cdot\}$ – спектр матрицы, $\text{sign}(\cdot)$ – функция знака, $\ln(\cdot)$ – натуральный логарифм, $\text{vec}(\cdot)$ – операция векторизации матрицы, $\text{mat}(\cdot)$ – операция, обратная операции векторизации, $\text{diag}\{\cdot\}$ – диагональная матрица. Минимальное и максимальное собственное число матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ обозначается соответственно $\lambda_{\min}(A) = \min_i (\text{Re}\{\lambda_i(A)\})$ и $\lambda_{\max}(A) = \max_i (\text{Re}\{\lambda_i(A)\})$, где $i = 1, \dots, n$. Для обозначения экспоненциальной скорости сходимости используется латинская аббревиатура exr . Для некоторого отображения $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ его Якобиан определяется как $\nabla_x \mathcal{F}(x) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}(x)$. Также используется тот факт, что для любой (возможной, вырожденной) матрицы M размерностью $n \times n$ выполняется следующее: $\text{adj}\{M\}M = \det\{M\}I_{n \times n}$, и $f \in L_q$ означает $\int_{t_0}^t \|f(s)\|^q ds < \infty$ для всех $t \geq t_0$.

2. Взгляд на задачу оценивания через призму задачи управления

Многие реальные технические системы с достаточной точностью могут быть описаны линейными моделями с постоянными параметрами (здесь и далее рассматриваются системы “один вход – один выход”):

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0, \\ y(t) &= C^T x(t), \end{aligned}$$

где $t \geq t_0 \geq 0$ – время, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – неизмеряемые физические состояния с неизвестными начальными условиями x_0 , $u(t) \in \mathbb{R}$ – измеряемый сигнал или формируемое управление, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ – неизвестная матрица и вектор, $C \in \mathbb{R}^n$ – известный вектор, формирующий измеряемый выход $y(t) \in \mathbb{R}$. Пары (C^T, A) и (A, B) полностью наблюдаемы и управляемы соответственно (определения и критерии управляемости и наблюдаемости могут быть найдены в [6, 13]).

Одной из базовых проблем теории управления является решение задачи стабилизации, т.е. приведение состояний линейных систем из произвольных ограниченных начальных состояний x_0 к началу координат. Если пара матриц (A, B) известна и управляема, то эта задача может быть решена с использованием обратной связи по состоянию:

$$(2.2) \quad u(t) = -Kx(t),$$

где строка $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ выбрана из условия $\lambda_{\max}(A - BK) < 0$ и может быть рассчитана, например, модальным методом [14, 15]:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} AM - MA_{ref} &= Bh, \\ K &= hM^{-1}, \end{aligned}$$

где матрица A_{ref} и вектор h выбираются так, что $\sigma\{A\} \cap \sigma\{A_{ref}\} = \emptyset$, а пара (h, A_{ref}) наблюдаема.

Однако поскольку состояния системы недоступны для измерения, а параметры матриц A и B неизвестны по постановке, обратная связь (2.2) нереализуема, и естественным образом возникает задача синтеза динамической обратной связи в следующих видах:

$$(2.4a) \quad u(t) = -K_r \hat{x}(t),$$

$$(2.4б) \quad u(t) = -\hat{K}(t) \hat{x}(t),$$

где:

(2.4a) – робастная динамическая обратная связь (K_r обеспечивает $\lambda_{\max}(A - BK_r) < 0$ для всех матриц A и B , принадлежащих некоторым известным семействам);

(2.4б) – адаптивная динамическая обратная связь (законы изменения $\hat{K}(t)$ и $\hat{x}(t)$ совместно обеспечивают асимптотическую устойчивость положения

равновесия системы (2.1)). В частном случае $\hat{K}(t)$ может быть оценкой параметров K модального регулятора (2.2), (2.3).

Для реализации обратных связей (2.4а) и (2.4б) требуется формирование оценок состояний системы (2.1) таким образом, что:

$$(2.5) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{x}(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}(t) - x(t)\| = 0,$$

где $\hat{x}(t)$ – оценка состояний системы, $\tilde{x}(t)$ – ошибка восстановления/наблюдения/оценивания.

Далее в обзоре делается акцент на методах решения задачи (2.5) с помощью результатов теорий робастного, инвариантного и адаптивного управления, а вопросы построения закона формирования динамического коэффициента $\hat{K}(t)$ и формул (процедур) расчета параметров K_r почти везде выносятся за рамки обзора.

В этой связи в целях корректного анализа методов из литературных источников принимается выполненным следующее классическое допущение.

Допущение 1. Реализуемое в системе управление $u(t)$ ограничено и для всех моментов времени обеспечивает ограниченность состояний $x(t)$.

Замечание 1. Кроме рассмотренной в этом разделе проблемы стабилизации системы по динамической обратной связи, для которой, как уже поминалось ранее, вместо $\hat{x}(t)$ может быть достаточно оценок виртуальных состояний канонической наблюдаемой формы системы, практика изобилует другими задачами, требующими оценки вектора неизмеряемых физических состояний системы $x(t)$. Например, это диагностика отказов, мониторинг и регистрация неизмеряемых переменных технологических процессов, построение цифровых двойников и другие прикладные задачи. Поэтому цель определена именно в форме (2.5).

3. Робастные наблюдатели

Стандартный наблюдатель Люенбергера описывается следующим уравнением:

$$(3.1) \quad \dot{\hat{x}}(t) = A_n \hat{x}(t) + B_n u(t) + L(y(t) - C^T \hat{x}(t)), \quad \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0,$$

где $A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица номинальных параметров системы, $B_n \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ – матрица номинальных коэффициентов усиления по управлению, $L \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ – вектор корректора, пара (C^T, A_n) наблюдаема.

Если в системе (2.1) реализуются равенства $A = A_n$, $B = B_n$, то, как следует из уравнения (в этом разделе обзора переопределим $e(t) = -\tilde{x}(t)$):

$$(3.2) \quad \dot{e}(t) = (A_n - LC^T)e(t), \quad e(t_0) = x_0 - \hat{x}_0,$$

наблюдатель (3.1) решает поставленную задачу (2.5) при гурвицевости $A_n - LC^T$.

Если $A \neq A_n$ и/или $B \neq B_n$, то вместо (3.2) приходим к следующему уравнению:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \dot{e}(t) &= Ax(t) + Bu(t) - A_n \hat{x}(t) - B_n u(t) - L(y(t) - C^T \hat{x}(t)) \pm A_n x(t) = \\ &= (A_n - LC^T)e(t) + (B - B_n)u(t) + (A - A_n)x(t). \end{aligned}$$

Робастные наблюдатели состояний основываются на идее обеспечения выполнения целевого условия (2.5) не для одной пары известных матриц A_n, B_n , а для некоторого заранее заданного и известного семейства матриц. С точки зрения устойчивости траекторий системы (3.3) можно выделить две различные ситуации.

Задача фильтрации. Допущение 1 выполнено, сигнал $u(t)$ измеряем, но недоступен для формирования. В этих условиях наблюдатель (3.1) не позволяет решить поставленную задачу (2.5) без дополнительных ограничений на класс сигнала $u(t)$. Если $u \in L_2$, то поставленная цель (2.5) может быть достигнута, и дополнительно возникает задача \mathcal{H}_∞ -фильтрации, т.е. назначения заданного $\gamma > 0$ отношения L_2 нормы ошибки $e(t)$ к L_2 норме сигнала $u(t)$:

$$(3.4) \quad \sqrt{\int_{t_0}^{\infty} e^2(s) ds} \leq \gamma \sqrt{\int_{t_0}^{\infty} u^2(s) ds}.$$

Если же $u \in L_\infty$ и A гурвицева, то (3.1) обеспечивает только сходимость ошибки оценивания в некоторую ограниченную область фазового пространства, и возникает задача ее минимизации в некотором смысле.

Задача о линейном динамическом регуляторе. Управление есть линейная функция от состояний наблюдателя, т.е. $u(t) = -K_r \hat{x}(t)$, а коэффициенты обратной связи K_r , наряду с вектором корректора L доступны для назначения. В этой ситуации путем совместного расчета K_r и L возможно обеспечить достижение цели (2.5).

Для решения этих задач в робастной теории выполняют параметризацию имеющих в матрицах A и B параметрических неопределенностей. Например, часто используется структурированная форма (такие возмущения еще называют ограниченными по норме) [16]:

$$(3.5) \quad A = A_n + F_A \Delta_A H_A, \quad B = B_n + F_B \Delta_B H_B,$$

где матричные неопределенности $\Delta_A \in \mathbb{R}^{p_A \times q_A}$ и $\Delta_B \in \mathbb{R}^{p_B \times q_B}$ удовлетворяют ограничениям

$$\|\Delta_A\| \leq 1, \quad \|\Delta_B\| \leq 1,$$

а весовые матрицы $F_A \in \mathbb{R}^{n \times p_A}$, $H_A \in \mathbb{R}^{q_A \times n}$, $F_B \in \mathbb{R}^{n \times p_B}$, $H_B \in \mathbb{R}^{q_B \times n}$ известны.

Альтернативным вариантом является аффинная параметризация [17]:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} R(q) &= (A(q), B(q)) \in \mathcal{R}, \\ \mathcal{R} &:= \left\{ R(q) : R(q) = \sum_{i=1}^s q_i R_i; \sum_{i=1}^s q_i = 1, q_i \geq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Независимо от выбранной параметризации неопределенности обычно дополнительно предполагается, что A_n гурвицева (этого всегда можно добиться путем предварительной коррекции номинальной части системы).

Рассмотрим возможные решения задачи фильтрации и управления линейным динамическим регулятором при наличии структурированной (3.5) или аффинной (3.6) неопределенности.

3.1. Задача робастной фильтрации

Поскольку в задаче фильтрации вход $u(t)$ предполагается недоступным для формирования, то успех ее решения полностью зависит от априорных предположений о классе этого сигнала. Различают задачи фильтрации в стохастической постановке (например, $u(t)$ – случайный белый шум с нулевым средним) и детерминированной (например, $u \in L_2$ или $u \in L_\infty$). В этом обзоре ограничимся рассмотрением некоторых решений задачи фильтрации в детерминированной постановке.

3.1.1. \mathcal{H}_∞ -фильтрация

Задача \mathcal{H}_∞ -фильтрации состоит в получении оценки состояний $\hat{x}(t)$ такой, что при $u \in L_2$ выполнено условие (2.5) и при $x_0 = 0$ для заданного $\gamma > 0$ верно (3.4) для всех неопределенностей (3.5) или (3.6).

На сегодняшний день решение этой задачи получено как для структурированных (3.5), так и для аффинных (3.6) неопределенностей (см. соответственно [18, 19] и [20–23]). Для структурированной неопределенности решение получается в терминах решений двух связанных уравнений Риккати (2-Риккати подход). Для случая аффинной неопределенности решения получаются в терминах линейных матричных неравенств, выводимых на базе квадратичных функций Ляпунова, как не зависящих [20, 21], так и зависящих [22, 23] от параметра. Для подробного сравнительного обзора существующих решений рекомендуем заинтересованному читателю ознакомиться с монографией [9]. В данной работе ограничимся описанием одного алгоритма, доставляющего (2.5) и (3.4) при аффинной неопределенности.

Решение задачи \mathcal{H}_∞ -фильтрации, как правило, строится с помощью наблюдателя, задаваемого следующим уравнением:

$$(3.7) \quad \dot{\hat{x}}(t) = G\hat{x}(t) + Ly(t), \quad \hat{x}(t) = \hat{x}_0.$$

В отличие от (3.1) здесь входной сигнал $u(t)$ при формировании оценок состояний не используется, а для расчета доступен не только вектор корректора L , но и матрица G , которая более не фиксируется равной номинальной матрице системы A_n . Процедуру расчета этих параметров дает следующая теорема.

Теорема 1. Пусть \hat{Y}_1, \hat{Y}_2 и \hat{P}_1, \hat{P}_2 – решения линейных матричных неравенств (ЛМН)

$$(3.8) \quad \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_2 \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} \Omega_{1,i} + \Omega_{1,i}^T & Y_1 + \Omega_{2,i}^T & P_1 B_i & I \\ * & Y_1 + Y_1^T & P_2 B_i & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad \forall i = 1, \dots, s,$$

где

$$\Omega_{1,i} = P_1 A_i + Y_2 C^T, \quad \Omega_{2,i} = P_2 A_i + Y_2 C^T,$$

относительно $Y_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y_2 \in \mathbb{R}^n$ и $P_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ при заданном $\gamma > 0$.

Тогда параметры $G = \hat{P}_2^{-1} \hat{Y}_1$, $L = \hat{P}_2^{-1} \hat{Y}_2$ доставляют выполнение целевых условий (2.5) и (3.4).

Доказательство приведено в [9].

У наблюдателя (3.7), рассчитанного путем решения ЛМН (3.8), можно выделить три основных проблемы. Во-первых, это выполнение цели (2.5) только при удовлетворении неопределенностью заранее принятой параметризации (3.6), что, на самом деле, свойственно всем робастным решениям. Во-вторых, это излишний консерватизм, заложенный в процедуре синтеза и связанный с использованием общей функции Ляпунова для s вершин многогранника (3.6). В-третьих, это достижение цели (2.5) только при выполнении ограничительного условия $u \in L_2$. Для решения второй проблемы в [22, 23] развиты процедуры, решающие задачу (3.4) на основе функции Ляпунова, зависящей от параметра.

3.1.2. Метод инвариантных эллипсоидов

В более распространенном на практике случае $u \notin L_2$, $u \in L_\infty$ и при гурвицевости матрицы $A_n - LC^T$ на основании (3.3) можно сделать вывод только об асимптотической сходимости ошибки оценивания по норме в некоторую трубку:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| \leq e_{\max},$$

где e_{\max} зависит как от оценки сверху на сигнал $(B - B_n)u(t) + (A - A_n)x(t)$, так и от выбранного вектора корректора L .

Более аккуратное описание асимптотического поведения ошибки для этой ситуации может быть получено с помощью понятия инвариантного эллипсоида системы.

Определение 1. Эллипсоид с центром в начале координат

$$\mathcal{E}_e = \{e \in \mathbb{R}^n: e^T P_e^{-1} e \leq 1\}, \quad P_e > 0$$

называется инвариантным для системы (3.3) + (3.5), если при всех неопределенностях $\|\Delta_A\| \leq 1$, $\|\Delta_B\| \leq 1$ и всех управлениях $|u(t)| \leq 1$ верно:

- 1) $e_0 \in \mathcal{E}_e \Rightarrow e(t) \in \mathcal{E}_e$ для всех $t \geq t_0$;
- 2) $e_0 \notin \mathcal{E}_e \Rightarrow e(t) \rightarrow \mathcal{E}_e$ при $t \rightarrow \infty$.

Матрица $P_e \in \mathbb{R}^{n \times n}$ называется матрицей эллипсоида \mathcal{E}_e .

Очевидно, что для рассматриваемой системы (3.3) существует бесконечно много инвариантных эллипсоидов. Так как достичь цели (2.5) в задаче фильтрации при $u \in L_\infty$, $A \neq A_n$ и/или $B \neq B_n$ оказывается невозможно средствами робастного управления, то остается только попытаться заключить ошибку $e(t)$ в минимальный из всех эллипсоидов. Минимальность эллипсоида можно понимать по-разному, наиболее часто в литературе в качестве критерия минимальности принимается минимизация суммы квадратов полуосей эллипсоида или, эквивалентно, минимизация следа матрицы P_e эллипсоида [13]. Строго задача минимизации суммы квадратов полуосей эллипсоида формулируется следующим образом.

Предположим, что сигнал $u(t)$ ограничен $|u(t)| \leq 1$ (такое ограничение всегда удается выполнить путем нормировки). Тогда требуется рассчитать вектор корректора $L \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, обеспечивающий выполнение для траекторий системы (3.3) целевых условий (1) и (2) из определения 1, где матрица эллипсоида \mathcal{E}_e имеет минимальный след $\text{tr } P_e$.

Решение такой задачи строится следующим образом. Рассматривают расширенную систему:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_n + F_A \Delta_A H_A & 0 \\ F_A \Delta_A H_A & A_n - LC^T \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}}_{g(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_n + F_B \Delta_B H_B \\ F_B \Delta_B H_B \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} u(t),$$

заклучают состояния $g(t)$ в эллипсоид \mathcal{E}_g , задаваемый матрицей

$$P = \begin{bmatrix} P_x & 0 \\ 0 & P_e \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \quad P > 0,$$

и минимизируют эллипсоид, задаваемый матрицей P_e . В результате с помощью технических приемов, основанных на втором методе Ляпунова, леммы Питерсена [24], S-процедуры и леммы Шура, можно получить следующий результат.

Теорема 2. Пусть \hat{Q}_e и \hat{Y} – решение задачи минимизации:

$$\text{tr } H \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 & 0 & Q_x B_n & Q_x F_A & Q_x F_B \\ * & \Omega_2 & 0 & Q_e F_A & Q_e F_B \\ * & * & -\alpha I + \varepsilon_2 H_B^T H_B & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} \leq 0, \quad \begin{bmatrix} H & I \\ I & Q_e \end{bmatrix} \geq 0,$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= A_n^T Q_x + Q_x A_n + \alpha Q_x + \varepsilon_1 H_A^T H_A, \\ \Omega_2 &= A_n^T Q_e + Q_e A_n - Y C^T - C Y^T + \alpha Q_e, \end{aligned}$$

относительно переменных $Q_x = Q_x^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_e = Q_e^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ и числового параметра $\alpha > 0$.

Тогда минимальный инвариантный эллипсоид определяется матрицей $\hat{P}_e = \hat{Q}_e^{-1}$, а соответствующая этому эллипсоиду матрица коррекции наблюдателя задается выражением $L = \hat{Q}_e^{-1} \hat{Y}$.

Доказательство приведено в [25].

По теореме 2 расчет вектора корректора L для фиксированного $\alpha > 0$ сводится к задаче полуопределенного программирования, которая решается численно с применением различных пакетов прикладных программ.

К открытым проблемам наблюдателей, синтезированных методом инвариантных эллипсоидов, следует отнести принципиальную неспособность выполнения цели (2.5) без дополнительных предположений о сигнале управления $u(t)$. Эта проблема вызвана тем обстоятельством, что независимо от выбора вектора корректора в уравнении (3.3) будет присутствовать неисчезающая компонента $(B - B_n)u(t) + (A - A_n)x(t)$, трактуемая как возмущение. Второй проблемой является необходимость выполнения оптимизации по параметру $\alpha > 0$ (выпуклость целевой функции по этому параметру не доказана) при решении задачи минимизации следа эллипсоида. Третьей и более существенной проблемой является решение поставленной задачи только при удовлетворении истинной неопределенности параметров A и B принятой параметризации (3.5). Если истинная неопределенность не удовлетворяет этой параметризации (т.е. весовые матрицы F_A, H_A и F_B, H_B не соответствуют действительности), то корректор уже не обеспечивает оптимальности в смысле следа инвариантного эллипсоида. Выбор весовых матриц с запасом, конечно, может позволить решить эту проблему, но приводит к излишнему консерватизму получаемых оценок.

3.2. Управление по динамической обратной связи

Как и было сказано ранее, вопросы формирования обратной связи почти всегда выносятся за рамки данного обзора. Однако в данном случае выбор обратной связи позволяет улучшить свойства синтезируемого наблюдателя.

При управлении по динамической обратной связи возможно устранить первый недостаток наблюдателя (3.1), грубо говоря, путем обеспечения сходимости слагаемого $(B - B_n)u(t) + (A - A_n)x(t)$ к нулю с помощью выбора управления в форме обратной связи $u(t) = -K_r \hat{x}(t)$ и стабилизации самой системы (2.1). При наличии параметрической неопределенности широко используемый в линейных системах принцип разделимости перестает выполняться [6]. Это означает, что для стабилизации системы (2.1) с помощью обратной связи по состояниям наблюдателя необходим совместный расчет параметров наблюдателя и регулятора с целью обеспечения устойчивости расширенной системы, составленной из уравнений как объекта, так и наблюдателя. Кратко остановимся на применении Риккати подхода и техники линейных матричных неравенств для совместного расчета параметров L и K_r .

3.2.1. Риккати подход

Для системы (2.1) с неопределенностью (3.5) будем формировать управление с помощью линейного динамического регулятора (2.4а) по состояниям наблюдателя (3.1). Тогда требуется рассчитать параметры $L \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ и $K_r \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ таким образом, что

$$(3.9) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \hat{x}(t)\| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0.$$

Решение этой задачи с помощью Риккати подхода получено в [26] и формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 3. Пусть существуют числа $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ такие, что выполнены следующие условия:

i) Существует $P_c = P_c^T > 0$, удовлетворяющая уравнению Риккати

$$(3.10a) \quad \begin{aligned} & A_n^T P_c + P_c A_n + 2H_A^T H_A + \varepsilon_1 Q_1 - \\ & - P_c \left[\frac{1}{\varepsilon_1} (B_n (R_1^{-1} - 2R_1^{-1} H_B^T H_B R_1^{-1}) B_n^T - 2F_B F_B^T) - F_A F_A^T \right] P_c = 0, \end{aligned}$$

где $R_1 = R_1^T > 0$, $Q_1 = Q_1^T > 0$.

ii) Существует $P_o = P_o^T > 0$, удовлетворяющая уравнению Риккати

$$(3.10б) \quad \begin{aligned} & A_n^T P_o + P_o A_n - \frac{1}{\varepsilon_2} C R_2^{-1} C^T + P_o \left(F_A F_A^T + \frac{2}{\varepsilon_1} F_B F_B^T + \varepsilon_2 Q_2 \right) P_o + \\ & + \frac{2}{\varepsilon_2} P_c B_n R_1^{-1} H_B^T H_B R_1^{-1} B_n^T P_c = 0, \end{aligned}$$

где $R_2 = R_2^T > 0$, $Q_2 = Q_2^T > 0$.

iii) Матрицы P_c и P_o удовлетворяют неравенству

$$(3.10в) \quad \begin{aligned} & \varepsilon_1 \left(Q_1 + \frac{1}{\varepsilon_1^2} P_c B_n R_1^{-1} B_n^T P_c \right) - \\ & - \frac{1}{\varepsilon_1^2 \varepsilon_2} P_c B_n R_1^{-1} B_n^T P_c \left[P_o Q_2 P_o + \frac{1}{\varepsilon_2^2} C R_2^{-1} C^T \right]^{-1} P_c B_n R_1^{-1} B_n^T P_c > 0. \end{aligned}$$

Тогда выбор $K_r = \frac{1}{\varepsilon_1} R_1^{-1} B_n^T P_c$ и $L = \frac{1}{\varepsilon_2} P_o^{-1} C R_2^{-1}$ обеспечивает достижение поставленной цели (3.9).

Доказательство приведено в [26].

К уравнениям (3.10а) и (3.10б) приходят путем мажорирования слагаемых с неопределенностью Δ_A , Δ_B в производной функции $V = x^T P_c x + e^T P_o e$ с помощью неравенства

$$a^T M F N b \leq a^T M M^T a + b^T N^T N b,$$

верного для F таких, что $F^T F \leq I$, и любых $a, b \in \mathbb{R}^n$, $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $F \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $N \in \mathbb{R}^{p \times n}$.

Неравенство (3.10в) получено по лемме Шура и означает положительную определенность матрицы Ω , задающую для V производную $\dot{V} \leq -\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}^T \Omega \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$.

3.2.2. Техника линейных матричных неравенств

Использование техники ЛМН [27] в задаче управления по динамической обратной связи вместе с L и K_r требует расчета матрицы состояний наблюдателя. Поэтому перепишем (3.1) в виде

$$\dot{\hat{x}}(t) = G \hat{x}(t) + B_n u(t) + L(y(t) - C^T \hat{x}(t)), \quad \hat{x}(t) = \hat{x}_0.$$

Требуется рассчитать параметры $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ и $K_r \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ таким образом, чтобы поставленная цель (3.9) была выполнена. С помощью технических приемов, основанных на втором методе Ляпунова, лемм Питерсена и Шура, в [28] был получен следующий результат:

Теорема 4. Пусть $\hat{Q}_{\hat{x}}$, \hat{Y}_1 , \hat{Q}_e , \hat{Y}_2 и $\hat{\alpha}$, \hat{Y}_3 – решение ЛМН:

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & Q_{\hat{x}} H_A^T & -Y_1^T H_B^T \\ * & \Omega_{22} & Q_e H_A^T & 0 \\ * & * & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0$$

при ограничении

$$C^T Q_e = \alpha C^T,$$

где

$$\Omega_{11} = Y_3 + Y_3^T - B_n Y_1 - Y_1^T B_n^T,$$

$$\Omega_{12} = Y_2 C^T + Q_{\hat{x}} A_n^T - Y_3^T,$$

$$\Omega_{22} = A_n Q_e + Q_e A_n^T - Y_2 C^T - C Y_2^T + \varepsilon_1 F_A F_A^T + \varepsilon_2 F_B F_B^T$$

относительно $Q_{\hat{x}} = Q_{\hat{x}}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_e = Q_e^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y_1 \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $Y_2 \in \mathbb{R}^n$, $Y_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \alpha > 0$.

Тогда параметры $K_r = \hat{Y}_1 \hat{Q}_{\hat{x}}^{-1}$, $G = \hat{Y}_3 \hat{Q}_{\hat{x}}^{-1}$ и $L = \hat{Y}_2 \hat{\alpha}^{-1}$ доставляют выполнение цели (3.9).

Доказательство приведено в [28].

К общим открытым проблемам Риккати и ЛМН подходов стоит отнести необходимость выбора управляющего воздействия в виде $u(t) = -K_r \hat{x}(t)$ и совместного расчета параметров наблюдателя и регулятора.

3.3. Выводы по обзору робастных наблюдателей

Отличительной особенностью всех рассмотренных робастных подходов к построению наблюдателей состояний является предположение об удовлетворении параметрической неопределенности системы параметризациям (3.5) или (3.6). На практике удовлетворение этого предположения требует знания диапазона изменения всех неизвестных параметров. Излишний консерватизм в оценке таких диапазонов может приводить к большим коэффициентам в обратных связях и, как следствие, к неработоспособным решениям.

4. Оценивание состояний на базе теории инвариантности

Инвариантные наблюдатели конструируются из условий исключения (алгебраического или “силового”) влияния параметрической неопределенности на процесс восстановления состояний системы [7, 29–31]. На первом этапе синтеза таких решений уравнение (2.1) переписывается в следующем виде:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A_n + \Delta A)x(t) + (B_n + \Delta B)u(t) = A_n x(t) + B_n u(t) + Dw(x, u), \\ Dw(x, u) &= \Delta Ax(t) + \Delta Bu(t), \end{aligned}$$

где $\Delta A, \Delta B$ – агрегированные параметрические неопределенности соответствующих размерностей, $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ – известный вектор, взвешивающий и распределяющий неопределенности по уравнениям, $w(x, u) \in \mathbb{R}^m$ – неизвестное ограниченное (по допущению 1) возмущение $\|w(x, u)\| \leq w_{\max}$.

Поставленная цель (2.5) теперь трактуется как восстановление состояний системы (2.1) в условиях действия неизмеряемого входного воздействия $w(x, u)$. Рассмотрим решения этой задачи на базе инвариантного наблюдателя Люенбергера и различных наблюдателей на скользящих режимах.

4.1. Инвариантный наблюдатель Люенбергера

В соответствии с результатами [32, 33] оценки неизмеряемых состояний предлагается формировать с помощью следующей системы уравнений:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \dot{z}(t) &= Nz(t) + Gu(t) + Ly(t), \\ \hat{x}(t) &= z(t) - Ey(t), \end{aligned}$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^n$ и матрицы соответствующих размерностей выбраны следующим образом:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} (I + EC^T) D &= 0, \\ N &= (I + EC^T) A_n - (L + NE) C^T, \\ (I + EC^T) B_n &= G, \end{aligned}$$

а вектор L доставляет гурвицевость матрице N .

Для ошибки восстановления $\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ в силу (4.2) справедливо следующее соотношение:

$$\tilde{x}(t) = z(t) - EC^T x(t) - x(t) = z(t) - (I + EC^T) x(t),$$

а тогда дифференциальное уравнение в отклонениях принимает вид

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \dot{z}(t) - (I + EC^T) \dot{x}(t) = \\ &= Nz(t) + Gu(t) + Ly(t) - (I + EC^T) (A_n x(t) + B_n u(t) + Dw(x, u)) = \\ &= Nz(t) + Ly(t) - (I + EC^T) A_n x(t) = \\ &= Nz(t) + LC^T x(t) - Nx(t) - (L + NE) C^T x(t) = \\ &= Nz(t) - Nx(t) - NEC^T x(t) = N\tilde{x}(t). \end{aligned}$$

Как хорошо видно из уравнения (4.4), инвариантность ошибки оценивания $\tilde{x}(t)$ по отношению к параметрической неопределенности $w(x, u)$ достигнута благодаря ее алгебраическому исключению из уравнения в отклонениях. Необходимые и достаточные условия разрешимости уравнений (4.3) и гурвицевости матрицы N были установлены и уточнены соответственно в работах [32] и [33]. В рассматриваемом случае класса систем “один вход–один выход” эти условия формулируются следующим образом.

Теорема 5. Уравнения (4.3) имеют решения, если и только если выполнены условия:

- 1) $m = \dim(y(t)) = 1$,
- 2) $\text{rank}(C^T D) = \text{rank}(D)$,
- 3) *инвариантные нули тройки (A_n, D, C^T) устойчивы (имеют отрицательную действительную часть).*

Доказательство приведено в [32, 33].

Первые два условия теоремы 5 ограничительны для приложений. В частности, первое условие необходимо (но не достаточно [34]) для выполнения второго условия и не допускает наличия в различных уравнениях системы двух функционально различных неопределенностей. Например, наблюдатель (4.2) оказывается неприменим для следующей системы второго порядка:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 x_1(t) \\ a_2 x_1(t) + a_3 x_2(t) \end{bmatrix}, \\ y(t) &= [1 \ 0] x(t), \end{aligned}$$

где $m = 2 > \dim(y(t)) = 1$, что противоречит первому условию.

В свою очередь, второе условие, или условие согласования по выходу, требует действия возмущения на уравнение, состояние которого измеряется. Например, наблюдатель (4.2) неприменим для следующей системы второго порядка:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (a_2 x_1(t) + a_3 x(t) + b_1 u), \\ y(t) &= [1 \ 0] x(t), \end{aligned}$$

где $\text{rank}(C^T D) = 0 \neq \text{rank}(D) = 1$, что противоречит второму условию.

Независимость ошибки оценивания от произвольного, ограниченного внешнего возмущения – основное конкурентное преимущество инвариантного наблюдателя Люенбергера в сравнении с робастными аналогами (3.1) и (3.7). Однако строгие структурные ограничения не позволяют использовать рассмотренный наблюдатель для восстановления состояний широкого класса реальных технических систем с не согласованной по выходу неопределенностью.

4.2. Наблюдатель на скользящих режимах. Условия согласования по выходу

Инвариантность ошибки восстановления состояний по отношению к параметрическим возмущениям может быть достигнута не только с помощью алгебраического исключения неопределенности, но и с помощью организации специальных скользящих режимов [7, 29–31]. Первый наблюдатель на скользящих режимах был предложен В. И. Уткиным [35], позже это решение было улучшено в [36] с помощью дополнительной корректирующей обратной связи Люенбергера. В [37] был предложен альтернативный способ выбора поверхности скольжения, а также установлены необходимые и достаточные условия существования всех трех видов наблюдателей на скользящих режимах [35–37].

По алгоритму [37] системе в форме представления (4.1) ставится в соответствие следующий наблюдатель:

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A_n \hat{x}(t) + B_n u(t) - G_l (\hat{y}(t) - y(t)) + G_n v(t), \\ \hat{y}(t) &= C^T \hat{x}(t), \end{aligned}$$

где

$$G_l = T^{-1} \begin{bmatrix} F_{12} \\ F_{22} - F_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad G_n = T^{-1} \begin{bmatrix} 0_{n-1} \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

$$v(t) := \begin{cases} -\rho \frac{P(\hat{y}(t) - y(t))}{\|P(\hat{y}(t) - y(t))\|}, & \text{если } \hat{y}(t) - y(t) \neq 0 \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

F_m – гурвицева матрица, P – решение уравнения Ляпунова для F_m , $\rho > 0$ – достаточно большое число, $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – полноранговая матрица линейного подобия, F_{12}, F_{22} – известные матрицы, алгоритм определения которых будет ясен по ходу дальнейшего изложения.

В соответствии с результатами [37, 38] наблюдатель (4.7) реализуем и доставляет сходимость ошибки восстановления состояний (2.5) при выполнении условий существования следующих структурных преобразований.

Лемма 1. Пусть выполнены условия:

- 1) $m = \dim(y(t)) = 1$,
- 2) $\text{rank}(C^T D) = \text{rank}(D)$,
- 3) инвариантные нули тройки (A_n, D, C^T) устойчивы.

Тогда существует неособое преобразование координат $\begin{pmatrix} z_1(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = Tx(t)$, приводящее систему (4.1) и наблюдатель (4.7) к блочному виду:

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= F_{11}z_1(t) + F_{12}y(t) + G_1u(t), \\ \dot{y}(t) &= F_{21}z_1(t) + F_{22}y(t) + G_2u(t) + D_2w(x, u), \\ \dot{\hat{z}}_1(t) &= F_{11}\hat{z}_1(t) + F_{12}\hat{y}(t) + G_1u(t) - F_{12}e_y(t), \\ \dot{\hat{y}}(t) &= F_{21}\hat{z}_1(t) + F_{22}\hat{y}(t) + G_2u(t) - (F_{22} - F_m)e_y(t) + v(t), \end{aligned}$$

где $D_2 > 0$, F_{11} – гурвицева по построению, $e_y(t) = \hat{y}(t) - y(t)$ – ошибка наблюдения выхода системы.

Доказательство приведено в [37, 38].

Подробный алгоритм вычисления матрицы подобия T изложен в [7, 29–31, 35, 37] и сводится к аннулированию внешнего возмущения в уравнении, соответствующему неизмеряемой переменной. Дифференциальное уравнение в отклонениях между уравнениями системы и наблюдателя в новых координатах (4.8) имеет вид

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{z}}_1(t) &= F_{11}\tilde{z}_1(t), \\ \dot{e}_y(t) &= F_{21}\tilde{z}_1(t) + F_m e_y(t) + v(t) - D_2w(x, u). \end{aligned}$$

Из гурвицевости F_{11} следует экспоненциальная сходимость к нулю ошибки $\tilde{z}_1(t)$. С помощью второго метода Ляпунова возможно показать попадание переменной $e_y(t)$ на прямую $e_y(t) = 0$ за конечное время. Методом эквивалентного управления $\mu^{-1}\dot{v}_{eq}(t) = v(t) - v_{eq}(t)$, $\mu > 0$, можно также показать $D_2^{-1}v_{eq}(t) \rightarrow w(x, u)$. Поскольку T – неособое преобразование, то из экспоненциальной устойчивости ошибок (4.9) мгновенно имеем достижение цели (2.5).

Таким образом, наблюдатель на скользящих режимах (4.7) требует таких же строгих структурных ограничений, как и инвариантный к внешним возмущениям наблюдатель Люенбергера (4.2). Однако в отличие от решения (4.2) в

наблюдателе (4.7) механизм подавления влияния внешнего возмущения основан на робастных свойствах движения изображающей точки по поверхности скольжения. Более подробное сравнение свойств этих двух типов инвариантных наблюдателей было проведено в [39, 40].

4.3. Наблюдатели на скользящих режимах. Расширенные условия согласования

Условие согласования возмущения с измеряемым выходом $\text{rank}(C^T D) = \text{rank}(D)$ значительно ограничивает класс систем, восстановление состояний которых осуществимо с помощью наблюдателей (4.2) и (4.7). Ослабить это требование возможно путем увеличения размерности выхода $y(t)$ с помощью добавления к уже имеющимся новых физических или виртуальных измерений. Добавление физических измерений приводит к необходимости установки дополнительных датчиков, что противоречит теоретической постановке задачи, а на практике часто нецелесообразно или невозможно. Остается способ расширения числа измерений с помощью виртуальных состояний. В [41] предлагается ввести в рассмотрение виртуальную выходную переменную

$$(4.10) \quad \xi(t) = \mathcal{O}^{-1}x(t) = \begin{bmatrix} C^T \\ \vdots \\ C^T A_n^{n-1} \end{bmatrix} x(t)$$

и построить наблюдатель состояний:

$$(4.11) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A_n \hat{x}(t) + B_n u(t) - G_l \left(\hat{y}_a(t) - \hat{\xi}(t) \right) + G_n v(t), \\ \hat{y}_a(t) &= \mathcal{O}^{-1} \hat{x}(t), \end{aligned}$$

где $\hat{y}_a(t)$ – оценка выхода (4.10) с помощью наблюдателя (4.11), $\hat{\xi}(t)$ – оценка выхода (4.10) с помощью наблюдателя, определяемого в дальнейшем изложении, а матрицы G_l, G_n и функция $v(t)$ определены по аналогии с (4.7).

В соответствии с результатами [41, 42] наблюдатель (4.11) реализуем и доставляет сходимость ошибки восстановления состояний при выполнении следующих условий приводимости системы в блочную и треугольную формы.

Лемма 2. Пусть выполнены условия:

- 1) $m = \dim(y(t)) = 1$,
- 2) $\text{rank}(\mathcal{O}^{-1}D) = \text{rank}(D)$,
- 3) $\begin{bmatrix} C^T \\ \vdots \\ C^T A_n^{n-2} \end{bmatrix} D = 0$,
- 4) *инвариантные нули тройки (A_n, D, C^T) устойчивы.*

Тогда:

- а) существует [41] неособое преобразование координат $\begin{pmatrix} z_1(t) \\ y_a(t) \end{pmatrix} = Tx(t)$, приводящее систему (4.1) с выходом $\xi(t)$ и наблюдатель (4.11) к блочному виду (4.8) с точностью до замены $y(t)$ и $\hat{y}(t)$ на $\xi(t)$ и $\hat{y}_a(t)$;
- б) существует [42] неособое преобразование (4.10), приводящее систему (4.1) к треугольной форме:

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= A_0\xi(t) + B_0\delta(t) + B_e u(t), \\ y(t) &= C_0^T \xi(t), \end{aligned}$$

где

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0_n & I_{n-1} \\ & 0_{1 \times (n-1)} \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0_{n-1} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_e = \begin{bmatrix} C^T B_n \\ \vdots \\ C^T A_n^{n-2} B_n \\ C^T A_n^{n-1} B_n \end{bmatrix},$$

$$\delta(t) = C^T A_n^n x(t) + C^T A_n^{n-1} D w(t), \quad C_0^T = [1 \quad 0_{n-1}^T].$$

Доказательство приведено в [41, 42].

Реализация наблюдателя (4.11) требует получения оценки $\hat{\xi}(t)$ выхода (4.10), который одновременно является состоянием треугольной системы (4.12). В [41] предлагается оценить состояния системы (4.12) за конечное время с помощью каскадного наблюдателя:

$$(4.13) \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{\hat{\zeta}}_1(t) &= v \left(y(t) - \hat{\zeta}_1(t) \right) \\ \dot{\hat{\zeta}}_2(t) &= E_1 v \left(\tilde{\zeta}_2(t) - \hat{\zeta}_2(t) \right) \\ &\vdots \\ \dot{\hat{\zeta}}_{n-1}(t) &= E_{n-2} v \left(\tilde{\zeta}_{n-1}(t) - \hat{\zeta}_{n-1}(t) \right) \\ \dot{\hat{\zeta}}_n(t) &= E_{n-1} v \left(\tilde{\zeta}_n(t) - \hat{\zeta}_n(t) \right) \end{aligned} \right. + B_e u(t),$$

$$\hat{\xi}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ v \left(\tilde{\zeta}_2(t) - \hat{\zeta}_2(t) \right) \\ \vdots \\ v \left(\tilde{\zeta}_{n-1}(t) - \hat{\zeta}_{n-1}(t) \right) \end{bmatrix},$$

где $\tilde{\zeta}_1(t) = y(t)$ и

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_i(t) &= v \left(\tilde{\zeta}_{i-1}(t) - \hat{\zeta}_{i-1}(t) \right), \quad 2 \leq i \leq n, \\ E_j &= \begin{cases} 1, & \text{если } \left| \tilde{\zeta}_i(t) - \hat{\zeta}_i(t) \right| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad j \leq i, \\ v(\cdot) &= \varphi(t) + \lambda_s |\cdot|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\cdot), \quad \lambda_s > 0, \\ \dot{\varphi}(t) &= \alpha_s \text{sign}(\cdot), \quad \alpha_s > 0. \end{aligned}$$

Уравнение в отклонениях между системами (4.12) и (4.13) имеет вид

$$(4.14) \quad \begin{cases} \dot{\tilde{\zeta}}_1(t) = \xi_2(t) - v \left(y(t) - \hat{\zeta}_1(t) \right) \\ \dot{\tilde{\zeta}}_2(t) = \xi_3(t) - E_1 v \left(\tilde{\zeta}_2(t) - \hat{\zeta}_2(t) \right) \\ \vdots \\ \dot{\tilde{\zeta}}_{n-1}(t) = \xi_n(t) - E_{n-2} v \left(\tilde{\zeta}_{n-1}(t) - \hat{\zeta}_{n-1}(t) \right) \\ \dot{\tilde{\zeta}}_n(t) = \delta(t) - E_{n-1} v \left(\tilde{\zeta}_n(t) - \hat{\zeta}_n(t) \right), \end{cases}$$

и при достаточно больших значениях параметров λ_s, α_s в (4.14) последовательно возникают скользящие режимы на прямых $\tilde{\zeta}_i(t) - \hat{\zeta}_i(t) = 0$, $i = \overline{1, n}$, что приводит к сходимости ошибки $\hat{\xi}(t) - \xi(t)$ за конечное время T_ξ . После завершения процесса оценки выхода (4.10) системы (4.1) за конечное время $T_x \geq T_\xi$ возникает скользящий режим на $\hat{y}_a(t) - \hat{\xi}(t) = 0$, что, в соответствии с анализом (4.9), обеспечивает выполнение поставленной цели (2.5).

В соответствии с результатами [41] при измерении нового выхода (4.10) даже при невыполнении условия согласования $\text{rank}(C^T D) = \text{rank}(D)$ может быть выполнено расширенное условие согласования 2)–3) из леммы 2 и реализуем наблюдатель (4.11), обеспечивающий сходимость ошибки восстановления состояний.

Например, для (4.6) имеем:

$$\begin{bmatrix} C^T \\ C^T A \end{bmatrix} D = D \Rightarrow \text{rank}(C_a^T D) = \text{rank}(D),$$

что позволяет восстановить состояния системы (4.6) с помощью (4.11) + (4.13)².

Альтернативные способы восстановления состояний треугольных систем подробно обсуждались в [43, 44] и по аналогии с (4.13) могут быть использованы для формирования оценки выходной переменной $\xi(t)$ при тех же структурных ограничениях из леммы 2. Отметим также возможность в силу наблюдаемости пары (A, C^T) без реализации (4.11) оценить состояния $x(t)$ за конечное время по формуле $\hat{x}(t) = \mathcal{O}\hat{\xi}(t)$.

² Для (4.6) верно $\xi(t) = x(t)$, поэтому на самом деле реализация (4.11) не требуется.

При выполнении расширенных условий согласования 2)–3) из леммы 2 система уже после первого выбора виртуального выхода (4.10) приводится к треугольному виду, позволяющему для восстановления состояний использовать наблюдатели типа (4.11) + (4.13) или (4.11) + $\hat{x}(t) = \mathcal{O}\hat{\xi}(t)$. Для систем большой размерности с несколькими входами/выходами рассмотрения одного виртуального выхода может быть недостаточно для приведения всей системы к треугольной форме [11, 45]. В этом случае преобразования продолжаются до тех пор, пока вся система не будет разбита на блоки треугольной формы. Полученное в результате таких итераций расщепление уравнений системы называется блочной формой наблюдаемости с учетом возмущений (БФНВ), относительно которой, строго говоря, известно два факта:

- i) состояния и возмущения системы наблюдаемы по измерениям, если и только если система приводима к БФНВ [11],
- ii) система приводима к БФНВ при невыполнении условий согласования 2) из теоремы 5 и 3) из леммы 2 [45].

Поэтому инвариантные наблюдатели на скользящих режимах из [11, 45], построенные на основе БФНВ, обладают наиболее слабыми структурными ограничениями в сравнении с другими инвариантными наблюдателями состояний (например, (4.7), (4.11) + (4.13)). Однако приведение системы в БФНВ – довольно кропотливый итерационный процесс, а часть структурных ограничений в этой форме представления системы также, по-видимому, не могут быть ослаблены. Например, следуя шагу 1(а) конструктивного критерия наблюдаемости [11, раздел 3.2], запишем ранее рассмотренную систему (4.5) в следующем виде (с сохранением авторских обозначений):

$$(4.15) \quad \begin{aligned} \dot{y}(t) &= A_{11}y(t) + D_1x_1(t) + Q_1\psi(t) + B_1u(t), \\ \dot{x}_1(t) &= A_{x_{11}}y(t) + A_{x_1}x_1(t) + Q_{x_1}\psi(t) + B_{x_1}u(t), \end{aligned}$$

где в терминах системы (4.5) приняты переобозначения:

$$\begin{aligned} y_1(t) := y(t) = x_1(t), \quad x_1(t) := x_2(t), \quad \psi(t) := \begin{bmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{bmatrix} = w(x, u), \\ A_{11} = 0, \quad D_1 = 1, \quad Q_1 = [1 \ 0], \quad B_1 = 0, \\ A_{x_{11}} = A_{x_1} = 0, \quad B_{x_1} = 1, \quad Q_{x_1} = [0 \ 1]. \end{aligned}$$

Для приведения системы (4.5), (4.15) в полную БФНВ необходимо выполнение следующего условия (формула (**)) в [11]):

$$\text{rank}(Q_1) - \text{rank}([Q_1 \ D_1]) \neq 0.$$

В рассматриваемом случае (4.5) имеем $\text{rank}(Q_1) - \text{rank}([Q_1 \ D_1]) = 0$, что не позволяет привести систему к БФНВ, а значит, по конструктивному критерию из [11] состояния и возмущения системы (4.5) ненаблюдаемы, а для приводимости системы к БФНВ необходимо выполнение неравенства $m \leq \dim(y(t))$, которое для рассматриваемого в данной статье класса линейных систем (2.1) с одним выходом почти всегда не выполняется.

Таким образом, все существующие инвариантные наблюдатели состояний на базе скользящих режимов [11, 35–41, 43–45], в том числе и недавние работы [46, 47], позволяющие улучшить качество переходных процессов по формируемым оценкам состояний, накладывают на динамическую систему с одним выходом строгие структурные требования. Более того, как показывает конструктивный критерий наблюдаемости [11, 45], часть из этих условий для систем с одним выходом даже потенциально не могут быть ослаблены в классе наблюдателей со скользящими режимами. Действительно, введем для системы (4.5), (4.15) наблюдатель в форме:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{y}}_1(t) &= A_{11}\hat{y}_1(t) + D_1\hat{x}_1 + B_1u + L(\hat{y}_1(t) - y_1(t)) - \rho \operatorname{sign}(\hat{y}_1(t) - y_1(t)), \\ \dot{\hat{x}}_1(t) &= A_{x_{11}}\hat{y}_1(t) + A_{x_1}\hat{x}_1 + B_{x_1}u - K_{x_1}\operatorname{sign}(\hat{y}_1(t) - y_1(t)),\end{aligned}$$

что позволяет получить следующее уравнение в отклонениях:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{y}}_1(t) &= (A_{11} + L)\tilde{y}_1(t) + D_1\tilde{x}_1(t) - Q_1\psi(t) - v(t), \\ \dot{\tilde{x}}_1(t) &= A_{x_{11}}\tilde{y}_1(t) + A_{x_1}\tilde{x}_1(t) - Q_{x_1}\psi(t) - \frac{K_{x_1}}{\rho}v(t), \\ v(t) &= \rho \operatorname{sign}(\tilde{y}_1(t)), \quad \tilde{y}_1(t) = \hat{y}_1(t) - y_1(t).\end{aligned}$$

При достаточно большом $\rho > 0$ в первой подсистеме возникает скользящий режим на прямой $\tilde{y}_1(t) = 0$, позволяющий методом эквивалентного управления получить:

$$\begin{aligned}0 &= D_1\tilde{x}_1(t) - Q_1\psi(t) - v_{eq}(t), \\ \dot{\tilde{x}}_1(t) &= \left(A_{x_1} - \frac{K_{x_1}}{\rho}D_1\right)\tilde{x}_1(t) - Q_{x_1}\psi(t) + \frac{K_{x_1}}{\rho}Q_1\psi(t) = \\ &= \left(A_{x_1} - \frac{K_{x_1}}{\rho}D_1\right)\tilde{x}_1(t) - \psi_2(t) + \frac{K_{x_1}}{\rho}\psi_1(t),\end{aligned}$$

откуда в общем случае следует только ограниченность ошибки $\tilde{x}_1(t)$, а цель (2.5) может быть достигнута только при выполнении условия $\psi_2(t) - \frac{K_{x_1}}{\rho}\psi_1(t) = 0$, которое для рассматриваемого примера (4.5), (4.15) не выполняется, поскольку для всех $K_{x_1} \in \mathbb{R}$ верно $a_2x_1(t) + a_3x_2(t) - \frac{K_{x_1}}{\rho}a_1x_1(t) \neq 0$.

Для реальных технических систем разные параметрические возмущения потенциально могут воздействовать на каждое уравнение системы, т.е. в параметризации (4.1) часто выполняется неравенство $m > 1$, что ограничивает потенциал использования наблюдателей на скользящих режимах в задаче восстановления состояний линейных систем с параметрической неопределенностью.

4.4. Выводы по обзору наблюдателей на базе теории инвариантности

Инвариантные наблюдатели за счет алгебраического исключения или организации скользящих режимов обеспечивают нечувствительность ошибки оценивания состояний к параметрической неопределенности системы. Это

свойство позволяет без дополнительных предположений относительно параметризации неопределенности и свойств сигнала $u(t)$ выполнять поставленную цель (2.5).

Открытыми проблемами для инвариантных наблюдателей являются необходимость использования разрывных корректирующих сигналов, чувствительных к помехам измерений, и выполнения достаточно строгих условий согласования по выходу.

5. Адаптивные наблюдатели

В отличие от робастных методов восстановления состояний адаптивные алгоритмы теоретически не требуют каких-либо априорных сведений о параметрах системы (2.1), поскольку совместно с оцениванием состояний выполняют идентификацию значений неизвестных параметров. В сравнении с наблюдателями, инвариантными по отношению к возмущениям, адаптивные алгоритмы с помощью специальных параметризаций способны учитывать структуру действующего на систему возмущения, что во многих случаях позволяет не требовать выполнения условий согласования по выходу.

Структуру адаптивного наблюдателя состояний логично (но наивно) выбрать следующим образом:

$$(5.1) \quad \dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}(t)\hat{x}(t) + \hat{B}(t)u(t) + \hat{L}(t)(\hat{y}(t) - y(t)), \quad \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0,$$

где все неизвестные матрицы системы заменены на их динамические оценки.

Тогда уравнение в отклонениях между уравнениями (2.1) и (5.1) имеет вид:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \hat{A}(t)\hat{x}(t) + \hat{B}(t)u(t) + \hat{L}(\hat{y}(t) - y(t)) - Ax(t) - Bu(t) \pm \\ &\quad \pm L(\hat{y}(t) - y(t)) \pm A\hat{x}(t) = \\ &= A\hat{x}(t) + \tilde{B}(t)u(t) + \tilde{L}\tilde{y}(t) + \tilde{A}(t)\hat{x}(t) - Ax(t) + LC^T\tilde{x}(t) = \\ &= (A + LC^T)\tilde{x}(t) + \tilde{B}(t)u(t) + \tilde{L}(t)\tilde{y}(t) + \tilde{A}(t)\hat{x}(t), \\ \tilde{y}(t) &= C^T\tilde{x}(t), \end{aligned}$$

где $\tilde{A}(t)$, $\tilde{B}(t)$ – ошибки идентификации параметров системы (2.1), $\tilde{L}(t)$ – ошибка идентификации L , доставляющей $\lambda_{\max}(A + LC^T) < 0$.

Как следует из дифференциального уравнения (5.2), существует два принципиальных механизма достижения цели (2.5). Во-первых, можно попытаться формировать оценки таким образом, что сумма $\tilde{B}(t)u(t) + \tilde{L}(t)\tilde{y}(t) + \tilde{A}(t)\hat{x}(t)$ сходится к нулю. Во-вторых, можно обеспечить сходимость к нулю ошибок $\tilde{A}(t)$, $\tilde{B}(t)$ и $\tilde{L}(t)$.

Традиционно законы адаптации, использующие первый механизм, строятся с помощью второго метода Ляпунова, в соответствии с которым в рассмотрение вводится квадратичная форма:

$$(5.3) \quad V = \tilde{x}^T P \tilde{x} + tr \left(\tilde{A}^T \tilde{A} \right) + \tilde{B}^T \tilde{B} + \tilde{L}^T \tilde{L},$$

где $P = P^T > 0$ – решение уравнения Ляпунова при $Q = Q^T > 0$.

Несложными, но объемными преобразованиями производная функции (5.3) может быть приведена к виду

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \dot{V} = & -\tilde{x}^T Q \tilde{x} + 2\text{tr} \left(\tilde{A}^T P \tilde{x} \hat{x}^T + \tilde{A}^T \dot{\hat{A}} \right) + \\ & + 2\tilde{B}^T P \tilde{x} u + 2\tilde{B}^T \dot{\hat{B}} + 2\tilde{L}^T P \tilde{x} \tilde{y} + 2\tilde{L}^T \dot{\hat{L}}. \end{aligned}$$

Тогда следующие законы настройки:

$$(5.5) \quad \dot{\hat{L}}(t) = -P \tilde{x}(t) \tilde{y}(t), \quad \dot{\hat{B}}(t) = -P \tilde{x}(t) u(t), \quad \dot{\hat{A}}(t) = -P \tilde{x}(t) \hat{x}^T(t)$$

обеспечивают $\dot{V} = -\tilde{x}^T Q \tilde{x}$, что с помощью леммы Барбалата позволяет доказать асимптотическую сходимость ошибки оценивания $\tilde{x}(t)$. Однако законы настройки (5.5) используют не доступную для измерения ошибку оценивания и, следовательно, нереализуемы.

Законы настройки, использующие второй механизм стабилизации уравнения в отклонениях, строятся с помощью градиентного метода идентификации и поэтому требуют параметризации по измеряемым сигналам $u(t)$ и $y(t)$ регрессионного уравнения относительно $n^2 + n$ параметров матриц A, B . Покажем, что такая параметризация в общем случае получена быть не может.

Передаточная функция, связывающая управление $u(t)$ и выход системы $y(t)$, имеет вид ($m \leq n - 1$):

$$(5.6) \quad W(s) = C^T (sI_n - A)^{-1} B = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0},$$

т.е. с измеряемыми сигналами $u(t)$ и $y(t)$ (и их производными) связаны только $2n \leq n^2 + n$ параметров.

Перепишем выражение (5.6) в виде (где s – оператор дифференцирования)

$$(5.7) \quad (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0) u(t) = (s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0) y(t).$$

Применив к левой и правой частям выражения (5.7) оператор $\frac{1}{\Lambda(s)}$ ($\Lambda(s)$ – приведенный гурвицев полином порядка n) и выразив из полученного уравнения величину $\frac{s^n}{\Lambda(s)} y(t)$, можем получить параметризацию:

$$(5.8) \quad \begin{aligned} z(t) &= \frac{s^n}{\Lambda(s)} y(t) = \varphi^T(t) \psi, \\ \varphi(t) &= \left[-\frac{\alpha_{n-1}^T(s)}{\Lambda(s)} y(t) \quad \frac{\alpha_{n-1}^T(s)}{\Lambda(s)} u(t) \right]^T, \quad \alpha_{n-1}^T(s) = [s^{n-1} \quad \dots \quad s \quad 1], \\ \psi &= [a_{n-1} \quad a_{n-2} \quad \dots \quad b_0], \end{aligned}$$

связывающую сигналы $u(t)$ и $y(t)$ с параметрами передаточной функции (5.6).

Сигналы $\varphi(t)$ и $z(t)$ известны (могут быть вычислены по $u(t)$ и $y(t)$), а значит, уравнение (5.8) может быть использовано для синтеза законов идентификации параметров ψ с применением градиентного метода. Однако так как при $n > 1$ бесконечному числу триплетов (A, B, C) соответствует одна передаточная функция (5.6), то в общем случае параметры матриц (A, B) произвольного представления в пространстве состояний (2.1) не могут быть идентифицированы уникальным образом с использованием информации только о $u(t)$ и $y(t)$. Возможно нахождение параметров только полиномов числителя и знаменателя передаточной функции (5.8), непосредственно связанных с измеряемыми сигналами и их производными. Поэтому в общем случае построение законов настройки, использующих второй механизм стабилизации ошибки оценивания $\tilde{x}(t)$, также невозможно.

Таким образом, независимо от выбранного механизма стабилизации уравнения в отклонениях (5.2) в общем случае адаптивный наблюдатель (5.1) нереализуем и требуется выдвижение дополнительных условий, позволяющих рассматривать более узкие классы систем, для которых задача оценивания состояний в условиях параметрической неопределенности становится разрешимой.

В существующей литературе выделяют два типа условий. Первый тип описывает класс систем, для которых применение второго метода Ляпунова (аналогично (5.3)–(5.5)) позволяет получить реализуемые законы настройки. Второй тип условий описывает класс систем, для которых нахождение параметров передаточной функции (5.2) оказывается достаточно для восстановления состояний системы (2.1). Перейдем к подробному анализу этих требований и адаптивных наблюдателей, которые могут быть построены при их удовлетворении.

*5.1. Адаптивные наблюдатели состояний систем
со строго-положительно вещественной передаточной функцией
от возмущения к выходу*

Идея этого подхода состоит в определении условий, при которых в законах идентификации вместо неизмеряемой ошибки оценивания состояний $\tilde{x}(t)$ допустимо использовать только ошибку оценивания выхода $\tilde{y}(t)$. А именно, оказывается, что такая замена состоятельна для систем со строго-положительно вещественной (СПВ) передаточной функцией от возмущения к выходу.

Основные этапы синтеза наблюдателей для систем со строго-положительно вещественной передаточной функцией от возмущения к выходу представлены на рис. 1.

Как следует из рис. 1, на первом этапе синтеза параметрические возмущения системы представляются в качестве нового неизвестного входа:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= (A_n + \Delta A)x(t) + (B_n + \Delta B)u(t) = \\
 (5.9) \quad &= A_n x(t) + B_n u(t) + D\Phi(x, u)\Theta, \\
 &D\Phi(x, u)\Theta = \Delta Ax(t) + \Delta Bu(t),
 \end{aligned}$$

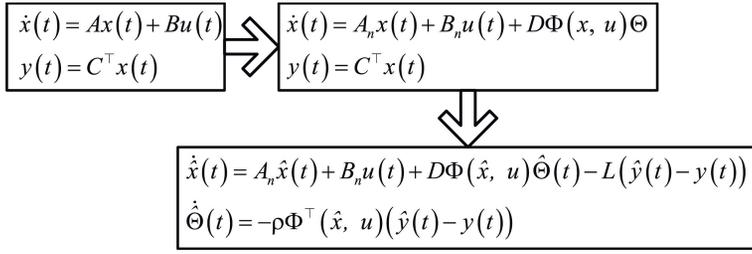


Рис. 1. Процедура синтеза адаптивных наблюдателей для систем со строго-положительно вещественной передаточной функцией.

где $\Phi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^{m \times p}$ – линейная функция, $\Theta \in \mathbb{R}^p$ – вектор неизвестных параметров.

В отличие от параметризации (4.1), используемой при синтезе инвариантных наблюдателей, здесь обобщенное возмущение факторизуется в виде линейной регрессии с неизвестными параметрами и неизмеряемым регрессором.

Адаптивный наблюдатель состояний системы (5.9) предлагается [48] задать следующим образом:

$$(5.10) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A_n \hat{x}(t) + B_n u(t) + D\Phi(\hat{x}, u)\hat{\Theta}(t) - L(\hat{y}(t) - y(t)), \\ \dot{\hat{\Theta}}(t) &= -\rho\Phi^T(\hat{x}, u)(\hat{y}(t) - y(t)), \end{aligned}$$

где $\rho > 0$ – коэффициент усиления, $L \in \mathbb{R}^n$ – известный вектор, выбранный так, что $A_n + LC^T$ гурвицева, а закон формирования оценок $\hat{\Theta}(t) \in \mathbb{R}^p$ выведен вторым методом Ляпунова.

Условия сходимости оценок состояний к истинным значениям при использовании (5.10) описаны в следующей лемме.

Лемма 3. Пусть выполнены условия:

- 1) $\|\Phi(x, u) - \Phi(\hat{x}, u)\| \leq \gamma \|x - \hat{x}\|$, $\gamma > 0$;
- 2) для $Q = Q^T > 0$ существует решение системы уравнений:

$$\begin{aligned} (A_n + LC^T)^T P + P(A_n + LC^T) &= -Q, \\ PD &= C, \end{aligned}$$

причем верно $\frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)} > \gamma$.

Тогда адаптивный наблюдатель (5.5) гарантирует:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{x}(t)\| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| D\Phi(\hat{x}, u)\hat{\Theta}(t) - D\Phi(x, u)\Theta \right\| = 0.$$

Доказательство приведено в [48].

Выполнение второго условия из леммы 3 позволяет выполнить замену в законе адаптации $\tilde{x}^T(t)PD$ на $\tilde{y}(t) = C^T \tilde{x}(t)$ и получить реализуемый закон настройки из (5.10), в чем нетрудно убедиться, рассмотрев $V = \tilde{x}^T P \tilde{x} + \rho^{-1} \hat{\Theta}^T \hat{\Theta}$.

Первое условие леммы 3 всегда выполняется при выборе линейного по состояниям управления, поскольку в силу параметризации (5.9) функция $\Phi(x, u)$ линейна по обоим входам. В соответствии с леммой Калмана–Якубовича–Попова система уравнений из второго условия имеет решение, если и только если передаточная функция от возмущения $\Phi(x, u)$ Θ к выходу $y(t)$ является строго-положительно вещественной. Более того, уравнение $PD = C^T$ разрешимо, если PD лежит в линейной оболочке C^T , что требует выполнения условия согласования по выходу $\text{rank}(C^T D) = \text{rank}(D)$, а значит, и равенства $m = \dim(y(t)) = 1$.

Таким образом, условия сходимости оценок, формируемых адаптивным наблюдателем состояний (5.10), совпадают с условиями применимости базового инвариантного наблюдателя Люенбергера (4.2) и наблюдателя со скользящим режимом (4.7). В [49] разработан подход к ослаблению условия согласования по выходу. По аналогии с решением [41] в [49] предлагается с помощью наблюдателя с сильной обратной связью сначала получить новый выход (4.10), для которого предполагаются выполненными условия леммы 3, а после этого, с использованием нового выхода (4.10), реализовать адаптивный наблюдатель (5.5). Недостатки решения [49] совпадают с недостатками [41], т.е. область применимости наблюдателя [49] ограничена системами, для которых выполнено расширенное условие согласования.

Расширенное и стандартное условия согласования ограничительны и не позволяют синтезировать адаптивные наблюдатели состояний для систем с параметрическими неопределенностями, действующими на различные уравнения системы (например, для (4.5)).

*5.2. Адаптивные наблюдатели состояний
на базе преобразования системы
в каноническую наблюдаемую форму*

Как отмечалось ранее, с управлением и выходом связаны параметры числителя и знаменателя передаточной функции (5.3). Это наблюдение мотивирует преобразование системы (2.1) в каноническую наблюдаемую форму пространства состояний, неизвестными параметрами в которой как раз и являются эти параметры. Для этого вводится неособое (для полностью наблюдаемых систем) преобразование подобия $\xi(t) = Tx(t)$, задаваемое следующим образом:

$$(5.11) \quad T^{-1} = [A^{n-1}O_n \quad A^{n-2}O_n \quad \dots \quad O_n], \quad O_n = O[0_{1 \times (n-1)} \quad 1]^T, \\ O^{-1} = [C \quad A^T C \quad \dots \quad (A^{n-1})^T C]^T,$$

и в соответствии с [50, 51] позволяющее записать уравнения системы (2.1) в следующем виде:

$$(5.12) \quad \dot{\xi}(t) = A_0 \xi(t) + \psi_a y(t) + \psi_b u(t),$$

$$(5.13) \quad y(t) = C_0^T \xi(t), \quad \xi(t_0) = Tx_0,$$

где

$$\begin{aligned}\psi_a &= TAT^{-1}C_0 = [a_{n-1} \ a_{n-2} \ \dots \ a_0]^T, \\ \psi_b &= TB = [b_{n-1} \ b_{n-2} \ \dots \ b_0]^T, \\ A_0 &= \begin{bmatrix} 0_n & I_{n-1} \\ & 0_{1 \times (n-1)} \end{bmatrix}, \quad C_0^T = C^T T^{-1} = [1 \ 0_{n-1}^T].\end{aligned}$$

Тогда задача оценивания (2.5) физических состояний транслируется в задачу оценивания виртуальных состояний:

$$(5.14) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \tilde{\xi}(t) \right\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \hat{\xi}(t) - \xi(t) \right\| = 0 \text{ (exp)},$$

где $\hat{\xi}(t)$ – оценка виртуальных состояний системы, $\tilde{\xi}(t)$ – ошибка восстановления /наблюдения/оценивания.

В отличие от (2.5) цель (5.14) достижима с использованием техник адаптивного управления. Например, законы оценки неизвестных параметров ψ_a и ψ_b могут быть построены по регрессионному уравнению (5.8). Однако возникает противоречие между поставленной задачей (5.14) и практической необходимостью оценивания физических состояний для использования в динамических обратных связях (2.4а) и (2.4б). Другими словами, оценки состояний $\hat{\xi}(t)$ бесполезны для использования в цепи выбранной априорно обратной связи (2.4а) и (2.4б). Более того, на практике оценки $\hat{x}(t)$ физических состояний могут требоваться не только при формировании управления, но и для других целей (например диагностики отказов, управления с прогнозом, мониторинга, онлайн настройки цифровых двойников и т.д.). Разрешением сложившегося противоречия является формирование оценок физических состояний следующим образом:

$$(5.15) \quad \hat{x}(t) = \hat{T}_I(t) \hat{\xi}(t),$$

где для удобства записи принято переобозначение $T_I := T^{-1}$, а оценка $\hat{T}_I(t)$ матрицы подобия T_I получена с помощью оценок параметров системы (5.12) по следующей формуле пересчета:

$$(5.16) \quad \hat{T}_I(t) = f_{T_I}(\hat{\psi}),$$

здесь $f_{T_I}: \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ – функция пересчета параметров передаточной функции в матрицу линейного подобия, $\hat{\psi}(t) = [\hat{\psi}_a^T(t) \ \hat{\psi}_b^T(t)]^T \in \mathbb{R}^{2n}$, а $\hat{\psi}_a(t), \hat{\psi}_b(t)$ – оценки параметров соответственно знаменателя и числителя передаточной функции (5.3).

Тогда исходная цель (2.5) оказывается эквивалентна обеспечению существования предельных равенств:

$$(5.17) \quad \begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \tilde{\xi}(t) \right\| &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \hat{\xi}(t) - \xi(t) \right\| = 0 \text{ (exp)}, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \tilde{\psi}(t) \right\| &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \hat{\psi}(t) - \psi \right\| = 0 \text{ (exp)}.\end{aligned}$$

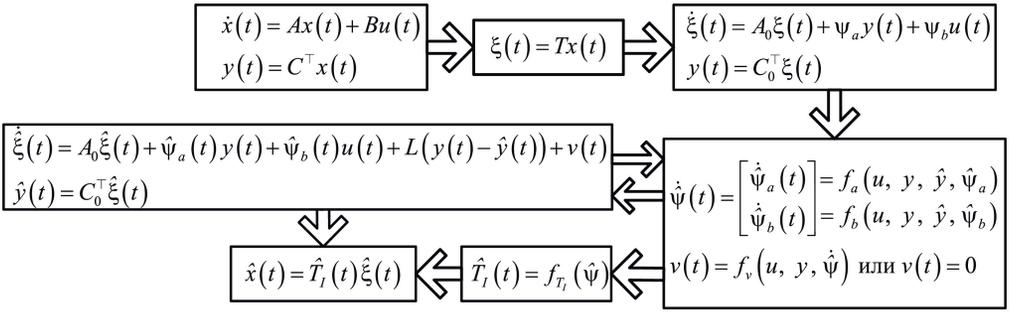


Рис. 2. Процедура синтеза адаптивных наблюдателей на базе преобразования системы в каноническую наблюдаемую форму.

Для достижения цели (5.17) с помощью наблюдателя (5.15) + (5.16) требуется, во-первых, существование непрерывной по Липшицу функции пересчета $f_{T_l}: \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, а во-вторых, построение законов оценки параметров и неизмеряемых состояний, обеспечивающих существование предельных равенств (5.17).

Схема процедуры синтеза наблюдателя (5.15) представлена на рис. 2.

Сначала рассмотрим существующие процедуры выбора законов идентификации (функций $f_a(\cdot)$ и $f_b(\cdot)$ на рис. 2). После этого покажем необходимость удовлетворения условия Липшица для выполнения (2.5) при выполнении (5.17) и использовании (5.16).

5.2.1. Адаптивный наблюдатель Люенбергера. Метод Ляпунова

Впервые задача адаптивного оценивания состояний линейных систем в канонической форме наблюдаемости была рассмотрена в работах Р. Кэррола и Д. Линдорфа [51] и Г. Людерса и К. Нарендры [52]. Примечателен тот факт, что эти две очень близкие по постановке задачи и содержанию работы были опубликованы спустя 10 лет после фундаментальной работы Д. Люенбергера [2] в одном номере журнала IEEE Transactions on Automatic Control с разницей в 61 страницу. Позже в работе [53] ранние результаты [51, 52] подверглись пересмотру и были выведены с единых позиций. В современных устоявшихся обозначениях наблюдатели типа [51–53] изложены в учебнике [54]. В соответствии с рассматриваемым подходом структура наблюдателя состояний системы (5.5) задается в следующем виде:

$$(5.18) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{\xi}}(t) &= A_0 \hat{\xi}(t) + \hat{\psi}_a(t) y(t) + \hat{\psi}_b(t) u(t) + L(\hat{y}(t) - y(t)) + v(t), \\ \hat{y}(t) &= C_0^T \hat{\xi}(t), \end{aligned}$$

где $v(t) \in \mathbb{R}^n$ – дополнительный сигнал, а коэффициент корректирующей обратной связи L выбран из условия $\lambda_{\max}(A_0 + LC_0^T) < 0$.

Уравнение в отклонениях между (5.18) и (5.12) принимает вид:

$$(5.19) \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{\xi}}(t) &= A_m \tilde{\xi}(t) + \tilde{\psi}_a(t) y(t) + \tilde{\psi}_b(t) u(t) + v(t), \\ \tilde{y}(t) &= C_0^T \tilde{\xi}(t), \end{aligned}$$

где $A_m = A_0 + LC_0^T$.

Основная идея подхода [51–53] состоит в преобразовании с помощью специального выбора сигнала $v(t)$ уравнения в отклонениях (5.19) в форму, допускающую существование так называемой адаптивной управляющей функции Ляпунова.

Лемма 4. Существует сигнал $v(t) \in \mathbb{R}^n$, формируемый по измеряемым сигналам, такой что система (5.19) приводится к форме:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= A_m e(t) + B_c \varphi^T(t) \tilde{\psi}(t), \\ \tilde{y}(t) &= C_0^T e(t), \end{aligned}$$

где $C_0^T (sI_n - A_m)^{-1} B_c$ – строго-положительно вещественная (СПВ) передаточная функция, $\varphi(t) \in \mathbb{R}^{2n}$ – регрессор, формируемый по управлению и выходу, $e(t) \in \mathbb{R}^n$ – новый вектор состояний.

Доказательство приведено в [54, с. 280].

По лемме Калмана–Якубовича–Попова [54] для систем с СПВ передаточной функцией разрешима система уравнений

$$\begin{aligned} (A_0 + LC_0^T)^T P + P (A_0 + LC_0^T) &= -Q, \quad Q = Q^T > 0, \\ PB_c &= C_0, \end{aligned}$$

а значит, рассмотрение квадратичной управляющей функции

$$V = e^T P e + \tilde{\psi}^T \Gamma^{-1} \tilde{\psi}$$

позволяет получить следующий результат.

Теорема 6. Адаптивный наблюдатель (5.18) и закон настройки его параметров

$$(5.20) \quad \dot{\hat{\psi}}(t) = \dot{\tilde{\psi}}(t) = -\Gamma \tilde{y}(t) \varphi(t), \quad \Gamma = \Gamma^T > 0,$$

при $\xi \in L_\infty$ и $u \in L_\infty$ обеспечивают:

- (i) ограниченность всех сигналов,
- (ii) $\lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{y}(t)| = 0$,
- (iii) $\dot{\tilde{\psi}} \in L_2 \cap L_\infty$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \dot{\tilde{\psi}}(t) \right\| = 0$.

Если дополнительно для всех $t \geq t_0$ существуют $T > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что³

$$\int_t^{t+T} \varphi(\tau) \varphi^T(\tau) d\tau \geq \alpha > 0,$$

то существуют пределы

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\psi}(t)\| = 0 \text{ (exp)}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\xi}(t)\| = 0 \text{ (exp)}.$$

Доказательство приведено в [54, с. 282].

В рассмотренном решении уравнения динамики наблюдателя (5.18) от динамики системы (5.12) заведомо отличает затухающий в асимптотике, но значительно искажающий оценки $\hat{\xi}(t)$ в переходном процессе дополнительный сигнал $v(t)$. Кроме того, закон настройки параметров наблюдателя (5.18) не может быть выбран произвольно, а выводится через управляющую функцию Ляпунова и потому не дает каких-либо гарантий качества переходных процессов по параметрической ошибке $\tilde{\psi}(t)$ (например, не гарантирует монотонность вектора ошибок по норме или элементам).

5.2.2. Адаптивный наблюдатель Люенбергера. Идентификационный подход

Для устранения взаимосвязи через $\tilde{y}(t)$ динамики идентификатора (5.20) и наблюдателя (5.18), а также для улучшения качества переходных процессов по ошибке $\tilde{\psi}(t)$ был развит [54] идентификационный подход к построению адаптивных наблюдателей состояний. Структура наблюдателя выбирается в виде (5.18), но дополнительный сигнал из уравнений исключается установкой $v(t) \triangleq 0$, а законы идентификации выводятся без использования функций Ляпунова. Основой для построения закона идентификации является регрессионное уравнение (5.8), полученное с помощью динамических фильтров.

Регрессионное уравнение (5.8) позволяет использовать для идентификации параметров передаточной функции (5.6) широкий класс методов из арсенала теории параметрической идентификации (градиентный метод, вариации метода наименьших квадратов и пр. [54]). В частности, при применении градиентного метода идентификации оказывается верна [54] следующая теорема.

Теорема 7. Адаптивный наблюдатель (5.18) при $v(t) \triangleq 0$ и закон настройки его параметров:

$$(5.21) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{\psi}}(t) &= \dot{\tilde{\psi}}(t) = -\Gamma \varphi(t) \left(\varphi^T(t) \hat{\psi}(t) - z(t) \right) = \\ &= -\Gamma \varphi(t) \left(\varphi^T(t) \hat{\psi}(t) - \varphi^T(t) \psi \right), \quad \Gamma = \Gamma^T > 0 \end{aligned}$$

при $\xi \in L_\infty$ и $u \in L_\infty$ обеспечивают:

³ Это требование называется условием постоянного (неисчезающего) возбуждения регрессора и далее обозначается как $\varphi \in \text{PE}$.

- (i) ограниченность всех сигналов,
- (ii) $\lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{y}(t)| = 0$,
- (iii) $\dot{\tilde{\psi}} \in L_2 \cap L_\infty$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\dot{\tilde{\psi}}(t)\| = 0$.

Если дополнительно выполнено условие $\varphi \in PE$, то существуют пределы

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\psi}(t)\| = 0 \text{ (exp)}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\xi}(t)\| = 0 \text{ (exp)}.$$

Доказательство приведено в [54, с. 271].

Как следует из сравнения предпосылок и результатов теорем 6 и 7, свойства наблюдателя (5.18) + (5.20), выведенного по методу адаптивной управляющей функции Ляпунова, и наблюдателя (5.18) + (5.21) на базе идентификационного подхода совпадают. Однако законы формирования оценок $\hat{\psi}(t)$ и $\hat{\xi}(t)$ в наблюдателе (5.18) + (5.21) развязаны, а дополнительный сигнал $v(t)$, искажающий оценки $\hat{\xi}(t)$, не используется. Кроме того, как можно убедиться, рассмотрев квадратичную форму $V = \tilde{\psi}^T \Gamma^{-1} \tilde{\psi}$, закон идентификации (5.21) в отличие от (5.20) при выборе $\Gamma = \gamma I_{2n} > 0$ гарантирует невозрастание нормы ошибки $\tilde{\psi}(t)$:

$$\|\tilde{\psi}(t_a)\| \leq \|\tilde{\psi}(t_b)\| \quad \forall t_a \geq t_b,$$

что в сравнении с (5.20) позволяет улучшить качество переходных процессов по оценкам $\hat{\psi}(t)$ и $\hat{\xi}(t)$.

Рассмотренный идентификационный подход и параметризация (5.8) открывают широкие возможности для построения адаптивных наблюдателей состояний с ослабленными требованиями к возбуждению регрессора и ускоренной/улучшенной сходимостью. Данные решения будут рассмотрены позднее в подразделе 5.2.6.

5.2.3. Расширенный фильтр Калмана

Совместное оценивание состояний и неизвестных параметров системы (5.12) также может быть выполнено с помощью расширенного фильтра Калмана [3]. Для его применения система переписывается в следующем виде:

$$(5.22) \quad \begin{aligned} \dot{\xi}_e(t) &= \begin{bmatrix} A_0 & \Psi(t) \\ 0_{2n \times n} & 0_{2n \times 2n} \end{bmatrix} \xi_e(t) = A_e(t) \xi_e(t), \\ y(t) &= C_e^T \xi_e(t) = [1 \quad 0_{3n-1}] \xi_e(t), \end{aligned}$$

где $\xi_e(t) = [\xi(t) \quad \psi]^T$ – расширенный вектор координат состояний, $\Psi(t) = [y(t) I_n \quad u(t) I_n] \in \mathbb{R}^{n \times 2n}$ – измеряемый сигнал, $A_e(t) \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$ – известная нестационарная матрица.

Расширенный фильтр Калмана–Бьюси [3] для системы (5.22) задается следующими уравнениями:

$$(5.23) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{\xi}}_e(t) &= A_e(t) \hat{\xi}_e(t) + L(t) \left(y(t) - C_e^T \hat{\xi}_e(t) \right), \\ L(t) &= P(t) C_e R^{-1}, \\ \dot{P}(t) &= A_e(t) P(t) + P(t) A_e^T(t) + Q - P(t) C_e R^{-1} C_e^T P(t), \end{aligned}$$

где $R^{-1} \in \mathbb{R}$, $Q \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$ – ковариации возможных возмущений, действующих на уравнение состояний и уравнение выхода соответственно.

Условием экспоненциальной сходимости оценок $\hat{\xi}_e(t)$ к истинным значениям при использовании алгоритма калмановской фильтрации (5.23) является [10, 54] равномерная полная наблюдаемость расширенной системы (5.22).

Определение 2. Пара $(C_e, A_e(t))$ равномерно полностью наблюдаема, если для всех $t \geq t_0$ существуют постоянные $\alpha_1, \alpha_2, T > 0$ такие, что верно неравенство

$$(5.24) \quad \alpha_2 I_{3n} \geq \int_t^{t+T} \Phi(\tau, t) C_e C_e^T \Phi(\tau, t) d\tau \geq \alpha_1 I_{3n},$$

где $\Phi(t, t_0)$ – матрица фундаментальных решений системы (5.22), задаваемая уравнением

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = A_e(t) \Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = I_{3n}.$$

Как следует из определения, калмановская фильтрация (5.23) требует равномерной невырожденности грамиана (5.24) с размерностью $3n \times 3n$, в то время как ранее рассмотренные адаптивные наблюдатели требуют невырожденности некоторого интеграла размерностью $2n \times 2n$. Значит, в общем случае условия сходимости адаптивных наблюдателей (5.18) + (5.20) и (5.18) + (5.21) если не совпадают, то оказываются слабее условий сходимости расширенного фильтра Калмана (5.23). Следуя обзору [55], с помощью ряда объемных выкладок можно также показать, что невырожденность (5.24) всегда требует выполнения условия неисчезающего возбуждения регрессора $\varphi(t)$ в параметризации (5.8).

5.2.4. Алгебраический наблюдатель.

Параметризация Крейссельмейера

Рассмотренные адаптивные наблюдатели формируют оценки состояний с помощью дифференциальных уравнений, правая часть которых зависит от оценок неизвестных параметров и содержит корректирующую обратную связь Люенбергера. Поэтому переходные процессы по оценкам параметров системы существенно влияют на качество переходных процессов по оценкам состояний, а дополнительное замыкание уравнения наблюдателя корректирующей обратной связью еще сильнее ухудшает ситуацию, приводя к возникновению так называемых всплесков. С целью устранения отмеченных проблем

Г. Крейссельмейером было предложено [56] с помощью специальных параметризаций формировать оценки состояний с помощью не дифференциального, но алгебраического уравнения, не требующего использования корректирующей обратной связи.

Существо подхода следующее. В рассмотрение вводится набор дифференциальных фильтров для управления и выхода:

$$(5.25) \quad \begin{aligned} \dot{\Omega}(t) &= A_K^T \Omega(t) + C_0 u(t), & \Omega(t_0) &= 0_n, \\ \dot{P}(t) &= A_K^T P(t) + C_0 y(t), & P(t_0) &= 0_n, \end{aligned}$$

где $A_K = A_0 + KC_0^T$ – гурвицева матрица.

Согласно результатам [56], оказывается справедлива запись:

$$(5.26) \quad \begin{aligned} \xi(t) &= H^T(t) \psi + e^{A_K(t-t_0)} \xi(t_0), \\ \psi^T &= [\psi_a^T - K^T \psi_b^T], & H^T(t) &= [h_1(t) \dots h_{2n}(t)], \\ h_i(t) &= F_i P(t), & h_{i+n}(t) &= F_i \Omega(t), \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

где $H(t) \in \mathbb{R}^{2n \times n}$ – измеряемый регрессор, $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица трансформации, составленная из коэффициентов полинома числителя векторной функции $(sI - A_K)^{-1} e_i$, $e_i \in \mathbb{R}^n$ – вектор с единичным i -м элементом.

Параметризация (5.16) мотивирует оценку неизмеряемых состояний системы (5.12) по алгебраическому уравнению

$$(5.27) \quad \hat{\xi}(t) = H^T(t) \hat{\psi}(t),$$

где оценки $\hat{\psi}(t)$ формируются по регрессионному уравнению

$$(5.28) \quad \begin{aligned} y(t) &= C_0^T \xi(t) = \varphi(t) \psi + C_0^T e^{A_K(t-t_0)} \xi(t_0), \\ \varphi(t) &= C_0^T H^T(t) \end{aligned}$$

с помощью широкого класса законов параметрической идентификации.

Например, градиентный закон идентификации

$$(5.29) \quad \dot{\hat{\psi}}(t) = \dot{\tilde{\psi}}(t) = -\Gamma \varphi(t) \left(\varphi^T(t) \hat{\psi}(t) - y(t) \right), \quad \Gamma = \Gamma^T > 0$$

при $\xi \in L_\infty$, $u \in L_\infty$ и выполнении условия $\varphi \in \text{PE}$ гарантирует

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \tilde{\psi}(t) \right\| = 0 \text{ (exp)}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \left\| \tilde{\xi}(t) \right\| = 0 \text{ (exp)}.$$

Здесь заметим, что в силу гурвицевости A_K экспоненциально затухающее слагаемое в (5.26) и (5.28) не влияет на асимптотические свойства ошибок оценивания, но ограничивает достижимую скорость сходимости [54]. В отличие от ранее рассмотренных наблюдателей при алгебраическом восстановлении состояний (5.27) + (5.29) улучшение качества переходных процессов по $\tilde{\psi}(t)$ приводит к равномерному улучшению качества переходных процессов по оценкам $\hat{\xi}(t)$ (оценки параметров в уравнении наблюдателя не интегрируются, а корректирующая обратная связь отсутствует).

5.2.5. Алгебраический наблюдатель.

Альтернативная параметризация

Вычисление регрессора $H(t)$ для реализации параметризации (5.26) требует довольно кропотливого вычисления матриц подобия F_i , особенно при росте n . Упрощенная параметризация предложена в [57, 58]. Вместо двух фильтров с векторными состояниями (5.25) предлагается использовать три фильтра — два с матричным состоянием и один с векторным:

$$(5.30) \quad \begin{aligned} \dot{\chi}(t) &= A_K \chi(t) + Ky(t), & \chi(t_0) &= 0_{n \times 1}, \\ \dot{P}(t) &= A_K P(t) + I_n y(t), & P(t_0) &= 0_{n \times n}, \\ \dot{\Omega}(t) &= A_K \Omega(t) + I_n u(t), & \Omega(t_0) &= 0_{n \times n}. \end{aligned}$$

Тогда в соответствии с выкладками [57, 58] параметры ψ удовлетворяют следующему линейному регрессионному уравнению:

$$(5.31) \quad \begin{aligned} \xi(t) &= \chi(t) + H^T(t) \psi + e^{A_K(t-t_0)} \xi(t_0), \\ H^T(t) &= [\Omega(t) \ P(t)] \in \mathbb{R}^{n \times 2n}. \end{aligned}$$

В справедливости записи (5.31) можно убедиться непосредственным дифференцированием ошибки $\xi(t) - \chi(t) + H^T(t) \psi$. Аналогично (5.28) умножение выражения (5.31) на C_0^T дает регрессионное уравнение

$$(5.32) \quad \begin{aligned} z(t) &= y(t) - C_0^T \chi(t) = \varphi^T(t) \psi + C_0^T e^{A_K(t-t_0)} \xi(t_0), \\ \varphi^T(t) &= C_0^T H^T(t), \end{aligned}$$

позволяющее реализовать наблюдатель вида

$$(5.33) \quad \dot{\hat{\xi}}(t) = \chi(t) + H^T(t) \hat{\psi}(t),$$

где $\hat{\psi}(t)$ может быть сформирована по (5.32) с помощью широкого класса законов параметрической идентификации.

5.2.6. Наблюдатели с ускоренной/улучшенной сходимостью

Одним из основных преимуществ алгебраических адаптивных наблюдателей вида (5.27) и (5.33) по сравнению с адаптивными наблюдателями дифференциального типа (5.18) + (5.20), (5.18) + (5.21) является прямая зависимость скорости сходимости ошибки наблюдения $\xi(t)$ от скорости сходимости параметрической ошибки и параметров фильтров (5.25) или (5.30).

Действительно, при $\xi \in L_\infty$ и $u \in L_\infty$ оказывается верно

$$\left\| \tilde{\xi}(t) \right\| \leq H_{\max} \left\| \tilde{\psi}(t) \right\| + e^{A_K(t-t_0)} \xi_{\max},$$

что позволяет регулировать скорость сходимости $\tilde{\xi}(t)$ с помощью выбора A_K и увеличения скорости сходимости $\tilde{\psi}(t)$.

В то же время скорость сходимости ошибки в дифференциальном уравнении в отклонениях (5.18), как известно, определяется не только скоростью сходимости его входа, но и собственными числами матрицы замкнутой системы $A_0 + L_0 C^T$. При этом увеличение (по модулю) действительной части собственных чисел может приводить к значительным выбросам в переходном процессе.

Оценка скорости сходимости рассмотренного ранее градиентного закона идентификации типа (5.21) или (5.29) в соответствии с результатами [59] при $\Gamma = \gamma I_{2n}$ и выполнении условия постоянного возбуждения регрессора может быть выписана в следующем виде:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\psi}(t)\| &\leq \sqrt{a} \|\varphi\| e^{-\frac{1}{2}\gamma a^{-1}(t-t_0)} \|\tilde{\psi}(t_0)\|, \\ a = \gamma b^{-1} e^{2bT}, \quad b &= -\frac{1}{2T} \ln \left(1 - \frac{\gamma \alpha}{1 + \gamma^2 T^2 \|\varphi\|_\infty^4} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, при использовании стандартных законов идентификации градиентного типа с помощью увеличения коэффициента усиления $\gamma > 0$ скорость сходимости параметрической ошибки не может быть произвольно увеличена, поскольку с увеличением γ произведение γa^{-1} может уменьшиться. Поэтому при использовании алгебраических наблюдателей (5.27) и (5.33) со стандартными градиентными законами идентификации вида (5.21), (5.29), также как и при использовании наблюдателей (5.18) + (5.20) или (5.18) + (5.21), оказывается непросто увеличить скорость сходимости оценки неизмеряемых состояний без ухудшения качества переходных процессов. Для разрешения этой проблемы были предложены модифицированные законы параметрической идентификации с ускоренной сходимостью. Не теряя общности выводов, для простоты изложения свойства улучшенных законов идентификации рассмотрим на примере задачи идентификации в параметризации (5.32), временно не учитывая слагаемое $C_0^T e^{A_K(t-t_0)} \xi(t_0)$, но имея в виду обозначенные ограничения, накладываемые им на достижимую скорость сходимости.

1) Схема расширения регрессора Крейссельмейера. Г. Крейссельмейер предложил [56] преобразовать в регрессионном уравнении (5.32) векторный регрессор $\varphi(t) \in \mathbb{R}^{2n}$ в симметричную положительно-полуопределенную матрицу $\Phi(t) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $\Phi(t) = \Phi^T(t) \geq 0$ с помощью следующей фильтрации ($l > 0$):

$$(5.34) \quad \begin{aligned} \dot{Y}(t) &= -lY(t) + \varphi(t) z(t), \quad Y(t_0) = 0_{2n}, \\ \dot{\Phi}(t) &= -l\Phi(t) + \varphi(t) \varphi^T(t), \quad \Phi(t_0) = 0_{2n \times 2n}, \end{aligned}$$

которая в силу $\psi = \text{const}$ позволяет получить новое регрессионное уравнение:

$$(5.35) \quad Y(t) = \Phi(t) \psi.$$

По уравнению (5.35) можно построить новый закон идентификации:

$$(5.36) \quad \dot{\hat{\psi}}(t) = \dot{\tilde{\psi}}(t) = -\Gamma \left(\Phi(t) \hat{\psi}(t) - Y(t) \right), \quad \Gamma = \Gamma^T > 0,$$

который обладает существенно отличными от ранее рассмотренных законов свойствами [60]:

- 1) $\lambda_{\min}(\Phi(t)) \notin L_1 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\psi}(t)\| = 0$,
 $\varphi \in \text{PE} \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\psi}(t)\| = 0$ (exp);
- 2) $\|\tilde{\psi}(t_a)\| \leq \|\tilde{\psi}(t_b)\| \quad \forall t_a \geq t_b$;
- 3) при $\varphi \in \text{PE}$ и $\Gamma = \gamma I_{2n}$ скорость экспоненциальной сходимости параметрической ошибки $\tilde{\psi}(t)$ может быть произвольно увеличена путем увеличения γ .

Наиболее значимым является третье свойство закона (5.36), объяснимое свойством

$$\varphi \in \text{PE} \Leftrightarrow \forall t \geq kT \quad \lambda_{\min}(\Phi(t)) > \mu > 0,$$

доказанным в [61] и позволяющим получить следующую оценку на норму параметрической ошибки:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\tilde{\psi}\|^2 &= -2\gamma \tilde{\psi}^T \Phi \tilde{\psi} \leq -2\gamma \lambda_{\min}(\Phi) \|\tilde{\psi}\|^2 \\ &\Downarrow \\ \|\tilde{\psi}(t)\| &\leq e^{-\gamma \int_{t_0}^t \lambda_{\min}(\Phi) d\tau} \|\tilde{\psi}(t_0)\| \leq e^{-\gamma \mu (t-t_0)} \|\tilde{\psi}(t_0)\|, \end{aligned}$$

из которой непосредственно следует третье свойство.

Фильтрация (5.34) при идентификации (5.36) дополнительно к текущей косвенной информации о параметрах системы позволяет использовать некоторый объем (определяемый параметром l) предыстории. Это позволяет в каждый момент времени иметь косвенную информацию (через $Y(t)$ и $\Phi(t)$) о всех неизвестных параметрах, что и приводит к возможности увеличения скорости сходимости с помощью увеличения γ . Таким образом, при использовании алгебраического наблюдателя состояний (5.33), дополненного идентификатором с ускоренной сходимостью (5.36), открывается возможность увеличения скорости экспоненциальной сходимости ошибок восстановления состояний с помощью увеличения γ . Заметим также, что наблюдатель (5.33) + (5.36), в отличие от ранее рассмотренных, не требует выполнения условия неисчезающего возбуждения для достижения асимптотической (но не экспоненциальной) сходимости ошибки оценивания.

2) Процедура динамического расширения и смешивания регрессора.

В [62] предложено использовать переменный коэффициент усиления в законе (5.36)⁴:

$$(5.37) \quad \Gamma = \gamma \operatorname{adj} \{ \Phi(t) \}, \quad \gamma > 0,$$

что по свойству $\operatorname{adj} \{ \Phi(t) \} \Phi(t) = \det \{ \Phi(t) \} I_{2n \times 2n}$ позволяет получить:

$$(5.38) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{\psi}}(t) &= \dot{\tilde{\psi}}(t) = -\gamma \operatorname{adj} \{ \Phi(t) \} \left(\Phi(t) \hat{\psi}(t) - Y(t) \right) = \\ &= -\gamma \left(\Delta(t) \hat{\psi}(t) - \mathcal{Y}(t) \right) \\ &\quad \Downarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\psi}}_i(t) &= \dot{\tilde{\psi}}_i(t) = -\gamma \Delta(t) \tilde{\psi}_i(t), \\ \Delta(t) &= \det \{ \Phi(t) \}, \quad \mathcal{Y}(t) = \operatorname{adj} \{ \Phi(t) \} Y(t) = \Delta(t) \psi, \end{aligned}$$

в результате чего новый закон (5.38) обладает свойствами 1)–3) закона (5.36) и дополнительно гарантирует монотонность по элементам параметрической ошибки:

$$(5.39) \quad \left| \tilde{\psi}_i(t_a) \right| \leq \left| \tilde{\psi}_i(t_b) \right| \quad \forall t_a \geq t_b, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Как будет показано чуть позже, свойство (5.39) оказывается существенным при пересчете по формуле (5.16) оценок $\hat{\psi}(t) = [\hat{\psi}_a(t) \quad \hat{\psi}_b(t)]^T$ в оценку матрицы линейного подобия $\hat{T}(t)$. Действительно, при выполнении (5.39) верно

$$(5.40) \quad \left. \begin{array}{l} \hat{\psi}_i(t_0) \in \Xi \\ \psi_i \in \Xi \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{\psi}_i(t) \in \Xi,$$

что, в некоторых случаях, при определенной априорной информации о параметрах системы (знания что $\psi_i \in \Xi$), позволяет исключать разрывы в преобразовании (5.15). Подробнее роль свойства (5.40) будет обсуждаться позднее.

3) Ослабление условия экспоненциальной сходимости. Процедура интегрального динамического расширения и смешивания регрессора. Рассмотренные законы идентификации (5.20), (5.21), (5.29), (5.36) или (5.38) гарантируют экспоненциальную сходимость параметрической ошибки и ошибки оценивания при исчезающем возбуждении регрессора (невыврожденности интеграла размерностью $2n \times 2n$), что обычно требует наличия в управляющем воздействии как минимум n различных частот [54, 64]. На практике удовлетворение этого условия требует ввода в управление незатухающих гармонических тестовых воздействий, что может противоречить исходной цели управления системой.

⁴ Отметим, что похожая процедура скаляризации регрессора была предложена на 10 лет ранее в менее цитируемой работе [63].

С целью ослабления условий сходимости оценок состояний и параметров к истинным значениям в литературе были предложены законы идентификации с ослабленными требованиями к возбуждению регрессора. Таким условием выступает условие конечного возбуждения регрессора ($\varphi \in \text{FE}$)⁵. В отличие от неисчезающего возбуждения регрессора условие конечного возбуждения требует невырожденности некоторого интеграла не на всей временной оси, а только на ее конечной части. В терминах условий сходимости фильтра Калмана–Бьюси (5.23), это ослабленное условие эквивалентно наблюдаемости расширенной системы (5.22) только на отдельном интервале времени [3]. Условие конечного возбуждения регрессора может быть выполнено добавлением к управлению экспоненциально затухающего гармонического сигнала с n различными частотами, что не препятствует достижению асимптотической цели регулирования. Для многих систем это условие выполняется и при полном отсутствии тестовых сигналов.

Для ослабления условия неисчезающего возбуждения регрессора было предложено множество различных подходов к обработке регрессора и функции линейного регрессионного уравнения. Подробный обзор таких методов дан в [65–68]. Основная идея большинства подходов заключается в «запоминании» специальным образом полученной на интервале конечного возбуждения косвенной информации о неизвестных параметрах.

В [69] предлагается вместо (5.34) использовать следующую фильтрацию ($\sigma > 0$):

$$(5.41) \quad \begin{aligned} \dot{Y}(t) &= e^{-\sigma(t-t_0)} \varphi(t) z(t), & Y(t_0) &= 0_{2n}, \\ \dot{\Phi}(t) &= e^{-\sigma(t-t_0)} \varphi(t) \varphi^T(t), & \Phi(t_0) &= 0_{2n \times 2n}, \end{aligned}$$

что позволяет получить новое регрессионное уравнение вида (5.35), для регрессора которого при выполнении условия $\varphi \in \text{FE}$ верно неравенство:

$$(5.42) \quad \begin{aligned} \Phi(t) &= \int_{t_0}^t e^{-\sigma(\tau-t_0)} \varphi(\tau) \varphi^T(\tau) d\tau \geq \int_{t_0}^{t_e} e^{-\sigma(\tau-t_0)} \varphi(\tau) \varphi^T(\tau) d\tau \geq \\ &\geq e^{-\sigma(t_e-t_0)} \int_{t_0}^{t_e} \varphi(\tau) \varphi^T(\tau) d\tau \geq \alpha e^{-\sigma(t_e-t_0)} I_{2n} > 0. \end{aligned}$$

На основе уравнения (5.35), полученного с помощью фильтрации (5.41), может быть реализован закон идентификации как с матричным регрессором (5.36), так и со скалярным (5.38). Свойства этих законов отличаются только видом монотонности параметрической ошибки (по норме или по элементам):

⁵ Условие $\varphi \in \text{FE}$ означает, что существуют $t_e > t_r \geq t_0$ и $\alpha > 0$ такие, что $\int_{t_r}^{t_e} \varphi(\tau) \varphi^T(\tau) d\tau \geq \alpha > 0$.

- 1) $\varphi \in \text{FE} \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\psi}(t)\| = 0$ (exp);
- 2) (5.41) + (5.36) $\Rightarrow \|\tilde{\psi}(t_a)\| \leq \|\tilde{\psi}(t_b)\| \quad \forall t_a \geq t_b$,
(5.41) + (5.38) $\Rightarrow \|\tilde{\psi}_i(t_a)\| \leq \|\tilde{\psi}_i(t_b)\| \quad \forall t_a \geq t_b, i \in \{1, \dots, n\}$;
- 3) при $\varphi \in \text{FE}$ и $\Gamma = \gamma I_{2n}$ скорость экспоненциальной сходимости параметрической ошибки $\psi(t)$ может быть произвольно увеличена путем увеличения γ .

Как следует из сравнения свойств законов (5.34) + (5.36), (5.34) + (5.38) и (5.41) + (5.36), (5.41) + (5.38), вторая группа наследует достоинства первой, но при этом ослабляет требование, необходимое для достижения целей (2.5) и (5.17).

Ослабление требования неисчезающего возбуждения регрессора позволяет расширить задачу идентификации в параметризациях (5.26) и (5.31) путем учета экспоненциально затухающего слагаемого⁶:

$$\begin{aligned} \xi(t) &= H^T(t) \psi_e, \\ \psi_e^T &= [\psi_a^T - K^T \quad \psi_b^T \quad \xi^T(t_0)], \quad H^T(t) = [h_1(t) \dots h_{2n}(t) \quad e^{A_K(t-t_0)}], \\ \xi(t) &= \chi(t) + H^T(t) \psi_e, \\ H^T(t) &= [\Omega(t) \quad P(t) \quad e^{A_K(t-t_0)}], \end{aligned}$$

что при реализации соответствующего закона идентификации новых параметров ψ_e приводит к следующей оценке на ошибку восстановления состояний

$$\|\tilde{\xi}(t)\| \leq H_{\max} \|\tilde{\psi}_e(t)\|$$

и снимает накладываемые собственными числами матрицы A_K ограничения на скорость сходимости ошибки $\tilde{\xi}(t)$, обеспечивая ее регулирование только с помощью одного скалярного параметра γ .

4) Ослабление условия неисчезающего возбуждения регрессора. Алгоритм идентификации со сходимостью за конечное время. Иной закон идентификации [70] с ослабленными требованиями к возбуждению регрессора обеспечивает сходимость ошибок идентификации параметров/состояний за конечное время и имеет вид:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_i^{\text{FTC}}(t) &= \frac{1}{1 - \phi_c(t)} \left[\hat{\psi}_i(t) - \phi_c(t) \hat{\psi}_i(t_0) \right], \\ (5.43) \quad \phi_c(t) &= \begin{cases} \sigma, & \text{если } \phi \geq \sigma \\ \phi(t), & \text{если } \phi < \sigma, \end{cases} \quad \dot{\phi}(t) = -\gamma \Delta^2(t) \phi(t), \quad \phi(t_0) = 1. \end{aligned}$$

⁶ Расширить задачу идентификации без ослабления требования неисчезающего возбуждения не представляется возможным, поскольку этому требованию не удовлетворяет любой вектор, содержащий затухающий элемент.

В [70] доказана сходимость $\hat{\psi}_i^{\text{FTC}}(t)$ к ψ_i за конечное время t_e при выполнении условия

$$(5.44) \quad \int_{t_0}^{t_e} \Delta^2(\tau) d\tau \geq -\frac{1}{\gamma_i} \ln(\sigma).$$

Для пояснения механизма релаксации запишем решение уравнения (5.38):

$$(5.45) \quad \begin{aligned} \tilde{\psi}_i(t) &= \phi(t) \tilde{\psi}_i(t_0) \\ &\downarrow \\ \hat{\psi}_i(t) - \phi(t) \hat{\psi}_i(t_0) &= [1 - \phi(t)] \psi_i. \end{aligned}$$

Поскольку $\phi(t)$ – невозрастающая функция времени в силу $\Delta^2(t) \geq 0$, то при выполнении условия (5.44) в момент времени t_e происходит переключение логического оператора (5.43) и значения неизвестных параметров находятся аналитически по формуле (5.45). Регрессор $1 - \phi(t)$ и функция $\hat{\psi}_i(t) - \phi(t) \hat{\psi}_i(t_0)$ в параметризации (5.45) выполняют роль $\Phi(t)$ и $Y(t)$ из параметризации (5.35) + (5.41). При выполнении условия (5.44) начиная с некоторого момента времени регрессор $1 - \phi(t)$ глобально отличен от нуля, т.е. получена и сохранена косвенная информация о всех неизвестных параметрах, а значит, они могут быть восстановлены аналитически. Таким образом, аналогом закона (5.43) в терминах параметризации (5.41) является следующий закон:

$$(5.46) \quad \hat{\psi}^{\text{FTC}}(t) = \begin{cases} \hat{\psi}(t_0), & \text{если } \det\{\Phi(t)\} < \rho \leq \det\{\alpha e^{-\sigma t} I_{2n}\}, \\ \Phi^{-1}(t) Y(t) & \text{иначе,} \end{cases}$$

который в силу выполнения неравенства (5.42) также позволяет найти параметры за конечное время при правильном выборе ρ . Открытой проблемой законов со сходимостью за конечное время (5.43) или (5.46) выступает высокая чувствительность к параметрам σ, γ_i, ρ , от выбора значений которых целиком зависит параметрическая сходимость (или ее отсутствие при неудачном выборе).

5.2.7. Проблема разрывов в пересчете (5.16)

Подробно рассмотрев большинство из существующих алгоритмов и процедур оценивания виртуальных состояний $\xi(t)$ канонической наблюдаемой формы (5.12) и идентификации параметров ψ_a, ψ_b числителя и знаменателя передаточной функции (5.6), вернемся к проблеме реализации наблюдателя (5.15) + (5.16) физических состояний исходной системы (2.1).

Во-первых, для получения оценок (5.15) необходимо существование формулы пересчета (5.16) параметров передаточной функции (5.6) в элементы матрицы T_I . Вообще говоря, полная наблюдаемость системы оказывается необходимым, но не достаточным условием существования такого выражения.

Пример 1. Рассмотрим полностью наблюдаемую при $\theta_2 \neq 0$ систему:

$$A = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ \theta_3 & \theta_4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с преобразованием (5.11) параметры числителя и знаменателя передаточной функции (5.6) заданы следующим образом:

$$(5.47) \quad \psi_a = \begin{bmatrix} \theta_1 + \theta_4 \\ \theta_2\theta_3 - \theta_1\theta_4 \end{bmatrix}, \quad \psi_b = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_2\theta_5 \end{bmatrix},$$

а преобразование T_I определено так:

$$T_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \theta_4\theta_2^{-1} & \theta_2^{-1} \end{bmatrix}.$$

Система алгебраических уравнений (5.47) не имеет решений, а значит, реализовать формулу (5.16) невозможно, несмотря на полную наблюдаемость системы. ■

Во-вторых, даже если формула пересчета (5.16) существует, то из экспоненциальной сходимости ошибок $\tilde{\psi}(t)$ и $\tilde{\xi}(t)$ следует экспоненциальная сходимость ошибки восстановления физических состояний $\tilde{x}(t)$, если функция $f_{T_I}: \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ непрерывна по Липшицу.

Лемма 5. Пусть $\tilde{\psi}(t)$ и $\tilde{\xi}(t)$ экспоненциально сходятся к нулю, тогда предел (2.5) существует, если для всех $a, b \in \mathbb{R}^{2n}$ найдется постоянная $\mu > 0$ такая, что:

$$(5.48) \quad \|f_{T_I}(a) - f_{T_I}(b)\| \leq \mu \|a - b\|.$$

Доказательство. Запишем уравнение для ошибки слежения:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \hat{T}_I(t) \hat{\xi}(t) - T_I \xi(t) \pm \hat{T}_I(t) \xi(t) = \hat{T}_I(t) \tilde{\xi}(t) + \tilde{T}_I(t) \xi(t) \pm T_I \tilde{\xi}(t) = \\ &= \tilde{T}_I(t) \tilde{\xi}(t) + T_I \tilde{\xi}(t) + \tilde{T}_I \xi(t), \end{aligned}$$

Используя условие (5.48), имеем оценку сверху:

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}(t)\| &\leq \|\tilde{T}_I\| \|\tilde{\xi}(t)\| + \|T_I\| \|\tilde{\xi}(t)\| + \|\tilde{T}_I(t)\| \|\xi(t)\| \leq \\ &\leq \left(\|T_I\| + \mu \|\tilde{\psi}(t)\| \right) \|\tilde{\xi}(t)\| + \mu \|\tilde{\psi}(t)\| \|\xi(t)\|, \end{aligned}$$

откуда следует экспоненциальная сходимость ошибки $\tilde{x}(t)$ при экспоненциальной сходимости $\tilde{\psi}(t)$ и $\tilde{\xi}(t)$. ■

Для математических моделей физических систем формулы пересчета (5.16) обычно содержат операцию деления, что нарушает условие (5.48) и, независимо от используемого закона идентификации параметров $\hat{\psi}(t)$, может приводить к разрывам по оценкам $\hat{T}_I(t)$, а значит, и $\hat{x}(t)$. Подтвердим этот тезис на следующих примерах.

Пример 2. Рассмотрим систему (2.1) со следующими матрицами:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \theta_1 \\ \theta_1 & \theta_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с преобразованием (5.11) параметры числителя и знаменателя передаточной функции (5.6) заданы следующим образом:

$$\psi_a = \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_1^2 \end{bmatrix}, \quad \psi_b = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_1 \theta_3 \end{bmatrix},$$

а преобразование T_I определено так:

$$T_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \theta_2 \theta_1^{-1} & \theta_1^{-1} \end{bmatrix}.$$

Тогда формула пересчета (5.16) принимает вид

$$\hat{T}_I(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\hat{\psi}_{1a}(t)}{\sqrt{\hat{\psi}_{2a}(t)}} & \frac{1}{\sqrt{\hat{\psi}_{2a}(t)}} \end{bmatrix}.$$

Функция пересчета не удовлетворяет условию Липшица и испытывает разрыв при $\hat{\psi}_{2a}(t) = 0$. Более того, оказываются недопустимы отрицательные оценки $\hat{\psi}_{2a}(t)$. ■

Рассмотренные ранее законы идентификации параметров ψ_a, ψ_b по динамическим свойствам параметрической ошибки могут быть разделены на три группы:

- 1) не обеспечивают монотонность ошибки $\tilde{\psi}(t)$ ни по норме, ни по элементам (5.20), (5.23);
- 2) гарантируют монотонность по норме (5.21), (5.29), (5.36);
- 3) обеспечивают монотонность по элементам (5.34) + (5.38), (5.41) + (5.38), (5.34) + (5.43).

Для законов идентификации из первых двух групп гарантировать непопадание оценки $\hat{\psi}_{2a}(t)$ в недопустимую область $\hat{\psi}_{2a}(t) \leq 0$ в переходном процессе не представляется возможным даже при выборе начальных условий так, что $\hat{\psi}_{2a}(t_0) > 0$. Следовательно, закон восстановления физических состояний (5.15) + (5.16) оказывается нереализуем при использовании наблюдателей и идентификаторов (5.18) + (5.20), (5.18) + (5.21), (5.23), (5.26) + (5.29), (5.33) + (5.34) + (5.36) и (5.33) + (5.41) + (5.36).

Законы идентификации со скалярным регрессором (5.34) + (5.38), (5.41) + (5.38), (5.44) + (5.43) обеспечивают монотонность по элементам параметрической ошибки, а следовательно, в силу (5.39) и (5.40) в данном примере оказывается верно

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\psi}_2(t_0) > 0 \\ \psi_2 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{\psi}_2(t) > 0,$$

поскольку априорно из определения ψ_a известно $\psi_2 = \psi_{2a} > 0$.

Свойство (5.40) позволяет применить идентификаторы и наблюдатели (5.33) + (5.34) + (5.38), (5.33) + (5.41) + (5.38), (5.33) + (5.34) + (5.43) для реализации наблюдателя физических состояний (5.15) + (5.16). Однако свойства (5.39) и (5.40) являются хрупкими по отношению к внешним возмущениям, а в более реалистичных практических задачах для реализации этих идентификаторов может потребоваться недоступная априорная информация. Подтвердим последний вывод на примере.

Пример 3. Рассмотрим систему (2.1) со следующими матрицами:

$$(5.49) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & \theta_1 - \theta_2 \\ \theta_1 & \theta_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с преобразованием (5.11) параметры числителя и знаменателя передаточной функции (5.6) заданы следующим образом:

$$(5.50) \quad \psi_a = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_1 (\theta_1 - \theta_2) \end{bmatrix}, \quad \psi_b = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_3 (\theta_1 - \theta_2) \end{bmatrix},$$

а преобразование T_I определено так:

$$T_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \theta_1 & 1 \\ \theta_1 - \theta_2 & \theta_1 - \theta_2 \end{bmatrix}.$$

Тогда формула пересчета (5.16) принимает вид

$$\hat{T}_I(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\hat{\psi}_{1a}^2(t)}{\hat{\psi}_{2a}(t)} & \frac{\hat{\psi}_{1a}(t)}{\hat{\psi}_{2a}(t)} \\ \hat{\psi}_{2a}(t) & \hat{\psi}_{2a}(t) \end{bmatrix},$$

откуда следует наличие разрыва в функции (5.16) при $\hat{\psi}_{2a}(t) = 0$.

Законы идентификации из первых двух групп по-прежнему не могут быть реализованы, а для реализации законов из третьей группы требуется знание знака произведения $\theta_1 (\theta_1 - \theta_2)$, поскольку верно следующее:

$$\begin{aligned} \text{sign} \left(\hat{\psi}_2(t_0) \right) &= \text{sign}(\psi_2) \\ &\downarrow \\ \text{sign} \left(\hat{\psi}_2(t) \right) &= \text{sign}(\psi_2), \end{aligned}$$

где $\psi_2 = \psi_{2a} = \theta_1 (\theta_1 - \theta_2)$.

В отличие от предыдущего примера в рассматриваемом случае (5.49), (5.50) информация о знаке ψ_2 из выражения (5.50) получена быть не может, а значит, без дополнительной априорной информации о параметрах системы законы идентификации из третьей группы также оказываются нереализуемыми. Значит, для системы (5.49) закон восстановления физических состояний (5.15) + (5.16) нереализуем при применении любого из существующих законов идентификации параметров передаточной функции (5.6). ■

Рассмотренные примеры 1–3 показывают, что в общем случае при параметрической неопределенности системы (2.1) с помощью наблюдателей на базе преобразования системы в каноническую наблюдаемую форму разрешима задача оценивания только виртуальных координат $\xi(t)$, бесполезных для использования в целях реализации динамических обратных связей заданного вида (2.4a) и (2.4б).

Однако в редких частных ситуациях, когда формула пересчета (5.16) существует и удовлетворяет (возможно локально) условию Липшица, данные решения, в отличие от других адаптивных и инвариантных наблюдателей, не требуют выполнения ограничительных условий согласования по выходу. Действительно, если $\psi \in \mathcal{D}_\psi$, а функция $f_{T_I}: \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ существует и удовлетворяет локальному условию Липшица в \mathcal{D}_ψ и в силу (5.40) обеспечено $\hat{\psi}(t) \in \mathcal{D}_\psi$, то с помощью наблюдателя типа (5.15) + (5.16) оказывается возможно восстановить состояния системы, не удовлетворяющей условиям согласования по выходу. Например, система из примера 2 не удовлетворяет условию согласования по выходу:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & \theta_1 \\ \theta_1 & \theta_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_3 \end{bmatrix} u = A_n x + B_n u + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 - 1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 - 1 \end{bmatrix}}_{D\Phi(x,u)\Theta},$$

но, в силу свойства (5.40) при определенном выборе начальных условий оценок ее состояния могут быть восстановлены с помощью наблюдателей (5.33) + (5.34) + (5.38), (5.33) + (5.41) + (5.38), (5.33) + (5.34) + (5.43). Как показано в примере 3, для выполнения условия $\hat{\psi}(t) \in \mathcal{D}_\psi$ может потребоваться недоступная информация о параметрах системы.

Таким образом, сложности, связанные с реализацией наблюдателей состояний на базе преобразования системы в каноническую наблюдаемую форму, заключаются не столько в получении алгоритмов формирования оценок $\hat{\psi}_a(t)$, $\hat{\psi}_b(t)$ и $\hat{\xi}(t)$, обеспечивающих (5.17), сколько в реализации формулы пересчета (5.16), которая может:

- не существовать даже для полностью наблюдаемых систем;
- существовать, но не удовлетворять условию Липшица (содержать операции деления, возведения в степень, взятия корня, их комбинации и т.д.).

Для преодоления проблемы разрывов в пересчете (5.16) в литературе предложено несколько различных подходов. Прежде чем перейти к их рассмотрению, разберемся с условиями существования формулы пересчета (5.16). Заметим, что в примерах 1–3 рассматривались системы с перепараметризацией, т.е. с числом неизвестных параметров большим, чем необходимо для экономного описания системы. Такой класс систем в пространстве состояний задается следующим образом:

$$(5.51) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\theta)x(t) + B(\theta)u(t), \\ y(t) &= C^T x(t), x(t_0) = x_0, \end{aligned}$$

где $A : \mathbb{R}^{n\theta} \mapsto \mathbb{R}^{n \times n}$, $B : \mathbb{R}^{n\theta} \mapsto \mathbb{R}^n$ – это отображения физических параметров $\theta \in \mathbb{R}^{n\theta}$ в матрицы системы, а все остальные величины определены так же, как в (2.1).

Тогда с помощью переобозначения $\psi_a := \psi_a(\theta)$, $\psi_b := \psi_b(\theta)$, $T := T(\theta)$ также учтем зависимость от неизвестных параметров θ матрицы преобразований координат и параметров канонической наблюдаемой формы (5.12), (5.13). Теперь условия существования формулы пересчета (5.16) можно сформулировать в терминах достаточных условий существования обратной функции, позволяющей пересчитать параметры канонической наблюдаемой формы $\psi_a(\theta)$, $\psi_b(\theta)$ в физические параметры:

$$(5.52) \quad \det^2 \{ \nabla_{\theta} \psi_{ab}(\theta) \} > 0,$$

$$\psi_{ab}(\theta) = \mathcal{L}_{ab} \begin{bmatrix} \psi_a(\theta) \\ \psi_b(\theta) \end{bmatrix} = \mathcal{L}_{ab} \psi(\theta),$$

где

$$\psi(\theta) = [\psi_a^{\top}(\theta) \quad \psi_b^{\top}(\theta)]^{\top}.$$

Если условие (5.52) выполнено, то существует обратная функция такая, что $\mathcal{F}(\psi_{ab}) = \theta$, а значит, отображение $f_{T_I} : \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ из (5.16) будет задано следующим образом:

$$(5.53) \quad f_{T_I}(\hat{\psi}) = (T_I \circ \mathcal{F})(\mathcal{L}_{ab} \hat{\psi}).$$

Мотивация условия (5.52) следующая. Как ранее было показано, по сигналам входа $u(t)$ и выхода $y(t)$, при выполнении определенных условий сходимости, могут быть идентифицированы параметры канонической наблюдаемой формы. Матрица обратного преобразования координат вычисляется через физические параметры системы. Значит, рассчитать ее оказывается возможно только тогда, когда параметры канонической наблюдаемой формы могут быть пересчитаны в параметры θ . Рассматривая систему с перепараметризацией (5.51), при выполнении условий существования обратной функции можем описать существующие способы устранения разрывов в пересчете (5.16).

1) Метод проекции градиента. Введем в рассмотрение множество

$$\mathcal{D}_{\psi} := \{ \psi \in \mathbb{R}^{2n} : \overline{\psi}_i \leq \psi_i \leq \underline{\psi}_i, i = 1, \dots, 2n \},$$

где $\underline{\psi}_i$ и $\overline{\psi}_i$ – известные величины.

Предположим, что для всех $\psi \in \mathcal{D}_{\psi} \subset \mathbb{R}^{2n}$ верно условие (5.48). Тогда для устранения проблемы разрывов остается обеспечить выполнение импликации $\hat{\psi}(t_0) \in \mathcal{D}_{\psi} \Rightarrow \hat{\psi}(t) \in \mathcal{D}_{\psi}, \forall t \geq t_0$. Этого свойства добиваются путем дополнения закона идентификации оператором проекций [54, с. 788]; [71, с. 133],

позволяющим проецировать получаемые оценки на множество \mathcal{D}_ψ . Например, закон идентификации (5.21), дополненный оператором проекций, примет вид:

$$(5.54) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{\psi}}(t) &= \lambda(t) + \mu(t), \quad \lambda(t) = -\Gamma \varphi(t) \left(\varphi^T(t) \hat{\psi}(t) - z(t) \right), \quad \hat{\psi}(t_0) \in \mathcal{D}_\psi \\ \mu(t) &= \begin{cases} 0, & \text{если } \hat{\psi}_i(t) \in (\underline{\psi}_i, \overline{\psi}_i), \text{ или} \\ & \text{если } \hat{\psi}_i(t) = \overline{\psi}_i \text{ и } \lambda(t) \leq 0, \text{ или} \\ & \text{если } \hat{\psi}_i(t) = \underline{\psi}_i \text{ и } \lambda(t) \geq 0, \\ -\lambda(t) & \text{иначе.} \end{cases} \end{aligned}$$

Закон (5.54) обладает всеми свойствами, описанными в теореме 7, и дополнительно обеспечивает выполнение условия $\hat{\psi}(t) \in \mathcal{D}_\psi, \forall t \geq t_0$, что при выполнении условия Липшица в \mathcal{D}_ψ позволяет формировать оценку $\hat{T}_I(t)$ без разрывов. Аналогичным образом возможно дополнить оператором проекций все ранее рассмотренные законы идентификации. Использование модифицированного закона (5.54) ограничивает необходимость знания оценок сверху и снизу $\underline{\psi}_i$ и $\overline{\psi}_i$ и необходимость формулирования условий отсутствия разрывов в терминах ограничений на ψ_i . Вообще говоря, проецировать получаемые оценки можно не только на рассмотренное множество, а на любое выпуклое множество [54, с. 788], заданное следующим образом:

$$\mathcal{D}_\psi := \{ \psi \in \mathbb{R}^{2n} : g(\psi) \leq 0 \}.$$

В этом случае закон идентификации (5.54) приобретает вид:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\psi}}(t) &= \begin{cases} \lambda(t), & \text{если } g(\hat{\psi}) < 0 \text{ или } g(\hat{\psi}) = 0 \text{ и } \lambda^T(t) \nabla g \leq 0, \\ \lambda(t) - \Gamma \frac{\nabla g \nabla g^T}{\nabla g^T \Gamma \nabla g} \lambda(t) & \text{иначе,} \end{cases} \\ \lambda(t) &= -\Gamma \varphi(t) \left(\varphi^T(t) \hat{\psi}(t) - z(t) \right), \quad \hat{\psi}(t_0) \in \mathcal{D}_\psi \end{aligned}$$

и обеспечивает $\hat{\psi}(t) \in \mathcal{D}_\psi, \forall t \geq t_0$. К сожалению, в прикладных задачах множество значений $\psi(\theta)$, на которых достигаются разрывы в формуле (5.16), часто оказывается невыпуклым, что мотивировало развитие других подходов.

2) Асимптотический каскадный пересчет. Рассмотрим предложенный в [72] подход к устранению разрывов в пересчете (5.16), (5.53). Предположим, что разрывы в формуле пересчета вызваны исключительно операциями деления на функции от $\psi_{ab}(\theta)$ и θ . В этом случае отображения $\mathcal{F}(\theta)$ и $T_I(\theta)$ допускают разложение на матричный числитель и знаменатель следующим образом:

$$(5.55a) \quad \mathcal{S}(\psi_{ab}) = \mathcal{G}(\psi_{ab}) \mathcal{F}(\psi_{ab}) = \mathcal{G}(\psi_{ab}) \theta,$$

$$(5.55b) \quad \mathcal{P}(\theta) = \mathcal{Q}(\theta) \text{vec}(T_I(\theta)),$$

где $\mathcal{S} : \mathbb{R}^{n_\theta} \mapsto \mathbb{R}^{n_\theta}$, $\mathcal{G} : \mathbb{R}^{n_\theta} \mapsto \mathbb{R}^{n_\theta \times n_\theta}$, $\mathcal{P} : \mathbb{R}^{n_\theta} \mapsto \mathbb{R}^{n^2}$, $\mathcal{Q} : \mathbb{R}^{n_\theta} \mapsto \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$ – это известные отображения.

Теперь, подставив $\hat{\psi}_{ab}(t) = \mathcal{L}_{ab}\hat{\psi}(t)$ в (5.55а), имеем регрессионное уравнение (оценки $\hat{\psi}(t)$ здесь могут быть получены любым ранее рассмотренным алгоритмом идентификации):

$$(5.56) \quad \mathcal{Y}_\theta(t) = \mathcal{M}_\theta(t)\theta,$$

где

$$\mathcal{Y}_\theta(t) := \mathcal{S}(\hat{\psi}_{ab}), \quad \mathcal{M}_\theta(t) := \mathcal{G}(\hat{\psi}_{ab}).$$

По уравнению (5.56) можем построить, например, следующий закон идентификации ($\gamma > 0$):

$$(5.57) \quad \dot{\hat{\theta}}(t) = -\gamma \mathcal{M}_\theta^T(t) (\mathcal{M}_\theta(t)\hat{\theta}(t) - \mathcal{Y}_\theta(t)), \quad \hat{\theta}(t_0) = \hat{\theta}_0.$$

Теперь, имея вектор оценок $\hat{\theta}(t)$ и действуя аналогично (5.56), (5.57), можем получить искомую оценку матрицы преобразования координат:

$$(5.58) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{T}}_I(t) &= -\text{mat} \left[\gamma \mathcal{M}_{T_I}^T(t) (\mathcal{M}_{T_I}(t) \text{vec}(\hat{T}_I(t)) - \mathcal{Y}_{T_I}(t)) \right], \\ \hat{T}_I(t_0) &= \hat{T}_{I0}, \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{M}_{T_I}(t) := \mathcal{Q}(\hat{\theta}), \quad \mathcal{Y}_{T_I}(t) := \mathcal{P}(\hat{\theta})$$

и $\text{mat}[\cdot]$ – операция, обратная операции векторизации.

Если $\mathcal{S}(\psi_{ab})$, $\mathcal{G}(\psi_{ab})$, $\mathcal{P}(\theta)$, $\mathcal{Q}(\theta)$ не испытывают разрывов при всех $\psi_{ab} \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ и $\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta}$, что обеспечено декомпозицией (5.55а), (5.55б), то асимптотический каскадный пересчет (5.57), (5.58) обеспечивает $\hat{T}_I(t) \rightarrow T_I(\theta)$ при $\hat{\psi}(t) \rightarrow \psi(\theta)$ и использовании любого из ранее рассмотренных законов идентификации параметров $\psi(\theta)$.

К недостаткам асимптотического каскадного подхода стоит отнести, во-первых, дополнительную идентификацию промежуточных параметров θ , во-вторых, медленную скорость сходимости $\hat{T}_I(t)$ к $T_I(\theta)$ из-за необходимости сходимости сначала $\hat{\psi}(t)$ к $\psi(\theta)$, затем $\hat{\theta}(t)$ к θ и только после $\hat{T}_I(t)$ к $T_I(\theta)$, в-третьих, каскадная процедура не защищает от разрывов, например, если в одном из отображений $\mathcal{S}(\psi_{ab})$, $\mathcal{G}(\psi_{ab})$, $\mathcal{P}(\theta)$, $\mathcal{Q}(\theta)$ есть операция взятия арифметического корня. В отличие от метода проекций градиента каскадная процедура (5.57), (5.58) не требует знания оценок сверху и снизу на элементы вектора $\psi(\theta)$ или выпуклости множества \mathcal{D}_ψ .

3) Использование неоднородных отображений. Еще одна процедура формирования оценки $\hat{T}_I(t)$ матрицы преобразования координат без разрывов базируется на понятии и свойствах неоднородных отображений.

Определение 3. Отображение $\mathcal{F}: \mathbb{R}^{n_x} \mapsto \mathbb{R}^{n_{\mathcal{F}} \times m_{\mathcal{F}}}$ неоднородно с порядком $\ell_{\mathcal{F}} \geq 1$, если существуют $\Pi_{\mathcal{F}}(\omega) \in \mathbb{R}^{n_{\mathcal{F}} \times n_{\mathcal{F}}}$, $\Xi_{\mathcal{F}}(\omega) = \bar{\Xi}_{\mathcal{F}}(\omega) \omega \in \mathbb{R}^{\Delta_{\mathcal{F}} \times n_x}$ и отображение $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}: \mathbb{R}^{\Delta_{\mathcal{F}}} \mapsto \mathbb{R}^{n_{\mathcal{F}} \times m_{\mathcal{F}}}$ такие, что для любых $\omega \in \mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{R}^{n_x}$

разрешимо функциональное уравнение

$$(5.59a) \quad \Pi_{\mathcal{F}}(\omega) \mathcal{F}(x) = \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\Xi_{\mathcal{F}}(\omega)x),$$

так что

$$(5.59b) \quad \begin{aligned} \det \{ \Pi_{\mathcal{F}}(\omega) \} &\geq \omega^{\ell_{\mathcal{F}}}(t), \\ \Xi_{\mathcal{F}ij}(\omega) &= c_{ij}\omega^{\ell_{ij}}, \quad \bar{\Xi}_{\mathcal{F}ij}(\omega) = c_{ij}\omega^{\ell_{ij}-1}, \\ c_{ij} &\in \{0, 1\}, \quad \ell_{ij} \geq 1. \end{aligned}$$

Пример 4. Отображение $\mathcal{F}(\theta) = \text{col}\{\theta_1\theta_2 + \theta_1, \theta_1\}$ с $\Pi_{\mathcal{F}}(\omega) = \text{diag}\{\omega^2, \omega\}$, $\Xi_{\mathcal{F}}(\omega) = \text{diag}\{\omega, \omega\}$ неоднородно с порядком $\ell_{\mathcal{F}} = 3$. Поэтому основное свойство $\Xi_{\mathcal{F}}(\omega)\theta = \bar{\Xi}_{\mathcal{F}}(\omega)\omega(t)\theta$ из определения 3 позволяет с помощью измеряемой функции $\mathcal{Y}_{\theta}(t) = \omega(t)\theta$ параметризовать линейное регрессионное уравнение относительно $\mathcal{F}(\theta)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathcal{F}}(\omega) \mathcal{F}(\theta) &= \mathcal{T}_{\mathcal{F}}(\bar{\Xi}_{\mathcal{F}}(\omega)\mathcal{Y}_{\theta}), \\ \begin{bmatrix} \omega^2(t) & 0 \\ 0 & \omega(t) \end{bmatrix} \mathcal{F}(\theta) &= \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_{1\theta}(t) \mathcal{Y}_{2\theta}(t) + \mathcal{Y}_{1\theta}(t) \\ \mathcal{Y}_{1\theta}(t) \end{bmatrix}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Частным случаем условий неоднородности отображения являются условия однородности, поскольку для однородных отображений в терминах уравнения (5.59a) верно

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathcal{F}}(\omega) \mathcal{F}(x) &= \mathcal{F}(\Xi_{\mathcal{F}}(\omega)x), \\ \Xi_{\mathcal{F}}(\omega) &= \omega^{\ell} I_{n_x}, \quad \ell_{ij} = \ell, \end{aligned}$$

т.е. в этом случае произведение $\Pi_{\mathcal{F}}(\omega) \mathcal{F}(x)$ может быть вычислено по самой функции $\mathcal{F}(x)$ умножением аргумента на $\Xi_{\mathcal{F}}(\omega)$.

В [73] была показана разрешимость функционального уравнения (5.59a) для одной достаточно общей алгебраической функции, включающей все многочлены и мономы, а также некоторые из иррациональных функций.

Утверждение 1. Пусть $n_{\mathcal{F}} = m_{\mathcal{F}} = 1$, тогда $\mathcal{F}(x) = \sum_j a_j \prod_{i=1}^{n_x} x_i^{k_{ji}}$, $k_{ji} \geq 0$ неоднородно в смысле (5.59a), (5.59b).

Доказательство утверждения приведено в [73].

Покажем, как свойства неоднородных отображений могут быть использованы для получения оценки $\hat{T}_I(t)$. Напомним, что с помощью процедуры динамического расширения и смешивания регрессора (5.38) для измерения доступны сигналы $\mathcal{Y}(t)$ и $\Delta(t)$, связанные уравнением

$$\mathcal{Y}(t) = \Delta(t)\psi(\theta).$$

Тогда, умножив $\mathcal{Y}(t)$ на \mathcal{L}_{ab} , также имеем уравнение:

$$\mathcal{Y}_{ab}(t) = \Delta(t)\psi_{ab}(\theta),$$

где $\mathcal{Y}_{ab}(t) := \mathcal{L}_{ab}\mathcal{Y}(t)$.

Предположим, что отображения $\mathcal{S}(\psi_{ab})$, $\mathcal{G}(\psi_{ab})$ в (5.55a) неоднородны в смысле определения 3. Тогда, умножив (5.55a) слева и справа на $\Pi(\Delta)$ и используя свойства (5.59б), имеем:

$$(5.60) \quad \begin{aligned} \mathcal{T}_{\mathcal{S}}(\Xi_{\mathcal{S}}(\Delta)\psi_{ab}) &= \mathcal{T}_{\mathcal{G}}(\Xi_{\mathcal{G}}(\Delta)\psi_{ab})\theta, \\ &\downarrow \\ \mathcal{T}_{\mathcal{S}}(\overline{\Xi}_{\mathcal{S}}(\Delta)\mathcal{Y}_{ab}) &= \mathcal{T}_{\mathcal{G}}(\overline{\Xi}_{\mathcal{G}}(\Delta)\mathcal{Y}_{ab})\theta, \end{aligned}$$

где сигналы $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}(\overline{\Xi}_{\mathcal{S}}(\Delta)\mathcal{Y}_{ab})$, $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}(\overline{\Xi}_{\mathcal{G}}(\Delta)\mathcal{Y}_{ab})$ измеряемы, так как $\mathcal{Y}_{ab}(t)$ и $\Delta(t)$ измеряемы, а отображения $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}(\cdot)$, $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}(\cdot)$, $\overline{\Xi}_{\mathcal{S}}(\cdot)$, $\overline{\Xi}_{\mathcal{G}}(\cdot)$ известны.

Умножив уравнение (5.60) на $\text{adj}\{\mathcal{T}_{\mathcal{G}}(\overline{\Xi}_{\mathcal{G}}(\Delta)\mathcal{Y}_{ab})\}$, имеем регрессионное уравнение со скалярным регрессором:

$$(5.61) \quad \mathcal{Y}_{\theta}(t) = \mathcal{M}_{\theta}(t)\theta,$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{\theta}(t) &:= \text{adj}\{\mathcal{T}_{\mathcal{G}}(\overline{\Xi}_{\mathcal{G}}(\Delta)\mathcal{Y}_{ab})\}\mathcal{T}_{\mathcal{S}}(\overline{\Xi}_{\mathcal{S}}(\Delta)\mathcal{Y}_{ab}), \\ \mathcal{M}_{\theta}(t) &:= \det\{\mathcal{T}_{\mathcal{G}}(\overline{\Xi}_{\mathcal{G}}(\Delta)\mathcal{Y}_{ab})\}. \end{aligned}$$

Предполагая неоднородность $\mathcal{P}(\theta)$, $\mathcal{Q}(\theta)$, с учетом свойства (5.59б), действуя аналогично (5.60), (5.61), получаем

$$(5.62) \quad \mathcal{Y}_{T_I}(t) = \mathcal{M}_{T_I}(t)\text{vec}(T_I(\theta)),$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{T_I}(t) &:= \text{adj}\{\mathcal{T}_{\mathcal{Q}}(\overline{\Xi}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M}_{\theta})\mathcal{Y}_{\theta})\}\mathcal{T}_{\mathcal{P}}(\overline{\Xi}_{\mathcal{P}}(\mathcal{M}_{\theta})\mathcal{Y}_{\theta}), \\ \mathcal{M}_{T_I}(t) &:= \det\{\mathcal{T}_{\mathcal{Q}}(\overline{\Xi}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{M}_{\theta})\mathcal{Y}_{\theta})\}. \end{aligned}$$

По уравнению (5.62) можно построить следующий алгоритм идентификации:

$$(5.63) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{T}}_I(t) &= -\text{mat} \left[\gamma \mathcal{M}_{T_I}(t) \left(\mathcal{M}_{T_I}(t) \text{vec} \left(\hat{T}_I(t) \right) - \mathcal{Y}_{T_I}(t) \right) \right], \\ \hat{T}_I(t_0) &= \hat{T}_{I0}. \end{aligned}$$

В отличие от метода проекции градиента подход, основанный на неоднородных отображениях, не требует выпуклости множества \mathcal{D}_{ψ} или знания какой-либо априорной информации относительно неизвестных параметров $\psi(\theta)$. В отличие от каскадного пересчета (5.57), (5.56) осуществляется идентификация только обратной матрицы преобразования координат без идентификации θ , что позволяет добиваться более быстрой скорости сходимости.

5.3. Выводы по обзору адаптивных наблюдателей

В сравнении с робастными наблюдателями адаптивные наблюдатели *i*) не требуют заданной параметризации (3.5) или (3.6) априорной информации о параметрах системы, *ii*) для достижения цели (2.5) вместо ограничительного условия $u \in L_2$ или равенства $u(t) = -K_r \hat{x}(t)$ требуют только ограниченности управления и состояний (об ослаблении этого условия см. дискуссию в разделе 6.1.). По сравнению с инвариантными наблюдателями адаптивные не требуют выполнения ограничительных расширенных и стандартных условий согласования параметрической неопределенности с измеряемым выходом и поэтому применимы для более широкого класса систем.

Открытыми проблемами адаптивных наблюдателей являются *i*) выполнение цели (2.5) только при удовлетворении условия конечного возбуждения $\varphi \in FE$, т.е. необходимого и достаточного условия идентифицируемости неизвестных параметров [74], *ii*) применимость решений только к системам с постоянными параметрами (для сравнения, все рассмотренные ранее как робастные, так и инвариантные наблюдатели, не предполагают постоянства неизвестных параметров системы). Заметим, что адаптивные наблюдатели, в которых изменение параметров описывается линейным динамическим генератором с известными параметрами и неизвестными начальными условиями [75], не позволяют преодолеть вторую проблему: на практике изменения параметров системы обычно таким моделям не соответствуют.

6. Несколько слов об управлении по оценкам состояний

Сравнивая робастные, инвариантные и адаптивные наблюдатели, может сложиться впечатление, что только робастные наблюдатели не требуют априорной ограниченности $u(t)$ и $x(t)$ (см. допущение 1) и позволяют использовать формируемые оценки $\hat{x}(t)$ для целей управления по обратной связи. Действительно, в большинстве работ по адаптивным и инвариантным наблюдателям задача оценивания состояний рассматривается в отрыве от задачи управления. В качестве исключений отметим работу [72], посвященную синтезу адаптивного управления на основе адаптивного наблюдателя. Естественным образом, у пытливого читателя здесь не могут не возникнуть следующие вопросы. Для удовлетворения допущения 1 стабилизирующий регулятор уже синтезирован? Как он синтезирован, если параметры объекта неизвестны, а координаты вектора состояния неизмеряемы?

С одной стороны, стабилизирующий регулятор может быть синтезирован по выходу системы с применением, например, техник робастного управления. В этой ситуации, как и отмечалось в замечании 1, наблюдатель состояний предназначается не для формирования управления, а для целей диагностики отказов, мониторинга и регистрации неизмеряемых переменных технологических процессов, построения цифровых двойников и т.д. С другой стороны, следуя принципу “адаптивной разделимости” задачи оценивания и управления в линейных системах можно рассматривать независимо друг от друга.

Остановимся на последнем тезисе подробней на примере адаптивного наблюдателя, состоящего из уравнений (5.15), (5.18) при $v(t) = 0$, т.е.

$$(6.1) \quad \begin{aligned} \hat{x}(t) &= \hat{T}_I(t) \hat{\xi}(t), \\ \dot{\hat{\xi}}(t) &= A_0 \hat{\xi}(t) + \hat{\psi}_a(t) y(t) + \hat{\psi}_b(t) u(t) + L \left(C_0^T \hat{\xi}(t) - y(t) \right). \end{aligned}$$

Для простоты и без потери общности будем считать, что управление формируется робастным законом (2.4а). Законы идентификации параметров $\psi_{ab}(\theta)$ и $T_I(\theta)$ определим выражениями (5.38) + (5.41) и (5.63), т.е.

$$(6.2) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{\psi}}(t) &= \dot{\tilde{\psi}}(t) = -\gamma \left(\Delta(t) \hat{\psi}(t) - \mathcal{Y}(t) \right) = -\gamma \Delta(t) \tilde{\psi}(t), \\ \dot{\hat{T}}_I(t) &= \dot{\tilde{T}}_I(t) = -\text{mat} \left[\gamma_{T_I} \mathcal{M}_{T_I}(t) \left(\mathcal{M}_{T_I}(t) \text{vec} \left(\hat{T}_I(t) \right) - \mathcal{Y}_{T_I}(t) \right) \right] = \\ &= -\text{mat} \left[\gamma_{T_I} \mathcal{M}_{T_I}^2(t) \text{vec} \left(\tilde{T}_I(t) \right) \right]. \end{aligned}$$

При выполнении условия $\varphi \in \text{FE}$ независимо от ограниченности $x(t)$ и $u(t)$ совершенно нетрудно показать (5.42) существование для всех $t \geq t_e$ оценок снизу:

$$|\Delta(t)| \geq \Delta_{LB} > 0, \quad |\mathcal{M}_{T_I}(t)| \geq \underline{\mathcal{M}}_{T_I} > 0,$$

а значит, ошибки $\tilde{\psi}(t)$ и $\tilde{T}_I(t)$ экспоненциально сходятся к нулю с показателями, назначаемыми параметрами $\gamma > 0$ и $\gamma_{T_I} > 0$, т.е.

$$(6.3) \quad \left\| \tilde{\psi}(t) \right\| = e^{-\gamma \Delta_{LB}(t-t_e)} \left\| \tilde{\psi}(t_e) \right\|, \quad \left\| \tilde{T}_I(t) \right\| = e^{-\gamma_{T_I} \underline{\mathcal{M}}_{T_I}^2(t-t_e)} \left\| \tilde{T}_I(t_e) \right\|.$$

Дифференциальные уравнения для $x(t)$ и $\tilde{\xi}(t)$ можем записать в следующем виде:

$$(6.4) \quad \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\tilde{\xi}}(t) \end{bmatrix} &= (\mathcal{A} + \mathcal{B}(t)) \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{\xi}(t) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} A - BK_r \left(I + \tilde{T}_I(t) T(\theta) \right) & -BK_r \left(\tilde{T}_I(t) + T_I(\theta) \right) \\ \tilde{\psi}_a(t) C^T - \tilde{\psi}_b(t) K_r \left(I + \tilde{T}_I(t) T(\theta) \right) & A_m - \tilde{\psi}_b(t) K_r \left(\tilde{T}_I(t) + T_I(\theta) \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{\xi}(t) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \begin{bmatrix} A - BK_r & -BK_r T_I(\theta) \\ 0 & A_m \end{bmatrix}, \\ \mathcal{B}(t) &= \begin{bmatrix} -BK_r \left(\tilde{T}_I(t) T(\theta) \right) & -BK_r \left(\tilde{T}_I(t) \right) \\ \tilde{\psi}_a(t) C^T - \tilde{\psi}_b(t) K_r \left(I + \tilde{T}_I(t) T(\theta) \right) & -\tilde{\psi}_b(t) K_r \left(\tilde{T}_I(t) + T_I(\theta) \right) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

В силу оценок (6.3) имеем $\|\mathcal{B}(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, тогда, если с помощью техник робастного управления удалось рассчитать K_r так, что матрица $A - BK_r$ гурвицева, то по лемме 9.5 из [76] получаем глобальную экспоненциальную сходимость состояний $x(t)$ и ошибок оценивания $\tilde{\xi}(t)$, $\tilde{x}(t)$ к нулю. При использовании адаптивной обратной связи (2.4б) ситуация аналогична, только в схему управления добавляется закон идентификации параметров K (например, модального регулятора (2.3)), а матрица $\mathcal{B}(t)$ теперь дополнительно зависит и от ошибки $\tilde{K}(t) = \hat{K}(t) - K$. Таким образом, рассмотренные в обзоре адаптивные наблюдатели, доставляющие выполнение цели (2.5), при $\varphi \in \text{FE}$ могут быть в полной мере обоснованно использованы для построения управления в форме (2.4а) или (2.4б).

7. Выводы по обзору

Основываясь на вышеизложенном, можно сделать следующие заключительные выводы относительно условий применимости существующих наблюдателей состояний линейных динамических систем на базе методов робастного, инвариантного и адаптивного управления:

- робастные наблюдатели состояний требуют возможности параметризации неопределенности системы в виде (3.5) или (3.6). Это, в свою очередь, требует знания границ области вариаций параметров системы. При этом такие алгоритмы обеспечивают достижение цели, если $u \in L_2$ или $u(t) = -K_r \hat{x}(t)$ и параметр K_r рассчитывается совместно с параметрами наблюдателя. В общем случае $u \in L_\infty$ робастные наблюдатели обеспечивают принадлежность ошибки оценивания некоторому доступному для минимизации инвариантному эллипсоиду;

- инвариантные наблюдатели состояний решают задачу восстановления состояний при произвольной параметрической неопределенности, но при этом требуют выполнения строгих структурных ограничений – стандартных или расширенных условий согласования по выходу. Как показывает анализ, часть из этих условий для случая систем со скалярным выходом даже потенциально ослаблена быть не может (в частности, требование превышения размерности измеряемого выхода над размерностью возмущения). Поэтому область практического использования инвариантных наблюдателей состояний ограничена классом систем, для которых обозначенные строгие структурные ограничения выполняются;

- адаптивные наблюдатели состояний могут быть разделены на две группы. Методы из первой группы (см. раздел 5.1) позволяют восстанавливать состояния систем с СПВ передаточной функцией от параметрического возмущения к измеряемому выходу, что эквивалентно ограничительным условиям согласования по выходу, необходимым для применения инвариантных наблюдателей. Алгоритмы из второй группы (см. раздел 5.2) позволяют восстанавливать состояния линейных систем с полностью неизвестными параметрами при удовлетворении следующих требований: *и*) необходимого и достаточно-

го условия идентифицируемости [74] параметров канонической наблюдаемой формы $\psi(\theta)$, т.е. $\varphi \in \text{FE}$, *ii*) достаточного условия (5.52) существования обратной функции $\mathcal{F}(\psi_{ab})$, позволяющей пересчитать параметры $\psi(\theta)$ в физические параметры θ , *iii*) возможности устранения проблемы разрывов с помощью одной из рассмотренных в разделе 5.2.7 техник.

В целом, исследования по разработке новых методов синтеза наблюдателей состояний линейных динамических систем продолжают в рамках всех трех рассмотренных разделов теории управления, а их направление во многом определяется существующими проблемами, упомянутыми в данном обзоре, в частности в подразделах 3.3, 4.4, 5.3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pacas M.* Sensorless drives in industrial applications // IEEE Industrial Electronics Magazine. 2011. V. 5. No. 2. P. 16–23.
2. *Luenberger D.* Observing the state of a linear system // IEEE Transactions on Military Electronics. 1964. V. 8. No. 2. P. 74–80.
3. *Kalman R.E., Bucy R.S.* New Results in Linear Filtering and Prediction Theory // Journal of Basic Engineering. 1961. V. 83. P. 95–108.
4. *Bernard P., Andrieu V., Astolfi D.* Observer design for continuous-time dynamical systems // Annual Reviews in Control. 2022. V. 53. P. 224–248.
5. *Андриевский Б.Р., Фуртат И.Б.* Наблюдатели возмущений: методы и приложения. Часть 1 // АИТ. 2020. № 9. С. 3–61.
Andrievsky B., Furtat I. Disturbance Observers: Methods and Applications. I // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 9. P. 1563–1610.
6. *O'Reilly J.* Observers for linear systems. Academic press, 1983. 252 p.
7. *Shtessel Y., Edwards C., Fridman L., Levant A.* Sliding mode control and observation. N.Y.: Springer New York, 2011. 369 p.
8. *Коровин С.К., Фомичев В.В.* Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. М.: Физматлит, 2007. 224 с.
9. *Gao H., Li X.* Robust filtering for uncertain systems. Cham, Switzerland: Springer, 2014. 253 p.
10. *Lewis F.L., Xie L., Popa D.* Optimal and robust estimation: with an introduction to stochastic control theory. CRC press, 2017. 547 p.
11. *Краснова С.А., Уткин В.А.* Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем. М.: Наука, 2006. 272 с.
12. *Narendra K.S., Annaswamy A.M.* Stable adaptive systems. N.Y.: Courier Corp., 2012. 509 p.
13. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления: учеб. пособие. М.: ЛЕНАНД, 2019. 500 с.
14. *Bhattacharyya S.P., Souza E.De.* Pole assignment via Sylvester's equation // Systems & Control Letters. 1982. V. 1. No. 4. P. 261–263.
15. *Dudarenko N.A., Slita O.V., Ushakov A.V.* Algebraic conditions of generalized modal control // IFAC Proc. Volumes. 2012. V. 45. No. 13. P. 150–155.

16. *Petersen I.R.* A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems // *Systems & Control Letters*. 1987. V. 8. No. 4. P. 351–357.
17. *Geromel J.C., Peres P.L.D., Bernussou J.* On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems // *SIAM Journal on Control and Optimization*. 1991. V. 29. No. 2. P. 381–402.
18. *Fu M., de Souza C.E., Xie L.* \mathcal{H}_∞ estimation for uncertain systems // *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. 1992. V. 2. No. 2. P. 87–105.
19. *Xie L., de Souza C.E.* On robust filtering for linear systems with parameter uncertainty // *Proceedings of 1995 34th IEEE Conference on Decision and Control*. 1995. V. 2. P. 2087–2092.
20. *Geromel J.C., De Oliveira M.C.* \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ robust filtering for convex bounded uncertain systems // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2001. V. 46. No. 1. P. 100–107.
21. *Jin S.H., Park J.B.* Robust \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ filtering for polytopic uncertain systems via convex optimisation // *IEEE Proceedings-Control Theory and Applications*. 2001. V. 148. No. 1. P. 55–59.
22. *Duan Z., Zhang J., Zhang C., Mosca E.* Robust \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ filtering for uncertain linear systems // *Automatica*. 2006. V. 42. No. 11. P. 1919–1926.
23. *Lacerda M.J., Oliveira R.C.L.F., Peres P.L.D.* Robust \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ filter design for uncertain linear systems via LMIs and polynomial matrices // *Signal Processing*. 2011. V. 91. No. 5. P. 1115–1122.
24. *Petersen I.R.* A Stabilization Algorithm for a Class of Uncertain Linear Systems // *Systems & Control Letters*. 1987. V. 8. No. 4. P. 351–357.
25. *Хлебников М.В.* Робастная фильтрация при неслучайных возмущениях: метод инвариантных эллипсоидов // *АиТ*. 2009. No. 1. P. 147–161.
Khlebnikov M.V. Robust filtering under nonrandom disturbances: The invariant ellipsoid approach // *Autom. Remote Control*. 2009. V. 70. No. 1. P. 133–146.
26. *Petersen I.R.* A Riccati equation approach to the design of stabilizing controllers and observers for a class of uncertain linear systems // *1985 American Control Conference*. 1985. P. 772–777.
27. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., et al.* *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia: SIAM, 1994.
28. *Lien C.H., Yu K.W.* LMI optimization approach on robustness and \mathcal{H}_∞ control analysis for observer-based control of uncertain systems // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2008. V. 36. No. 3. P. 617–627.
29. *Perruquetti W., Barbot J.P.* *Sliding mode control in engineering*. N.Y.: Marcel Dekker, 2002. 407 p.
30. *Alwi H., Edwards C., Tan C.P.* *Fault detection and fault-tolerant control using sliding modes*. London: Springer, 2011. 340 p.
31. *Utkin V., Poznyak A., Orlov Y., Polyakov A.* *Road map for sliding mode control design*. N.Y.: Springer International Publishing, 2020. 134 p.
32. *Yang F., Wilde R.W.* Observers for linear systems with unknown inputs // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1988. V. 33. No. 7. P. 677–681.
33. *Darouach M., Zasadzinski M., Xu S.J.* Full-order observers for linear systems with unknown inputs // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1994. V. 39. No. 3. P. 606–609.

34. *Dimassi H., Loria A., Belghith S.* Continuously-implemented sliding mode adaptive unknown-input observers under noisy measurements // *Systems & Control Letters*. 2012. V. 61. No. 12. P. 1194–1202.
35. *Уткин В.И.* Скользящие режимы и их применение в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981. 367 с.
36. *Slotine J.J.E., Hedrick J.K., Misawa E.A.* On sliding observers for nonlinear systems // *Journal of Dynamics, Systems, Measurement, and Control*. 1987. V. 109. P. 245–252.
37. *Edwards C., Spurgeon S.K.* On the development of discontinuous observers // *International Journal of Control*. 1994. V. 59. No. 5. P. 1211–1229.
38. *Edwards C., Spurgeon S.K., Patton R.J.* Sliding mode observers for fault detection and isolation // *Automatica*. 2000. V. 36. No. 4. P. 541–553.
39. *Edwards C., Tan C.P.* A comparison of sliding mode and unknown input observers for fault reconstruction // *European Journal of Control*. 2006. V. 12. No. 3. P. 245–260.
40. *Darouach M., Zasadzinski M., Boutat-Baddas L.* Discussion on “A comparison of sliding mode and unknown input observer for fault reconstruction” // *European Journal of Control*. 2006. V. 12. No. 3. P. 261–266.
41. *Floquet T., Edwards C., Spurgeon S.K.* On sliding mode observers for systems with unknown inputs // *Journal of Adaptive Control and Signal Processing*. 2007. V. 21. No. 8–9. P. 638–656.
42. *Isidori A.* Lectures in feedback design for multivariable systems. Basel, Switzerland: Springer International Publishing, 2017. 414 p.
43. *Kalsi K., Lian J., Hui S., Zak S.H.* Sliding-mode observers for systems with unknown inputs: A high-gain approach // *Automatica*. 2010. V. 46. No. 2. P. 347–353.
44. *Zhu F.* State estimation and unknown input reconstruction via both reduced-order and high-order sliding mode observers // *Journal of Process Control*. 2012. V. 22. No. 1. P. 296–302.
45. *Floquet T., Barbot J.-P.* A canonical form for the design of unknown input sliding mode observers // *Advances in Variable Structure and Sliding Mode Control*. 2006. V. 334. P. 271–292.
46. *Краснова С.А., Уткин А.В.* Сигма-функция в задачах синтеза наблюдателей состояний и возмущений // *Проблемы управления*. 2015. № 5. С. 27–36.
47. *Краснова С.А., Мысик Н.С.* Каскадный синтез наблюдателя состояния с нелинейными корректирующими воздействиями // *АиТ*. 2014. № 2. С. 106–128.
48. *Cho Y.M., Rajamani R.* A systematic approach to adaptive observer synthesis for nonlinear systems // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1997. V. 42. No. 4. P. 534–537.
49. *Cecilia A., Costa-Castello R.* Addressing the relative degree restriction in nonlinear adaptive observers: A high-gain observer approach // *Journal of the Franklin Institute*. 2022. V. 359. No. 8. P. 3857–3882.
50. *Antsaklis P.J., Michel A.N.* Linear systems. N.Y.: McGraw-Hill, 1997. 672 p.
51. *Carroll R., Lindorff D.* An adaptive observer for single-input single-output linear systems // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1973. V. 18. No. 5. P. 428–435.
52. *Luders G., Narendra K.S.* An adaptive observer and identifier for a linear system // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1973. V. 18. No. 5. P. 496–499.

53. *Narendra K.S., Kudva P.* Stable adaptive schemes for system identification and control-Part I // *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*. 1974. V. 6. P. 542–551.
54. *Ioannou P.A., Sun J.* Robust adaptive control. N.Y.: McGraw-Hill, 1996. 834 p.
55. *Zhang Q.* Revisiting different adaptive observers through a unified formulation // *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*. 2005. P. 3067–3072.
56. *Kreisselmeier G.* Adaptive observers with exponential rate of convergence // *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*. 1977. V. 22. No. 1. P. 2–8.
57. *Прокопов Б.И.* О построении адаптивных наблюдателей // *АиТ*. 1981. Т. 22. № 5. С. 95–100.
58. *Bobtsov A., Pyrkin A., Vedyakov A., Vediakova A., Aranovskiy S.* A Modification of Generalized Parameter-Based Adaptive Observer for Linear Systems with Relaxed Excitation Conditions // *IFAC PapersOnLine*. 2022. V. 55. No. 12. P. 324–329.
59. *Efimov D., Fradkov A.* Design of impulsive adaptive observers for improvement of persistency of excitation // *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*. 2015. V. 29. No. 6. P. 765–782.
60. *Gerasimov D.N., Nikiforov V.O.* On key properties of the Lion's and Kreisselmeier's adaptation algorithms // *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*. 2022. V. 36. No. 6. P. 1285–1304.
61. *Aranovskiy S., Ushirobira R., Korotina M., Vedyakov A.* On Preserving Excitation Properties of Kreisselmeier's Regressor Extension Scheme // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2023. V. 68. No. 2. P. 1296–1302.
62. *Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A.* Performance Enhancement of Parameter Estimators via Dynamic Regressor Extension and Mixing // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2017. V. 62. No. 7. P. 3546–3550.
63. *Baev S., Shkolnikov I., Shtessel Y., Poznyak A.* Parameter identification of nonlinear system using traditional and high order sliding modes // *American Control Conference*. 2006. P. 1–6.
64. *Boyd S., Sastry S.S.* Necessary and sufficient conditions for parameter convergence in adaptive control // *Automatica*. 1986. V. 22. No. 6. P. 629–639.
65. *Ortega R., Nikiforov V., Gerasimov D.* On modified parameter estimators for identification and adaptive control. A unified framework and some new schemes // *Annual Reviews in Control*. 2020. V. 50. P. 278–293.
66. *Pan Y., Shi T., Ortega R.* Comparative Analysis of Parameter Convergence for Several Least-Squares Estimation Schemes // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2024. V. 69. No. 5. P. 3341–3348.
67. *Pan Y., Shi T.* Adaptive Estimation and Control With Online Data Memory: A Historical Perspective // *IEEE Control Systems Letters*. 2024. V. 8. P. 267–278.
68. *Glushchenko A., Petrov V., Lastochkin K.* Regression Filtration with Resetting to Provide Exponential Convergence of MRAC for Plants with Jump Change of Unknown Parameters // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2023. V. 68. No. 8. P. 5127–5134.
69. *Glushchenko A., Lastochkin K.* Unknown piecewise constant parameters identification with exponential rate of convergence // *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*. 2022. V. 37. No. 1. P. 315–346.

70. *Ortega R., Aranovskiy S., Pyrkin A.A., et al.* New Results on Parameter Estimation via Dynamic Regressor Extension and Mixing: Continuous and Discrete-Time Cases // IEEE Transactions on Automatic Control. 2021. V. 66. No. 5. P. 2265–2272.
71. *Tao G.* Adaptive control design and analysis. John Wiley & Sons, 2003. 637 p.
72. *Kreisselmeier G.* Adaptive control via adaptive observation and asymptotic feedback matrix synthesis // IEEE Transactions on Automatic Control. 1980. V. 25. No. 4. P. 717–722.
73. *Glushchenko A., Lastochkin K.* Exponentially Stable Adaptive Observation for Systems Parameterized by Unknown Physical Parameters // IEEE Transactions on Automatic Control. 2024. V. 69. No. 8. P. 5635–5642.
74. *Wang L., Ortega R., Bobtsov A., Romero J.G., Yi B.* Identifiability implies robust, globally exponentially convergent on-line parameter estimation // International Journal of Control. 2024. V. 97. No. 9. P. 1967–1983.
75. *Pyrkin A., Bobtsov A., Ortega R., Isidori A.* An adaptive observer for uncertain linear time-varying systems with unknown additive perturbations // Automatica. 2023. V. 147. P. 110677.
76. *Халил Х.К.* Нелинейные системы. М.-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Институт компьютерных исследований, 2009. 832 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 07.09.2024

После доработки 11.07.2025

Принята к публикации 15.07.2025