

© 2026 г. В.М. АБДУЛЛАЕВ, д-р физ.-мат. наук (vaqif\_ab@ Rambler.ru)  
(Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности, Баку;  
Институт математики, Баку;  
Азербайджанский университет архитектуры и строительства, Баку),  
В.А. ГАШИМОВ, канд. физ.-мат. наук (vugarhashimov@gmail.com)  
(Институт математики, Баку)

## ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ НАГРЕВА СТЕРЖНЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕКУЩЕЙ И ПРОШЕДШЕЙ ВО ВРЕМЕНИ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

Рассматривается задача оптимального граничного управления с обратной связью процессом нагрева стержня. На стержне размещаются устройства, осуществляющие замеры текущих значений температуры. Для формирования краевого управления предложена линейная зависимость его значения от замеренных значений температуры как в текущий, так и в прошедшие моменты времени. Участвующие в этой зависимости постоянные во времени коэффициенты являются оптимизируемыми параметрами обратной связи. В результате задача управления с обратной связью формулируется как задача параметрического оптимального управления объектом с распределенными параметрами. Для определения оптимальных значений оптимизируемых параметров получены формулы для компонентов градиента целевого функционала. Эти формулы позволяют использовать для определения параметров эффективные методы конечномерной оптимизации первого порядка. Приведены численные результаты компьютерных экспериментов, проведен их анализ.

*Ключевые слова:* граничное управление, нагрев стержня, обратная связь, точка замера, параметры обратной связи, градиент функционала.

DOI: 10.7868/S2413977726010035

### 1. Введение

В данной работе исследуется задача оптимального управления краевым условием процесса нагрева стержня. Обратная связь осуществляется за счет замеров температуры во внутренних точках стержня, значения которых используются для формирования текущего значения краевого управления. Особенность рассматриваемой в данной работе обратной связи заключается в том, что зависимость значения краевого управления включает замеренные значения температуры в точках замера как в текущий, так и в прошедший моменты времени. В этом случае задача синтеза краевого управления приводится к определению оптимальных значений коэффициентов, участвующих

в зависимости значения краевого управления от замеренных значений температуры в точках замера.

Отметим, что число публикаций, посвященных исследованию, а тем более численному решению задач оптимального управления объектами, описываемыми дифференциальными уравнениями с частными производными [1–4], существенно уступает числу публикаций, связанных с задачами управления системами с сосредоточенными параметрами [5–9]. Это объясняется сложностью исследования и численного решения краевых задач, описываемых системами дифференциальных уравнений с частными производными, а также и сложностью реализации систем управления на объектах с распределенными параметрами [10–12]. Развитие измерительных средств, средств телемеханики, компьютерных технологий, методов вычислительной математики в последние десятилетия позволило разрабатывать и внедрять системы управления и регулирования с обратной связью сложными техническими объектами и технологическими процессами как с сосредоточенными, так и с распределенными параметрами в реальном масштабе времени [13–18].

Отметим, что предлагаемый в данной работе подход к управлению с обратной связью процессом нагрева стержня с использованием предыстории проведенных измерений, конечно, более трудоемкий для реализации, чем с использованием только текущих значений замеров. Но с учетом современного развития состояния технических средств реализация таких систем уже стала вполне реальна.

Полученные в работе формулы для компонентов градиента целевого функционала по параметрам обратной связи позволяют использовать для определения оптимальных значений параметров эффективные численные методы и пакеты прикладных программ по конечномерной оптимизации первого порядка [5, 19]. В работе приводятся результаты компьютерных экспериментов, полученные при решении тестовых задач краевого управления с обратной связью. Проведен анализ полученных численных результатов.

## 2. Постановка задачи

Рассматривается задача оптимального граничного управления (регулирования) процессом нагрева стержня, подогреваемого с одного конца. Температура в точках стержня описывается следующим дифференциальным уравнением параболического типа:

$$(2.1) \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \mu_1 [\theta - u(x, t)],$$
$$(x, t) \in \Omega = (0, l) \times (0, t_f],$$

с начальным условием

$$(2.2) \quad u(x, t) = \gamma(x; \varphi), \quad \varphi = \text{const} \in \mathbb{R}^m, \quad x \in (0, l), \quad t \leq 0,$$

и краевыми условиями

$$(2.3) \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = -\mu_2(\vartheta(t) - u(0, t)), \quad 0 \leq t \leq t_f,$$

$$(2.4) \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l} = \mu_2(\theta - u(l, t)), \quad 0 \leq t \leq t_f.$$

Здесь:  $u(x, t)$  – непрерывно дифференцируемая по  $t \in (0, t_f]$  и дважды непрерывно дифференцируемая по  $x \in (0, l)$  функция, определяющая температуру стержня в момент времени  $t \in [0, t_f]$  в точке  $x \in [0, l]$ ;  $l$  – длина стержня;  $t_f$  – время окончания процесса нагрева;  $\theta$  – постоянная во времени температура внешней среды, заданная не точно, а определенная множеством  $\Theta$  возможных значений  $\theta$  и функцией плотности распределения  $\rho_\Theta(\theta)$  такой, что

$$\rho_\Theta(\theta) \geq 0, \quad \int_{\Theta} \rho_\Theta(\theta) d\theta = 1;$$

$\mu_1, \mu_2$  – заданные коэффициенты теплообмена между стержнями и внешней средой.

Согласно условию (2.2) температура в точках стержня до начала процесса нагрева определена известной параметрически заданной функцией  $\gamma(x; \varphi)$ . Она зависит от постоянного во времени  $m$ -мерного вектора параметров  $\varphi$ , значения которого точно не заданы, но известно множество  $\Phi$  возможных значений параметров  $\varphi$  и функция плотности распределения  $\rho_\Phi(\varphi)$  такая, что

$$(2.5) \quad \rho_\Phi(\varphi) \geq 0, \quad \int_{\Phi} \rho_\Phi(\varphi) d\varphi = 1.$$

В частности, возможно, что начальная температура постоянна по длине стержня, т.е.  $\gamma(x; \varphi) = \varphi \in \Phi \in R$ .

Множества  $\Theta$  и (или)  $\Phi$  могут быть заданы как конечные множества

$$\Theta = \{\theta_i : i = 1, \dots, N_\theta\}, \quad \Phi = \{\varphi_j : j = 1, \dots, N_\varphi\}$$

с заданными значениями вероятностей для их элементов:

$$p_i^\theta = p(\theta = \theta_i), \quad p_j^\varphi = p(\varphi = \varphi_j), \quad i = 1, \dots, N_\theta, \quad j = 1, \dots, N_\varphi,$$

$$(2.6) \quad \sum_{i=1}^{N_\theta} p_i^\theta = 1, \quad \sum_{j=1}^{N_\varphi} p_j^\varphi = 1.$$

Кусочно-непрерывная функция  $\vartheta(t)$ ,  $t \in [0, t_f]$  является оптимизируемым управляющим воздействием для рассматриваемого процесса нагрева стержня. Она определяет краевое условие (2.4) на левом конце стержня и ее назы-

вают краевым управлением [5]. Пусть, исходя из технических или технологических соображений, она должна удовлетворять ограничению:

$$(2.7) \quad \underline{\vartheta} \leq \vartheta(t) \leq \bar{\vartheta}, \quad t \in [0, t_f],$$

где  $\underline{\vartheta}, \bar{\vartheta}$  – заданные величины.

Задача управления рассматриваемым процессом нагрева заключается в отыскании такой управляющей функции  $\vartheta(t)$ , которая согласно (2.3) влияет на температуру стержня на левом конце, удовлетворяет условию (2.7) и доставляет минимальное значение следующему функционалу:

$$(2.8) \quad J(\vartheta) = \int_{\Phi} \int_{\Theta} I(\vartheta; \varphi, \theta) \rho_{\Phi}(\varphi) d\theta d\varphi,$$

$$I(\vartheta; \varphi, \theta) = \int_0^l \mu(x) (u(x, t_f; \vartheta, \varphi, \theta) - U(x))^2 dx + \sigma \int_0^{t_f} \vartheta^2(t) dt.$$

Здесь  $u(x, t) = u(x, t; \vartheta, \varphi, \theta)$  – непрерывно дифференцируемая по  $t \in [0, t_f]$  и дважды непрерывно дифференцируемая по  $x \in (0, l)$  функция, являющаяся решением начально-краевой задачи (2.1)–(2.4) при произвольно заданных допустимых управлении  $\vartheta(t)$ , параметрах  $\varphi$  начальной функции  $\gamma(x; \varphi)$  и температуре внешней среды  $\theta$ ;  $U(x)$ ,  $x \in (0, l)$  – кусочно-непрерывная функция, определяющая желаемое распределение температуры на стержне в конце процесса нагрева;  $\mu(x) \geq 0$ ,  $x \in (0, l)$  – заданная непрерывная весовая функция;  $\sigma > 0$  – параметр регуляризации целевого функционала.

Специфической особенностью целевого функционала (2.8) является то, что здесь оценивается управление  $\vartheta(t)$  не по поведению одной фазовой траектории  $u(x, t)$  при каких-либо допустимых заданных параметрах  $\varphi$  начальной функции  $\gamma(x; \varphi)$  и температуре внешней среды  $\theta$ , а в целом для пучка фазовых траекторий. Пучок содержит получаемые из решения краевой задачи (2.1)–(2.5) фазовые траектории при всех допустимых параметрах  $\varphi$  и  $\theta$ . Таким образом, можно сказать, что в рассматриваемой задаче оптимального управления ищется краевое управление  $\vartheta(t)$ , которое доставляет функционалу (2.8) минимальное значение в среднем по всему множеству  $\Phi$  параметров  $\varphi$  начальной функции  $\gamma(x; \varphi)$  и множеству  $\Theta$  значений температуры внешней среды  $\theta$ .

Пусть для управления рассматриваемым процессом нагрева используется обратная связь по состоянию процесса. А именно, в некоторых  $L$  точках  $\xi_i \in (0, l)$ ,  $i = 1, \dots, L$ , ведутся замеры температуры непрерывно во времени:

$$u_i(t) = u(\xi_i, t), \quad i = 1, \dots, L, \quad t \in (0, t_f],$$

или в заданные дискретные моменты времени  $\bar{t}_j \in (0, t_f]$ ,  $j = 1, \dots, M$ :

$$(2.9) \quad u_{ij} = u(\xi_i, \bar{t}_j), \quad i = 1, \dots, L, \quad j = 1, \dots, M.$$

Замеренные значения температуры используем для формирования текущего значения управления. В случае непрерывно проводимых замеров используем следующую зависимость:

$$(2.10) \quad \vartheta(t) = \sum_{i=1}^L [k_{1i}(u(\xi_i, t) - U_i) + k_{2i}(u(\xi_i, t - \tau) - U_i)], \quad t \in [0, t_f],$$

$$U_i = U(\xi_i), \quad i = 1, \dots, L.$$

Здесь  $U_i = U(\xi_i)$ ,  $i = 1, \dots, L$ ,  $\tau > 0$  – заданная величина, определяемая экспериментально, и зависит от динамики процесса нагрева. А именно, при сильной динамике величина  $\tau$  должна быть мала, при слабой динамике величина  $\tau$  должна выбираться большой с тем, чтобы значения  $u(\xi_i, t)$  и  $u(\xi_i, t - \tau)$  были достаточно различными.

Оптимизируемые постоянные коэффициенты  $k_{1i}$ ,  $k_{2i}$ ,  $i = 1, \dots, L$ , будем называть параметрами обратной связи.

В случае дискретной обратной связи (2.10) для формирования значений управления  $\vartheta(t)$  используем следующую зависимость:

$$(2.11) \quad \vartheta(t) = \vartheta_{ij} = \sum_{i=1}^L [k_{1i}(u(\xi_i, \bar{t}_j) - U_i) + k_{2i}(u(\xi_i, \bar{t}_{j-1}) - U_i)],$$

$$t \in [\bar{t}_j, \bar{t}_{j+1}).$$

Ясно, что краевое управление является в общем случае кусочно-постоянной функцией с разрывами в дискретные моменты времени проведения замеров.

Подставляя зависимость (2.10) в краевое условие (2.3), получим,  $t \in [0, t_f]$ :

$$(2.12) \quad \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} =$$

$$= -\mu_2 \left( \sum_{i=1}^L [k_{1i}(u(\xi_i, t) - U_i) + k_{2i}(u(\xi_i, t - \tau) - U_i)] - u(0, t) \right).$$

Новое краевое условие (2.12) имеет две особенности. Во-первых, оно содержит запаздывание во времени, во-вторых, оно является нелокальным краевым условием, связывающим поведение неизвестной функции на границе стержня с ее значениями внутри стержня в текущий и прошедший моменты времени [20–23].

В случае дискретной обратной связи краевое условие (2.3) примет вид

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = -\mu_2 \left( \sum_{i=1}^L [k_{1i}(u_{ij} - U_i) + k_{2i}(u_{ij-1} - U_i)] - u(0, t) \right),$$

$$t \in [t_{j-1}, t_j], \quad j = 1, \dots, M.$$

Займемся ограничением (2.7) на управляющую функцию  $\vartheta(t)$  с учетом зависимости (2.10). Будем предполагать, что из технологических соображений известно, что температура в точках стержня при всевозможных допустимых режимах нагрева, параметрах начальных условий и температуре внешней среды удовлетворяет условию:

$$(2.13) \quad \underline{u} \leq u(x, t; \vartheta, \varphi, \theta) \leq \bar{u}, \quad \varphi \in \Phi, \quad \theta \in \Theta, \quad x \in (0, l), \quad t \in [0, t_f].$$

Здесь  $\underline{u}, \bar{u}$  являются заданными значениями, определяющими диапазон возможных значений температуры в точках стержня. Из (2.10), учитывая (2.7), получим следующие условия на параметры непрерывной обратной связи:

$$(2.14) \quad \underline{\vartheta} \leq \sum_{i=1}^L [k_{1i}(u(\xi_i, t) - U_i) + k_{2i}(u(\xi_i, t - \tau) - U_i)] \leq \bar{\vartheta}.$$

Выберем величину  $\tau$  достаточно малой настолько, что значения  $u_i(t) = u(\xi_i, t)$  и  $u_i(t - \tau) = u(\xi_i, t - \tau)$  при каждом  $t \in [0, t_f]$  будут близки и не могут из практических соображений принимать значения на разных концах отрезка  $[\underline{u}, \bar{u}]$ . Тогда из (2.14) имеем:

$$(2.15) \quad \underline{\vartheta} \leq \sum_{i=1}^L [(k_{1i} + k_{2i}) u_i(t) - (k_{1i} + k_{2i}) U_i] \leq \bar{\vartheta}, \quad t \in (0, t_f].$$

При этом значения температуры в разных точках замера могут принимать значения на разных концах отрезка  $[\underline{u}, \bar{u}]$ . Введем в  $L$ -мерном пространстве куб с  $N = 2^L$  вершинами в точках

$$T_1 = (\underline{u}, \underline{u}, \dots, \underline{u})^T \in \mathbb{R}^L, \quad T_2 = (\underline{u}, \underline{u}, \dots, \bar{u})^T \in \mathbb{R}^L, \quad \dots, \\ T_{N-1} = (\underline{u}, \bar{u}, \dots, \bar{u})^T \in \mathbb{R}^L, \quad T_N = (\bar{u}, \bar{u}, \dots, \bar{u})^T \in \mathbb{R}^L.$$

Учитывая линейность неравенств (2.15) по коэффициентам обратной связи, вводя векторы

$$U = (U_1, U_2, \dots, U_L)^T, \quad K_1 = (k_{11}, k_{12}, \dots, k_{1L})^T, \quad K_2 = (k_{21}, k_{22}, \dots, k_{2L})^T,$$

из (2.15) получим  $N$  линейных ограничений на параметры  $K_1, K_2$ :

$$(2.16) \quad \underline{\vartheta} \leq \langle K_1 + K_2, T_s \rangle - \langle K_1 + K_2, U \rangle \leq \bar{\vartheta}, \quad s = 1, \dots, N.$$

Здесь обозначение  $\langle a, b \rangle$  означает скалярное произведение векторов  $a, b$ .

Несложно показать, что полученные ограничения (2.16) на параметры непрерывной обратной связи будут верны и в случае дискретной обратной связи вида (2.11).

Введем обозначения для оптимизируемых коэффициентов обратной связи и мест размещения точек замера:

$$\mathbf{K} = (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^{2L}.$$

Целевой функционал (2.8) в случае задачи управления с обратной связью запишем так:

$$(2.17) \quad J(\mathbf{K}) = \int_{\Phi} \int_{\Theta} I(\mathbf{K}; \varphi, \theta) \rho_{\Phi}(\varphi) d\theta d\varphi,$$

$$(2.18) \quad I(\mathbf{K}; \varphi, \theta) = \int_0^l \mu(x) (u(x, t_f; \mathbf{K}, \varphi, \theta) - U(x))^2 dx + \sigma \|\mathbf{K}\|_{\mathbb{R}^{2L}}^2.$$

Таким образом, рассматриваемая задача оптимального управления крайвым условием как с непрерывной, так и с дискретной обратной связью, приведена к параметрической задаче оптимального управления.

Как видно из (2.10), (2.11), особенность предлагаемого подхода к управлению с обратной связью заключается в том, что используется не только текущая, но и прошедшая во времени информация о состоянии процесса в точках замера. Это позволяет при управлении процессом учитывать его динамику. Ясно, что предлагаемые зависимости (2.10), (2.11) можно усложнить, добавив, например, больше информации о результатах ранее проведенных замеров.

Важной особенностью полученной задачи параметрического оптимального управления является возможная невыпуклость (многоэкстремальность) целевого функционала (2.17), (2.18). Это следует из того, что в зависимостях (2.10) и (2.11) участвует произведение коэффициентов обратной связи и значений температуры стержня в точках замера, неявно зависящих от этих же коэффициентов. Отсюда следует, что для решения задачи оптимизации целевого функционала (2.17), (2.18) надо использовать методы нелокальной (глобальной) оптимизации. Авторами применялся метод “мультистарта”, использующий метод локальной оптимизации из разных начальных точек.

Учет особенности краевого условия (2.12), заключающегося в наличии в нем запаздывания, не вызывает сложностей, если применить известный метод шагов [23]. Для учета нелокальности этого условия при численном решении краевой задачи методом сеток можно использовать известные схемы метода прогонки [24, 25].

Для численного решения в целом полученной задачи параметрического оптимального управления с учетом линейности ограничений (2.16) на оптимизируемые параметры будет использован метод проекции градиента. С этой целью в следующем разделе будет доказана дифференцируемость целевого

функционала и получены формулы для компонентов его градиента. Полученные формулы позволят сформулировать необходимые условия локальной оптимальности оптимизируемых параметров [5, 19].

### 3. Подход к численному решению задачи синтеза управления

Для численного решения полученной задачи параметрического оптимального управления (2.1), (2.2), (2.4), (2.12), (2.17), с учетом линейности ограничений (2.13)–(2.16) на оптимизируемые параметры, а следовательно, выпуклости допустимой области параметров  $\mathbf{K}$ , предлагается использовать метод проекции градиента [5].

$$(3.1) \quad \mathbf{K}^{s+1} = \underset{(2.14)}{\text{Pr}} \left( \mathbf{K}^s - \alpha_s \text{grad}_{\mathbf{K}} J(\mathbf{K}^s) \right),$$

$$(3.2) \quad \alpha_s = \arg \min_{\alpha \geq 0} J \left( \underset{(2.14)}{\text{Pr}} \left( \mathbf{K}^s - \alpha \text{grad}_{\mathbf{K}} J(\mathbf{K}^s) \right) \right), \quad s = 0, 1, \dots$$

Здесь  $\text{grad}_{\mathbf{K}} J(\mathbf{K}) - 2L$ -мерный вектор компонент градиента целевого функционала (2.17), (2.18);  $\alpha_s$  – величина шага одномерной оптимизации по направлению антиградиента функционала на  $s$ -ой итерации, определяемой, например, методом золотого сечения;  $\mathbf{K}^0$  – некоторое начальное значение вектора отыскиваемых параметров (в случае, если оно не удовлетворяет ограничениям (2.12), (2.14), то необходимо его предварительно спроектировать на допустимую область). Для построения оператора проектирования  $\text{Pr}_{(2.14)}(\mathbf{K})$  произвольного вектора  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{2L}$  на допустимую область, определяемую линейными неравенствами (2.12), (2.16), имеются известные конструктивные формулы [5, 26].

Как было отмечено выше, полученная задача параметрического оптимального управления может быть многоэкстремальной по оптимизируемым параметрам  $\mathbf{K}$ , а метод (3.1), (3.2) позволяет отыскивать лишь ближайшую к точке  $\mathbf{K}^0 \in \mathbb{R}^{2L}$  точку локального минимума целевого функционала. Поэтому в расчетах использовался метод “мультистарта”, заключающийся в многократном применении итерационной процедуры (3.1), (3.2) для различных допустимых начальных точек  $\mathbf{K}^0$ . При этом за решение принимается тот вектор локального минимума  $\mathbf{K}^*$ , которому соответствует меньшее значение целевого функционала.

Ясно, что для реализации процедуры (3.1), (3.2) важную роль имеет вектор градиента целевого функционала  $\text{grad}_{\mathbf{K}} J(\mathbf{K})$ . Далее в теореме показана дифференцируемость целевого функционала  $J(\mathbf{K})$  и приведены формулы для компонентов его градиента.

*Теорема 1. При принятых допущениях на функции и параметры задачи оптимального управления (2.1), (2.2), (2.12), (2.4), (2.17), (2.18) с обратной связью (2.10) целевой функционал (2.17), (2.18) дифференцируем по допустимым значениям параметров  $\mathbf{K}$ , а компоненты градиента определяются*

формулами

$$(3.3) \quad \frac{\partial J(\mathbf{K})}{\partial k_{1i}} = \int_{\Phi} \int_{\Theta} \left[ \int_0^{t_f} a^2 \mu_2 \psi(0, t) (u(\xi_i, t) - U_i) dt + 2\sigma k_{1i} \right] \rho_{\Phi}(\varphi) d\theta d\varphi,$$

$$(3.4) \quad \frac{\partial J(\mathbf{K})}{\partial k_{2i}} = \int_{\Phi} \int_{\Theta} \left[ \int_0^{t_f - \tau} a^2 \mu_2 \psi(0, t + \tau) (u(\xi_i, t + \tau) - U_i) dt + 2\sigma k_{2i} \right] \rho_{\Phi}(\varphi) d\theta d\varphi,$$

где  $i = 1, \dots, L$ ,  $u(x, t) = u(x, t; \mathbf{K}, \varphi, \theta)$  – решение начально-краевой задачи (2.1), (2.2), (2.4), (2.14); почти всюду дважды дифференцируемая по  $x \in (0, l)$  и по  $t \in [0, t_f]$  функция  $\psi(x, t; \mathbf{K}, \varphi, \theta)$  является решением следующей сопряженной начально-краевой задачи при заданных допустимых значениях параметров  $\mathbf{K}, \varphi, \theta$ :

$$(3.5) \quad \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -a^2 \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} - \mu_1 \psi(x, t), \quad (x, t) \in \Omega = (0, l) \times (0, t_f],$$

$$(3.6) \quad \psi(x, t_f) = -2\mu(x) (u(x, t_f; \mathbf{K}, \varphi, \theta) - U(x)), \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$(3.7) \quad \psi_x(0, t) = \mu_2 \psi(0, t), \quad 0 \leq t \leq t_f,$$

$$(3.8) \quad \psi_x(l, t) = -\mu_2 \psi(l, t), \quad 0 \leq t \leq t_f,$$

в точках  $\xi_i$ ,  $i = 1, \dots, L$ , при  $t \in [0, t_f]$  должна удовлетворять условиям

$$(3.9) \quad \frac{\partial \psi(\xi_i^-, t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi(\xi_i^+, t)}{\partial x} + \frac{\partial \psi(\xi_i^+, t + \tau)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(\xi_i^-, t + \tau)}{\partial x} - k_{1i} \mu_2 \psi(0, t) - k_{2i} \mu_2 \psi(0, t + \tau), \quad 0 \leq t \leq t_f - \tau,$$

$$(3.10) \quad \psi_x(\xi_i^-, t) = \psi_x(\xi_i^+, t) - k_{1i} \mu_2 \psi(0, t), \quad t_f - \tau \leq t \leq t_f,$$

$$(3.11) \quad \psi(\xi_i^-, t) = \psi(\xi_i^+, t), \quad 0 \leq t \leq t_f.$$

Здесь  $\chi_{[0, t_f - \tau]}(t)$  – характеристическая функция:

$$\chi_{[0, t_f - \tau]}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [0, t_f - \tau], \\ 1, & t \in [0, t_f - \tau]. \end{cases}$$

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении.

В случае дискретной по времени обратной связи в виде зависимости (2.11) имеет место следующая

*Теорема 2.* При принятых допущениях на функции и параметры, участвующие в задаче (2.1), (2.2), (2.14), (2.4), (2.17), (2.18), целевой функционал (2.17), (2.18) при дискретной обратной связи (2.11) дифференцируем

по параметрам  $\mathbf{K}$  при их допустимых значениях, а компоненты градиента целевого функционала определяются формулами:

$$\frac{\partial J(\mathbf{K})}{\partial k_{1i}} = \int_{\Phi} \int_{\Theta} \left[ \sum_{j=0}^{M-1} \int_{\bar{t}_j}^{\bar{t}_j + \Delta t} a^2 \mu_2 \psi(0, t) (u(\xi_i, t) - U_i) dt + 2\sigma k_{1i} \right] \rho_{\Phi}(\varphi) d\theta d\varphi,$$

$$\bar{t}_j \leq t \leq \bar{t}_j + \Delta t,$$

$$\frac{\partial J(\mathbf{K})}{\partial k_{2i}} =$$

$$= \int_{\Phi} \int_{\Theta} \left[ \sum_{j=0}^{M-1} \int_{\bar{t}_j}^{\bar{t}_j + \Delta t - \tau} (a^2 \mu_2 \psi(0, t + \tau) (u(\xi_i, t + \tau) - U_i) dt) + 2\sigma k_{2i} \right] \rho_{\Phi}(\varphi) d\theta d\varphi,$$

$$\bar{t}_j - \tau \leq t \leq \bar{t}_j + \Delta t - \tau,$$

где  $i = 1, \dots, L$ , а функция  $\psi(x, t) = \psi(x, t; \mathbf{K}, \varphi, \theta)$  при заданных допустимых значениях параметров  $\mathbf{K}, \varphi, \theta$  и соответствующей функции  $u(x, t; \mathbf{K}, \varphi, \theta)$  – решения начально-краевой задачи (2.1), (2.2), (2.12), (2.4) определяется решением следующей сопряженной начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -a^2 \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} - \mu_1 \psi(x, t), \quad \bar{t}_j \leq t \leq \bar{t}_j + \Delta t, \quad j = 0, \dots, M-1.$$

$$\psi(x, t_f) = -2\mu(x) (u(x, t_f; \mathbf{K}, \varphi, \theta) - U(x)), \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$\psi_x(0, t) = \mu_2 \psi(0, t), \quad 0 \leq t \leq t_f, \quad \bar{t}_j \leq t \leq \bar{t}_j + \Delta t, \quad j = 0, \dots, M-1,$$

$$\psi_x(l, t) = -\mu_2 \psi(l, t), \quad 0 \leq t \leq t_f, \quad \bar{t}_j \leq t \leq \bar{t}_j + \Delta t, \quad j = 0, \dots, M-1,$$

в точках  $\xi_i, i = 1, \dots, L$ , при  $\bar{t}_j \leq t \leq \bar{t}_j + \Delta t$  должна удовлетворять условиям

$$\frac{\partial \psi(\xi_i^-, t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi(\xi_i^+, t)}{\partial x} + \frac{\partial \psi(\xi_i^+, t + \tau)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(\xi_i^-, t + \tau)}{\partial x} -$$

$$- \sum_{j=1}^{M-1} \delta(t - t_j) \int_{t_{j-1}}^{t_j} [k_{1i} \mu_2 \psi(0, t) + k_{2i} \mu_2 \psi(0, t + \tau)] dt,$$

$$\bar{t}_j \leq t \leq \bar{t}_j + \Delta t - \tau, \quad i = 1, \dots, L,$$

$$\frac{\partial \psi(\xi_i^-, t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi(\xi_i^+, t)}{\partial x} - \sum_{j=1}^{M-1} \delta(t - t_j) \int_{t_{j-1}}^{t_j} k_{1i} \mu_2 \psi(0, t) dt,$$

$$\bar{t}_j + \Delta t - \tau \leq t \leq \bar{t}_j + \Delta t, \quad i = 1, \dots, L,$$

$$\psi(\xi_i^+, t) = \psi(\xi_i^-, t), \quad \bar{t}_j \leq t \leq \bar{t}_j + \Delta t, \quad i = 1, \dots, L,$$

а в точках  $t_j, j = 0, \dots, M-1$  при  $x \in [0, l]$  удовлетворять условиям

$$\psi(x, t_j^-) = \psi(x, t_j^+), \quad j = 0, \dots, M-1.$$

Сформируем необходимые условия оптимальности параметров  $\mathbf{K}$  в вариационной форме.

*Теорема 3.* Для локальной оптимальности параметров  $\mathbf{K}^* \in \mathbb{R}^{2L}$  в задаче синтеза (2.1), (2.2), (2.4), (2.12), (2.17), (2.18) с непрерывной обратной связью (2.10) необходимо выполнение условия

$$(\text{grad}_{\mathbf{K}} J(\mathbf{K}), \mathbf{K} - \mathbf{K}^*) \geq 0$$

для произвольного допустимого вектора  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{2L}$ , удовлетворяющего условиям (2.14), где градиент целевого функционала (2.17), (2.18) определяется формулами (3.3), (3.4).

Аналогично формулируются необходимые условия оптимальности параметров для случая дискретной обратной связи. Доказательство теорем 2 и 3 см. в Приложении.

#### 4. Результаты компьютерных экспериментов

Приведем результаты численных экспериментов для следующих функций и значений параметров, участвующих в постановке задачи:

$$\begin{aligned} t_0 = 0, \quad t_f = 2, \quad a = 1, \quad \mu_1 = 0,1, \quad \mu(x) = 0,1, \quad l = 1, \\ \Phi = \{40, 45, 50\}, \quad \Theta = \{5, 6, 7\}, \quad \rho_{\Phi}(\varphi_i) = \rho_{\Theta}(\theta_i) = \frac{1}{3}, \quad i = 1, 2, 3, \\ \underline{v} = 10, \quad \bar{v} = 750, \quad U(x) = 70, \quad x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Для численного решения прямой и сопряженной начально-краевых задач использовалась неявная схема метода сеток [19]. Эксперименты проводились для разных значений шагов сеточной области. В приводимых ниже результатах экспериментов использовались шаги  $h_x = 0,01$ ,  $h_t = 0,05$ .

Для учета нелокальности в левом краевом условии (2.12) использовался подход, основанный на схеме переноса краевого условия, предложенный в [20–22]. Для учета запаздывания по времени в краевом условии был применен метод шагов с величиной шага, равной  $\tau$  [23].

Задача управления с обратной связью решалась при двух разных начальных значениях оптимизируемых параметров.

В табл. 1 для каждого набора начальных значений оптимизируемых параметров приведены значения компонентов нормированных градиентов, вычисленных по предложенным формулам (3.3), (3.4) и с использованием центральной конечно-разностной аппроксимации производной функционала по формуле:

$$(4.1) \quad \partial J(\mathbf{K}) / \partial \mathbf{K}_j \approx (J(\mathbf{K} + \varepsilon e_j) - J(\mathbf{K} - \varepsilon e_j)) / 2\varepsilon,$$

где  $\mathbf{K}_j$  –  $j$ -ая компонента  $n$ -мерного оптимизируемого вектора  $\mathbf{K}$ , представляющего совокупность оптимизируемых параметров  $k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}$ ;  $e_j$  –  $n$ -мерный вектор, состоящий из нулей, кроме  $j$ -ой компоненты, равной единице. Величину  $\varepsilon$  в экспериментах приходилось варьировать, а в таблицу включены наиболее приемлемые результаты.

**Таблица 1.** Значения компонент нормированных градиентов функционала, вычисленных по формулам (3.5)–(3.7) и (4.1) при значениях параметров, приведенных в табл. 2

$N$	Формулы	$\nabla_{k_{11}}^{norma} J$	$\nabla_{k_{12}}^{norma} J$	$\nabla_{k_{21}}^{norma} J$	$\nabla_{k_{22}}^{norma} J$
1	(3.3), (3.4)	0,286391	0,437807	0,354151	0,775162
	(4.1)	0,286693	0,437915	0,354402	0,774879
2	(3.3), (3.4)	0,008363	-0,55936	-0,698830	-0,445737
	(4.1)	0,012542	-0,55928	-0,699544	-0,444614
3	(3.3), (3.4)	0,322336	-0,585921	0,276813	0,823887
	(4.1)	0,322786	-0,586143	0,278189	0,824126

**Таблица 2.** Начальные и полученные значения оптимизируемых параметров и соответствующие значения функционала при  $L = 2$

$N$	$(k_{11}^0; k_{12}^0); (k_{21}^0; k_{22}^0)$	$J(\mathbf{K})$	$(k_{11}^*; k_{12}^*); (k_{21}^*; k_{22}^*)$	$J(\mathbf{K}^*)$
1	(2,00; 5,00); (4,00; 7,00)	2132,76	(1,497; 2,499); (3,496; 3,001)	0,00043142
2	(0,20; 0,70); (0,40; 0,90)	2714,32	(1,399; 2,600); (3,194; 2,800)	0,00056845
3	(2,50; 1,50); (0,40; 3,00)	2478,19	(1,502; 2,4563); (3,3212; 2,925)	0,00048367

В табл. 2 приведены начальные и полученные оптимальные значения оптимизируемых параметров  $\mathbf{K}$  при обратной связи (2.10) при числе точек замера  $L = 2$ .

Были проведены численные эксперименты, в которых точные значения наблюдаемых состояний процесса в точках замера  $u(\xi_1, t), u(\xi_2, t)$  при  $L = 2$  зашумлялись случайными помехами по формуле

$$u(t; \mathbf{K}^*) = u(\xi_i, t; \mathbf{K}^*) = u(\xi_i, t; \mathbf{K}^*)(1 + \chi(2\sigma_i - 1)), \quad i = 1, 2,$$

где  $u(\xi_i, t; \mathbf{K}^*)$  – расчетное значение решения прямой начально-краевой задачи в точке  $x = \xi_i$  при  $t \in [0, t_f]$ ,  $\sigma_i$  – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке  $[0, 1]$ ,  $\chi$  – уровень помехи.

На рис. 1 приведены графики функций, определяющие по длине стержня значения  $\Delta u(x, t_f; \mathbf{K}^*, \chi) = u(x, t_f; \mathbf{K}^*, \chi) - U(x)$  – отклонения полученных температур от желаемой температуры при уровнях помех, равных 0%

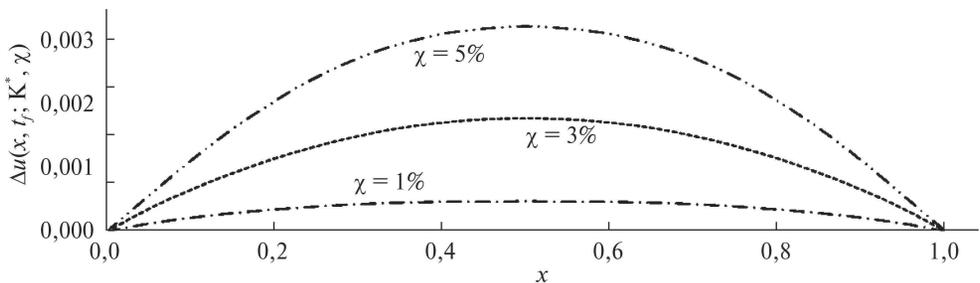


Рис. 1. Графики отклонений полученных функций распределения температуры на стержне от желаемой  $U(x)$  при разных уровнях помехи  $\chi$ .

(без помех) и 1%, 3%, 5%, соответствующих значениям  $\chi$ , равным 0; 0,01; 0,03; 0,05.

Проводились сравнительные эксперименты предлагаемого подхода к синтезу управления с решением задачи синтеза управления с обратной связью без использования предыдущих по времени результатов замеров в виде [16]:

$$(4.2) \quad \vartheta(t; \mathbf{K}) = \sum_{i=1}^L k_{1j}(u(\xi_i, t) - U_i), \quad t \in [t_0, t_f].$$

Как видно, в (4.2) для формирования текущего значения управления  $\vartheta(t)$  не используется информация о фазовом состоянии в предыдущие моменты времени.

В табл. 3 приведены результаты решения задачи синтеза краевого управления с применением для обратной связи формулы (4.2). Эксперименты проводились для трех различных начальных значений оптимизируемых параметров.

**Таблица 3.** Начальные и полученные значения параметров обратной связи (4.2) и целевого функционала

$N$	$(k_{11}^0; k_{12}^0)$	$J(\mathbf{K}^0)$	$(k_{11}^*; k_{12}^*)$	$J(\mathbf{K}^*)$
1	(2,00; 5,00)	2012,37	(1,2412; 4,4215)	0,0866534
2	(0,20; 0,70)	1987,13	(1,6512; 3,1265)	0,0872112
3	(2,50; 1,50)	2179,33	(2,2451; 1,1532)	0,0858423

На рис. 2 приведены графики функций отклонения температуры от желаемой для полученных параметров при  $t > t_f = 1$ . Как видно из графиков, процесс нагрева продолжает устанавливаться, несмотря на то, что задача синтеза решалась на интервале  $[0, 1]$ , т.е.  $t_f = 1$ .

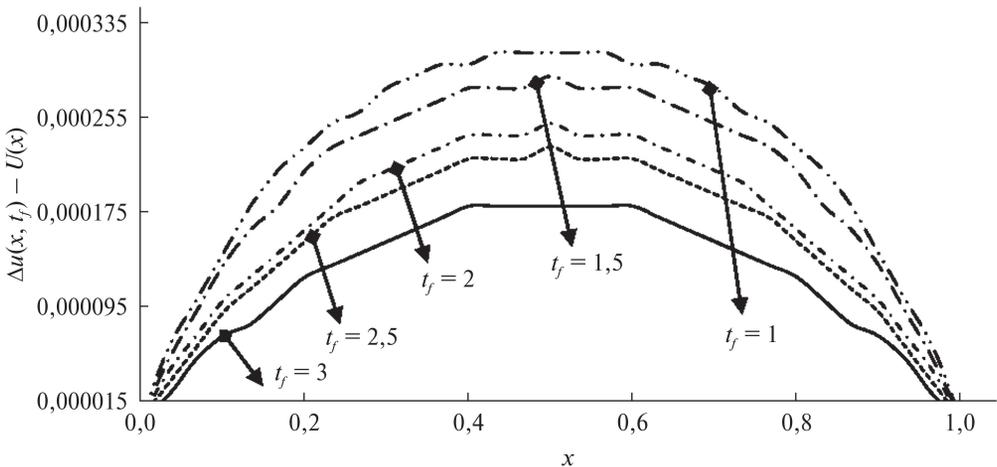


Рис. 2. Распределение температуры по стержню при разных  $t \in [1, 3]$  с увеличением масштаба по оси ординат.

## 5. Заключение

Исследуется задача оптимального синтеза краевого управления процессом нагрева стержня. Приводится постановка задачи, в которой предложена линейная зависимость значения краевого управления от замеренных значений температуры стержня в точках замера как в текущий, так и в прошедшие моменты времени. Оптимизируемыми в задаче являются: постоянные во времени параметры обратной связи, являющиеся коэффициентами, участвующими в зависимости значения управления от значений температуры в точках замера.

Определение значений параметров обратной связи приводит исходную задачу к параметрической задаче оптимального управления с распределенными параметрами. Для ее численного решения используются численные методы оптимизации первого порядка. Проведены компьютерные эксперименты.

Предлагаемый в работе подход к синтезу краевого управления и метод исследования можно распространить на другие виды дифференциальных уравнений с частными производными с другими начальными и краевыми условиями.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Доказательство теоремы 1.

Из взаимной независимости возможных значений параметров начальных условий  $\gamma(x; \varphi)$  при различных параметрах  $\varphi$  и внешних воздействий  $\theta$  имеет место:

$$(П.1) \quad \begin{aligned} \operatorname{grad}_{\mathbf{K}} J(\mathbf{K}) &= \operatorname{grad}_{\mathbf{K}} \int_{\Phi} \int_{\Theta} I(\mathbf{K}; \varphi, \theta) \rho_{\Phi}(\varphi) d\theta d\varphi = \\ &= \int_{\Phi} \int_{\Theta} \operatorname{grad}_{\mathbf{K}} I(\mathbf{K}; \varphi, \theta) \rho_{\Phi}(\varphi) d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

Поэтому займемся исследованием дифференцируемости функционала  $I(\mathbf{K}; \varphi, \theta)$  и получением формул для компонент его градиента по оптимизируемым параметрам  $\mathbf{K}$  при каких-либо заданных допустимых параметрах  $\varphi \in \Phi$ ,  $\theta \in \Theta$ .

Для доказательства теоремы используем известный метод приращения оптимизируемых параметров и оценки соответствующего приращения функционала [5, 27].

Пусть вектор параметров  $\mathbf{K} = (k_1, k_2)$ , которому соответствует решение  $u(x, t) = u(x, t, \mathbf{K})$ ,  $\tilde{u}(x, t) = \tilde{u}(x, t, \tilde{\mathbf{K}})$  краевой задачи (2.1), (2.2), (2.4), получил приращение  $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \Delta\mathbf{K} = (k_1 + \Delta k_1, k_2 + \Delta k_2)$  и этому вектору соответствует решение краевой задачи  $\tilde{u}(x, t) = u(x, t) + \Delta u(x, t)$ .

Из (2.1), (2.2), (2.4), (2.12) следует, что  $\Delta u(x, t)$  является решением краевой задачи

$$(П.2) \quad \frac{\partial \Delta u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \Delta u(x, t)}{\partial x^2} - \mu_1 \Delta u(x, t), \quad (x, t) \in \Omega = (0, l) \times (0, t_f],$$

$$(П.3) \quad \Delta u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, l],$$

$$(П.4) \quad \left. \frac{\partial \Delta u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = \mu_2 \Delta u(0, t) - \sum_{i=1}^L [k_{1i} \Delta u(\xi_i, t) + k_{2i} \Delta u(\xi_i, t - \tau)] + \sum_{i=1}^L [(u(\xi_i, t) - U_i) \Delta k_{1i} + (u(\xi_i, t - \tau) - U_i) \Delta k_{2i}], \quad t \in [0, t_f],$$

$$(П.5) \quad \left. \frac{\partial \Delta u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l} = -\mu_2 \Delta u(l, t), \quad t \in [0, t_f].$$

Для приращения функционала (2.17) несложно непосредственно получить представление:

$$(П.6) \quad \begin{aligned} \Delta I(\mathbf{K}; \varphi, \theta) &= I(\mathbf{K} + \Delta \mathbf{K}; \varphi, \theta) - I(\mathbf{K}; \varphi, \theta) = \\ &= 2 \int_0^l \mu(x) [u(x, t_f; \mathbf{K}, \varphi, \theta) - U(x)] \Delta u(x, t_f) dx + \\ &+ 2\sigma \sum_{i=1}^L [k_{1i} \Delta k_{1i} + k_{2i} \Delta k_{2i}] + R \left( \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}, \|\Delta \mathbf{K}\|_{\mathbb{R}^{2L}} \right), \end{aligned}$$

где остаточный член  $R \left( \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}, \|\Delta \mathbf{K}\|_{\mathbb{R}^{2L}} \right)$  включает слагаемые второго порядка малости относительно  $\|\Delta \mathbf{K}\|_{\mathbb{R}^{2L}}$  и  $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$ . В [5, 27] получены оценки зависимости приращения решения начально-краевой задачи относительно параболического уравнения в зависимости от изменения параметров, участвующих в задаче. Из этих оценок следует, что имеет место

$$\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \leq \eta \|\Delta \mathbf{K}\|_{\mathbb{R}^{2L}},$$

где величина  $\eta > 0$  не зависит от параметров  $\mathbf{K}$ . Получим формулы для компонентов градиента целевого функционала по параметрам  $\mathbf{K}$ . Пусть функция  $\psi(x, t)$  – некоторая пока произвольная непрерывная всюду в  $\Omega$  функция, дважды дифференцируемая по  $x$  при  $x \in (\xi_i, \xi_{i+1})$ ,  $i = 0, \dots, L$ ,  $\xi_0 = 0$ ,  $\xi_{L+1} = l$ , дифференцируемая по  $t$  при  $t \in (0, t_f)$ . Умножим (П.2) на  $\psi(x, t)$ , проинтегрируем результат по прямоугольнику  $\Omega$ . С учетом принятых пред-

положений и условий (П.4)–(П.5) будем иметь:

$$\begin{aligned}
 (\text{П.7}) \quad & \int_0^{t_f} \int_0^l \psi(x, t) \frac{\partial \Delta u(x, t)}{\partial t} dx dt - \\
 & - a^2 \sum_{i=0}^L \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \int_0^{t_f} \psi(x, t) \frac{\partial^2 \Delta u(x, t)}{\partial x^2} dt dx - \\
 & - \mu_1 \int_0^{t_f} \int_0^l \psi(x, t) \Delta u(x, t) dx dt = 0.
 \end{aligned}$$

Разобьем отрезок  $[0, l]$  на отрезки  $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ ,  $i = 0, \dots, L$ , проведем интегрирование по частям отдельно для первого и второго членов (3.5). Учитывая (П.3)–(П.5), имеем:

$$\begin{aligned}
 (\text{П.8}) \quad & \int_0^{t_f} \int_0^l \psi(x, t) \frac{\partial \Delta u(x, t)}{\partial t} dx dt = \\
 & = \int_0^l \psi(x, t_f) \Delta u(x, t_f) dx - \int_0^{t_f} \int_0^l \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \Delta u(x, t) dx dt,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{П.9}) \quad & a^2 \sum_{i=0}^L \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \int_0^{t_f} \psi(x, t) \frac{\partial^2 \Delta u(x, t)}{\partial x^2} dt dx = \\
 & = a^2 \int_0^{t_f} \left[ \left( \frac{\partial \psi(0, t)}{\partial x} - \mu_2 \psi(0, t) \right) \Delta u(0, t) - \right. \\
 & \quad \left. - \left( \frac{\partial \psi(l, t)}{\partial x} + \mu_2 \psi(l, t) \right) \Delta u(l, t) \right] dt + \\
 & + a^2 \sum_{i=1}^L \int_0^{t_f} \left[ \frac{\partial \psi(\xi_i^-, t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(\xi_i^+, t)}{\partial x} + k_{1i} \mu_2 \psi(0, t) \right] \Delta u(\xi_i, t) dt + \\
 & + a^2 \sum_{i=1}^L \int_0^{t_f - \tau} \left[ \frac{\partial \psi(\xi_i^-, t + \tau)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(\xi_i^+, t + \tau)}{\partial x} + \right. \\
 & \quad \left. + k_{2i} \mu_2 \psi(0, t + \tau) \right] \Delta u(\xi_i, t) dt +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a^2 \sum_{i=1}^L \int_0^{t_f} \left[ (\psi(\xi_i^+, t) - \psi(\xi_i^-, t)) \frac{\partial \Delta u(\xi_i, t)}{\partial x} \right] dt - \\
& - a^2 \sum_{i=1}^L \Delta k_{1i} \int_0^{t_f} \mu_2 \psi(0, t) (u(\xi_i, t) - U_i) dt - \\
& - a^2 \sum_{i=1}^L \Delta k_{2i} \int_0^{t_f - \tau} \mu_2 \psi(0, t + \tau) (u(\xi_i, t + \tau) - U_i) dt + \\
& + a^2 \int_0^{t_f} \int_0^l \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} \Delta u(x, t) dx dt.
\end{aligned}$$

Используя (П.6)–(П.9), для приращения функционала будем иметь:

$$\begin{aligned}
(\text{П.10}) \quad \Delta I(\mathbf{K}; \varphi, \theta) &= \int_0^l \left[ \psi(x, t_f) + 2\mu(x)(u(x, t_f; \mathbf{K}, \varphi, \theta) - \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - U(x)) \right] \Delta u(x, t_f) dx - \\
& - a^2 \int_0^{t_f} \left[ \left( \frac{\partial \psi(0, t)}{\partial x} - \mu_2 \psi(0, t) \right) \Delta u(0, t) - \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - \left( \frac{\partial \psi(l, t)}{\partial x} + \mu_2 \psi(l, t) \right) \Delta u(l, t) \right] dt + \\
& + \int_0^{t_f} \int_0^l \left[ -\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} - \mu_1 \psi(x, t) \right] \Delta u(x, t) dx dt + \\
& + a^2 \sum_{i=1}^L \int_0^{t_f - \tau} \left[ \frac{\partial \psi(\xi_i^-, t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(\xi_i^+, t)}{\partial x} + \frac{\partial \psi(\xi_i^-, t + \tau)}{\partial x} + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - \frac{\partial \psi(\xi_i^+, t + \tau)}{\partial x} + k_{1i} \mu_2 \psi(0, t) + k_{2i} \mu_2 \psi(0, t + \tau) \right] \Delta u(\xi_i, t) dt + \\
& + a^2 \sum_{i=1}^L \int_{t_f - \tau}^{t_f} \left[ \frac{\partial \psi(\xi_i^-, t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(\xi_i^+, t)}{\partial x} + k_{1i} \mu_2 \psi(0, t) \right] \Delta u(\xi_i, t) dt - \\
& - \sum_{i=1}^L \left\{ a^2 \int_0^{t_f} \mu_2 \psi(0, t) (u(\xi_i, t) - U_i) dt + 2\sigma k_{1i} \right\} \Delta k_{1i} -
\end{aligned}$$

$$-\sum_{i=1}^L \left\{ a^2 \int_0^{t_f-\tau} \psi(0, t+\tau) (u(\xi_i, t+\tau) - U_i) dt + 2\sigma k_{2i} \right\} \Delta k_{2i} + \\ + R(\|\Delta u\|, \|\Delta \mathbf{K}\|_{\mathbb{R}^{2L}}).$$

В силу произвольности функции  $\psi(x, t)$  потребуем, чтобы она почти всюду являлась решением начально-краевой задачи (3.5)–(3.11).

Учитывая, что компоненты градиента функционала определяются линейной частью приращения функционала при приращениях соответствующих аргументов, получим:

$$\frac{\partial I(\mathbf{K}; \varphi, \theta)}{\partial k_{1i}} = \int_0^{t_f} (a^2 \mu_2 \psi(0, t) (u(\xi_i, t) - U_i)) dt + 2\sigma k_{1i}, \\ i = 1, \dots, L, \quad 0 \leq t \leq t_f,$$

$$\frac{\partial I(\mathbf{K}; \varphi, \theta)}{\partial k_{2i}} = \int_0^{t_f-\tau} (a^2 \mu_2 \psi(0, t+\tau) (u(\xi_i, t+\tau) - U_i)) dt + 2\sigma k_{2i}, \\ i = 1, \dots, L, \quad 0 \leq t \leq t_f - \tau.$$

Отсюда с учетом формулы (П.1) следуют искомые формулы, приведенные в теореме 2.

Доказательство теоремы 2 проводится аналогично доказательству теоремы 1. Основное различие связано с формулами (2.11), (2.12), которые приводят к необходимости замены интегрирования по  $t$  в целом по отрезку  $[0, t_f]$  на сумму интегралов на отрезках  $[t_{j-1}, t_j]$ ,  $j = 1, \dots, M$ ,  $t_0 = 0$ ,  $t_M = t_f$ .

Доказательство теоремы 3 следует из известной теоремы об интегральных необходимых условиях оптимальности в задачах оптимизации [5, 27].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.
2. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1984.
3. Сиразетдинов Т.К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977.
4. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Численный системный анализ многокомпонентных распределенных систем. Киев: Наук. думка, 2009.
5. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
6. Егоров А.И. Основы теории управления. М.: Физматлит, 2004.
7. Поляк Б.Т., Шербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.

8. *Емельянов С.В., Коровин С.К.* Новые типы обратной связи: Управление при неопределенности. М.: Наука. Физматлит, 1997.
9. *Хлебников М.В., Щербakov П.С.* Синтез оптимальной обратной связи при ограниченном управлении // *АиТ.* 2014. Т. 75. № 2. С. 177–192.  
*Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S.* Optimal feedback design under bounded control // *Autom. Remote Control.* 2014. V. 75. No. 2. P. 320–322.
10. *Alessandri A., Gaggero M., Zoppoli R.* Feedback optimal control of distributed parameter systems by using finite-dimensional approximation schemes // *IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst.* 2012. V. 23. P. 984–996.
11. *Ray W.H.* Advanced Process Control. McGraw-Hill Book Company, 1981.
12. *Smyshlyaev A., Krstic M.* Explicit state and output feedback boundary controllers for partial differential equations // *Journal of Automatic Control.* 2003. V. 13. No. 2. P. 1–9.
13. *Liu W.* Boundary feedback stabilization of an unstable heat equation // *SIAM Journal on Control and Optimization.* 2003. V. 42. P. 1033–1043.
14. *Afifi L., Lasri K., Joundi M., Amimi N.* Feedback controls for exact remediability in disturbed dynamical systems // *IMA Journal of Mathematical Control and Information.* 2018. V. 35. No. 2. P. 411–425.
15. *Abdullayev V.M., Aida-Zade K.R.* Rod temperature regulation using current and time-delayed feedback // *Quaestiones Mathematicae.* 2023. V. 46. No. 10. P. 1991–2011.
16. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* Оптимизация размещения точек контроля при синтезе управления процессом нагрева // *АиТ.* 2017. Т. 78. № 9. С. 49–66.  
*Aida-zade K.R., Abdullayev V.M.* Optimizing placement of the control points at synthesis of the heating process control // *Autom. Remote Control.* 2017. V. 78. No. 9. P. 1585–1599.
17. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* Управление процессом нагрева стержня с использованием текущей и предыдущей по времени обратной связи // *АиТ.* 2022. Т. 83. № 1. С. 130–149.  
*Aida-zade K.R., Abdullayev V.M.* Controlling the Heating of a Rod Using the Current and Preceding Time Feedback // *Autom. Remote Control.* 2022 . V. 83. No. 1. P. 106–122.
18. *Айда-заде К.Р., Гашимов В.А.* Оптимизация размещения точек контроля в одной задаче синтеза граничного управления процессом нагрева стержня // *АиТ.* 2018. Т. 79. № 9. С. 122–142.  
*Aida-zade K.R., Hashimov V.A.* Optimization of Measurement Points Positioning in a Border Control Synthesis Problem for the Process of Heating a Rod // *Autom. Remote Control.* 2018. V. 79. No. 9. P. 1643–1660.
19. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Ленанд, 2014. 368 с.
20. *Assanova A.T., Dzhobulaeva Z.K., Imanchiyev A.E.* A Multi-Point Initial Problem for a Non-Classical System of a Partial Differential Equations // *Lobachevskii J. Math.* 2020. V. 41. No. 6. P. 1031–1042.
21. *Aida-zade K.R., Abdullayev V.M.* Optimization of the right-hand sides of nonlocal conditions of a controllable system with multipoint and integral objective functional // *Optimization.* 2024. V. 73. No. 1. P. 205–228.

22. *Abdullayev V.M., Aida-zade K.R.* Approach to the Numerical Solution of Optimal Control Problems for Loaded Differential Equations with Nonlocal Conditions // Comput. Math. Math. Phys. 2019. V. 59. No. 5. P. 696–707.
23. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
24. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
25. *Abdullayev V.M., Aida-zade K.R.* Finite-Difference Methods for Solving Loaded Parabolic Equation // Comput. Math. Math. Phys. 2016. V. 56. No. 1. P. 93–105.
26. *Полак Э.* Численные методы оптимизации. Единый подход. М.: Мир, 1974.
27. *Пшеничный Б.Н.* Необходимые условия экстремума. М.: Наука, 1982.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Кушнером.*

Поступила в редакцию 20.03.2025

После доработки 25.10.2025

Принята к публикации 27.10.2025