Автоматика и телемеханика, № 1, 2026

Нелинейные системы

© 2026 г. К.Б. МАНСИМОВ, д-р физ.-мат. наук,
Р.О. МАСТАЛИЕВ, д-р философии по математике (rashad.mastaliyev@au.edu.az)
(Университет «Азербайджан», Баку;
Институт систем управления МНО Азербайджанской республики, Баку)

ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИМИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рассматривается задача оптимального управления, описываемая стохастической системой гиперболических уравнений первого порядка и возникающая при моделировании ряда химико-технологических процессов под влиянием случайных шумов. Исследуются на оптимальность особые в смысле принципа максимума Понтрягина управления.

Ключевые слова: стохастическая гиперболическая система уравнений первого порядка, двухпараметрический винеровский процесс, оптимальность, принцип максимума Понтрягина, особое управление, условия оптимальности второго порядка.

DOI: 10.7868/S2413977726010057

1. Введение

Различные качественные аспекты, в том числе вывод необходимых условий оптимальности первого порядка и исследования особого случая задач оптимального управления для детерминированных динамических систем, описываемых гиперболическими уравнениями первого порядка, изучены в [1–6] и др.

Подобная задача оптимального управления в стохастическом случае рассмотрена в [7], и при этом установлены необходимые условия оптимальности первого порядка (аналог принципа максимума Понтрягина, линеаризованный принцип максимума, аналог уравнения Эйлера [8]).

Актуальность исследований в этом направлении обуславливается необходимостью наиболее точного описания, например, систем автоматического управления, ряда химико-технологических процессов [9–14], реалистичным вариантом которого является стохастическое описание, учитывающее воздействие на объект управления случайных факторов.

Настоящая работа посвящена изучению особого в смысле принципа максимума Понтрягина случая и выводу необходимых условий оптимальности второго порядка для особых управлений в стохастической задаче управления, описываемой системой нелинейных стохастических гиперболических уравнений первого порядка, записанной в канонической форме.

Применяемая схема исследования представляет собой модификацию и развитие схем из [5, 6] с учетом стохастических свойств рассматриваемой задачи.

2. Постановка задачи

Допустим, что управляемый процесс в заданной области $D = [t_0, t_1][x_0, x_1]$ описывается следующей системой стохастических нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial z(t,x)}{\partial t} = f(t,x,z,y,u) + p(t,x,z)\frac{\partial W_1(t,x)}{\partial t},\\
&\frac{\partial y(t,x)}{\partial x} = g(t,x,z,y,u) + q(t,x,y)\frac{\partial W_2(t,x)}{\partial x}, \quad (t,x)\in D,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

с краевыми условиями типа Гурса

$$
\begin{aligned}
&z(t_0,x) = a(x), \quad x\in[x_0,x_1],\\
&y(t,x_0) = b(t), \quad t\in[t_0,t_1].
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Здесь $(z(t,x),\ y(t,x))$ – $(n+m)$-мерная искомая вектор-функция; $f(t,x,z,y,u)(g(t,x,z,y,u))$ – заданная $n(m)$-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (z,y) до второго порядка включительно; $p(t,x,z)(q(t,x,y))$ – $(n\times n)((m\times m))$-мерная измеримая и ограниченная матрица-функция; белые шумы $\frac{\partial W_1(t,x)}{\partial t}$, $\frac{\partial W_2(t,x)}{\partial x}$ являются производными соответственно по t и по x от двухпараметрического винеровского процесса $W_1(t,x)$, $W_2(t,x)$ [10, 13], а $a(x), b(t)$ – заданные измеримые и ограниченные на $[x_0,x_1]$, $[t_0,t_1]$ соответственно вектор-функции соответствующих размерностей.

В качестве допустимых управлений берется класс измеримых относительно неубывающей борелевской σ-алгебры $\mathcal{F} = \overline{s}(W(t,s),\ t_0 \leqslant t \leqslant t_1,\ x_0 \leqslant s \leqslant x_1)$ и ограниченных на D r-мерных вектор-функций $u(t,x)$ со значениями из заданного непустого и ограниченного множества $U \subset R^r (u(t,x) \in$ $\in L_\infty(D,U))$.

Решение $(z(t,x), y(t,x))$ системы (1)–(2), соответствующее определенному допустимому управлению $u(t,x)$, понимается в смысле [15].

Всюду предполагается, что для каждого допустимого управления соответствующее решение краевой задачи (1)–(2) существует и единственно в области D.

Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$S(u) = E\left\{ \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} F_3\left(t, x, z\left(t, x\right), y\left(t, x\right), u\left(t, x\right)\right) dxdt + \right.$$

$$\left. + \int_{x_0}^{x_1} F_1\left(x, z\left(t_1, x\right)\right) dx + \int_{t_0}^{t_1} F_2\left(t, y\left(t, x_1\right)\right) dt \right\}, \tag{3}$$

определенного на решениях краевой задачи (1)–(2), порожденных всевозможными допустимыми управлениями.

Здесь $F_1(x, z), F_2(t, y), F_3(t, x, z, y, u)$ – заданные скалярные функции, непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по вектору состояния (т.е. по (z, y)) до второго порядка включительно, а E – знак математического ожидания.

Допустимое управление $u(t, x)$, доставляющее минимум функционалу (3) при ограничениях (1), (2), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u(t, x), z(t, x), y(t, x))$ – оптимальным процессом.

Предполагается, что в рассматриваемой стохастической задаче оптимальное управление существует.

Основной целью работы является вывод необходимых условий оптимальности второго порядка (случай особых управлений) в рассматриваемой стохастической задаче управления с распределенными параметрами.

3. Формула приращения второго порядка функционала качества

Пусть $(u(t, x),\ z(t, x),\ y(t, x))$ – фиксированный, а $(\overline{u}(t, x) = u(t, x) + \Delta u(t, x), \overline{z}(t, x) = z(t, x) + \Delta z(t, x), \overline{y}(t, x) = y(t, x) + \Delta y(t, x))$ – произвольный допустимые процессы.

Введем аналог функции Гамильтона–Понтрягина

$$H\left(t, x, z, y, u, \psi, \xi\right) =$$
$$= -F_3\left(t, x, z, y, u\right) + \psi' f\left(t, x, z, y, u\right) + \xi' g\left(t, x, z, y, u\right),$$

а также обозначения типа:

$$\Delta_v f\left[t, x\right] = f\left(t, x, z\left(t, x\right), y\left(t, x\right), v\right) - f\left(t, x, z\left(t, x\right), y\left(t, x\right), u\left(t, x\right)\right),$$
$$H_z\left[t, x\right] = H_z(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), \psi(t, x), \xi(t, x)).$$

Здесь

$$\left(\psi\left(t, x\right),\ \xi\left(t, x\right),\ \alpha\left(t, x\right),\ \beta\left(t, x\right)\right) \in$$
$$\in L_\infty\left(D,\ R^n\right) \times L_\infty\left(D,\ R^m\right) \times L_\infty\left(D,\ R^{n\times n}\right) \times L_\infty\left(D,\ R^{m\times m}\right)$$

являются решениями следующей стохастической сопряженной задачи:

$$\psi_t(t,x) = -\frac{\partial H(t,x,z,y,u,\psi,\xi)}{\partial z} + \alpha(t,x)\frac{\partial W_1(t,x)}{\partial t}, \quad \psi(t_1,x) = \frac{\partial F_1(x,z(t_1,x))}{\partial z},$$

$$\xi_x(t,x) = -\frac{\partial H(t,x,z,y,u,\psi,\xi)}{\partial y} + \beta(t,x)\frac{\partial W_2(t,x)}{\partial x}, \quad \xi(t,x_1) = \frac{\partial F_2(t,y(t,x_1))}{\partial y}.$$

Теперь применяя формулу Тейлора и учитывая введенные обозначения, приращение критерия качества (3), соответствующее допустимым управлениям $u\,(t,x)$ и $\overline{u}\,(t,x)$, можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\Delta S\,(u) = -E\Bigg\{ &\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\overline{u}} H\,[t,x]\,dxdt + \\
&+ \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} \Delta z'\,(t_1,x)\,\frac{\partial^2 F_1\,(x,z\,(t_1,x))}{\partial z^2}\Delta z\,(t_1,x)dx + \\
&+ \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \Delta y'\,(t,x_1)\,\frac{\partial^2 F_2\,(t,y\,(t,x_1))}{\partial y^2}\Delta y\,(t,x_1)dt + \\
&+ \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \Big[\Delta_{\overline{u}} H_z'\,[t,x]\,\Delta z\,(t,x) + \Delta_{\overline{u}} H_y'\,[t,x]\,\Delta y\,(t,x)\Big]\,dxdt + \\
&+ \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \Big[\Delta z'(t,x)H_{zz}[t,x]\Delta z(t,x) + \Delta z'(t,x)H_{zy}[t,x]\Delta y(t,x) + \\
&+ \Delta y'\,(t,x)\,H_{yy}\,[t,x]\,y\,(t,x)\Big]dxdt + \eta_1\,(t,x;\Delta u)\,,
\end{aligned} \tag{4}$$

где $\eta_1\,(t,x;\Delta u)$ определяется по формуле

$$\begin{aligned}
\eta_1\,(t,x;\Delta u) = E\Bigg\{ &\int_{x_0}^{x_1} o_1\left(\|\Delta z\,(t_1,x)\|^2\right)dx + \int_{t_0}^{t_1} o_2\left(\|\Delta y\,(t,x_1)\|^2\right)dt - \\
&- \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} o_3\left([\|\Delta z\,(t,x)\| + \|\Delta y\,(t,x)\|]^2\right)dxdt - \\
&- \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \Big[\Delta z'\,(t,x)\,\Delta_{\overline{u}} H_{zz}\,[t,x]\,\Delta z\,(t,x) + \Delta z'\,(t,x)\,\Delta_{\overline{u}} H_{zy}\,[t,x]\,\Delta y\,(t,x) + \\
&+ \Delta y'(t,x)\Delta_{\overline{u}} H_{yz}[t,x]\Delta z(t,x) + \Delta y'(t,x)\Delta_{\overline{u}} H_{yy}[t,x]\Delta y(t,x)\Big]dxdt\Bigg\},
\end{aligned}$$

$\|\Delta z\|$ – норма вектора $\Delta z = (\Delta z_1, \Delta z_2, \ldots, \Delta z_n)$ в R^n, определяемая формулой

$$\|\Delta z\| = \sum_{i=1}^{n} |\Delta z_i|\,, \text{ и всюду } \frac{o_i\left(\propto^2\right)}{a^2} \to 0 \text{ при } \propto \to 0.$$

С другой стороны, из краевой задачи (1)–(2) линеаризацией получаем, что $(\Delta z\,(t,x)\,, \Delta y(t,x))$ является решением следующих стохастических линеаризованных систем уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta z_t &= f_z\,[t,x]\,\Delta z\,(t,x) + \Delta_{\overline{u}} f_y\,[t,x]\,\Delta y\,(t,x) + \Delta_{\overline{u}} f\,[t,x] + \\ &\quad + p_z[t,x]\Delta z\,(t,x)\,\frac{\partial W_1\,(t,x)}{\partial t} + \eta_2\,(t,x;\Delta u)\,, \\ \Delta y_x &= g_z\,[t,x]\,\Delta z\,(t,x) + \Delta_{\overline{u}} g_y\,[t,x]\,\Delta y\,(t,x) + \Delta_{\overline{u}} g\,[t,x] + \\ &\quad + q_y\,[t,x]\,\Delta y\,(t,x)\,\frac{\partial W_2\,(t,x)}{\partial x} + \eta_3\,(t,x;\Delta u) \end{aligned} \tag{5}$$

с краевыми условиями

$$\Delta z\,(t_0,x) = 0, x \in [x_0,x_1]\,; \quad \Delta y\,(t,x_0) = 0, \quad t \in [t_0,t_1]\,, \tag{6}$$

где по определению

$$\begin{aligned} \eta_2\,(t,x;\Delta u) &= \Delta_{\overline{u}} f_z\,[t,x]\,\Delta z + \Delta_{\overline{u}} f_y\,[t,x]\,\Delta y + o_4\left(\|\Delta z + \Delta y\|\right) + \\ &\quad + o_5\left(\|\Delta z\,(t,x)\|\right)\frac{\partial W_1(t,x)}{\partial t}, \\ \eta_3\,(t,x;\Delta u) &= \Delta_{\overline{u}} g_z\,[t,x]\,\Delta z + \Delta_{\overline{u}} g_y\,[t,x]\,\Delta y + o_6\left(\|\Delta z + \Delta y\|\right) + \\ &\quad + o_7\left(\|\Delta y\,(t,x)\|\right)\frac{\partial W_1(t,x)}{\partial t}. \end{aligned}$$

Здесь величины $o_i(.)$, $i = \overline{4,7}$ определяются соответственно из разложений функций $f(.)$, $p(.)$, $g(.)$, $q(.)$ по формуле Тейлора первого порядка соответствующей управлениям $\overline{u}(t,x)$ и $u(t,x)$.

Интерпретируя уравнения (5) как линейные неоднородные стохастические уравнения относительно $\Delta z\,(t,x)$, $\Delta y\,(t,x)$ и учитывая краевые условия (6) на основе аналога формулы Коши из [15], получим

$$\Delta z\,(t,x) = \int_{t_0}^{t} V_{11}\,(t,x;\tau,x)\,\Delta_{\overline{u}} f[\tau,x]dt + \eta_4\,(t,x;\Delta u)\,, \tag{7}$$

$$\Delta y\,(t,x) = \int_{x_0}^{x} V_{22}\,(t,x;t,s)\,\Delta_{\overline{u}} g[t,s]ds + \eta_5\,(t,x;\Delta u)\,. \tag{8}$$

Здесь по определению

$$\eta_4(t,x;\Delta u)=\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x}\left\{\frac{\partial V_{11}(t,x;\tau,s)}{\partial x}\left[\Delta_{\overline{u}}f[\tau,s]+\eta_2(\tau,s;\Delta u)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial V_{12}(t,x;\tau,s)}{\partial x}\left[\Delta_{\overline{u}}g[\tau,s]+\eta_3(\tau,s;\Delta u)\right]\right\}dsd\tau+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}V_{11}(t,x;\tau,x)\,\eta_2(\tau,x;\Delta u)\,d\tau,$$

$$\eta_5(t,x;\Delta u)=\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x}\left\{\frac{\partial V_{21}(t,x;\tau,s)}{\partial t}\left[\Delta_{\overline{u}}f[\tau,s]+\eta_2(\tau,s;\Delta u)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial V_{22}(t,x;\tau,s)}{\partial t}\left[\Delta_{\overline{u}}g[\tau,s]+\eta_3(\tau,s;\Delta u)\right]\right\}dsd\tau+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}V_{22}(t,x;\tau,s)\,\eta_3(t,s;\Delta u)ds,$$

а $V_{ij}(t,x;\tau,s)$, $(t_0\leqslant t\leqslant t\leqslant t_1, x_0\leqslant s\leqslant x\leqslant x_1)$, $i,j=1,2$ – матричные функции, являющиеся решениями следующих стохастических задач [15]:

$$\frac{\partial V_{11}(t,x;\tau,s)}{\partial\tau}=-V_{11}(t,x;\tau,s)\,f_z[\tau,s]-V_{12}(t,x;\tau,s)\,g_z[\tau,s]-$$

$$-V_{11}(t,x;\tau,s)\,p[\tau,s]\frac{\partial W_1(\tau,s)}{\partial\tau},$$

$$\frac{\partial V_{12}(t,x;\tau,s)}{\partial s}=-V_{11}(t,x;\tau,s)\,f_y[t,s]-V_{12}(t,x;\tau,s)\,g_y[\tau,s]-$$

$$-V_{12}(t,x;\tau,s)\,q[\tau,s]\frac{\partial W_2(\tau,s)}{\partial s},$$

$$\frac{\partial V_{21}(t,x;\tau,s)}{\partial t}=-V_{21}(t,x;\tau,s)\,f_z[\tau,s]-V_{22}(t,x;\tau,s)\,g_z[\tau,s]-$$

$$-V_{21}(t,x;\tau,s)\,p[\tau,s]\frac{\partial W_1(\tau,s)}{\partial\tau},$$

$$\frac{\partial V_{22}(t,x;\tau,s)}{\partial s}=-V_{21}(t,x;\tau,s)\,f_z[\tau,s]-V_{21}(t,x;\tau,s)\,g_z[\tau,s]-$$

$$-V_{22}(t,x;\tau,s)\,q[\tau,s]\frac{\partial W_2(\tau,s)}{\partial s},$$

$$V_{11}(t,x;t,s)=E_1,\quad V_{12}(t,x;\tau,x)=0,\quad t_0\leqslant\tau\leqslant t,$$

$$V_{21}(t,x;\tau,s)=0,\quad V_{22}(t,x;t,s)=E_2,$$

$x_0\leqslant s\leqslant x$, где $E_1,\ E_2$ – единичные матрицы соответствующих размерностей.

Для дальнейших изложений введем в рассмотрение $(n \times n)$-матричную функцию $R(x,\tau,s)$ и $(m \times m)$-матричную функцию $Q(t,\tau,s)$ посредством следующих формул:

$$R\left(x,\tau,s\right)=\int\limits_{\max(\tau,s)}^{t_1} V_{11}^{'}(t,x;\tau,x)H_{zz}\left[t,x\right]V_{11}\left(t,x;s,x\right)dt-$$

$$-V_{11}^{'}\left(t_1,x;\tau,x\right)\frac{\partial^2 F_1\left(x,z\left(t_1,x\right)\right)}{\partial z^2}V_{11}\left(t_1,x;s,x\right),$$

$$Q\left(t,\tau,s\right)=\int\limits_{\max(\tau,s)}^{x_1} V_{22}^{'}(t,x;t,x)H_{yy}\left[t,x\right]V_{22}\left(t,x;t,s\right)dx-$$

$$-V_{22}^{'}\left(t,x_1;\tau,t\right)\frac{\partial^2 F_2\left(t,y\left(t,x_1\right)\right)}{\partial y^2}V_{22}\left(t,x_1;t,s\right).$$

Учитывая введенные обозначения и следуя [5, 6], при помощи представлений (7), (8) решений Δz и Δy формулу приращения второго порядка (4) критерия качества (3) можно представить в следующем виде:

$$\Delta S\left(u\right)=E\left\{-\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{u}}H\left[t,x\right]dxdt-\right.$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{t_0}^{t_1}\Delta_{\overline{u}}f'\left[\tau,x\right]R\left(x,\tau,s\right)\Delta_{\overline{u}}f\left[s,x\right]dsdxd\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{u}}g'\left[\tau,x\right]Q\left(t,\tau,s\right)\Delta_{\overline{u}}g\left[t,s\right]dtdsd\tau- \tag{9}$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\left[\int\limits_{t}^{t_1}\Delta_{\overline{u}}H_z'\left[\tau,x\right]V_{11}\left(\tau,x;t,x\right)dt\right]\Delta_{\overline{u}}f\left[t,x\right]dxdt-$$

$$\left.-\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\left[\int\limits_{x}^{x_1}\Delta_{\overline{u}}H_y'\left[t,s\right]V_{22}\left(t,s;t,x\right)ds\right]\Delta_{\overline{u}}g\left[t,x\right]dxdt\right\}+$$

$$+\eta\left(t,x;\Delta u\right),$$

где

$$
\begin{aligned}
\eta\left(t,x;\Delta u\right) = E\Bigg\{&\eta_1\left(t,x;\Delta u\right) - \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\Big[\Delta z'(t,x)H_{zy}\left[t,x\right]\Delta y\left(t,x\right) + \\
&+ \Delta y'\left(t,x\right)H_{yz}\left[t,x\right]\Delta z\left(t,x\right) + \eta_4\left(t,x\right)H_{zz}\left[t,x\right]\Delta z\left(t,x\right)\Big]dxdt - \\
&- \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(\int\limits_{t_0}^{t} V_{11}\left(t,x;\tau,x\right)\Delta_{\overline{u}}f\left[t,x\right]dt\right)' H_{zz}\left[t,x\right]\eta_4\left(t,x\right)dxdt + \\
&+ \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1} V_{11}\left(t_1,x;\tau,x\right)\Delta_{\overline{u}}f\left[t,x\right]\frac{\partial^2 F_1\left(x,z\left(t_1,x\right)\right)}{\partial z^2}\eta_4\left(t_1,x;\Delta u\right)dxdt + \\
&+ \frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x_1}\eta_4'\left(t_1,x;\Delta u\right)\frac{\partial^2 F_1\left(x,z\left(t_1,x\right)\right)}{\partial z^2}\Delta z\left(t_1,x\right)dx - \\
&- \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\eta_5'\left(t,x;\Delta u\right)H_{yy}\left[t,x\right]\Delta y\left(t,x\right)dxdt - \\
&- \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(\int\limits_{x_0}^{x} V_{22}\left(t,x;\tau,s\right)\Delta_{\overline{u}}g\left[t,s\right]ds\right)' H_{yy}\left[t,x\right]\eta_5\left(t,x;\Delta u\right)dxdt - \\
&+ \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1} V_{22}\left(t,x_1;\tau,s\right)\Delta_{\overline{u}}g\left[t,s\right]\frac{\partial^2 F_2\left(t,y\left(t,x_1\right)\right)}{\partial y^2}\eta_5\left(t,x_1;\Delta u\right)dsdt + \\
&+ \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\eta_5'\left(t,x_1\right)\frac{\partial^2 F_2\left(t,y\left(t,x_1\right)\right)}{\partial y^2}\Delta y\left(t,x_1\right)dt - \\
&- \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{u}}H_z'\left[t,x\right]\eta_4\left(t,x;\Delta u\right)dxdt + \\
&+ \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{u}}H_y'\left[t,x\right]\eta_5\left(t,x;\Delta u\right)dxdt\Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Заметим, что построенная формула приращения (9) позволяет в дальнейшем получить как необходимое условие оптимальности первого порядка типа принципа максимума Понтрягина, так и исследовать случай вырождения принципа максимума и его следствий с единых позиций.

4. Стохастический аналог принципа максимума Понтрягина

Сначала приведем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. Почти для всех $(t,x) \in D$ *справедливы оценки*

$$\|\Delta z(t,x)\| \leqslant K_1 E \left(\int\limits_{t_0}^{t} \|\Delta_{\overline{u}} f[\tau, x]\| \, d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{x_0}^{x} \|\Delta_{\overline{u}} g[\tau, s]\| \, ds d\tau \right), \tag{11}$$

$$\|\Delta y(t,x)\| \leqslant K_2 E \left(\int\limits_{x_0}^{x} \|\Delta_{\overline{u}} g[t, s]\| \, ds + \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{x_0}^{x} \|\Delta_{\overline{u}} f[\tau, s]\| \, ds d\tau \right), \tag{12}$$

где $K_i = \text{const} > 0$, $i = 1, 2$.

Доказательство леммы приведено в Приложении.

Из формулы приращения (9) следует справедливость утверждения [7].

Теорема 1. Для оптимальности допустимого управления $u(t,x)$ *в рассматриваемой стохастической задаче управления с распределенными параметрами* (1)–(3) *необходимо, чтобы неравенство*

$$E \Delta_v H[\theta, \gamma] \leqslant 0 \tag{13}$$

выполнялось для всех $(\theta, \gamma) \in [t_0, t_1) \times [x_0, x_1)$ *и при* $v \in U$.

Здесь

$$\Delta_v H[\theta,\gamma] = H(\theta, \gamma, z(\theta,\gamma), y(\theta,\gamma), v, \psi(\theta,\gamma), \xi(\theta,\gamma)) -$$
$$-H(\theta, \gamma, z(\theta,\gamma), y(\theta,\gamma), u(\theta,\gamma), \psi(\theta,\gamma), \xi(\theta,\gamma)),$$

а $(\theta, \gamma) \in [t_0, t_1) \times [x_0, x_1)$ – *произвольная точка Лебега* (*правильная точка* [16] *управления* $u(t,x)$).

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении.

Неравенство (13) является необходимым условием оптимальности первого порядка и представляет собой стохастический аналог принципа максимума Понтрягина для рассматриваемой задачи управления (1)–(3).

5. Необходимые условия оптимальности особых в смысле принципа максимума Понтрягина управлений

Несмотря на то, что принцип максимума Понтрягина (13) является самым сильным необходимым условием оптимальности первого порядка для рассматриваемой задачи управления (1)–(3), нередки случаи его выполнения тривиальным образом (особый случай [3–6, 17]).

Следуя [3–6, 17], введем определение особого управления для рассматриваемой задачи.

Определение 1. Допустимое управление $u\,(t,x)$ назовем особым, в смысле принципа максимума Понтрягина, если для всех $(\theta,\gamma)\in[t_0,t_1)\times[x_0,x_1)$ и $v\in U$

$$E\Delta_v H\,[\theta,\gamma]=0. \tag{14}$$

В особом случае, т.е. в случае выполнения соотношения (14), исследуя формулу приращения (9), доказывается справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. *Для оптимальности особого в смысле принципа максимума Понтрягина управления $u(t,x)$ в рассматриваемой стохастической задаче управления с распределенными параметрами* (1)–(3) *необходимо, чтобы для любого $v\in U$, $(\theta,\gamma)\in[t_0,t_1)\times[x_0,x_1)$ выполнялись следующие соотношения:*

$$A\,(\theta,\gamma,v)=E\big[\Delta_v f'\,[\theta,\gamma]\,R\,(\gamma,\theta,\theta)+\Delta_v H_z^{'}\,[\theta,\gamma]\,\big]\Delta_v f\,[\theta,\gamma]\leqslant 0, \tag{15}$$

$$B\,(\theta,\gamma,v)=E\big[\Delta_v g^{'}\,[\theta,\gamma]\,Q\,(\theta,\gamma,\gamma)+\Delta_v H_y^{'}\,[\theta,\gamma]\,\big]\Delta_v g\,[\theta,\gamma]\leqslant 0. \tag{16}$$

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении.

Теперь рассмотрим один частный случай, требующий отдельного изучения.

Пусть в уравнении (1)

$$\begin{gathered} f\,(t,x,z,y,u)=A_1\,(t,x)\,z+B_1\,(t,x)\,y+f_1\,(t,x,u)\,,\\ g\,(t,x,z,y,u)=A_2\,(t,x)\,z+B_2\,(t,x)\,y+f_2\,(t,x,u)\,. \end{gathered} \tag{17}$$

А минимизируемый функционал имеет следующий вид:

$$S\,(u)=E\left\{\int\limits_{x_0}^{x_1}C^{'}(x)z\,(t_1,x)\,dx+\int\limits_{t_0}^{t_1}F_2\,(t,y\,(t,x_1))\,dt\right\}. \tag{18}$$

Введем обозначения

$$\begin{gathered} K\,(t,\gamma,v)=V_{22}(t,x_1;t,\gamma)\Delta_{\overline{u}}g\,[t,\gamma]+\\ +\int\limits_{t_0}^{t}\left[\frac{\partial V_{21}(t,x_1;\tau,\gamma)}{\partial t}\Delta_v f\,[\tau,\gamma]+\frac{\partial V_{22}(t,x_1;\tau,\gamma)}{\partial t}\Delta_{\overline{u}}g\,[\tau,\gamma]\right]d\tau. \end{gathered} \tag{19}$$

Справедлива

Теорема 3. *Для оптимальности особого в смысле принципа максимума Понтрягина управления $u(t,x)$ в рассматриваемой стохастической задаче управления с распределенными параметрами* (1), (2), (17), (18) *необходимо, чтобы неравенство*

$$E\int\limits_{t_0}^{t_1}K\,(t,\gamma,v)\,\frac{\partial^2F_2\,(t,y\,(t,x_1))}{\partial y^2}K\,(t,\gamma,v)\,dt\geqslant 0$$

выполнялось для всех $\gamma\in[x_0,x_1)\,,\ v\,(t)\in U,\ t\in[t_0,t_1)\,.$

Доказательство теоремы 3 приведено в Приложении.

Отметим, что симметрический результат имеет место в случае критерия качества вида

$$S(u) = E\left\{ \int_{x_0}^{x_1} F_1(x, z(t_1, x))\, dx + \int_{t_0}^{t_1} D'(t) y(t, x_1)\, dt \right\}.$$

6. Заключение

В целях развития стохастического аналога метода приращений в рассматриваемой стохастической задаче оптимального управления системами гиперболических уравнений первого порядка построена формула приращения второго порядка функционала качества. На основе построенной формулы приращения доказано необходимое условие оптимальности типа принципа максимума Понтрягина. Далее с помощью специальных вариаций допустимого управления доказываются необходимые условия оптимальности особых (в смысле принципа максимума Понтрягина) управлений для рассматриваемой стохастической задачи управления с распределенными параметрами.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы. Из системы уравнений (5) с учетом (6) получим

$$\Delta z(t, x) = \int_{t_0}^{t} [f(\tau, x, \overline{z}, \overline{y}, \overline{u}) - f(\tau, x, z, y, u)] d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} [p(\tau, x, \overline{z}) - p(\tau, x, z)] \frac{\partial W_1(\tau, x)}{\partial \tau} d\tau,$$

$$\Delta y(t, x) = \int_{x_0}^{x} [g(t, s, \overline{z}, \overline{y}, \overline{u}) - f(t, s, z, y, u)] ds +$$

$$+ \int_{x_0}^{x} [q(t, s, \overline{z}) - q(t, s, z)] \frac{\partial W_2(t, s)}{\partial s} ds.$$

Отсюда переходя к норме и используя условие Липшица, а также принимая от обеих частей полученных неравенств математические ожидания, получим

$$E\|\Delta z(t,x)\| \leqslant E\left\{ \int_{t_0}^{t} \|\Delta_{\overline{u}} f[t,x]\| dt + L_1 \int_{t_0}^{t} (\|\Delta z(t,x)\| + \|\Delta y(t,x)\|)\, dt \right\},$$

$$E\|\Delta y(t,x)\| \leqslant E\left\{ \int_{x_0}^{x} \|\Delta_{\overline{u}} g[t,s]\| ds + L_2 \int_{x_0}^{x} (\|\Delta z(t,s)\| + \|\Delta y(t,s)\|)\, ds \right\}.$$

Применяя к последним двум неравенствам известную лемму Гронуолла–Вендроффа (см., например, [18]), имеем

$$
E\left\|\Delta z(t,x)\right\| \leqslant E\left\{\int\limits_{t_0}^{t}\|\Delta_{\overline{u}}f[t,x]\|dt + L_3\int\limits_{t_0}^{t}\left\|\Delta y\left(t,x\right)\right\|dt\right\}, \tag{П.1}
$$

$$
E\left\|\Delta y(t,x)\right\| \leqslant E\left\{\int\limits_{x_0}^{x}\|\Delta_{\overline{u}}g\left[t,s\right]\|ds + L_4\int\limits_{x_0}^{x}\left\|\Delta z\left(t,s\right)\right\|ds\right\}, \tag{П.2}
$$

где

$$
L_i = \text{const} > 0, \quad i = \overline{1,4}.
$$

Усиливая неравенства (П. 1), (П. 2) друг другом и снова применяя лемму Гронуолла–Вендроффа, получаем справедливость оценки (11) для $\|\Delta z(t,x)\|$ и оценку (12) для $\|\Delta y(t,x)\|$.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.

Считая, что $u\left(t,x\right)$ – фиксированное допустимое управление, его специальное приращение определим в виде

$$
\Delta u_\varepsilon\left(t,x\right) = \begin{cases} v - u\left(t,x\right), \ (t,x) \in D_\varepsilon = [\theta, \theta+\varepsilon) \times \left[\gamma, \gamma+\varepsilon^2\right), \\ \qquad 0, (t,x) \in D/D_\varepsilon. \end{cases} \tag{П.3}
$$

Здесь и в дальнейшем $(\theta,\gamma) \in [t_0,t_1) \times [x_0,x_1)$ – произвольная правильная точка управления $u\left(t,x\right)$, $v \in U$ – прозвольный вектор, а $\varepsilon > 0$ – произвольное, достаточно малое число.

Через $\left(\Delta z_\varepsilon\left(t,x\right), \Delta y_\varepsilon\left(t,x\right)\right)$ обозначим специальное приращение системы (1)–(2), соответствующее специальному приращению (П. 3) управления $u\left(t,x\right)$.

Используя оценки (11), (12) для $\left(\Delta z_\varepsilon\left(t,x\right), \Delta\ y_\varepsilon\left(t,x\right)\right)$, получаем

$$
E\left\|\Delta z_\varepsilon(t,x)\right\| \leqslant \begin{cases} 0, (t,x) \in D \setminus D_\varepsilon, \\ K\varepsilon, \ (t,x) \in D_\varepsilon, \end{cases}
$$

$$
E\left\|\Delta y_\varepsilon(t,x)\right\| \leqslant \begin{cases} 0, (t,x) \in D \setminus D_\varepsilon, \\ K\varepsilon, \ (t,x) \in D_\varepsilon. \end{cases}
$$

Учитывая эти оценки в формуле (10), убедимся в том, что остаточный член $\eta(\Delta u_\varepsilon\left(t,x\right))$ является величиной порядка $o\left(\varepsilon^4\right)$.

Следовательно,

$$\Delta S_{\varepsilon}(u) = E\left\{-\int\limits_{\theta}^{\theta+\varepsilon}\int\limits_{\gamma}^{\gamma+\varepsilon^2} \Delta_v H[t,x]\,dxdt -\right.$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\theta}^{\theta+\varepsilon}\int\limits_{\theta}^{\gamma+\varepsilon^2}\int\limits_{\theta}^{\theta+\varepsilon} \Delta_v f'[\tau,x]R(x,\tau,s)\,\Delta_v f[s,x]\,dsdxd\tau -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\theta}^{\theta+\varepsilon}\int\limits_{\gamma}^{\gamma+\varepsilon^2}\int\limits_{\gamma}^{\varepsilon^2} \Delta_v g'[\tau,x]Q(t,\tau,s)\,\Delta_v g[t,s]\,d\tau dsdt - \qquad (\text{П}.4)$$

$$-\int\limits_{\theta}^{\theta+\varepsilon}\int\limits_{\gamma}^{\gamma+\varepsilon^2}\left[\int\limits_{t}^{t_1}\Delta_v H_z'[\tau,x]\,V_{11}(\tau,x;t,x)\,dt\right]\Delta_v f[t,x]\,dxdt -$$

$$\left.-\int\limits_{\theta}^{\theta+\varepsilon}\int\limits_{\gamma}^{\gamma+\varepsilon^2}\left[\int\limits_{x}^{x_1}\Delta_v H_y'[t,s]\,V_{22}(t,s;t,x)\,ds\right]\Delta_v g[t,x]\,dxdt\right\} + o\left(\varepsilon^4\right).$$

Отсюда после применения теоремы о среднем и с учетом, что $\Delta S_{\varepsilon}(u) = S(u+\Delta u_{\varepsilon}) - S(u) \geqslant 0$, следует справедливость утверждения теоремы 1. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2.

С учетом (14) из разложения (П. 4) получим, что

$$\Delta S_{\varepsilon}(u) = S(u+\Delta u_{\varepsilon}) - S(u) =$$

$$= E\varepsilon^4\left[\Delta_v f'[\theta\,,\gamma]R(\gamma,\theta,\theta) + \Delta_v H_z'[\theta,\gamma]\right]\Delta_v f[\theta,\gamma] + o(\varepsilon^4) \geqslant 0.$$

Отсюда следует утверждение (15).

А если определить специальное приращение особого управления по формуле

$$u_{\varepsilon}(t,x) = \begin{cases} v - u(t,x),\ (t,x)\in D_{\varepsilon} = \left[\theta,\theta+\varepsilon^2\right)\times[\gamma,\gamma+\varepsilon) \\ 0,(t,x)\in D/D_{\varepsilon}, \end{cases}$$

то из разложения (9) следует, что вдоль особого в смысле принципа максимума Понтрягина процесса $(u(t,x), z(t,x), y(t,x))$ выполнилось условие (16). Таким образом, теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3.

В случае задачи (1), (2), (17), (18) из формул (7)–(9) соответственно следует, что

$$\Delta S\left(u\right)=-E\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_0}^{x_1}\Delta_{\overline{u}}H\left[t,x\right]dxdt+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\Delta y'\left(t,x_1\right)\frac{\partial^2 F_2\left(t,y\left(t,x_1\right)\right)}{\partial y^2}\Delta y\left(t,x_1\right)dt+\int\limits_{t_0}^{t_1}o_2\left(\left\|\Delta y\left(t,x_1\right)\right\|^2\right)dt,$$

$$\Delta z\left(t_1,x\right)=\int\limits_{t_0}^{t_1}V_{11}\left(t_1,x;\tau,x\right)\Delta_{\overline{u}}f\left[t,x\right]dt+$$

(П.5)

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x}\left[\frac{\partial V_{11}(t_1,x;\tau,s)}{\partial x}\Delta_{\overline{u}}f\left[t,s\right]+\frac{\partial V_{12}(t_1,x;\tau,s)}{\partial x}\Delta_{\overline{u}}g\left[t,s\right]\right]dsdt,$$

$$\Delta y(t,x_1)=\int\limits_{x_0}^{x_1}V_{22}\left(t,x_1;\tau,s\right)\Delta_{\overline{u}}g\left[t,s\right]ds+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x}\left[\frac{\partial V_{21}(t,x_1;\tau,s)}{\partial t}\Delta_{\overline{u}}f\left[t,s\right]+\frac{\partial V_{22}(t,x_1;\tau,s)}{\partial t}\Delta_{\overline{u}}g\left[t,s\right]\right]dsdt.$$

Специальное приращение управления $u\left(t,x\right)$ определим по формуле

$$\Delta u_\varepsilon\left(t,x\right)=\begin{cases}v(t)-u\left(t,x\right), & (t,x)\in D_\varepsilon=[t_0,t_1)\times[\gamma,\gamma+\varepsilon)\\ 0, (t,x)\in D\backslash D_\varepsilon, & \end{cases}$$

где $\varepsilon>0$ – произвольное достаточное малое число $v\left(t\right)\in U$, $\gamma\in\left[x_0,x_1\right)$. Тогда из (П. 5) следует, что при $(t,x)\in[t_0,t_1]\times[\gamma,x_1]$

$$\Delta y_\varepsilon(t,x_1)=\varepsilon\left[V_{22}\left(t,x_1;t,\gamma\right)\Delta_v g\left[t,\gamma\right]+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{t_0}^{t}\left[\frac{\partial V_{21}\left(t,x_1;\tau,s\right)}{\partial t}\Delta_v f\left[\tau,s\right]+\frac{\partial V_{22}\left(t,x_1;\tau,\gamma\right)}{\partial t}\Delta_{\overline{u}}g\left[\tau,\gamma\right]\right]d\tau+o\left(\varepsilon\right).\right.$$

Поэтому учитывая обозначение $K\left(t,\gamma,v\right)$, определяемое формулой (19), получим, что

$$\Delta S_\varepsilon\left(u\right)=-E\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{\gamma}^{\gamma+\varepsilon}\Delta_{v(t)}H\left[t,x\right]dxdt+$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon^2\int\limits_{t_0}^{t_1}K\left(t,\gamma,v\right)\frac{\partial^2 F_2\left(t,y\left(t,x_1\right)\right)}{\partial y^2}K\left(t,\gamma,v\right)dt+o\left(\varepsilon^2\right).$$

Из этого разложения вытекает утверждение теоремы 3. Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Волин Ю.М., Островский Г.М., Финкельштейн А.В.* Метод штрафных функций и принцип максимума Понтрягина в задачах оптимального управления // Управляемые системы. 1973. Вып. 11. С. 88–95.
2. *Волин Ю.М., Островский Г.М., Финкельштейн А.В.* Метод штрафных функций и условия оптимальности обобщенных решений с частными производными // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 12. С. 2246–2255.
3. *Васильев О.В.* К исследованию особого управления в одной системе с распределенными параметрами // Управляемые системы. 1976. Вып. 15. С. 3–15.
4. *Васильев О.В.* Принцип максимума Л.С. Понтрягина в теории оптимальных систем с распределенными параметрами. Новосибирск: Прикл. математика, 1978.
5. *Мансимов К.Б.* К теории необходимых условий оптимальности в одной задаче с распределенными параметрами // ЖВМ и МФ. 2001. Т. 41. № 10. С. 1505–1520.
6. *Мансимов К.Б., Марданов М.Дж.* Качественная теория оптимального управления системами Гурса–Дарбу. Баку: «Элм», 2010.
7. *Мансимов К.Б., Масталиев Р.О.* Необходимые условия оптимальности первого порядка в одной стохастической задаче управления с распределенными параметрами/ВСПУ-2024. М.: ИПУ РАН, 17–20 июня 2024. С. 547–549.
8. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Принцип максимума в теории оптимального управления. URSS, 2011.
9. *Prato G.D., Tubaro L.* Stochastic partial differential equations and applications. Springer-Verlag, 1985.
10. *Oksendal B.* Optimal control of stochastic partial differential equations // Stochastic Analysis and Applications. 2005. V. 23. P. 165–179.
11. *Бункин Н.Ф., Морозов А.Н.* Стохастические системы в физике и технике. М.: МГТУ, 2011.
12. *Qi Lu, Xu Zhang.* Control Theory for Stochastic Distributed Parameter Systems, an Engineering Perspective // Annual Reviews in Control. 2021. V. 51. P. 268–330.
13. *Qi Lu, Xu Zhang.* Mathematical control theory for stochastic partial differential equations. Cham, Switzerland, Springer, 2021.
14. *Prato G.D., Tubaro L.* Stochastic Partial Differential Equations and Applications. New York: Marcel Dekker, 2002.
15. *Мансимов К.Б., Масталиев Р.О.* О представлении решения краевой задачи Гурса для стохастических гиперболических уравнений с частными производными первого порядка // Изв. Иркут. гос. ун-та. Серия Математика. 2023. Т. 45. С. 145–151.
16. *Новоженов М.М., Сумин В.И., Сумин М.И.* Методы оптимального управления системами математической физики. Горький: Изд-во ГГУ, 1986.
17. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Особые оптимальные управления. М.: URSS, 2011.
18. *Плотников В.И., Сумин В.И.*Оптимизация объектов с распределенными параметрами, описываемых системами Гурса–Дарбу // ЖВМ и матем. физ. 1972. Т. 12. № 1. С. 61–77.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Кушнером.

Поступила в редакцию 16.08.2024
После доработки 20.09.2025
Принята к публикации 23.09.2025