

© 2026 г. Ю.В. МОРОЗОВ, канд. физ.-мат. наук (tot1983@ipu.ru)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## ГЛОБАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ИНТЕГРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА РАЗРЫВНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Исследуется устойчивость системы с переключениями, возникающая при применении разрывной обратной связи для стабилизации интегратора 2-го порядка. Это предельный случай рассмотренной ранее обратной связи в виде вложенных функций насыщения, когда внешняя функция насыщения или сигмоида заменяется на разрывную функцию  $\text{sign}(x)$ . Использование такой обратной связи позволяет легко учесть ограниченность ресурса управления и обеспечить выполнение ограничения на фазовую скорость приближения к положению равновесия, что особенно важно при больших начальных отклонениях. Предложена функция Ляпунова для замкнутой системы, с помощью которой и результатов теории Филиппова доказана глобальная асимптотическая устойчивость начала координат, если кривая переключения является непрерывно дифференцируемой, монотонной и проходящей через ноль функцией. Свойство глобальной устойчивости начала координат сохраняется, если ослабить требование на гладкость всей функции переключения и потребовать непрерывную дифференцируемость везде, за исключением конечного набора точек, где производная не существует, но непрерывность сохраняется. В случае, когда кривая переключения разрывная, доказано, что начало координат является шитым центром по классификации Филиппова. При этом в замкнутой системе существует полуустойчивый цикл, охватывающий множество точек разрыва на кривой переключения. В качестве численных примеров построены линия уровня функции Ляпунова и фазовые траектории на плоскости для разных типов кривой переключения.

*Ключевые слова:* стабилизация цепочки двух интеграторов, система с переключениями, глобальная асимптотическая устойчивость, кривая переключения, функция Ляпунова.

DOI: 10.7868/S2413977726010068

### 1. Введение

В 2024 г. в соавторстве с А.В. Пестеревым были написаны две работы: “Глобальная стабилизация интегратора второго порядка обратной связью в виде вложенных сатураторов”<sup>1</sup> и “Глобальная стабилизация интегратора второго

---

<sup>1</sup> Сатуратором называется негладкая функция насыщения  $\text{sat}_p(\cdot)$ ,  $p > 0$ , определенная следующим образом:  $\text{sat}_p(w) = w$ , когда  $|w| \leq p$ , и  $\text{sat}_p(w) = pw/|w|$  при  $|w| > p$ .

порядка обратной связью в виде вложенных *sigmoid*".<sup>2</sup> Небольшое отличие в названиях (*сигмоиды* и *сатураторы*) означает фундаментальное различие исследуемых систем. В первой статье [1] исследуется система с гладкой обратной связью, а во второй [2] – с негладкой. Хотя в обоих случаях для доказательства глобальной устойчивости используются функции Ляпунова с похожей структурой (сумма квадратичного и интегрального слагаемых), доказательства заметно отличаются, что легко видеть, если сравнить две статьи. Хронологически авторам сначала удалось доказать устойчивость системы с гладкой обратной связью в виде вложенных сигмоид. Естественным образом возник вопрос о возможности обобщения полученного результата на случай негладкой (в виде вложенных сатураторов) и/или разрывной (полученной, например, заменой внешнего сатуратора или сигмоиды на  $\text{sign}(x)$ ) обратной связи. Однако доказательство глобальной устойчивости, приведенное в [1], оказалось не применимо к негладкой системе, так как в отличие от гладкого случая производная соответствующей функции Ляпунова не является отрицательно определенной функцией во всем пространстве, поэтому изложение в статье, представленной в [1], было ограничено гладким случаем. Позднее, после того как рукопись была представлена в [1], авторам удалось доказать глобальную устойчивость и для негладкого случая, показав, что области пространства, в которых функция Ляпунова тождественно равна нулю, не могут содержать целых траекторий. Новые результаты были представлены в журнале [2].

К настоящему моменту остался неисследованным случай разрывной системы (различные физические примеры, которые могут быть описаны такими системами, приведены в [3]), а также гладких функций насыщения [4–6]. Впервые такой тип функции в управлении можно встретить в [4, 5], однако в обоих случаях доказывалась только локальная стабилизация. Главное их отличие от функции насыщения типа  $\text{sat}(x)$  заключается в том, что вместо линейной части используется нелинейная функция, такая что в крайних точках линейного участка производная существует и является непрерывной. Данное различие никак не влияет на доказательство глобальной устойчивости, приведенное в [2], и поэтому результаты [2] могут быть использованы и для функций этого типа.

Данная работа посвящена первому, более сложному случаю, а именно исследованию глобальной устойчивости системы, замкнутой разрывной обратной связью. Для доказательства глобальной устойчивости будем использовать в качестве кандидата в функции Ляпунова функцию, состоящую из суммы квадратичного и интегрального слагаемого [2]

$$V(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} \text{sat}(k_3 \text{sat}(k_1 \xi)) d\xi.$$

---

<sup>2</sup> Сигмоидой называется гладкая строго возрастающая нечетная функция скалярной переменной  $\sigma(x)$ , удовлетворяющая следующим условиям: а)  $\sigma(x) \rightarrow \pm 1$ , когда  $x \rightarrow \pm\infty$ ; б)  $\max_x \sigma'(x) = \sigma'(0)$ ; в)  $\sigma'(0) = 1$ ; г)  $\sigma(x) = -\sigma(-x)$ ,  $x \in R$ .

При стремлении  $k_3$  к бесконечности функция  $V(x)$  принимает вид

$$(1) \quad V(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + |x_1|.$$

Функция (1) не является гладкой, и поэтому напрямую к ней нельзя применить теорему Филиппова [7], однако можно воспользоваться его доказательством глобальной устойчивости системы с переключениями конкретного вида. Идея доказательства в следующем: сначала доказывается неположительность производной вне поверхности переключения и вне поверхности разрыва производной функции Ляпунова. Затем вычисляются производные функции Ляпунова на кривых переключения. Далее рассматриваются траектории и точечные особенности там, где производная функции Ляпунова равна нулю, и применяется теорема Барбашина–Красовского [8, 9]. Альтернативный подход был предложен Матросовым [10, 11] и далее развит Молчановым [12]<sup>3</sup>. Он заключается в обобщении теорем Ляпунова об устойчивости на случай выпуклых кусочно-линейных функций Ляпунова, однако его применение для плоских систем с известной нелинейностью нецелесообразно.

Для дальнейшего изложения понадобятся следующие определения из [7]. Рассмотрим уравнение или систему в векторной записи

$$(2) \quad \dot{x} = f(t, x)$$

с кусочно непрерывной функцией  $f$  в области  $G^A$ ;  $x \in R^n$ ,  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ;  $M \in R^{n+1}$  – множество (меры нуль) точек разрыва функции  $f$  по  $x$ .

Для каждой точки  $(t, x)$  области  $G$  указывается множество  $F(t, x)$  в  $n$ -мерном пространстве. Если в точке  $(t, x)$  функция  $f$  непрерывна, то множество  $F(t, x)$  состоит из одной точки, совпадающей со значением функции  $f$  в этой точке. Если же  $(t, x)$  – точка разрыва функции  $f$ , то множество  $F(t, x)$  задается тем или иным способом.

*Определение 1* [7]. *Решением уравнения (2) называется решение дифференциального включения*

$$(3) \quad \dot{x} \in F(t, x),$$

*т.е. абсолютно непрерывная вектор-функция  $x(t)$ , определенная на интервале или отрезке  $I$ , для которой почти всюду на  $I$  справедливо  $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$ .*

---

<sup>3</sup> Оригинальные работы Матросова В.М. вышли раньше работы [12], однако их доступность для ознакомления сильно ограничена, поэтому в качестве ссылок приведены современные сборники [10, 11], содержащие различные работы Матросова В.М., которые вышли значительно позже оригинальных статей.

<sup>4</sup>  $G$  – конечная область  $(n + 1)$ -мерного пространства  $t, x$ . Область  $G$  состоит из конечного числа областей  $G_i$ ,  $i = 1, \dots, l$ , в каждой из которых функция  $f$  непрерывна вплоть до границы.

**Определение 2** [7]. *Простейшее выпуклое доопределение.* Для каждой точки  $(t, x) \in G$  пусть  $F(t, x)$  – наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее все предельные значения вектор-функции  $f(t, x^*)$ , когда  $(t, x^*) \notin M$ ,  $x^* \rightarrow x$ ,  $t = \text{const}$ . Решением уравнения (2) называется решение включения (3) с только что построенным  $F(t, x)$ . Так как  $M$  – множество меры нуль, то при почти всех  $t \in I$  мера сечения множества  $M$  плоскостью  $t = \text{const}$  равна нулю. При таких  $t$  множество  $F(t, x)$  определено для всех  $(t, x) \in G$ .

В точках непрерывности функции  $f$  множество  $F(t, x)$  состоит из одной точки  $f(t, x)$ , и решение удовлетворяет уравнению (2) в обычном смысле. Если же точка  $(t, x) \in M$  лежит на границах сечений двух или нескольких областей  $G_1, \dots, G_k$  плоскостью  $t = \text{const}$ , то множество  $F(t, x)$  есть отрезок, выпуклый многоугольник или многогранник с вершинами  $f_i(t, x)$ ,  $i \leq k$ , где  $f_i(t, x) = \lim_{(t, x^*) \in G_i, x^* \rightarrow x} f(t, x^*)$ , причем предел всегда существует в силу построения согласно определению 1.

**Определение 3** [7]. *Решение  $x = \chi(t)$  ( $t_0 < t < \infty$ ) дифференциального включения (3) при  $I = (t_0, \infty)$  называется устойчивым, если для каждого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что для каждого такого  $x_0$ , что  $|x_0 - \chi(t_0)| < \delta$ , каждое решение  $x(t)$  с начальным условием  $x(t_0) = x_0$  при  $t_0 < t < \infty$  существует и удовлетворяет неравенству  $|x(t) - \chi(t)| < \varepsilon$  ( $t_0 < t < \infty$ ).*

Асимптотическая устойчивость (3) определяется аналогично, но с дополнительным условием  $x(t) - \chi(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

**Определение 4** [7]. *Рассмотрим систему с управлением  $u$ :*

$$(4) \quad \dot{x} = f(t, x, u), \quad u = u(x) \in U(t, x).$$

*Решением называется пара функций: абсолютно непрерывная функция  $x(t)$  и измеримая функция  $u(x(t))$ , которые почти всюду на рассматриваемом интервале удовлетворяют системе (4).*

Чтобы рассмотреть множество всех решений системы (4), можно ее заменить дифференциальным включением (3), где  $F(t, x) = f(t, x, U(t, x))$ . Тогда устойчивость решения  $x(t) = \chi(t)$  включения (3) означает, что при  $|x(t) - \chi(t)| < \delta$  решение  $x(t)$  уравнения  $\dot{x} = f(t, x, U(t, x))$  удовлетворяет уравнению (4) при всевозможных допустимых управлениях  $u(t)$ .

**Определение 5** [7]. *Точка  $x$  называется стационарной, если  $x(t) \equiv x$  есть решение включения (3).*

**Определение 6** [7]. *Расстояние между точками или множествами обозначается буквой  $r$ :*

$$r(a, b) = \|a - b\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2},$$

$$r(a, B) = \inf_{b \in B} r(a, b), \quad r(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} r(a, b);$$

$\delta$ -окрестностью  $M^\delta$  множества  $M$  называется множество таких точек  $x$ , что  $r(x, M) < \delta$ .

**Определение 7** [7]. Множество  $M \subset R^n$  (не обязательно стационарное) называется устойчивым, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что каждое решение  $x(t)$  с начальным условием  $x(t_0)$  из  $\delta$ -окрестности множества  $M$  при  $t_0 \leq t < \infty$  существует и удовлетворяет неравенству  $r(x(t), M) < \varepsilon$ ,  $t_0 \leq t < \infty$  где  $r(x, M)$  – расстояние от точки  $x$  до множества  $M$ .

**Определение 8** [7]. Стационарное множество называется устойчивым в целом, если оно устойчиво и каждое решение при  $t \rightarrow \infty$  неограниченно приближается к этому множеству. Стационарное множество называется точечно устойчивым в целом, если оно устойчиво и каждое решение при  $t \rightarrow \infty$  стремится к стационарной точке.

В работе будут рассмотрены только плоские системы, т.е.  $n = 2$  в приведенных выше определениях. Вектор на плоскости будем записывать в виде  $x = [x_1; x_2] \in R^2$ , где  $x_1, x_2$  – проекции вектора на оси координат соответственно.

Для обозначения скалярного произведения двух векторов  $x, y$  будем использовать выражение  $x \cdot y = [x_1; x_2] \cdot [y_1; y_2] = x_1 y_1 + x_2 y_2$ .

## 2. Гладкая кривая переключения

Рассмотрим задачу стабилизации интегратора 2-го порядка

$$(5) \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u(x)$$

с помощью разрывной обратной связи:

$$(6) \quad u(x) = -\text{sign}(S(x_1, x_2)),$$

где  $\text{sign}(w) = 1$ , если  $w > 0$ ,  $\text{sign}(w) = -1$ , если  $w < 0$  и  $\text{sign}(w) = [-1, 1]$ , если  $w = 0$ . Функция  $S(x_1, x_2)$  определяет кривую переключения (разрыва), которая делит фазовую плоскость  $(x_1, x_2)$  на области  $G^- (S < 0)$  и  $G^+ (S > 0)$ . Согласно определениям (3) и (4) в данном случае  $U(t, x) = [-1, 1]$ , а решение системы (5), (6) – это решение дифференциального включения (3), где  $F(t, x) = [x_2; -\text{sign}(S(x_1, x_2))]$ .

Разобьем фазовое пространство  $R^2$  на множества (см. рис. 1, 2, 3) так, что  $R^2 = D_1 \cup D_2^+ \cup D_2^- \cup D_3^+ \cup D_3^-$ , где

- $D_1 = \{(x_1, x_2) : S(x_1, x_2) = 0\}$  – множество точек, лежащих на кривой разрыва;
- $D_2^+ = \{(x_1, x_2) : S(x_1, x_2) > 0 \text{ и } x_1 < 0\}$ ;
- $D_2^- = \{(x_1, x_2) : S(x_1, x_2) < 0, x_1 > 0\}$ ;
- $D_3^+ = \{(x_1, x_2) : S(x_1, x_2) > 0 \text{ и } x_1 \geq 0\}$ ;
- $D_3^- = \{(x_1, x_2) : S(x_1, x_2) < 0, x_1 \leq 0\}$ ,

тогда в силу новых обозначений  $G^- = D_2^- \cup D_3^-$ ,  $G^+ = D_2^+ \cup D_3^+$ .

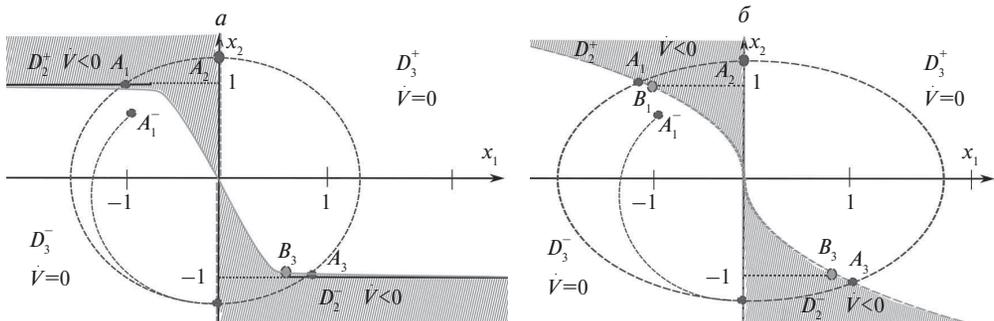


Рис. 1. Разбиение фазовой плоскости  $R^2$  на множества  $D_1, D_2^\pm, D_3^\pm$  для гладкой поверхности разрыва.  $a$  – сигмоида,  $b$  – полиномиальная функция вида  $y = -|\xi|^{1/n-1}\xi, n > 1$ .

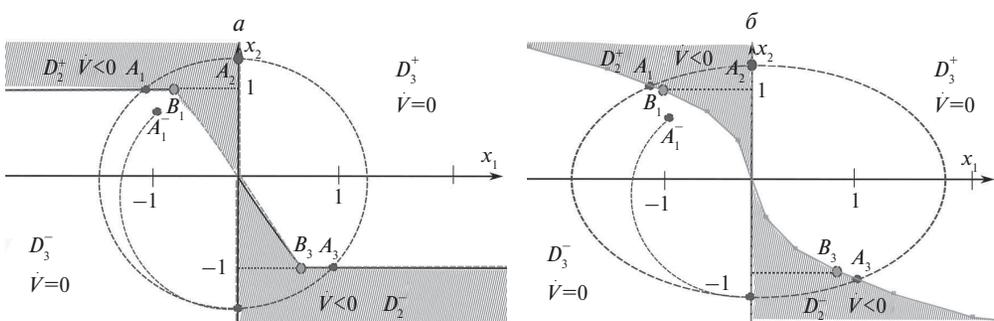


Рис. 2. Разбиение фазовой плоскости  $R^2$  на множества  $D_1, D_2^\pm, D_3^\pm$  для непрерывной поверхности разрыва.  $a$  – сатуратор,  $b$  – кусочно-линейная аппроксимация полиномиальной функции вида  $y = -|\xi|^{1/n-1}\xi, n > 1$ .

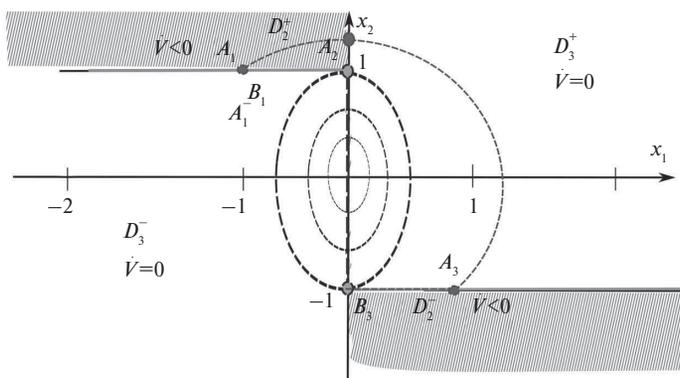


Рис. 3. Разбиение фазовой плоскости  $R^2$  на множества  $D_1 = D_1^0 \cup D_1^+ \cup D_1^-$ ,  $D_2^\pm, D_3^\pm$  для разрывной функции переключения.

Теорема 1. Пусть

$$(7) \quad S(x_1, x_2) = x_2 + \phi(x_1),$$

где непрерывно дифференцируемая функция  $\phi(\xi)$ ,  $\xi \in R$  удовлетворяет свойствам:

$$1) \quad 0 \leq \frac{d\phi(\xi)}{d\xi} < +\infty;$$

$$2) \quad \exists 0 < \delta \leq 1 \text{ такое, что } \frac{d\phi(\xi)}{d\xi} > 0, |\xi| < \delta;$$

$$3) \quad \phi(0) = 0;$$

$$4) \quad \phi(\xi) = -\phi(-\xi),$$

тогда система (5)–(7) с функцией  $\phi(x_1)$  глобально асимптотически устойчива.

*Замечание 1.* Поверхность разрыва для закона управления выбрана в виде (7), чтобы исключить проблемы с разрешимостью и единственностью в системе с разрывной правой частью [13]. То есть кривая переключения для системы (5), (6) имеет вид:  $x_2 = -\phi(x_1)$ .

*Доказательство.* Докажем, что функция (1) является функцией Ляпунова системы (5)–(7).

1. Сначала покажем, что  $\dot{V}(x) \leq 0$  при  $S \neq 0$  и  $x_1 \neq 0$ . Дифференцируя  $V(x)$  в силу системы (5), (6) при  $x_1 \neq 0$ , получим

$$(8) \quad \begin{aligned} \dot{V} &= -x_2 \text{sign}(x_2 + \phi(x_1)) + \text{sign}(x_1)x_2 = \\ &= -[\text{sign}(x_2 + \phi(x_1)) - \text{sign}(\phi(x_1))]x_2. \end{aligned}$$

В силу монотонности  $\text{sign}$  справедливо неравенство  $[\text{sign}(s + s_0) - \text{sign}(s_0)]s \geq 0 \quad \forall (s + s_0) \neq 0, \forall s_0 \neq 0$ , откуда следует знакоотрицательность производной:  $\dot{V}(x) \leq 0$  вне кривой переключения и  $x_1 \neq 0$ . Области, где выполняется строгое неравенство, заштрихованы на рис. 1, 2 и они соответствуют подмножествам областей  $D_2^\pm$ .

2. Теперь покажем, что множество  $\dot{V}(x) = 0$  не содержит целых траекторий при  $S \neq 0$  и  $x_1 \neq 0$ . Производная функции  $V(x)$  обращается в ноль при  $x_2 = 0$  на множествах  $D_3^+$  и  $D_3^-$ , в которых оба слагаемых в квадратных скобках одновременно равны  $+1$  и  $-1$  соответственно. Легко видеть, что указанные множества не могут содержать целых траекторий. Действительно, траекториями системы в  $D_3^-$  и  $D_3^+$  являются параболы

$$(9) \quad x_1 = \mp \frac{1}{2}x_2^2 + C.$$

Так как ни одна из парабол не может целиком лежать в  $D_3^-$  или  $D_3^+$  (рис. 1) и при этом движение происходит с постоянным ускорением, система через конечное время неизбежно попадает на множество  $D_1$  – кривую переключения. Теперь предположим, что  $x_2 = 0$ , тогда  $x_1 = c_1$ . Пусть  $c_1 > 0$ , тогда, интегрируя систему, имеем  $x_2 = c_1 t + c_2 = 0$ . Последнее верно только при  $c_1 = 0$ ,

когда  $t > 0$ . Противоречие. Значит, на множестве  $x_2 = 0$  тоже нет целых траекторий.

3. Теперь покажем, что  $\dot{V}(x) < 0$  при  $S \neq 0$  и  $x_1 = 0$ . На этом множестве  $V(x) = x_2^2/2$ , а производная в силу системы имеет вид  $\dot{V}(x) = -x_2 \text{sign}(x_2 + \phi(x_1))_{x_1=0} = -|x_2| < 0$ ,  $x_2 \neq 0$ .

4. Теперь покажем, что  $\dot{V}(x) \leq 0$  при  $S = 0$  и  $x_1 \neq 0$ . Сначала надо доопределить векторное поле на кривой разрыва. Для этого построим выпуклую оболочку для каждой пары векторов на кривой разрыва. Чтобы воспользоваться результатом Филиппова, перепишем систему в новых обозначениях и найдем проекции векторного поля на нормаль в каждой точке кривой переключения.

Правая часть системы (5)–(7) в векторном виде записывается как  $f^+ = [x_2; -1]$  при  $S > 0$  и  $f^- = [x_2; 1]$  при  $S < 0$ , при этом множество разрыва меры ноль в определении  $M = D_1$ . Так как  $S$  – гладкая поверхность, найдем проекции векторного поля  $f_N^+$  ( $S > 0$ ) и  $f_N^-$  ( $S < 0$ ) на нормаль к кривой разрыва в каждой точке. Используя формулы Филиппова ([7], с. 42, 85, 134), запишем уравнения:

$$(10) \quad f_N^\pm(x_1) = \frac{\nabla S(x_1) \times f^\pm(x_1)}{\|\nabla S(x_1)\|} = -(\rho(x_1) \pm 1) / \|\nabla S(x_1)\|,$$

$$\rho(x_1) = \phi(x_1) \frac{d\phi(x_1)}{dx_1},$$

$$(11) \quad \nabla S(x_1) = \left[ \frac{d\phi(x_1)}{dx_1}; 1 \right], \quad \|\nabla S(x_1)\| = \sqrt{1 + \left( \frac{d\phi(x_1)}{dx_1} \right)^2} \neq 0.$$

В силу построения системы (5), (6) (только одно физическое положение равновесия и одна кривая переключения) в ней возможны следующие точечные и линейные особенности [7]:

- 1)  $f_N^- f_N^+ > 0$  – протыкание поверхности (пересекают линию) и она не является линейной особенностью (случай  $AA_0$ ), например в [14];
- 2)  $f_N^- > 0$ ,  $f_N^+ < 0$ ,  $f^0 \neq [0; 0]$  – устойчивый скользящий режим, в котором система движется согласно правой части  $f^0 = \alpha f^+ + (1 - \alpha) f^-$ ,  $\alpha = f_N^- / (f_N^- - f_N^+) \in (0, 1)$  (случай  $AA_1$ ), например в [15];
- 3)  $f_N^- f_N^+ < 0$ ,  $f^0 = [0; 0]$  – кривая состоит из стационарных точек (случай  $AA_2$ ), например маятник с сухим трением [16];
- 4)  $f_N^- < 0$ ,  $f_N^+ > 0$ ,  $f^0 \neq [0; 0]$  – неустойчивый скользящий режим, система постоянно сходит с поверхности разрыва и не может ее проткнуть (случай  $AA_3$ ).

Покажем сначала, что для системы (5), (6) с проекциями векторного поля (10), (11) случай  $AA_2$  невозможен. В рассматриваемом случае вектор  $f_0$  имеет вид

$$(12) \quad f^0 = [-\phi(x_1); 1 - 2\alpha].$$

Для любого  $0 \leq \alpha \leq 1$  и  $x_1 \neq 0$ ,  $f^0 \neq [0; 0]$ , т.е. случай  $AA_2$  невозможен, так как в замкнутой системе нет дополнительных стационарных точек, кроме начала координат.

Докажем, что случай  $AA_3$  также невозможен. Пусть  $f_N^- < 0$ , тогда  $\rho(x_1) > 1$  из (10), и в силу монотонности функции и нечетности  $\phi(x_1)$  выполняется  $f_N^+ < 0$ , т.е. имеем случай  $AA_0$ . Аналогично, из предположения  $f_N^+ > 0$  следует, что  $f_N^- > 0$ , а значит, имеем случай  $AA_0$ . Случай  $AA_3$  невозможен.

Теперь найдем условия, при которых имеет место скользящий режим. Вычисляем значение  $\alpha$  по приведенной выше формуле:

$$(13) \quad \alpha = \frac{1}{2}(1 - \rho(x_1)).$$

Из (13) и определения скользящего режима следует, что он возможен только при  $|\rho(x_1)| < 1$ . Легко проверить, что в этом случае имеем  $f_N^- > 0$ ,  $f_N^+ < 0$ .

При  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 1$  получаем  $\rho(x_1) = \pm 1$  и для точки  $x_1 > 0$  имеем  $f_N^- > 0$ ,  $f_N^+ = 0$ , а для точки  $x_1 < 0$  имеем  $f_N^- = 0$ ,  $f_N^+ < 0$ . В обоих случаях это точечная особенность типа  $ab$  [7], означающая начало или окончание скользящего режима. В рассматриваемом случае данная точечная особенность не является положением равновесия, так как модуль векторного поля в этой точке отличен от нуля, а правая часть системы однозначно определена: либо  $f^+$ , либо  $f^-$ .

Таким образом, в замкнутой системе на кривой переключения возможны только два режима: 1) и 2). Протыкание кривой разрыва означает непрерывность траекторий на ней, а значит, в этих точках производная функции Ляпунова может быть доопределена по непрерывности, т.е. с учетом пунктов 1–3 она может быть только  $\dot{V}(x) \leq 0$ .

Остается найти  $\dot{V}$  при  $S = 0$ . Вычисляем  $f_0$ , используя (12), (13), и формируем новую систему дифференциальных уравнений, которой подчиняется движение исходной системы на кривой разрыва. Согласно определению [7] она имеет вид  $\dot{x} = f_0$  и может быть записана как

$$(14) \quad \dot{x}_1 = -\phi(x_1), \quad \dot{x}_2 = \rho(x_1).$$

Производная функции (1) в силу системы (14) и после исключения  $x_2$  записывается формулой

$$(15) \quad \begin{aligned} \dot{V} &= -\rho(x_1)\phi(x_1) - \text{sign}(x_1)\phi(x_1) = \\ &= -\phi(|x_1|) \left( \phi(|x_1|) \frac{d\phi(x_1)}{dx_1} + 1 \right) < 0, \quad x_1 \neq 0. \end{aligned}$$

При  $\frac{d\phi(x_1)}{dx_1} = 0$  следует, что  $x_2 = \text{const}$ , а  $x_1$  постоянно убывает. Такое движение будет продолжаться до тех пор, пока производная  $\frac{d\phi(x_1)}{dx_1}$  не станет положительной, после чего начнет убывать и переменная  $x_2$ .

5. Положительность функции  $V(x)$  во всем  $R^2$ , кроме начала координат, очевидна, при этом  $V(x)$  стремится к бесконечности при  $\|x\| \rightarrow \infty$ . Таким образом, функция  $V(x)$  удовлетворяет всем условиям теоремы Барбашина–Красовского [8, 9] (теорема Ла-Салля [17]) и, следовательно, начало координат является асимптотически устойчивым положением равновесия системы (5)–(7) в целом. Теорема доказана.

*Замечание 2.* Функция Ляпунова вида (1) для системы (5), (6) не является функцией Лурье–Постникова [18], так как система (5), (6) не приводится к виду Лурье (в ней нельзя выделить линейную систему).

*Замечание 3.* Использование классических подходов в построении функций Ляпунова для разрывных систем [19, 20] приводит в данной задаче только к доказательству либо локальной устойчивости [21–23], либо устойчивости в большом [10, 24].

### 3. Непрерывная кривая переключения

*Теорема 2.* Определим множество  $Q = R \setminus I_L$ ,  $I_L = \{-\xi^k, -\xi^{k-1}, \dots, -\xi^1, \xi^1, \dots, \xi^{k-1}, \xi^k, \xi^k \in R, k = 1, \dots, L, L \in Z^+\}$ . Пусть непрерывная дифференцируемая функция  $\phi_1(\xi)$ ,  $\xi \in Q$  удовлетворяет свойствам:

- 1)  $0 \leq \frac{d\phi_1(\xi)}{d\xi} < +\infty$ ;
- 2)  $\exists 0 < \delta \leq \xi^1$  такое, что  $0 < \frac{d\phi_1(\xi)}{d\xi}, |\xi| < \delta$ ;
- 3)  $\phi_1(0) = 0$ ;
- 4)  $\phi_1(\xi) = -\phi_1(-\xi)$ .

Пусть также выполняется равенство  $\phi_1(\xi) = -\phi_1(-\xi)$ ,  $\xi \in I_L$ , тогда система (5)–(7) с функцией  $\phi(x_1) = \phi_1(x_1)$  глобально асимптотически устойчива.

*Доказательство.* Так как функция  $\phi_1(x_1)$  не является гладкой, кривая переключения  $x_2 = -\phi_1(x_1)$  также будет негладкой. Таким образом отличие функций  $\phi(x_1)$  в теоремах 1 и 2 заключается в отсутствии производных в конкретных точках  $\xi^k$ ,  $k = 1, \dots, L$  на множестве меры нуль. Так как система (5)–(7) плоская, то каждую такую точку на кривой разрыва можно трактовать как множество пересечения только двух гладких кривых разрыва и применить метод доопределения векторного поля в случае нескольких гладких поверхностей разрыва [7, с. 42]. Выберем любую точку из множества  $I_L$ , например с индексом  $l$ , тогда проекция векторного поля  $f_{N_l}^\pm$  конкретно в этой точке фазового пространства  $(x_1^l, -\phi_1(x_1^l))$  складывается из проекций, вычисленных для двух соседних гладких сегментов кривой разрыва. Обозначим проекции векторного поля, вычисленные по формулам (10), слева от точки разрыва как  $f_{N_{l-1}}^\pm = f_N^\pm(x_1^l - \epsilon)$  и справа как  $f_{N_{l+1}}^\pm = f_N^\pm(x_1^l + \epsilon)$ ,  $\epsilon > 0$ , тогда проекции векторного поля вычисляются как

$$(16) \quad f_{N_l}^\pm = \frac{1}{2}(f_{N_{l-1}}^\pm + f_{N_{l+1}}^\pm).$$

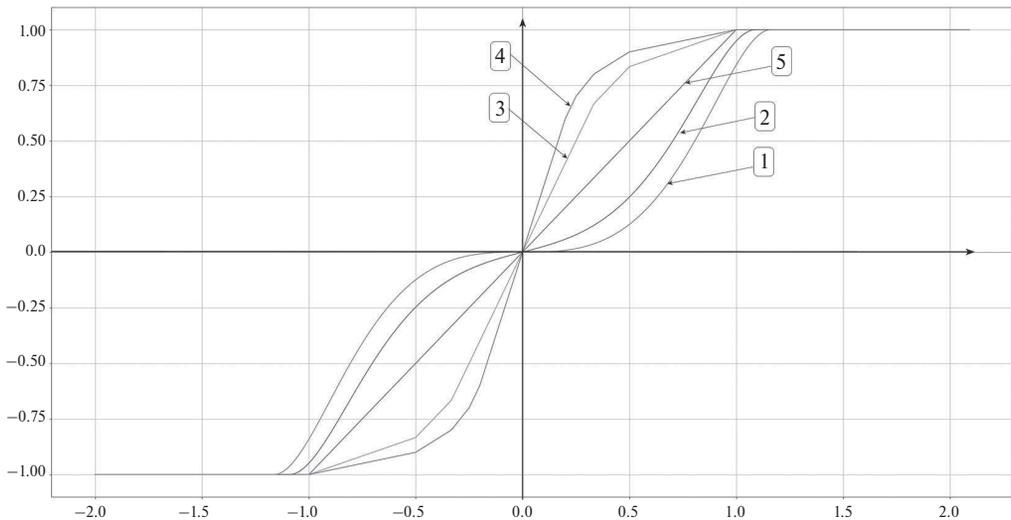


Рис. 4. Примеры функций, удовлетворяющих условиям теоремы 1 или теоремы 2.

В силу непрерывности решения, глобальной устойчивости нуля может не быть, только если данная точка является стационарной, т.е. выполняются условия для случая 3) в теореме 1; более точно, нужно проверить, что  $f_l^0 = \alpha_l f^+ + (1 - \alpha_l) f^- \neq [0; 0]$ ,  $\alpha_l = f_{N_l}^- / (f_{N_l}^- - f_{N_l}^+)$ . Из (12) после подстановки соответствующей функции имеем:

$$(17) \quad f_l^0 = [-\phi_1(x_1^l); 1 - 2\alpha_l].$$

Так как  $x_1^l \neq 0$  по условиям теоремы, из (17) следует, что  $f_l^0 \neq [0; 0]$  для любого  $0 \leq \alpha_l \leq 1$ . А значит, точка  $(x_1^l, -\phi_1(x_1^l))$  не является стационарной. В остальных точках работает теорема 1. Теорема 2 доказана.

Схематически траектории движения, характерные для систем (5)–(7) с функцией  $\phi(x_1)$  и  $\phi_1(x_1)$ , изображены пунктирной линией на рис. 1 и 2 соответственно. В обоих случаях, начав движение из точки  $A_1 \in D_2^+$  в точку  $A_2 \in D_3^+$ , в силу отрицательности производной функции Ляпунова справедливо неравенство  $V(A_1) > V(A_2)$ . Затем движение идет по параболе в области  $D_3^+$ , где  $\dot{V} = 0$ , т.е. выполняется неравенство  $V(A_1) > V(A_3) = V(A_2)$ , где  $A_3 \in D_1$ . Далее возможны два варианта: траектория протыкает кривую разрыва и попадает в  $D_2^-$  либо попадает в устойчивый скользящий режим и движется по нему в точку  $B_3$ . При этом в конечной точке выполняется строгое неравенство  $V(A_1) > V(B_3)$ .

Рассмотрим примеры функций, удовлетворяющих условиям теоремы 1. На рис. 4 под номерами 1 и 2 изображены гладкие функции насыщения  $\Phi_1(\xi) = \sin(\psi(k\xi))$ , где  $\psi(k\xi) = \text{sat}_{(\frac{\pi}{2k})^{1/3}}(k\xi^3)$ , и  $\Phi_2(\xi) = \sin(\psi(k\xi))$ , где  $\psi(k\xi) = \text{sat}_{\xi^*}(\xi^3 + \xi/4)$ . Через  $\xi^*$  в последней формуле обозначено решение полиномиального уравнения  $\xi^3 + \xi/4 = \pi/2$ .

В качестве примера функции  $\phi_1(x_1)$ , удовлетворяющей условиям теоремы 2, можно взять кусочно-линейную функцию с  $L$  изгибами. Например, на рис. 4 под номером 3 изображена функция  $\Phi_3(\xi) = \frac{1}{3}(\text{sat}(k_1\xi) + \text{sat}(k_2\xi) + \text{sat}(k_3\xi))$ ,  $k_1 = 0,3$ ,  $k_2 = 2,65$ ,  $k_3 = 5$ , с тремя перегибами, а под номером 4 – с четырьмя перегибами  $\Phi_4(\xi) = \frac{1}{4} \left( \sum_{i=1}^4 \text{sat}(k_i\xi) \right)$ ,  $k_i = \frac{i}{3}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Простейшей функцией из приведенного класса является функция  $\text{sat}$ , обозначенная номером 5 на рис. 4.

#### 4. Разрывная кривая переключения

*Теорема 3. Пусть*

$$(18) \quad \phi_2(\xi) = K \text{sign}(\xi), \quad \xi \in R, \quad 0 < K < +\infty.$$

*Система (5)–(7) с функцией  $\phi(x_1) = \phi_2(x_1)$  имеет глобально полуустойчивый цикл, который проходит через точки  $(0, \pm K)$ , а начало координат является сшитым центром согласно классификации Филиппова.*

*Доказательство.* По аналогии с теоремой 2 сначала разделим кривую  $S = 0$  на три гладких сегмента:  $D_1^+ = \{(x_1, x_2) : S(x_1, x_2) = 0, x_1 > 0\}$ ,  $D_1^- = \{(x_1, x_2) : S(x_1, x_2) = 0, x_1 < 0\}$ ,  $D_1^0 = \{(x_1, x_2) : x_2 \in (-K, K), x_1 = 0\}$ .

Так как это прямые линии, для каждой из них ее нормаль можно выписать явно:  $n^+ = n^- = [0; 1]$  – для  $D_1^\pm$  и  $n^0 = [1; 0]$  – для  $D_1^0$  (по определению направление нормали выбирается в сторону множества  $S > 0$ ).

Используя (10) и подставляя  $\nabla S = n_0$ , находим проекции векторного поля на множестве  $D_1^0$ :

$$(19) \quad f_{n_0}^\pm = [1; 0][x_2; \pm 1]_{x_2 \in D_1^0} = x_2, \quad x_2 \in D_1^0.$$

Из (19) следует выполнение неравенства  $f_{n_0}^+ f_{n_0}^- > 0$ ,  $x_2 \in D_1^0 \setminus 0$ , т.е. на множестве  $D_1^0$ , за исключением  $x_2 = 0$ , имеет место случай  $AA_0$ , определенный в теореме 1. Таким образом, правая часть системы имеет вид  $f = f^+$  при  $x_2 > 0$  и  $f = f^-$  при  $x_2 < 0$  на множестве  $D_1^0$ , за исключением  $x_2 = 0$ . Выберем любую точку на множестве  $D_1^0$ , например  $(0, \delta)$ ,  $0 < \delta < K$ . Так как система (5)–(7), (18) имеет доопределенную правую часть, ее можно проинтегрировать из этой точки. После несложных преобразований получаем параболу (9) с  $C = \pm \delta^2/2$ . Этой же фазовой кривой удовлетворяет точка  $(0, -\delta)$  с противоположной по знаку, но одинаковой по модулю проекцией векторного поля на кривую разрыва, значит, по терминологии Филиппова [7] начало координат является центром. Первая часть утверждения доказана.

Пусть теперь  $\nabla S = [0; 1]$ . Используя (10), находим проекции векторного поля на множестве  $D_1^+$ :

$$(20) \quad f_n^\pm = [0; 1][x_2; \pm 1] = \pm 1 \in D_1^+.$$

На множестве  $D_1^-$  получаем тот же результат, который означает, что на этих множествах имеет место скользящий режим и при этом  $\alpha_n = \frac{1}{2}$ . Посчитаем новое векторное поле  $f^0$ , имеем:

$$(21) \quad f_n^0 = \frac{1}{2}[x_2; -1] + \frac{1}{2}[x_2; 1] = [x_2; 0], \quad x_2 \in D_1^\pm.$$

Итак, на множестве  $D_1^-$   $f_n^0 = [1; 0]$ , а на множестве  $D_1^+$   $f_n^0 = [-1; 0]$ , причем модуль его не меняется. Теперь посчитаем проекцию векторного поля в точках  $(0, -K)$  и  $(0, K)$ . Выберем точку  $x^l = (0, K)$  в обозначениях теоремы 2 и применим формулу (16), куда подставим соответствующие значения проекции векторного поля на нормали из множеств  $D_1^+$  и  $D_1^0$ , имеем:

$$(22) \quad f_{N_K}^\pm = \frac{1}{2}(x_2 \pm 1)|_{x_2=K} = K \pm 1, \quad \alpha = \frac{1}{2}(1 - K).$$

Теперь находим  $f_K^0$  для точки  $(0, K)$ :

$$(23) \quad f_K^0 = \frac{1}{2}(1 - K)[x_2; -1] + \frac{1}{2}(1 + K)[x_2; 1] = [K; K].$$

Очевидно,  $f_K^0 \neq [0; 0]$ , значит, точка  $(0, K)$  не является стационарной. Повторяя рассуждения для точки  $(0, -K)$ , находим  $f_{-K}^0 = [-K; -K] \neq [0; 0]$ , значит точка  $(0, -K)$  не является стационарной. Строим решение, проходящее через эти точки, которое имеет вид (9) с параметром  $C = \pm K^2/2$ . После сшивки двух парабол по оси  $x_2$  получаем замкнутую траекторию – предельный цикл [7]. Покажем, что он устойчивый для всех точек, лежащих на плоскости вне его.

Для области вне цикла рассмотрим функцию (1). Пусть произвольная траектория начинается в точке  $A_1 \in D_2^+$  вне цикла (рис. 3). В силу теоремы 1 производная Функции Ляпунова в точке  $A_1 \in D_2^+$  отрицательная, а в точке  $A_2 \in D_3^+$  равна нулю. Тогда справедливо неравенство  $V(A_1) > V(A_2)$ . Далее, так как в  $D_3^+$   $\dot{V} = 0$  система движется по параболе в точку  $A_3 \in D_1$ . С учетом первого неравенства получаем, что  $V(A_3) = V(A_2) < V(A_1)$ , т.е. траектория приблизилась к циклу в смысле нормы  $V(x)$ . На кривой разрыва  $A_3B_3$  возникает устойчивый скользящий режим с векторным полем (21), а значит, траектория приходит в точку  $(0, -K)$ , попадая на цикл за конечное время и не пересекая кривую переключения. Аналогично для точек из  $D_3^-$ . Таким образом построенный цикл из двух сшитых парабол будет устойчивым для всех точек, лежащих на плоскости вне его. Теорема доказана.

## 5. Численная иллюстрация

В качестве иллюстрации были построены линии уровня функции Ляпунова (1) для системы (5)–(7) с функциями  $\phi = x_1^{1/3}$ ,  $\phi_1 = \text{sat}(x_1)$  и  $\phi_2$  (18) с  $K = 1$ . На рис. 5 показана одна из линий уровня (сплошная линия) и несколько фазовых траекторий (пунктирные линии), начинающихся на ней. Начальные точки траекторий помечены кружочками. Как видно из рисунка, ни одна

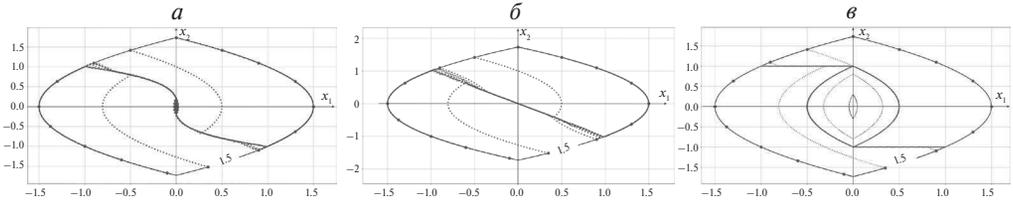


Рис. 5. Линия уровня функции Ляпунова и фазовые траектории на плоскости  $(x_1, x_2)$ . Точками выделены начальные условия, соответствующие изображенным фазовым траекториям.

из траекторий не выходит за пределы инвариантного множества, ограниченного линией уровня. Сегменты траекторий, идущие вдоль границы множества, лежат в подмножествах  $D_3^-$  и  $D_3^+$ , в которых производная функции Ляпунова в силу системы равна нулю.

На рис. 5,а после попадания траектории на кривую разрыва происходит устойчивый скользящий режим до некоторого момента, а затем траектория попадает в область, где происходит пересечение кривой разрыва и попадание в область, где функция Ляпунова становится отрицательной, а затем ситуация повторяется. В этом случае начало координат – сшитый устойчивый фокус ([7, с. 166]).

На рис. 5,б после попадания траектории на кривую разрыва происходит устойчивый скользящий режим до нуля. В этом случае начало координат сшитый устойчивый узел или линейная особенность типа  $AA_1$  ([7, с. 166]).

На рис. 5,в после попадания траектории на кривую разрыва происходит устойчивый скользящий режим до точки  $(0, 1)$  или  $(0, -1)$  в зависимости от начальных условий, далее траектории наматываются на цикл. К сожалению, из-за ошибок округления может происходить ситуация, когда траектория движется по циклу меньшего размера. Если выбрать точку внутри цикла, получим другой цикл меньшего размера, и так далее до нуля. В этом случае начало координат – сшитый центр ([7, с. 166]).

## 6. Заключение

Рассмотрена задача стабилизации цепочки двух интеграторов разрывной обратной связью. Это – предельный случай рассмотренной ранее обратной связи в виде вложенных функций насыщения. В работе предложена функция Ляпунова для замкнутой системы, с помощью которой и результатов теории Филиппова доказана глобальная асимптотическая устойчивость начала координат для разных типов непрерывной кривой переключения. В случае, когда кривая переключения разрывная, доказано, что начало координат является сшитым центром по классификации Филиппова. При этом в замкнутой системе существует полуустойчивый цикл, охватывающий это положение равновесия. Результат работы сформулирован в виде трех теорем. В качестве

численных примеров построены линия уровня функции Ляпунова и фазовые траектории на плоскости для разных типов кривой переключения.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Морозов Ю.В., Пестерев А.В.* Глобальная стабилизация интегратора 2-го порядка обратной связью в виде вложенных сигмOID // Известия РАН. ТиСУ. 2024. Т. 58. № 3. С. 5–10.
2. *Пестерев А.В., Морозов Ю.В.* Глобальная стабилизация интегратора второго порядка обратной связью в виде вложенных сатураторов // АиТ. 2024. № 4. С. 55–60.
3. *Пономарев В.М., Литвинов А.П.* Основы автоматического регулирования и управления. М.: Высшая школа, 1974.
4. *Olfati-Saber R.* Nonlinear control of underactuated mechanical systems with application to robotics and aerospace vehicles // Ph.D. dissertation, Massachusetts Institute of Technology. Dept. of Electrical Engineering and Computer Science, 2001.
5. *Матюхин В.И., Пятницкий Е.С.* Управляемость механических систем в классе управлений, ограниченных вместе с производной // АиТ. 2004. № 8. С. 14–38.
6. *Hua M.-D., Samson C.* Time sub-optimal nonlinear pi and pid controllers applied to longitudinal headway car control // Int. J. Control. 2011. V. 84. P. 1717–1728.
7. *Филлипов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
8. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. Серия: Физико-математическая библиотека инженера. М.: Наука, 1967.
9. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматлит, 1959.
10. *Матросов В.М.* Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит, 2001.
11. *Красовский Н.Н.* Проблемы устойчивости и управления / Сборник научных статей, посвященный 80-летию академика Владимира Мефодьевича Матросова. М.: Физматлит, 2013.
12. *Молчанов А.П., Пятницкий Е.С.* Функции Ляпунова, определяющие необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем управления. III // АиТ. 1986. № 5. С. 38–49.
13. *Матросов И.В.* О единственности справа решений невырожденных алгебро-дифференциальных уравнений с разрывами // АиТ. 2007. № 1. С. 11–19.
14. *Уткин В.И.* Скользящие режимы и их применения в системах с переменной структурой. М.: Наука, 1974.
15. *Уткин В.И.* Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981.
16. *Магнус К.* Колебания: Введение в исследование колебательных систем. М.: Мир, 1982.
17. *Ла-Салль Ж., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М.: Мир, 1964.
18. *Лурье А.И., Постников В.Н.* К теории устойчивости регулируемых систем // Прикладная математика и механика. 1944. № 3. С. 246–248.

19. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Том 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. М.: Физматлит, 2016.
20. *Khalil H.K.* Nonlinear Systems. 3rd edition. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002.
21. *Li Y., Lin Z.* Stability and Performance of Control Systems with Actuator Saturation. Basel: Birkhauser, 2018.
22. *Зубов В.И.* Устойчивость движения. Методы Ляпунова и их применение. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Высшая школа, 1984.
23. *Рунд Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод в теории устойчивости. М.: Мир, 1980.
24. *Матюхин В.И.* Управление механическими системами. М.: Физматлит, 2009.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.*

Поступила в редакцию 04.10.2024

После доработки 17.06.2025

Принята к публикации 12.08.2025