Нелинейные системы

С.В. АКМАНОВА, канд. пед. наук (svet.akm_74@mail.ru)
(Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова)

ПОСТРОЕНИЕ ДОПУСТИМЫХ И ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Установлены достаточные признаки полной управляемости, существования допустимых и оптимального управлений для нелинейных непрерывно-дискретных (гибридных) динамических систем с постоянным шагом дискретизации, непрерывная и дискретная части которых функционируют в одном контуре. Представлены алгоритмы построения допустимых программных управлений для таких систем, а также алгоритм построения оптимального программного управления. Приведены примеры, подтверждающие эффективность представленных алгоритмов в решении задач управления нелинейными гибридными системами с постоянным шагом дискретизации на конечном промежутке времени.

Ключевые слова: непрерывно-дискретная система, гибридная система, дискретная система, допустимое управление, допустимый процесс, оптимальное управление, оптимальный процесс.

DOI: 10.7868/S2413977726010046

1. Введение и постановка задачи

Решение задач управления нелинейными динамическими системами является актуальным во многих сферах деятельности, поскольку данные системы служат математическими моделями различных технических, механических, экономических и других процессов (см., например, [1–4]).

В статье рассматриваются задачи управления динамической системой, описываемой совокупностью дифференциальных и разностных уравнений, при этом в состав последних входит управление, а непрерывная и дискретная части системы функционируют в одном контуре. Такие системы принято называть непрерывно-дискретными или гибридными динамическими системами управления [2, 5].

Итак, рассматривается нелинейная непрерывно-дискретная система управления

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t_k)), \quad t_k \leqslant t < t_{k+1}, \\ y(t_{k+1}) = g(x(t_{k+1}), y(t_k), u(t_k)), \quad k = \overline{0, l-1}, \end{cases}$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \tag{2}$$

где $x(t) \in R^n$, $y(t_k) \in R^m$ – векторы состояний системы (1), характеризующие поведение соответственно непрерывной и дискретной частей данной системы; $u(t_k) \in R^q$ – вектор управления; моменты времени t_k задают на отрезке $[t_0, t_l]$ равномерную сетку с постоянным шагом $h = t_{k+1} - t_k > 0$ и узлами $t_k = t_0 + kh$, $0 \leqslant t_0 < t_l$, $k = 0, 1, \ldots, l$ ($l \in N$ – фиксированное число); функции $f(x, y)$ и $g(x, y, u)$ определены и непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных на множествах $R^n \times R^m$ и $R^n \times R^m \times R^q$ соответственно, при этом

$$f(0,0) = 0, \quad g(0,0,0) = 0, \tag{3}$$

т.е. при $u = 0$ система (1) имеет нулевую точку равновесия $x = 0$, $y = 0$.

Согласно (1) и начальным условиям (2) на каждом отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ при выбранном управлении u (т.е. при заданной конечной последовательности $u(t_k)$, $k = \overline{0, l-1}$) находятся решение $x = \varphi_k(t)$ задачи Коши $x'(t) = f(x(t), y_k)$, $x(t_k) = x_k$, а затем векторы $x_{k+1} = \varphi_k(t_{k+1})$, $y_{k+1} = g(x_{k+1}, y_k, u_k)$, где $y_k = y(t_k)$, $u_k = u(t_k)$, при этом $y(t) = y(t_k)$ при $t \in [t_k, t_{k+1})$. Тогда состоянием системы (1) в момент времени t назовем пару $z(t) = (x(t), y(t))$, а значит, решением данной системы с начальными данными $z_0 = (x_0, y_0)$ при выбранном управлении u будет являться функция

$$z(t) = (x(t), y(t)) = \begin{cases} (\varphi_0(t), y_0), & t_0 \leqslant t < t_1, \\ (\varphi_1(t), y_1), & t_1 \leqslant t < t_2, \\ \quad\vdots & \\ (\varphi_{l-1}(t), y_{l-1}), & t_{l-1} \leqslant t < t_l, \\ (\varphi_{l-1}(t), y_l), & t = t_l. \end{cases} \tag{4}$$

В решении (4) компонента $x(t)$ непрерывна при всех $t \in [t_0, t_l]$, непрерывно дифференцируема на каждом интервале (t_k, t_{k+1}), $k = \overline{0, l-1}$, но не обязательно дифференцируема в моменты времени $t = t_k$, $k = \overline{0, l}$; компонента $y(t)$ кусочно-постоянна и меняет свои значения только в моменты времени $t = t_k$, $k = \overline{0, l}$.

Примером системы (1) может служить математическая модель движения летательного аппарата на плоскости [4].

Ставятся следующие задачи: 1) задача перевода системы (1) из заданного начального состояния $z(t_0) = z^{\{0\}}$ в заданное конечное состояние $z(t_l) = z^{\{1\}}$ ($t_l = t_0 + lh$) при помощи подходящего управления; 2) задача оптимизации, т.е. поиска управления, переводящего систему (1) из начального состояния $z(t_0) = z^{\{0\}}$ в конечное состояние $z(t_l) = z^{\{1\}}$ и минимизирующего функционал качества процесса управления

$$I(u) = \sum_{k=0}^{l-1} u^{\top}(t_k) u(t_k). \tag{5}$$

Решение поставленных задач связано с шагом сетки $h > 0$, так как от значения h зависит решение вопроса о существовании управления, переводящего систему (1) из начального состояния $z^{\{0\}}$ в конечное состояние $z^{\{1\}}$, поэтому примем следующие определения.

Определение 1. Гибридная система (1) *называется полностью управляемой при заданном $h > 0$, если для любых векторов $z^{\{0\}}$, $z^{\{1\}} \in R^{n+m}$ существует управление $u(t_k)$, $k = \overline{0, l-1}$, такое что для решения $z = z(t)$ системы* (1) *с начальным условием $z(t_0) = z^{\{0\}}$ выполняется равенство $z(t_l) = z^{\{1\}}$.*

Определение 2. Управление $u(t_k)$, $k = \overline{0, l-1}$, удовлетворяющее системе (1) *при заданном $h > 0$ и переводящее эту систему из начального состояния $z(t_0) = z^{\{0\}}$ в конечное состояние $z(t_l) = z^{\{1\}}$, называется допустимым* (*программным*) *управлением системы (1) при $h > 0$.*

Определение 3. Допустимое управление $u(t_k)$, $k = \overline{0, l-1}$, системы (1) *при заданном $h > 0$, минимизирующее функционал* (5), *называется оптимальным* (*программным*) *управлением системы* (1) *при $h > 0$.*

Заметим, что в [6, 7] автором были установлены необходимые и достаточные признаки полной управляемости, достаточные признаки и способы стабилизации для нелинейной гибридной системы, заданной равенствами (1), но функционирующей на бесконечном промежутке времени, т.е. при $k = 0, 1, 2, \ldots$, а значит, отличающейся от системы (1), которая действует на конечном промежутке времени. Поэтому понятие полностью управляемой системы для системы (1) и системы в [6, 7] определяется по-разному.

Обобщениями системы (1) служат гибридные системы, рассмотренные в [5, 8], где ставились задачи оптимизации со свободным конечным состоянием, при этом в [5] на основе принципа оптимальности Кротова В.Ф. [9], примененного совместно к совокупности дифференциальных и разностных уравнений, установлены достаточные условия оптимальности управления нелинейной системой, а в [8] получены необходимые условия оптимальности управления, позволяющие решать задачи со свободными моментами переключений, которые могут выбираться при оптимизации процесса управления. Поставленная же задача оптимизации для системы (1) предполагает фиксированным конечное состояние системы, при этом моменты переключений и их количество заранее известны при заданном $h > 0$, кроме того, непрерывная подсистема системы (1) не содержит вектор управления, поэтому подходы к оптимизации, представленные в [5, 8], неприемлемы для решения задачи оптимизации системы (1), к тому же задача перевода гибридных систем в [5, 8] из одного состояния в другое на основе построения допустимых управлений не рассматривается.

Отметим при этом, что в научной литературе освещены вопросы построения допустимых программных управлений для нелинейных дискретных систем с функционалом качества (5) [10, 11], а также различные аспекты построения допустимого и оптимального управлений для нелинейных непрерывных систем по первому приближению [12–16], вопросы оптимального управления дискретными системами [17, 18], вопросы оптимальности для непрерывных и дискретных процессов [9, 19, 20]. Имеются также исследования по оптимальному управлению для некоторых видов нелинейных гибридных систем (см., например, [21–24]), однако в них, как правило, исследуются системы со свободным конечным состоянием, при этом состояния таких систем характеризуются только одним фазовым вектором, меняющимся между моментами переключений непрерывно, а в моменты переключений – дискретно, в отличие от системы (1), в которой состояние системы характеризуется набором из двух различных фазовых векторов, один из которых меняется непрерывно согласно дифференциальным уравнениям, а другой – дискретно с учетом разностных уравнений системы, содержащих управление. Таким образом вопросы, связанные с решением поставленных задач, остаются открытыми.

Для решения этих задач выполняется переход от системы (1) к равносильной, в естественном смысле, нелинейной дискретной системе [7]. Перевод равносильной дискретной системы из начального состояния в конечное основывается на итерационном процессе построения допустимого управления, который может быть сходящимся или расходящимся, поэтому рассматриваются два подхода к построению допустимого управления для нелинейной гибридной системы (1).

Основными задачами в настоящей статье являются установление достаточных признаков допустимости и оптимальности управления нелинейной гибридной системой (1) и построение соответствующих допустимых и оптимального управлений для этой системы.

Новизна проведенного исследования состоит в следующем:

1) установлены достаточные признаки полной управляемости системы (1), выполнение которых обеспечивает существование допустимых программных управлений для данной системы, переводящих ее из любого начального состояния в любое конечное состояние на отрезке времени $[t_0, t_l]$;

2) установлен достаточный признак существования оптимального управления для системы (1);

3) представлены алгоритмы построения допустимых и оптимального управлений для системы (1).

2. Переход к дискретной системе. Критерий полной управляемости системы (1)

Пусть $x(t_k) = x_k$, $y(t_k) = y_k$, $u(t_k) = u_k$, тогда, используя [7] и соотношения (3), выполним переход от системы (1) к равносильной нелинейной дискретной системе

$$\begin{cases} x_{k+1} = e^{A_1 h} x_k + A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I)B_1 y_k + \varepsilon(x_k, y_k; h), \quad k = \overline{0, l-1}, \\ y_{k+1} = A_2 e^{A_1 h} x_k + (A_2 A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I)B_1 + B_2) y_k + C u_k + \delta(x_k, y_k, u_k; h), \end{cases}$$

где $A_1 = f'_x(0,0)$, $B_1 = f'_y(0,0)$, $A_2 = g'_x(0,0,0)$, $B_2 = g'_y(0,0,0)$, $C = g'_u(0,0,0)$ – матрицы соответствующих размеров и $det A_1 \neq 0$, при этом

$$f(x,y) = A_1 x + B_1 y + a(x,y), \quad g(x,y,u) = A_2 x + B_2 y + Cu + b(x,y,u),$$

а гладкие нелинейности $a(x,y)$ и $b(x,y,u)$ начинаются с квадратичных по x, y и x, y, u слагаемых соответственно, удовлетворяя условиям $a(x,y) = o(\|x\| + \|y\|)$ при $\|x\| + \|y\| \to 0$, $b(x,y,u) = o(\|x\| + \|y\| + \|u\|)$ при $\|x\| + \|y\| + \|u\| \to 0$ (здесь и далее запись $\|\cdot\|$ означает евклидову норму вектора в соответствующем пространстве вещественных чисел или норму матрицы),

$$\varepsilon(x_k, y_k; h) = e^{(t_k+h)A_1} \int\limits_{t_k}^{t_k+h} e^{-sA_1} a(p(s, x_k, y_k), y_k) ds, \tag{6}$$

где $x = p(t, x_k, y_k)$ – решение задачи Коши $x' = A_1 x + B_1 y_k + a(x, y_k)$, $x(t_k) = x_k$;

$$\delta(x_k, y_k, u_k; h) = A_2 \varepsilon(x_k, y_k; h) + b(x_{k+1}, y_k, u_k). \tag{7}$$

Компактная запись равносильной нелинейной дискретной системы имеет вид

$$z_{k+1} = A(h) z_k + B u_k + \xi(z_k, u_k, h), \quad k = \overline{0, l-1}, \tag{8}$$

здесь

$$z_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} O \\ C \end{bmatrix}, \quad \xi(z_k, u_k, h) = \begin{bmatrix} \varepsilon(x_k, y_k; h) \\ \delta(x_k, y_k, u_k; h) \end{bmatrix},$$

$A(h)$ – блочная (порядка $n + m$) матрица:

$$A(h) = \begin{bmatrix} e^{A_1 h} & A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I) B_1 \\ A_2 e^{A_1 h} & A_2 A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I) B_1 + B_2 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Система (8) при $u = 0$ имеет нулевое положение равновесия, при этом функция $\xi(z,u,h)$ удовлетворяет условию $\xi(z,u,h) = o(\|z\| + \|u\|)$ при $\|z\| + \|u\| \to 0$ [7, 25].

Определение 4. Дискретная система (8) *называется полностью управляемой при заданном $h > 0$, если для любых состояний $z^{\{0\}}$, $z^{\{1\}} \in R^{n+m}$ существует управление u_k, $k = \overline{0, l-1}$, такое что для решения z_k, $k = \overline{0, l}$, системы* (8) *с начальным условием $z_0 = z^{\{0\}}$ выполняется равенство $z_l = z^{\{1\}}$, где $z_l = z(t_l)$.*

Тогда имеет место

Теорема 1. Гибридная система (1) *полностью управляема при заданном $h > 0$ в том и только в том случае, если дискретная система* (8) *полностью управляема при $h > 0$.*

Доказательство теоремы 1 и других основных утверждений вынесено в Приложение.

3. Оптимальное управление для линейной гибридной системы

Пусть система первого приближения нелинейной дискретной системы (8) полностью управляема при $h = h_0 > 0$, т.е. полностью управляема дискретная система

$$z_{k+1} = A_0 z_k + B u_k, \quad k = \overline{0, l-1}, \tag{10}$$

где, с учетом (9), $A_0 = A(h_0)$. Тогда согласно критерию полной управляемости линейных дискретных систем [10, 11] выполняется условие

$$\operatorname{rank}[B, A_0 B, A_0^2 B, \ldots, A_0^{n+m-1} B] = n + m. \tag{11}$$

Система (10) равносильна, в естественном смысле [7], линейной гибридной системе

$$\begin{cases} x'(t) = A_1 x(t) + B_1 y(t_k), \quad t_k \leqslant t < t_{k+1}, \quad t_{k+1} - t_k = h_0, \\ y(t_{k+1}) = A_2 x(t_{k+1}) + B_2 y(t_k) + C u(t_k), \quad k = \overline{0, l-1}. \end{cases} \tag{12}$$

Тогда на основании [11] справедлива

Теорема 2. Если система (10) *полностью управляема, то существует оптимальное управление* $u^{(0)}(t_k) = u_k^{(0)}$, *переводящее гибридную систему* (12) *из любого начального состояния* $z(t_0) = z^{\{0\}}$ *в любое конечное состояние* $z(t_l) = z^{\{1\}}$ *и минимизирующее функционал* (5), *при этом*

$$u_k^{(0)} = S^\top(k) F^+(0) d(0, z^{\{0\}}), \quad S(k) = A_0^{l-k-1} B, \quad k = \overline{0, l-1},$$

$$d(0, z^{\{0\}}) = z^{\{1\}} - A_0^l z^{\{0\}}, \quad F(0) = \sum_{k=0}^{l-1} S(k) S^\top(k), \tag{13}$$

$F^+(0)$ – *матрица, псевдообратная к матрице* $F(0)$.

Построенному оптимальному управлению системы (12) соответствует оптимальное движение $z^{(0)}(t) = (x^{(0)}(t), y^{(0)}(t))$, $t \in [t_0, t_l]$ этой системы и оптимальное движение $z_k^{(0)} = [x_k^{(0)} \;\; y_k^{(0)}]^\top$ $(k = \overline{0, l})$ системы (10), при этом $x^{(0)}(t_k) = x_k^{(0)}$, $y^{(0)}(t_k) = y_k^{(0)}$.

Пример 1. Для линейной гибридной системы

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t_k), \quad t_k \leqslant t < t_{k+1}, \\ y(t_{k+1}) = -x(t_{k+1}) + y(t_k) + 3u(t_k), \quad k = 0, 1, 2 \end{cases} \tag{14}$$

построить оптимальное управление $u^{(0)}(t_k)$, переводящее эту систему за три шага ($l = 3$) из состояния $z^{\{0\}} = [2 \;\; 1]^\top$ в состояние $z^{\{1\}} = [1 \;\; 2]^\top$.

Гибридная система (14) равносильна линейной дискретной системе

$$\begin{cases} x_{k+1} = e^h x_k + 2(e^h - 1) y_k, \\ y_{k+1} = -e^h x_k + (3 - 2e^h) y_k + 3u_k, \quad k = 0, 1, 2, \end{cases}$$

которая при $h_0 = ln2$ имеет вид (10) с матрицами $A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, и для нее условие (11) выполняется, т.е. она является полностью управляемой при $h_0 = ln2$. Используя формулы (13), найдем:

$$S(0) = A_0^2 B = [6 \quad -9]^\top, \quad S(1) = A_0 B = [6 \quad -3]^\top, \quad S(2) = B = [0 \ \ 3]^\top,$$
$$d(0, z^{\{0\}}) = z^{\{1\}} - A_0^3 z^{\{0\}} = [11 \quad -1]^\top,$$
$$F(0) = \sum_{k=0}^{2} S(k) S^\top(k) = \begin{bmatrix} 72 & -72 \\ -72 & 99 \end{bmatrix}, \ F^+(0) = F^{-1}(0) = \begin{bmatrix} 11/216 & 1/27 \\ 1/27 & 1/27 \end{bmatrix}.$$

Тогда система (14) при $t_{k+1} - t_k = h_0$ и $t_0 = 0$ имеет оптимальное управление $u^{(0)}(t_0) = u^{(0)}(0) = -7/36$, $u^{(0)}(t_1) = u^{(0)}(ln2) = 73/36$, $u^{(0)}(t_2) = u^{(0)}(ln4) = 10/9$ и соответствующее ему оптимальное движение

$$z(t) = (x(t), y(t)) = \begin{cases} (4e^t - 2, \ \ 1), & 0 \leqslant t < ln2, \\ \left(-\dfrac{31}{12}e^t + \dfrac{67}{6}, -\dfrac{67}{12}\right), & ln2 \leqslant t < ln4, \\ \left(\dfrac{1}{24}e^t + \dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right), & ln4 \leqslant t < ln8, \\ \left(\dfrac{1}{24}e^t + \dfrac{2}{3}, 2\right), & t = ln8, \end{cases}$$

которое при $t_0 = 0$, $t_1 = ln2$, $t_2 = ln4$, $t_3 = ln8$ совпадает с решением равносильной дискретной системы $z_0 = [2 \ \ 1]^\top$, $z_1 = [6 \quad -67/12]^\top$, $z_2 = [5/6 \quad -1/3]^\top$, $z_3 = [1 \ \ 2]^\top$, т.е. построенное управление переводит систему (14) за три шага из состояния $z^{\{0\}}$ в состояние $z^{\{1\}}$ и, как следует из теоремы 2, минимизирует функционал (5).

4. Полная управляемость систем (1) и (8) на замкнутом подмножестве евклидова пространства. Особенности нелинейности $\boldsymbol{\xi(z, u, h)}$

Рассмотрим вопрос взаимосвязи полной управляемости систем (1) и (8) при некотором $h = h_0 > 0$ на замкнутых подмножествах евклидова пространства R^{n+m}.

Пусть $S \subset R^{n+m}$ – множество состояний системы (1). Введем определения.

Определение 5. Система (1) *называется полностью управляемой на множестве S при $h = h_0 > 0$, если из любого состояния $z^{\{0\}} \in S$ достижимы все состояния $z^* \in S$.*

Определение 6. Состояние $z^* \in S$ системы (1) *при $h = h_0 > 0$ называется достижимым из состояния $z^{\{0\}} \in S$, если существует допустимое управление $u(t_k)$, $k = \overline{0, l-1}$, такое, что для решения $z = z(t)$ системы* (1) *с начальным условием $z(t_0) = z^{\{0\}}$ выполняются условия:*
1) $z(t) \in S$ при $t \in [t_0, t_l]$; 2) $z(t_l) = z^*$, где $t_l = t_0 + lh_0$.

Аналогичные определения можно сформулировать для нелинейной дискретной системы (8), учитывая ее специфику.

Будем полагать, что при $h = h_0 > 0$ система (8) полностью управляема на множестве $K \subset R^{n+m}$, а система (1) полностью управляема на множестве $S \subset R^{n+m}$.

Тогда справедлива

Т е о р е м а 3. *Если при $h = h_0 > 0$ система* (1) *полностью управляема на множестве S, а система* (8) *полностью управляема на множестве K, то $K \subset S$.*

Пусть $U_0 = S_0 \times S^0$, где S_0 и S^0 – замкнутые подмножества окрестностей точек $z = 0$ и $u = 0$ соответственно. Учитывая особенности функций $f(x, y)$, $g(x, y, u)$ в системе (1), можно доказать, что при любом $h > 0$ справедлива

Т е о р е м а 4. *Нелинейность $\xi(z, u, h)$ в системе* (8) *удовлетворяет условию Липшица по переменным z, u в любом замкнутом подмножестве U_0 окрестности точки $z = 0$, $u = 0$, т.е.*

$$\left\|\xi\left(z_k^{(1)}, u_k^{(1)}, h\right) - \xi\left(z_k^{(2)}, u_k^{(2)}, h\right)\right\| \leqslant L\left(\left\|z_k^{(1)} - z_k^{(2)}\right\| + \left\|u_k^{(1)} - u_k^{(2)}\right\|\right), \tag{15}$$

где $(z_k^{(i)}, u_k^{(i)}) \in U_0$, $k = \overline{0, l-1}$, $i = 1, 2$, при этом постоянная Липшица L достаточно мала, если мал диаметр подмножества U_0.

5. Существование и построение допустимого управления для системы (1)

Пусть система (10) полностью управляема. Поставим задачу построения допустимого управления $u(t_k)$, $k = \overline{0, l-1}$, переводящего систему (1) из заданного начального состояния $z(t_0) = z^{\{0\}} \in R^{n+m}$ в заданное конечное состояние $z(t_l) = z^{\{1\}} \in R^{n+m}$ и выясним вопрос полной управляемости системы (1) при $h = h_0 > 0$.

Пусть

$$m = \max\left\{\max_{0\leqslant k\leqslant l-1} \|A_0^{l-k-1}B\| \max_{0\leqslant k\leqslant l-1} \|S^\top(k)F^+(0)\| \max_{0\leqslant k\leqslant l-1} \|A_0^{l-k-1}\|, \right.$$
$$\left. \max_{0\leqslant k\leqslant l-1} \|A_0^{l-k-1}\|, \max_{0\leqslant k\leqslant l-1} \|S^\top(k)F^+(0)\| \max_{0\leqslant k\leqslant l-1} \|A_0^{l-k-1}\|\right\}$$

и в системе (8) при $h = h_0 > 0$ функция $\xi(z, u, h)$ удовлетворяет неравенству (15) на множестве $R^{n+m} \times R^q$, при этом постоянная Липшица L подчиняется неравенству

$$0 < L < \frac{1}{ml(l+2)}, \tag{16}$$

тогда имеет место

Теорема 5. Пусть система (10) *полностью управляема и функция* $\xi(z,u,h_0)$ *в системе* (8) *удовлетворяет условию Липшица по переменным* z, *и на множестве* $R^{n+m}\times R^q$, *при этом постоянная Липшица отвечает условию* (16). *Тогда гибридная система* (1) *является полностью управляемой при* $h=h_0$.

Рассмотрим вновь замкнутое подмножество $U_0=S_0\times S^0$ окрестности точки $z=0$, $u=0$, тогда согласно разделу 4 приходим к следующему утверждению.

Следствие 1. Пусть система (10) *полностью управляема на множестве* S_0 *и постоянная Липшица для функции* $\xi(z,u,h_0)$ *системы* (8) *на множестве* U_0 *удовлетворяет неравенству* (16). *Тогда для гибридной системы* (1) *при* $h=h_0$ *существует допустимое программное управление, переводящее ее из любого состояния* $z(t_0)=z^{\{0\}}\in S_0$ *в любое состояние* $z(t_l)=$ $=z^{\{1\}}\in S_0$.

Исходя из доказательства теоремы 5, опишем алгоритм построения допустимого программного управления для системы (1) при $h=h_0>0$.

Алгоритм 1.

1. Убедиться в полной управляемости системы (10), т.е. проверить условие (11).

2. Построить для системы (10) согласно формулам (13) оптимальное управление $u_k^{(0)}$, $k=\overline{0,l-1}$, и соответствующее ему оптимальное движение $z_k^{(0)}$, $k=\overline{0,l}$.

3. Применить метод простой итерации для построения последовательностей оптимальных управлений $\{u_k^{(q)}\}$ и оптимальных движений $\{z_k^{(q)}\}$ систем

$$z_{k+1}^{(q)}=A_0z_k^{(q)}+Bu_k^{(q)}+\xi\left(z_k^{(q-1)},u_k^{(q-1)},h_0\right),\quad k=\overline{0,l-1},\quad q=1,2,\ldots,$$

где $z_k^{(0)}$, $u_k^{(0)}$ из п. 2, используя формулы (П.2)–(П.4) (см. Приложение).

4. Найти допустимое программное управление системы (1) при $h=h_0>0$:

$$u^*(t_k)=u_k^*=\lim_{q\to\infty}u_k^{(q)},\quad k=\overline{0,l-1}.$$

Заметим, что в малой окрестности точки $x=0$, $y=0$, $u=0$ условие (16) для функции $\xi(z,u,h_0)$ заведомо выполняется (см. теорему 4), поэтому для системы (1) при $h=h_0>0$ всегда можно построить допустимое управление, если состояния $z^{\{0\}}$, $z^{\{1\}}$ находятся в малой окрестности точки $x=0$, $y=0$ и выполняется условие первого пункта алгоритма 1.

Пример 2. Для нелинейной гибридной системы

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t)=x(t)+2y(t_k),\quad t_k\leqslant t<t_{k+1},\\ y(t_{k+1})=-x(t_{k+1})+y(t_k)+3u(t_k)+x(t_{k+1})y(t_k),\quad k=0,1,2\end{array}\right.\tag{17}$$

построить допустимое программное управление, переводящее данную систему за три шага ($l=3$) из состояния $z^{\{0\}}=[2\ \ 1]^\top$ в состояние $z^{\{1\}}=[1\ \ 2]^\top$.

Система первого приближения равносильной нелинейной дискретной системы при $h_0 = ln2$ полностью управляема и имеет следующее оптимальное управление: $u_0^{(0)} = -7/36$, $u_1^{(0)} = 73/36$, $u_2^{(0)} = 10/9$ и соответствующее ему движение: $z_0^{(0)} = [2 \;\; 1]^\top$, $z_1^{(0)} = [6 \;\; -67/12]^\top$, $z_2^{(0)} = [5/6 \;\; -1/3]^\top$, $z_3^{(0)} = [1 \;\; 2]^\top$ (см. пример 1).

Равносильная системе (17) при $h = h_0$ дискретная система имеет вид

$$z_{k+1} = A_0 z_k + Bu_k + \xi(z_k, u_k, h_0), \quad k = 0, 1, 2,$$

где

$$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \; \xi(z_k, u_k, h_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2x_k y_k + 2y_k^2 \end{bmatrix}.$$

Тогда, применяя алгоритм 1, получим: на 49-ой итерации с точностью до 10^{-15} итерационный процесс сходится к управлению:

$u^*(t_0) = -1{,}421310674166737, \quad u^*(t_1) = 7{,}208203932499369,$

$u^*(t_2) = 4{,}314757303333053.$

Для сравнения: при переводе системы (17) при $h = h_0$ из состояния $z^{\{0\}} = [0{,}1 \;\; -0{,}02]^\top$ в состояние $z^{\{1\}} = [0{,}03 \;\; 0{,}2]^\top$ за три шага итерационный процесс с точностью до 10^{-15} сходится на 11-ой итерации, значит, если состояния $z^{\{0\}}$ и $z^{\{1\}}$ системы (17) находятся в окрестности точки $x = 0$, $y = 0$, то итерационный процесс сходится быстрее.

Однако при переводе системы (17) при $h = h_0$ из состояния $z^{\{0\}} = [-2 \;\; 5]^\top$ в состояние $z^{\{1\}} = [3 \;\; 4]^\top$ за три шага итерационный процесс расходится.

Рассмотрим вопросы существования и построения допустимого программного управления системы (1) в случае, когда условия теоремы 5 не выполняются. Для этого введем вспомогательную систему

$$z_{k+1} = A_0 z_k + Bu_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{18}$$

отличающуюся от системы (10) областью изменения k, и будем полагать, что эта система полностью управляема [7], что выполнимо, если полностью управляема система (10) ([26], с. 524).

6. Существование и построение допустимого управления для системы (1) с учетом стабилизации системы (18)

Согласно [10] итерационный процесс построения допустимого управления системы (8) при $h = h_0 > 0$ сходится, если функция $\xi(z, u, h_0)$ удовлетворяет глобальному условию Коши–Липшица по переменным z, u, при этом постоянная Липшица L достаточно мала. Невыполнение этого требования может привести к появлению быстрорастущих движений, стремящихся с большой скоростью к бесконечности, тогда итерационный процесс будет расходиться, что подтверждает анализ системы (17) по переводу ее из состояния $z^{\{0\}} = [-2\ \ 5]^\top$ в состояние $z^{\{1\}} = [3\ \ 4]^\top$ за три шага.

Одним из способов улучшения сходимости итерационного процесса служит предварительная стабилизация [27] системы, задаваемой равенством (8) при $h = h_0 > 0$, или, что то же самое, системы, задаваемой равенствами (1) при $h = h_0 > 0$, если полагать, что в этих системах $k = 0, 1, 2, \ldots$ [7]. Стабилизация любой из этих систем сводится к стабилизации полностью управляемой системы (18), так как указанные три системы имеют одинаковое стабилизирующее управление [7].

Построим стабилизирующее управление $w(z_k) = Dz_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots,\ D$ – постоянная матрица размера $q \times (n+m)$ системы (18), при котором начальное $z(t_0) = z^{\{0\}}$ и конечное $z(t_l) = z^{\{1\}}$ состояния попадают в область притяжения положения равновесия $z = 0$ системы

$$z_{k+1} = Az_k + Bv_k + \xi(z_k, Dz_k + v_k, h_0), \quad k = \overline{0, l-1} \tag{19}$$

при $v_k \equiv 0$, где $A = A_0 + BD$, $v_k \in R^q$ – вектор управления, что обеспечивает существование допустимого управления системы (8) при $h = h_0$ [10].

Пусть функция $\xi(z, Dz+v, h_0)$ в системе (19) удовлетворяет условию Липшица по переменным z, $Dz+v$ на множестве $R^{n+m} \times R^q$. Если найдена оценка постоянной Липшица L для функции $\xi(z, Dz+v, h_0)$ на $R^{n+m} \times R^q$ (см., например, [28]), то сравним ее с условием

$$0 < L < \frac{1}{ml(1 + (\|D\| + 1)(l+1))}, \tag{20}$$

где

$$m = \max\Bigg\{ \max_{0\leqslant k\leqslant l-1} \|S^\top(k)F^+(0)\| \max_{0\leqslant k\leqslant l-1} \|A^{l-k-1}\|, \max_{0\leqslant k\leqslant l-1} \|A^{l-k-1}\|,$$
$$\max_{0\leqslant k\leqslant l-1} \|S^\top(k)F^+(0)\| \max_{0\leqslant k\leqslant l-1} \|A^{l-k-1}\| \max_{0\leqslant k\leqslant l-1} \|A^{l-k-1}B\| \Bigg\},$$
$$S(k) = A^{l-k-1}B,$$

поскольку имеет место

Т е о р е м а 6. *Пусть система* (18) *полностью управляема и стабилизирующее управление* $w(z_k) = Dz_k$ *системы* (18) *выбрано так, что постоянная Липшица для функции* $\xi(z, Dz+v, h_0)$ *в системе* (19) *удовлетворяет условию* (20) *при* $(z, Dz+v) \in R^{n+m} \times R^q$. *Тогда гибридная система* (1) *является полностью управляемой при* $h = h_0$, *и допустимое управление* $u^*(t_k)$, *переводящее ее из любого состояния* $z(t_0) = z^{\{0\}}$ *в любое состояние* $z(t_l) = z^{\{1\}}$, *определяется равенством*

$$u^*(t_k) = w(z^*(t_k)) + v^*(t_k), \quad k = \overline{0, l-1},$$

где $v^*(t_k) = v_k^*$ *и* $z^*(t_k) = z_k^*$ *– допустимое управление и соответствующее ему движение системы* (19).

В таком случае, исходя из доказательства теоремы 6, составим следующий алгоритм построения допустимого управления для системы (1) при $h = h_0 > 0$.

Алгоритм 2.

1. Убедиться в полной управляемости системы (18) и построить стабилизирующее управление $w(z_k) = Dz_k$ для этой системы.

2. Построить для системы $z_{k+1} = Az_k + Bv_k$, где $A = A_0 + BD$, $k = \overline{0, l-1}$, согласно формулам (13) оптимальное управление $v_k^{(0)}$, $k = \overline{0, l-1}$, и соответствующее ему оптимальное движение $z_k^{(0)}$, $k = \overline{0, l}$.

3. Применить метод простой итерации для построения последовательностей оптимальных управлений $\{v_k^{(q)}\}$ и оптимальных движений $\{z_k^{(q)}\}$ систем $z_{k+1}^{(q)} = Az_k^{(q)} + Bv_k^{(q)} + \xi\left(z_k^{(q-1)}, Dz_k^{(q-1)} + v_k^{(q-1)}, h_0\right)$, $k = \overline{0, l-1}$, $q = 1, 2, \ldots,$ где $z_k^{(0)}$, $v_k^{(0)}$ из п. 2, используя формулы (П.12)–(П.14)(см. Приложение).

4. Найти $v^*(t_k) = \lim_{q\to\infty} v_k^{(q)}$, $k = \overline{0, l-1}$; $z_k^* = \lim_{q\to\infty} z_k^{(q)}$, $k = \overline{0, l}$.

5. Построить допустимое программное управление системы (1) при $h = h_0 > 0$ по формуле $u^*(t_k) = w(z_k^*) + v^*(t_k)$, $k = \overline{0, l-1}$.

Пример 3. а) Поставим задачу перевода системы (17) при $h_0 = ln2$ из состояния $z(t_0) = z^{\{0\}} = [-2 \;\; 5]^\top$ в состояние $z(t_3) = z^{\{1\}} = [3 \;\; 4]^\top$ (см. пример 2).

Напомним, что алгоритм 1 не помог решить данную задачу. Применим алгоритм 2 и построим для соответствующей системы (18) стабилизирующее управление, при котором матрица A имеет собственные значения $\lambda_{1,2} = 0{,}001$. Тогда на 27-ой итерации с точностью до 10^{-15} допустимое управление системы (17) примет вид:

$u_0^* = -2{,}459959701325314$, $u_1^* = -404{,}806942255234989$,

$u_2^* = 73{,}986989056064154$.

Заметим, что при $\lambda_{1,2} = 0{,}0001$ итерационный процесс с точностью до 10^{-15} сходится на 12-ой итерации.

б) Рассмотрим нелинейную гибридную систему

$$(21) \qquad \begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t_k) + y^2(t_k), \quad t_k \leqslant t < t_{k+1}, \\ y(t_{k+1}) = -x(t_{k+1}) - y(t_k) + 2u(t_k) + u(t_k)y(t_k), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Эта система при $h_0 = ln\frac{3}{2}$ равносильна нелинейной дискретной системе

$$\begin{cases} x_{k+1} = \dfrac{3}{2}x_k - \dfrac{1}{2}y_k + \dfrac{1}{2}y_k^2, \\ y_{k+1} = -\dfrac{3}{2}x_k - \dfrac{1}{2}y_k + 2u_k - \dfrac{1}{2}y_k^2 + u_k y_k, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Система первого приближения для данной дискретной системы полностью управляема. Если поставить задачу перевода системы (21) из состояния $z(t_0) = z^{\{0\}} = [0{,}1 \;\; -0{,}2]^\top$ в состояние $z(t_5) = z^{\{1\}} = [0{,}4 \;\; 0{,}6]^\top$, то алгоритм 1 не поможет решить данную задачу. Применяя алгоритм 2, получим следующие результаты:

1) при $\lambda_1 = 0{,}1$ и $\lambda_2 = 0{,}2$ итерационный процесс сходится на 80-ой итерации, и с точностью до 10^{-18} получим допустимое управление

$u^*(t_0) = 0{,}324385159473078927$, $u^*(t_1) = 0{,}501724268550236387$,

$u^*(t_2) = 0{,}502341831544914188$, $u^*(t_3) = 0{,}399479636515260206$,

$u^*(t_4) = 0{,}544220425724104726$;

2) при $\lambda_1 = 0{,}2$ и $\lambda_2 = 0{,}3$ итерационный процесс расходится;

3) при $\lambda_1 = 0{,}1$ и $\lambda_2 = 0{,}3$ итерационный процесс с точностью до 10^{-18} сходится на 88-ой итерации;

4) при $\lambda_1 = 0{,}01$ и $\lambda_2 = 0{,}1$ итерационный процесс расходится, как и при $\lambda_1 = 0{,}01$, $\lambda_2 = -0{,}001$, что означает: данным $\lambda_{1,2}$ соответствуют матрицы D, при которых не выполняется условие (20).

Таким образом, в частных случаях (см. пример 3(a)) стабилизация соответствующей системы (18) при условии приближения значений $\lambda_{1,2}$ к нулю ускоряет сходимость итерационного процесса, однако в общем случае это неверно.

7. Достаточные признаки оптимальности управления гибридной системой (1)

Руководствуясь приведенными в разделах 5 и 6 алгоритмами, можно построить допустимое управление системы (1), при этом возникают вопросы. Является ли оно оптимальным? Каковы достаточные условия оптимальности управления системой (1)? Как построить оптимальное управление для такой системы?

Для поиска ответов на данные вопросы заранее будем полагать, что система (1) полностью управляема при некотором $h = h_0 > 0$ и в силу равносильности систем (1) и (8) воспользуемся достаточными условиями оптимальности для управляемых дискретных процессов [19], преломляя их к задаче поиска оптимального процесса с фиксированным правым концом траектории.

Пусть $M = \{(z_k, u_k) : k = \overline{0, l-1}\}$ – множество *допустимых процессов* системы (8) при $h = h_0 > 0$, т.е. пар (z_k, u_k), удовлетворяющих при $h = h_0 > 0$ данной системе и краевым условиям $z_0 = z^{\{0\}}$, $z_l = z^{\{1\}}$.

Будем полагать, что качество процесса управления системой (8) при $h = h_0 > 0$ в общем случае оценивается функционалом

$$I(z_k, u_k) = \sum_{k=0}^{l-1} f^0(z_k, u_k), \tag{22}$$

при этом функция $f^0(z, u)$ дифференцируема по z и u на множестве M.

Процесс $(z_k, u_k) \in M$ назовем *оптимальным*, если $I(z_k, u_k) \to \min$.

Введем обозначение: $\tilde{f}(z_k,u_k)=A_0 z_k+Bu_k+\xi(z_k,u_k,h_0)$, тогда система (8) при $h=h_0>0$ примет вид $z_{k+1}=\tilde{f}(z_k,u_k)$, $k=\overline{0,l-1}$, где функция $\tilde{f}(z,u)$ непрерывно дифференцируема по z и u на множестве $R^{n+m}\times R^q$.

Пусть D – множество *возможных процессов* [19] системы $z_{k+1}=\tilde{f}(z_k,u_k)$, $k=\overline{0,l-1}$, т.е. пар (z_k,u_k), удовлетворяющих этой системе, тогда $M\subset D$. Следуя [19], введем вспомогательные математические конструкции:

1) функцию

$$R(z_k,u_k)=\varphi(\tilde{f}(z_k,u_k))-\varphi(z_k)-f^0(z_k,u_k), \tag{23}$$

где $\varphi(z)$ – некоторая функция,

2) функционал

$$L(z_k,u_k,\varphi)=-\sum_{k=0}^{l-1}R(z_k,u_k)+\varphi(z^{\{1\}})-\varphi(z^{\{0\}}) \tag{24}$$

и рассмотрим вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Для любой функции $\varphi(z)$ значения функционалов (22) *и* (24) *совпадают на множестве M, т.е. $L(z_k,u_k,\varphi)=I(z_k,u_k)$ при $(z_k,u_k)\in M$.*

Лемма 2. Если допустимый процесс $(z_k^*,u_k^*)\in M$ и некоторая функция $\varphi(z)$ удовлетворяют условию

$$R(z_k^*,u_k^*)=\max_{(z_k,u_k)\,\in\, D}R(z_k,u_k),\quad k=\overline{0,l-1}, \tag{25}$$

то

$$L(z_k^*,u_k^*,\varphi)=\min_{(z_k,u_k)\,\in\, D}L(z_k,u_k,\varphi),\quad k=\overline{0,l-1}.$$

Пусть функционал (22) принимает вид (5), т.е. $I(z_k,u_k)=I(u_k)=\sum_{k=0}^{l-1}u_k^\top u_k$, тогда справедлива

Теорема 7. Пусть допустимый процесс $(z_k^*,u_k^*)\in M$ и некоторая функция $\varphi(z)$ удовлетворяют условию (25), *при этом $f^0(z_k,u_k)=u_k^\top u_k$. Тогда $u^*(t_k)=u_k^*$ – оптимальное управление системы* (1) *при $h=h_0$.*

Задача о минимуме функционала может ставиться в двух вариантах [19]:

1) определить оптимальный процесс (z_k^*,u_k^*), минимизирующий функционал (22), тогда если $f^0(z_k,u_k)=u_k^\top u_k$, то $u^*(t_k)=u_k^*$ – оптимальное управление системы (1) при $h=h_0>0$;

2) определить минимизирующую последовательность допустимых процессов $\{z_k^{(s)},u_k^{(s)}\}\subset M$, $s=1,2,\ldots$, на которой функционал (22) стремится к своей точной нижней грани, т.е.

$$I\left(z_k^{(s)},u_k^{(s)}\right)\to\inf_{(z_k,u_k)\,\in\, M}I(z_k,u_k)\ \text{ при }\ s\to\infty,$$

тогда если $f^0(z_k, u_k) = u_k^\top u_k$, то $\{u^{(s)}(t_k)\}$ – минимизирующая для функционала (5) последовательность допустимых управлений системы (1) при $h = h_0 > 0$, на которой он стремится к своей точной нижней грани.

Как правило, задача оптимального управления ставится в первом варианте, но не всегда имеет решение, так как в общем случае функционал (22) может не иметь наименьшего значения на множестве M; при этом задача, поставленная во втором варианте, всегда имеет решение, если функционал (22) ограничен снизу [19].

Функционал (5) неотрицателен, т.е. ограничен снизу, значит, минимизирующая для функционала (5) последовательность допустимых управлений системы (1) существует, при этом справедлива

Т е о р е м а 8. *Пусть* $\{z_k^{(s)}, u_k^{(s)}\} \subset M$, $s = 1, 2, \ldots$ – *последовательность допустимых процессов системы* $z_{k+1} = \tilde{f}(z_k, u_k)$, $k = \overline{0, l-1}$, *и существует функция* $\varphi(z)$, *которая при* $s \to \infty$ *удовлетворяет условию*

$$R\left(z_k^{(s)}, u_k^{(s)}\right) \to \sup_{(z_k, u_k) \in D} R(z_k, u_k), \quad k = \overline{0, l-1},$$

причем $f^0(z_k, u_k) = u_k^\top u_k$. *Тогда* $\{u^{(s)}(t_k)\}$ – *минимизирующая для функционала* (5) *последовательность допустимых управлений системы* (1) *при* $h = h_0$, *на которой он стремится к своей точной нижней грани.*

Пусть известно, что система (1) при $h = h_0 > 0$ имеет оптимальное управление. Выясним вопрос построения такого управления.

8. Построение оптимального управления для гибридной системы (1)

В силу равносильности систем (1) и (8) поставим задачу поиска для системы $z_{k+1} = \tilde{f}(z_k, u_k)$, $k = \overline{0, l-1}$, допустимого процесса (z_k^*, u_k^*), на котором минимизируется функционал (22) (или соответствующий функционал (5)), не вводя дополнительных ограничений на управление $u_k \in R^q$.

Для решения поставленной задачи воспользуемся методом Лагранжа для дискретных процессов управления с одномерным аргументом и неограниченным управлением [19], а также достаточными условиями оптимальности, изложенными в теореме 7.

Пусть $\varphi(z)$ – дифференцируемая по z функция на множестве R^{n+m}. Тогда необходимыми условиями максимума функции $R(z, u)$ по z, u являются условия:

$$\frac{\partial R(z_k^*, u_k^*)}{\partial z_{k,i}} = 0, \quad i = \overline{1, n+m}, \quad k = \overline{0, l-1}, \tag{26}$$

$$\frac{\partial R(z_k^*, u_k^*)}{\partial u_{k,j}} = 0, \quad j = \overline{1, q}, \quad k = \overline{0, l-1}. \tag{27}$$

Пусть вектор-функция $\psi(k) = (\psi_1(k), \psi_2(k), \ldots, \psi_{n+m}(k))$, $k = \overline{0, l-1}$, такова, что

$$\psi_i(k) = \frac{\partial \varphi(z_k^*)}{\partial z_{k,i}}, \quad i = \overline{1, n+m},$$

составим гамильтониан задачи

$$H(\psi(k), z_k, u_k) = \sum_{i=1}^{n+m} \psi_i(k) \tilde{f}_i(z_k, u_k) - f^0(z_k, u_k).$$

Тогда, учитывая (23), равенство $z_{k+1} = \tilde{f}(z_k, u_k)$ и последние два равенства, можно доказать, что условия (26) и (27) примут соответственно вид

$$\psi_i(k) = \frac{\partial H(\psi(k+1), z_k^*, u_k^*)}{\partial z_{k,i}}, \quad i = \overline{1, n+m}, \tag{28}$$

и

$$\frac{\partial H(\psi(k+1), z_k^*, u_k^*)}{\partial u_{k,j}} = 0, \quad j = \overline{1, q}. \tag{29}$$

Равенства (28) и (29) являются необходимыми условиями оптимальности дискретных процессов управления с одномерным аргументом [19], при этом равенство (28) называется сопряженной системой конечно-разностных уравнений [29].

Полученные условия позволят выделить из множества допустимых процессов системы $z_{k+1} = \tilde{f}(z_k, u_k)$, $k = \overline{0, l-1}$, подмножество процессов, которые потенциально могут быть оптимальными [19]. Если при этом известно, что оптимальный процесс существует и полученное подмножество состоит из одного элемента, то он и будет искомым оптимальным процессом. В таком случае получим следующий алгоритм построения оптимального управления для системы (1) при $h = h_0 > 0$.

Алгоритм 3.

1. Выполнить переход от системы (1) при $h = h_0 > 0$ к системе $z_{k+1} = \tilde{f}(z_k, u_k)$, $k = \overline{0, l-1}$.
2. Составить гамильтониан задачи и условия (29).
3. Найти из условий (29) управление u_k^* с параметрами $\psi(k+1)$, z_k^*, $k = \overline{0, l-1}$.
4. Составить сопряженную систему (28).
5. Найти решения $z_1^*, z_2^*, \ldots, z_{l-1}^*$ системы $z_{k+1} = \tilde{f}(z_k, u_k)$ с учетом условия $z_0^* = z^{\{0\}}$ и найденного управления $u_k^* = \{u_{k,j}^*(\psi(k+1), z_k^*)\}$, $k = \overline{0, l-1}$, $j = \overline{1, q}$.
6. Решить совместно сопряженную систему с системой $z_l^* = z^{\{1\}}$, учитывая решения z_1^*, z_2^*,…,z_{l-1}^*, и найти $\psi_i(k+1)$, z_k^*, u_k^*, $i = \overline{1, n+m}$, $k = \overline{0, l-1}$.
7. Если полученное решение единственно, то $u^*(t_k) = u_k^*$ – оптимальное управление системы (1) при $h = h_0$, в противном случае – найти значение функционала (5) на найденных решениях и выбрать управление, соответствующее решению, минимизирующему этот функционал.

Пример 4. Построить оптимальное управление для системы (17) с шагом дискретизации $h_0 = ln2$, переводящее ее из состояния $z(t_0) = [2 \;\; 1]^\top$ в состояние $z(t_3) = [1 \;\; 2]^\top$ и минимизирующее функционал (5).

Напомним, что система (17) при $h_0 = ln2$ равносильна нелинейной дискретной системе (см. пример 2)

$$(30) \qquad \begin{cases} x_{k+1} = 2x_k + 2y_k, \\ y_{k+1} = -2x_k - y_k + 3u_k + 2x_k y_k + 2y_k^2, \quad k = 0, 1, 2, \end{cases}$$

и задача сводится к построению оптимального управления для системы (30) по переводу ее из состояния $z_0 = [x_0 \;\; y_0]^\top = [2 \;\; 1]^\top$ в состояние $z_3 = [x_3 \;\; y_3]^\top = [1 \;\; 2]^\top$.

Согласно (5) $f^0(z_k, y_k) = u_k^2$, так как $u_k \in R^1$, при этом множество допустимых процессов M для системы (30) компактно, тогда поставленная задача имеет решение, так как непрерывный функционал (5) достигнет на M своего наименьшего значения.

Заметим, что $z_{k,1} = x_k$, $z_{k,2} = y_k$, тогда гамильтониан задачи примет вид

$$H(\psi(k), z_k, u_k) = \psi_1(k)(2x_k + 2y_k) + \psi_2(k)(-2x_k - y_k + 3u_k + 2x_k y_k + 2y_k^2) - u_k^2,$$

и из условия (29) найдем

$$(31) \qquad u_k^* = \frac{3}{2}\psi_2(k+1), \quad k = 0, 1, 2.$$

Согласно (28) получим сопряженную систему

$$(32) \qquad \begin{cases} \psi_1(k) = 2\psi_1(k+1) + 2\psi_2(k+1)(y_k^* - 1), \\ \psi_2(k) = 2\psi_1(k+1) + \psi_2(k+1)(4y_k^* + 2x_k^* - 1), \quad k = 0, 1, 2. \end{cases}$$

Учитывая первое краевое условие, равенства (30) и (31), найдем решения

$$\begin{cases} x_1^* = 6, \\ y_1^* = 1 + 4{,}5\psi_2(1); \end{cases} \quad \begin{cases} x_2^* = 14 + 9\psi_2(1), \\ y_2^* = 40{,}5\psi_2^2(1) + 67{,}5\psi_2(1) + 4{,}5\psi_2(2) + 1, \end{cases}$$

тогда система $z_3^* = [1 \;\; 2]^\top$ примет вид

$$\begin{cases} 29 + 153\psi_2(1) + 81\psi_2^2(1) + 9\psi_2(2) = 0, \\ 729\psi_2^3(1) + 2308{,}5\psi_2^2(1) + 1822{,}5\psi_2(1) + 121{,}5\psi_2(2) + \\ \qquad + 4{,}5\psi_2(3) + 81\psi_2(1)\psi_2(2) + 2y_2^{*2} = 3. \end{cases}$$

Учитывая первое равенство в (32), (31) и полученные решения, найдем

$$(33) \qquad \psi_1(2) = 2\psi_1(3) + 2\psi_2(3)(40{,}5\psi_2^2(1) + 67{,}5\psi_2(1) + 4{,}5\psi_2(2)),$$

учитывая второе равенство в (32), найдем $\psi_2(1) = 2\psi_1(2)+\psi_2(2)(15+18\psi_2(1))$, тогда

$$\psi_1(2) = 0{,}5\psi_2(1) - \psi_2(2)(7{,}5 + 9\psi_2(1)) \tag{34}$$

и $\psi_2(2) = 2\psi_1(3) + \psi_2(3)(162\psi_2^2(1) + 288\psi_2(1) + 18\psi_2(2) + 31)$, следовательно,

$$\psi_1(3) = 0{,}5\psi_2(2) - \psi_2(3)(81\psi_2^2(1) + 153\psi_2(1) + 15{,}5). \tag{35}$$

Подставим в (33) условия (34), (35) и, учитывая первое уравнение в системе $z_3^* = [1 \;\; 2]^\top$, найдем

$$\psi_2(2)(8{,}5 + 9\psi_2(1)) - 0{,}5\psi_2(1) = 2\psi_2(3). \tag{36}$$

Решая совместно (36) с системой $z_3^* = [1 \;\; 2]^\top$, получим три решения и соответственно три управления, удовлетворяющих равенству (31), системе (30) и краевым условиям, при этом только одно из них является оптимальным, в том числе и для системы (17) при $h_0 = ln2$, поскольку минимизирует функционал (5), и с точностью до 10^{-15} оно имеет вид $u^*(t_0) = -2{,}498184215120807$, $u^*(t_1) = 0{,}190252087647811$, $u^*(t_2) = 0{,}007263139516772$.

9. Заключение

В работе установлены достаточные признаки полной управляемости, существования допустимых и оптимального управлений для нелинейных непрерывно-дискретных динамических систем с постоянным шагом дискретизации. Представлены алгоритмы построения допустимых и оптимального программных управлений для указанных систем на конечном промежутке времени. Эффективность представленных алгоритмов подтверждается приведенными примерами.

Установленные признаки и алгоритмы позволят решать задачи управления и устойчивого функционирования для реальных систем управления, наиболее актуальных в авиационной, технической и экономической областях деятельности.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Системы (1) и (8) равносильны, и между их решениями существует связь ([7], с. 45), на основании которой, исходя из определений 1 и 4, следует справедливость данного утверждения.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Из полной управляемости системы (10) согласно [11] следует существование оптимального управления для этой системы, определяемого формулами (13), которое переводит систему (10) из состояния $z_0 = z^{\{0\}}$ в состояние $z_l = z^{\{1\}}$ и минимизирует функционал (5).

А так как системы (10) и (12) равносильны и имеют одинаковый критерий качества процесса управления, то оптимальное управление для системы (10) будет являться оптимальным и для системы (12).

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Исходя из определений 5 и 6, равносильности систем (1) и (8) множества S и K можно описать следующим образом: $S=\{(x(t),y_k): t\in[t_k,t_{k+1}),\ k=\overline{0,l-1}\}\cup\{(x(t_l),y_l)\}$, где $x(t_k)=x_k$; $K=\{(x_k,y_k): k=\overline{0,l}\}$. Следовательно, $K\subset S$, и теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Гладкие нелинейности $a(x,y)$, $b(x,y,u)$ в разложениях функций $f(x,y)$ и $g(x,y,u)$ начинаются с квадратичных по x, y и по x, y, u слагаемых соответственно, тогда на множествах S_0 и U_0 малого диаметра они удовлетворяют условию Липшица с достаточно малыми постоянными Липшица L_1 и L_2 соответственно. Функция $\xi(z,u,h)$ непрерывно дифференцируема на множестве U_0, тогда для нее выполняется условие (15). А поскольку компоненты $\varepsilon(x,y;h)$, $\delta(x,y,u;h)$ функции $\xi(z,u,h)$ линейно выражаются через функции $a(x,y)$ и $b(x,y,u)$ (см. (6), (7)), тогда в условии (15) постоянная Липшица L будет выражаться через постоянные L_1 и L_2, при этом будет достаточно малой.

Теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 5. Согласно [11] из полной управляемости системы (10) следует существование оптимального управления $u_k^{(0)}$, определяемого формулами (13), переводящего эту систему из любого состояния $z_0=z^{\{0\}}\in R^{n+m}$ в любое состояние $z_l=z^{\{1\}}\in R^{n+m}$ и минимизирующего функционал (5). Тогда $z_k^{(0)}$ $(k=\overline{0,l})$ – оптимальное движение системы (10), порождаемое управлением $u_k^{(0)}$, $k=\overline{0,l-1}$.

Построим допустимое управление системы (8) при $h=h_0$, применяя метод простой итерации к решению задач оптимального управления

$$\text{(П.1)}\quad z_{k+1}^{(q)}=A_0z_k^{(q)}+Bu_k^{(q)}+\xi\left(z_k^{(q-1)},u_k^{(q-1)},h_0\right),\quad k=\overline{0,l-1},\quad q=1,2,\ldots,$$

$$I(u^{(q)})=\sum_{k=0}^{l-1}u_k^{(q)\top}u_k^{(q)}\to\min$$

по переводу систем (П.1) из состояния $z_0=z^{\{0\}}$ в состояние $z_l=z^{\{1\}}$, где $z_k^{(0)}$, $u_k^{(0)}$ – оптимальные движение и управление системы (10). Тогда, используя [11], получим последовательность оптимальных управлений $\{u_k^{(q)}\}$, $q=1,2,\ldots$, определяемых формулами

$$\text{(П.2)}\qquad u_k^{(q)}=S^\top(k)F^+(0)d^{(q)}\left(0,z^{\{0\}}\right),\quad k=\overline{0,l-1},$$

$$\text{(П.3)}\qquad d^{(q)}\left(0,z^{\{0\}}\right)=z^{\{1\}}-A_0^lz^{\{0\}}-\sum_{i=0}^{l-1}A_0^{l-i-1}\xi\left(z_i^{(q-1)},u_i^{(q-1)},h_0\right),$$

и последовательность оптимальных движений $\{z_k^{(q)}\}, \quad q=1,2,\ldots,$

$$z_k^{(q)} = A_0^k z^{\{0\}} + \sum_{i=0}^{k-1} A_0^{k-i-1} B u_i^{(q)} + \sum_{i=0}^{k-1} A_0^{k-i-1} \xi\left(z_i^{(q-1)}, u_i^{(q-1)}, h_0\right), \quad k=\overline{0,l}, \tag{П.4}$$

при этом $z_0^{(q)} = z^{\{0\}}$, $z_l^{(q)} = z^{\{1\}}$.

Действительно, из (П.4) следует, что $z_0^{(q)} = z^{\{0\}}$, а исходя из ([11], с. 13–14), можно доказать, что для того, чтобы управление $u_k^{(q)}$ переводило системы (П.1) из состояния $z_0 = z^{\{0\}}$ в состояние $z_l = z^{\{1\}}$, необходимо и достаточно, чтобы $\sum_{k=0}^{l-1} S(k) u_k^{(q)} = d^{(q)}(0, z^{\{0\}})$, где $S(k) = A_0^{l-k-1}B$. Тогда, учитывая (П.4) и (П.3), получим $z_l^{(q)} = z^{\{1\}}$.

Для доказательства сходимости итерационного процесса будем рассматривать пару функций $\{z_k^{(q)}, u_k^{(q)}\}$ как элемент евклидова пространства R^{n+m+q} с нормой

$$\rho\left(\left\{z_k^{(q)}, u_k^{(q)}\right\}\right) = \max_{0\leqslant k\leqslant l}\left\|z_k^{(q)}\right\| + \max_{0\leqslant k\leqslant l-1}\left\|u_k^{(q)}\right\|. \tag{П.5}$$

Используя (П.2), (П.3), свойства нормы, неравенство (15) и (П.5), получим оценку

$$\max_{0\leqslant k\leqslant l-1}\left\|u_k^{(q)} - u_k^{(q-1)}\right\| \leqslant$$
$$\leqslant lL \max_{0\leqslant k\leqslant l-1}\left\|S^\top(k)F^+(0)\right\| \max_{0\leqslant k\leqslant l-1}\left\|A_0^{l-k-1}\right\| \times$$
$$\times \rho\left(\left\{z_k^{(q-1)}, u_k^{(q-1)}\right\} - \left\{z_k^{(q-2)}, u_k^{(q-2)}\right\}\right).$$

Аналогично, используя (П.4), свойства нормы, неравенство (15), оценку выше и (П.5), получим оценку

$$\max_{0\leqslant k\leqslant l}\left\|z_k^{(q)} - z_k^{(q-1)}\right\| \leqslant$$
$$\leqslant lL\left(l \max_{0\leqslant k\leqslant l-1}\left\|A_0^{l-k-1}B\right\| \max_{0\leqslant k\leqslant l-1}\left\|S^\top(k)F^+(0)\right\| \max_{0\leqslant k\leqslant l-1}\left\|A_0^{l-k-1}\right\| + \right.$$
$$\left. + \max_{0\leqslant k\leqslant l-1}\left\|A_0^{l-k-1}\right\|\right) \rho\left(\left\{z_k^{(q-1)}, u_k^{(q-1)}\right\} - \left\{z_k^{(q-2)}, u_k^{(q-2)}\right\}\right).$$

Пусть

$$m = \max\left\{\max_{0\leqslant k\leqslant l-1} \|A_0^{l-k-1}B\| \max_{0\leqslant k\leqslant l-1}\|S^\top(k)F^+(0)\| \max_{0\leqslant k\leqslant l-1} \|A_0^{l-k-1}\|,\right.$$
$$\left.\max_{0\leqslant k\leqslant l-1} \|A_0^{l-k-1}\|, \max_{0\leqslant k\leqslant l-1} \|S^\top(k)F^+(0)\| \max_{0\leqslant k\leqslant l-1} \|A_0^{l-k-1}\|\right\}.$$

Сложим полученные оценки и тогда согласно (П.5) установим

$$\rho\left(\left\{z_k^{(q)}, u_k^{(q)}\right\} - \left\{z_k^{(q-1)}, u_k^{(q-1)}\right\}\right) \leqslant$$
$$\leqslant lLm(l+2)\rho\left(\left\{z_k^{(q-1)}, u_k^{(q-1)}\right\} - \left\{z_k^{(q-2)}, u_k^{(q-2)}\right\}\right). \tag{П.6}$$

Из условия (16) получим: $0 < lLm(l+2) < 1$, тогда последовательность вектор-функций $\{z_k^{(q)}, u_k^{(q)}\}$ равномерно по k сходится к некоторой вектор-функции $\{z_k^*, u_k^*\}$, и оператор $F(z,u): R^{n+m+q} \to R^{n+m+q}$, определяемый формулами (П.2)–(П.4), является сжимающим. Согласно принципу сжимающих отображений он имеет единственную неподвижную точку, которой и является предельная вектор-функция $\{z_k^*, u_k^*\}$, причем

$$z_k^* = \lim_{q\to\infty} z_k^{(q)}, \quad u_k^* = \lim_{q\to\infty} u_k^{(q)}, \tag{П.7}$$

$$u_k^* = S^T(k)F^+(0)\left(z^{\{1\}} - A_0^l z^{\{0\}} - \sum_{i=0}^{l-1} A_0^{l-i-1}\xi(z_i^*, u_i^*, h_0)\right), \quad k = \overline{0, l-1}, \tag{П.8}$$

$$z_k^* = A_0^k z^{\{0\}} + \sum_{i=0}^{k-1} A_0^{k-i-1}Bu_i^* + \sum_{i=0}^{k-1} A_0^{k-i-1}\xi(z_i^*, u_i^*, h_0), \quad k = \overline{0, l}, \tag{П.9}$$

при этом из (П.7) следует, что $z_0^* = z_0$, $z_l^* = z_l$.

Подстановкой (П.8) при $k = 0, 1, \ldots, l-1$ в (П.9) при $k = l$ можно так же убедиться, что $z_l^* = z_l$, если произведение $F(0)F^+(0)$ действует как единичная матрица, что верно, так как $\sum_{k=0}^{l-1} S(k)u_k^{(q)} = d^{(q)}(0, z^{\{0\}})$.

В силу равносильности систем (1) и (8) найденное допустимое управление $u_k^* = u^*(t_k)$ для системы (8) при $h = h_0$ является и допустимым управлением для системы (1) при $h = h_0$. А так как для любых состояний $z^{\{0\}}$, $z^{\{1\}} \in R^{n+m}$ можно построить допустимое управление системы (8) при $h = h_0$, то система (8) при $h = h_0$ является полностью управляемой. Тогда из теоремы 1 следует, что система (1) полностью управляема при $h = h_0$, и теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 6. Из полной управляемости системы (18) следует ее стабилизируемость [7]. Подберем для системы (18) стабилизирующее управление $w(z_k) = Dz_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ так, чтобы все собственные значения матрицы $A = A_0 + BD$ находились внутри единичного круга [7], тогда линейная система

$$z_{k+1} = Az_k + Bv_k, \quad k = \overline{0, l-1} \tag{П.10}$$

является полностью управляемой [10, 13].

Применяя формулы (13) теоремы 2, построим оптимальное управление $v_k^{(0)}$ для линейной системы (П.10), переводящее эту систему из любого состояния

$z_0 = z^{\{0\}}$ в любое состояние $z_l = z^{\{1\}}$ при условии $I(v^{(0)}) \to \min$, где $I(v^{(0)})$ – функционал (5) от управления $v_k^{(0)}$, тогда $z_k^{(0)}$ – соответствующее этому управлению оптимальное движение. Далее применим метод простой итерации для построения допустимого управления системы (19) по переводу ее из состояния $z_0 = z^{\{0\}}$ в состояние $z_l = z^{\{1\}}$ путем решения соответствующих задач оптимального управления

$$\begin{gathered} z_{k+1}^{(q)} = Az_k^{(q)} + Bv_k^{(q)} + \xi\left(z_k^{(q-1)}, Dz_k^{(q-1)} + v_k^{(q-1)}, h_0\right), \\ k = \overline{0, l-1}, \quad q = 1, 2, \ldots, \\ I(v^{(q)}) = \sum_{k=0}^{l-1} v_k^{(q)\top} v_k^{(q)} \to \min, \end{gathered} \tag{П.11}$$

где $z_k^{(0)}$, $v_k^{(0)}$ – оптимальные движение и управление системы (П.10).

В результате получим последовательности оптимальных управлений $\{v_k^{(q)}\}$ и оптимальных движений $\{z_k^{(q)}\}$, $q = 1, 2, \ldots$:

$$v_k^{(q)} = S^\top(k)F^+(0)d^{(q)}\left(0, z^{\{0\}}\right), \text{ где } S(k) = A^{l-k-1}B,\ k = \overline{0, l-1}, \tag{П.12}$$

$$d^{(q)}\left(0, z^{\{0\}}\right) = z^{\{1\}} - A^l z^{\{0\}} - \sum_{i=0}^{l-1} A^{l-i-1}\xi\left(z_i^{(q-1)}, Dz_i^{(q-1)} + v_i^{(q-1)}, h_0\right), \tag{П.13}$$

$$\begin{gathered} z_k^{(q)} = A^k z^{\{0\}} + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1}Bv_i^{(q)} + \\ + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1}\xi\left(z_i^{(q-1)}, Dz_i^{(q-1)} + v_i^{(q-1)}, h_0\right), \quad k = \overline{0, l}, \end{gathered} \tag{П.14}$$

при этом $z_0^{(q)} = z^{\{0\}} = z_0$, $z_l^{(q)} = z^{\{1\}} = z_l$ при $q = 1, 2, \ldots$.

Для обоснования сходимости итерационного процесса рассмотрим пару функций $\{z_k^{(q)}, v_k^{(q)}\}$ как элемент евклидова пространства R^{n+m+q} с нормой

$$\rho\left(\left\{z_k^{(q)}, v_k^{(q)}\right\}\right) = (\|D\| + 1)\max_{0 \leqslant k \leqslant l}\left\|z_k^{(q)}\right\| + \max_{0 \leqslant k \leqslant l-1}\left\|v_k^{(q)}\right\|. \tag{П.15}$$

Рассуждая аналогично доказательству теоремы 5, получим следующие оценки:

$$\begin{gathered} \max_{0 \leqslant k \leqslant l-1}\left\|v_k^{(q)} - v_k^{(q-1)}\right\| \leqslant \\ \leqslant lL \max_{0 \leqslant k \leqslant l-1}\left\|S^\top(k)F^+(0)\right\| \max_{0 \leqslant k \leqslant l-1}\left\|A^{l-k-1}\right\| \rho\left(\left\{z_k^{(q-1)}, v_k^{(q-1)}\right\} - \right. \\ \left. - \left\{z_k^{(q-2)}, v_k^{(q-2)}\right\}\right), \end{gathered}$$

$$\max_{0\leqslant k\leqslant l}\left\|z_k^{(q)}-z_k^{(q-1)}\right\|\leqslant$$

$$\leqslant lL\left(l\max_{0\leqslant k\leqslant l-1}\left\|A^{l-k-1}B\right\|\max_{0\leqslant k\leqslant l-1}\left\|S^\top(k)F^+(0)\right\|\max_{0\leqslant k\leqslant l-1}\left\|A^{l-k-1}\right\|+\right.$$
$$\left.+\max_{0\leqslant k\leqslant l-1}\left\|A^{l-k-1}\right\|\right)\rho\left(\left\{z_k^{(q-1)},v_k^{(q-1)}\right\}-\left\{z_k^{(q-2)},v_k^{(q-2)}\right\}\right).$$

Пусть

$$m=\max\left\{\max_{0\leqslant k\leqslant l-1}\ \|S^\top(k)F^+(0)\|\max_{0\leqslant k\leqslant l-1}\ \|A^{l-k-1}\|,\max_{0\leqslant k\leqslant l-1}\ \|A^{l-k-1}\|,\right.$$
$$\left.\max_{0\leqslant k\leqslant l-1}\ \|S^\top(k)F^+(0)\|\max_{0\leqslant k\leqslant l-1}\ \|A^{l-k-1}\|\max_{0\leqslant k\leqslant l-1}\ \|A^{l-k-1}B\|\right\}.$$

Сложим первую оценку с умноженной на $(\|D\|+1)$ второй оценкой, тогда, учитывая (П.15), получим

$$\rho\left(\left\{z_k^{(q)},v_k^{(q)}\right\}-\left\{z_k^{(q-1)},v_k^{(q-1)}\right\}\right)\leqslant$$
$$\text{(П.16)}\qquad\leqslant Llm(1+(l+1)(\|D\|+1))\rho\left(\left\{z_k^{(q-1)},v_k^{(q-1)}\right\}-\left\{z_k^{(q-2)},v_k^{(q-2)}\right\}\right).$$

При выполнении условия (20) установим: $0<Llm(1+(l+1)(\|D\|+1))<1$, следовательно, последовательность вектор-функций $\{z_k^{(q)},v_k^{(q)}\}$ равномерно по k сходится к некоторой вектор-функции $\{z_k^*,v_k^*\}$, и оператор $F(z,v)$: $R^{n+m+q}\to R^{n+m+q}$, определяемый формулами (П.12)–(П.14), является сжимающим. Согласно принципу сжимающих отображений он имеет единственную неподвижную точку, которой и является вектор-функция $\{z_k^*,v_k^*\}$. При этом $z_k^*=\lim_{q\to\infty}z_k^{(q)}$, $\ v_k^*=\lim_{q\to\infty}v_k^{(q)}$, и

$$v_k^*=S^\top(k)F^+(0)\left(z^{\{l\}}-A^lz^{\{0\}}-\sum_{i=0}^{l-1}A^{l-i-1}\xi(z_i^*,Dz_i^*+v_i^*,h_0)\right),\quad k=\overline{0,l-1},$$

$$z_k^*=A^kz^{\{0\}}+\sum_{i=0}^{k-1}A^{k-i-1}Bv_i^*+\sum_{i=0}^{k-1}A^{k-i-1}\xi(z_i^*,Dz_i^*+v_i^*,h_0),\quad k=\overline{0,l}$$

– допустимое управление и соответствующее ему движение системы (19).

При $h=h_0$ система (8) имеет вид $z_{k+1}=A_0z_k+Bu_k+\xi(z_k,u_k,h_0)$, $k=\overline{0,l-1}$, подставим в нее управление $u_k^*=Dz_k^*+v_k^*$ и движение z_k^*, $k=\overline{0,l-1}$. Тогда получим

$$z_{k+1}^*=Az_k^*+Bv_k^*+\xi(z_k^*,Dz_k^*+v_k^*,h_0),\quad k=\overline{0,l-1},$$

т.е. систему (19) при $z_k=z_k^*$, $v_k=v_k^*$, при этом $z_0^*=z^{\{0\}}=z_0$, $z_l^*=z^{\{1\}}=z_l$. Значит, $u_k^*=w(z_k^*)+v_k^*$ $(k=\overline{0,l-1})$ – допустимое управление системы (8) при $h = h_0$, а в силу равносильности систем (1) и (8) оно является искомым допустимым управлением и для системы (1) при $h = h_0$, при этом система (1) является полностью управляемой при $h = h_0$, и теорема 6 доказана.

Доказательство леммы 1. Пусть $(z_k, u_k) \in M$. Учитывая равенства (24), (23), $z_{k+1} = \tilde{f}(z_k, u_k)$, краевые условия $z_0 = z^{\{0\}}$, $z_l = z^{\{1\}}$, получим:

$$L(z_k, u_k, \varphi) = -\sum_{k=0}^{l-1} \Big(\varphi\left(\tilde{f}(z_k, u_k)\right) - \varphi(z_k) - f^0(z_k, u_k)\Big) + \varphi(z^{\{1\}}) - \varphi(z^{\{0\}}) =$$

$$= -\sum_{k=0}^{l-1} \big(\varphi(z_{k+1}) - \varphi(z_k) - f^0(z_k, u_k)\big) + \varphi(z_l) - \varphi(z_0) =$$

$$= -\varphi(z_1) + \varphi(z_0) + f^0(z_0, u_0) - \varphi(z_2) + \varphi(z_1) + f^0(z_1, u_1) - \ldots - \varphi(z_{l-1}) +$$

$$+ \varphi(z_{l-2}) + f^0(z_{l-2}, u_{l-2}) - \varphi(z_l) + \varphi(z_{l-1}) + f^0(z_{l-1}, u_{l-1}) + \varphi(z_l) - \varphi(z_0) =$$

$$= \sum_{k=0}^{l-1} f^0(z_k, u_k) = I(z_k, u_k),$$

и лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Доказательство данной леммы опирается на теорему 5.1 из [19], которая применительно к минимизации функционала (22) утверждает: процесс (z_k^*, u_k^*) является оптимальным в том и только том случае, если

$$f^0(z_k^*, u_k^*) = \min_{(z_k, u_k) \in D} f^0(z_k, u_k), \quad k = \overline{0, l-1}.$$

Поскольку $\varphi(z^{\{1\}}) - \varphi(z^{\{0\}}) \equiv \mathrm{const}$, то из равенства (24) следует, что на минимизацию функционала $L(z_k, u_k, \varphi)$ влияет лишь выражение $\sum_{k=0}^{l-1} R(z_k, u_k)$. Тогда, учитывая равенство (25) и применяя теорему 5.1 из [19] к функционалу (24), получим:

$$-\sum_{k=0}^{l-1} R(z_k^*, u_k^*) = \min_{(z_k, u_k) \in D} \left(-\sum_{k=0}^{l-1} R(z_k, u_k)\right) \text{ и}$$

$$\min_{(z_k, u_k) \in D} L(z_k, u_k, \varphi) = \min_{(z_k, u_k) \in D} \left(-\sum_{k=0}^{l-1} R(z_k, u_k)\right) + \varphi(z^{\{1\}}) - \varphi(z^{\{0\}}) =$$

$$= -\sum_{k=0}^{l-1} R(z_k^*, u_k^*) + \varphi(z^{\{1\}}) - \varphi(z^{\{0\}}) = L(z_k^*, u_k^*, \varphi), \quad k = \overline{0, l-1}.$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 7. Пусть

$$l_\varphi = \min_{(z_k, u_k) \in D} L(z_k, u_k, \varphi),$$

тогда

$$L(z_k, u_k, \varphi) \geqslant l_\varphi \text{ при } (z_k, u_k) \in D, \tag{П.17}$$

и с учетом леммы 2

$$L(z_k^*, u_k^*, \varphi) = l_\varphi. \tag{П.18}$$

Согласно (22) и леммы 1 имеем $L(z_k, u_k, \varphi) = I(z_k, u_k)$ при $(z_k, u_k) \in M$. Тогда из (П.17) и (П.18) следует: $I(z_k, u_k) \geqslant l_\varphi$ при $(z_k, u_k) \in M$, $I(z_k^*, u_k^*) = l_\varphi$. Значит, $I(z_k^*, u_k^*) \leqslant I(z_k, u_k)$ при $(z_k, u_k) \in M$, и (z_k^*, u_k^*) – оптимальный процесс для системы (8) при $h = h_0$, при этом u_k^* – оптимальное управление этой системы. Так как $I(z_k, u_k) = I(u_k)$ и системы (1) и (8) равносильны, а также имеют общий критерий качества процесса управления, то $u^*(t_k) = u_k^*$ – оптимальное управление системы (1) при $h = h_0$, и теорема 7 доказана.

Доказательство теоремы 8. Рассмотрим на множестве D функционал (24). Пусть

$$l_\varphi = \inf_{(z_k, u_k) \in D} L(z_k, u_k, \varphi).$$

Согласно лемме 1 имеем $L(z_k, u_k, \varphi) = I(z_k, u_k)$ при $(z_k, u_k) \in M$. $M \subset D$, тогда

$$\inf_{(z_k, u_k) \in D} L(z_k, u_k, \varphi) \leqslant \inf_{(z_k, u_k) \in M} L(z_k, u_k, \varphi)$$

и

$$\inf_{(z_k, u_k) \in M} I(z_k, u_k) \geqslant l_\varphi. \tag{П.19}$$

С другой стороны, из условия теоремы следует, что

$$-\sum_{k=0}^{l-1} R\left(z_k^{(s)}, u_k^{(s)}\right) \to \inf_{(z_k, u_k) \in D} \left(-\sum_{k=0}^{l-1} R(z_k, u_k)\right) \quad \text{при} \quad s \to \infty,$$

а так как $\varphi(z^{\{1\}}) - \varphi(z^{\{0\}}) \equiv \mathrm{const}$, то $L(z_k^{(s)}, u_k^{(s)}, \varphi) \to l_\varphi$ при $s \to \infty$. Учитывая (П.19) и определение точной нижней грани функционала, приходим к выводу:

$$I\left(z_k^{(s)}, u_k^{(s)}\right) \to \inf_{(z_k, u_k) \in M} I(z_k, u_k),$$

т.е. $\{z_k^{(s)}, u_k^{(s)}\}$ – минимизирующая последовательность допустимых процессов для функционала $I(z_k, u_k) = \sum_{k=0}^{l-1} u_k^\top u_k$, тогда $\{u^{(s)}(t_k)\}$ – минимизирующая последовательность допустимых управлений системы (1) при $h = h_0$ для функционала (5), на которой он стремится к своей точной нижней грани, и теорема 8 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Логунова О.С., Агапитов Е.Б., Баранкова И.И. и др.* Математические модели для исследования теплового состояния тел и управления тепловыми процессами // Электротехнические системы и комплексы. 2019. № 2 (43). С. 25–34.
2. *Максимов В.П., Чадов А.Л.* Гибридные модели в задачах экономической динамики // Вест. Перм. ун-та. 2011. № 2 (9). С. 13–23.
3. *Шпилевая О.Я., Котов К.Ю.* Переключаемые системы: устойчивость и проектирование (обзор) // Автометрия. 2008. Т. 44. № 5. С. 71–87.
4. *Бортаковский А.С., Урюпин И.В.* Оптимизация маршрутов непрерывно-дискретного движения управляемых объектов при наличии препятствий // Тр. МАИ. 2020. Вып. 113. https://doi.org/10.34759/trd-2020-113-17
5. *Бортаковский А.С., Пантелеев А.В.* Достаточные условия оптимальности управления непрерывно-дискретными системами // АиТ. 1987. № 7. С. 57–66.
6. *Акманова С.В.* Об управляемости и стабилизации нелинейных непрерывно-дискретных динамических систем // Изв. Иркут. гос. ун-та. Серия Математика. 2025. Т. 52. С. 3–20.
7. *Акманова С.В.* О стабилизации нелинейных непрерывно-дискретных динамических систем с постоянным шагом дискретизации // АиТ. 2024. № 9. С. 41–58.
8. *Бортаковский А.С.* Необходимые условия оптимальности переключаемых систем // Тр. ИММ УрО РАН. 2021. Т. 27. № 2. С. 67–78.
9. *Кротов В.Ф., Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.
10. *Альбрехт Э.Г., Сазанова Л.А.* О построении допустимых управлений в глобально управляемых нелинейных дискретных системах // Изв. УрГУ. 2003. № 26. С. 11–23.
11. *Сазанова Л.А.* Об управлении дискретными системами // Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Екатеринбург: УрГУ, 2002. 95 с.
12. *Красовский Н.Н.* Об одной задаче оптимального регулирования нелинейных систем // Прикладная математика и механика. 1959. Т. 23. Вып. 2. С. 209–229.
13. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
14. *Субботин А.И.* Об управлении движением квазилинейной системы // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3. № 7. С. 1113–1118.
15. *Альбрехт Э.Г.* Об управлении движением нелинейных систем // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2. № 3. С. 324–334.
16. *Альбрехт Э.Г.* Об оптимальном управлении движением квазилинейных систем // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. Вып. 3. С. 430–442.
17. *Болтянский В.Г.* Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973.
18. *Nevliudov I., Omarov M., Romashov Y.* One approach to find optimal controls for discrete dynamic systems with numerical methods application // Advanced Mathematical Models & Applications. 2023. V. 8. No. 3. P. 548–564.
19. Основы теории оптимального управления / *Под ред. В.Ф. Кротова.* М.: Высш. шк., 1990.
20. *Никольский М.С.* О линейных многошаговых управляемых процессах // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2020. № 4. С. 28–33.

21. *Расина И.В.* Итерационные алгоритмы оптимизации дискретно-непрерывных процессов // АиТ. 2012. № 10. С. 3–17. http://mi.mathnet.ru/rus/at4078
22. *Wigström O., Lennartson B.* An Integrated CP/OR method for optimal control of modular hybrid systems // 12th IFAC/IEEE Workshop on discrete event systems. 2014. P. 486–491.
23. *Бортаковский А.С.* Достаточные условия оптимальности гибридных систем переменной размерности // Тр. МИАН. 2020. Т. 308. С. 88–100. https://www.mathnet.ru/rus/tm4050
24. *Урюпин И.В.* Оптимизация переключений непрерывно-дискретных управляемых процессов // Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. М.: МАИ, 2022. 97 с.
25. *Юмагулов М.Г., Акманова С.В.* Об устойчивости точек равновесия нелинейных непрерывно-дискретных динамических систем // Уфим. мат. журн. 2023. Т. 15. № 2. С. 85–100.
26. *Кваркернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
27. *Красовский Н.Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений. Дополнение IV / Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. С. 475–514.
28. *Диго Г.Б., Диго Н.Б.* Нахождение оценки неизвестной константы Липшица при оптимизации алгоритмически заданной функции // Информатика и системы управления. 2007. № 1(13). С. 92–97.
29. *Лагоша Б.А., Апалькова Т.Г.* Оптимальное управление в экономике: теория и приложения. М.: Финансы и статистика, 2008.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Матасовым.

Поступила в редакцию 05.04.2025

После доработки 17.10.2025

Принята к публикации 21.10.2025