Автоматика и телемеханика, № 1, 2026

Линейные системы

© 2026 г. **В.И. НИКОНОВ, канд. физ.-мат. наук (nik_vl_@mail.ru)**
(Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва, Саранск)

ОБ АЛГЕБРО-ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Предлагается алгебро-геометрический подход к исследованию устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами относительно части переменных. Предложенный подход устанавливает взаимосвязь условий частичной устойчивости линейной системы с существованием инвариантных подпространств в исходном и сопряженном пространствах. Приведен пример, иллюстрирующий полученные результаты.

Ключевые слова: частичная устойчивость, минимальный аннулирующий многочлен, инвариантное подпространство, аннулятор.

DOI: 10.7868/S2413977726010024

1. Введение

Как отмечено в [1], интерес к задаче устойчивости по части переменных для линейных систем, по-видимому, возник еще в начале XX-го столетия. К настоящему времени теория устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами практически завершена. Основные этапы развития этой теории отражены в [1–8]. В цикле работ [9–11] по достижению координатного консенсуса в многоагентных системах установлено, что решаемая задача при специальном выборе управляющего воздействия и линейного преобразования фазового пространства приводится к задаче частичной устойчивости линейной системы с постоянными коэффициентами. В [12] рассматривалась задача частичного построения решений, которая, как отмечено авторами, «созвучна» задачам устойчивости [1, 2]. Результаты этих исследований позволяют получить необходимые и достаточные условия устойчивости для выбранных компонент фазового вектора произвольной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Развитием этого алгебраического подхода послужили работы [13, 14].

Анализируя полученные результаты, можно отметить, что основными подходами к исследованию частичной устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами являются метод функций Ляпунова, метод вспомогательных μ-систем и методы, основанные на методах дифференциальной и компьютерной алгебры. Критерий устойчивости линейных систем получен в [2] и сформулирован в терминах μ-систем. Другой критерий устойчивости в [15] опирается на жорданову нормальную форму линейного оператора, заданного матрицей системы в исходном базисе пространства. В [16] отмечена геометрическая природа частичной устойчивости. Геометрический подход исследования частичной устойчивости предложен в [17, 18].

Данная статья посвящена исследованию устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами. С использованием алгебро-геометрических свойств исходной системы получены необходимые и достаточные условия устойчивости линейных систем, выраженные в терминах двойственных линейных пространств, на которых действуют двойственные линейные операторы. Оказывается, если при определенных условиях некоторые параметры исследуемой системы лежат в инвариантном подпространстве одного из линейных операторов, то задача частичной устойчивости разбивается на две более простые задачи. Полученные результаты устанавливают связь устойчивости системы с внутренней геометрией в пространстве параметров, определяющих динамику исследуемой системы. Геометрические свойства системы позволяют получить условия, при выполнении которых возникает свойство инвариантности по отношению к свойству частичной устойчивости.

2. Постановка задачи

Исследуется устойчивость относительно заданной части компонент фазового вектора системы

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_* x(t), \tag{1}$$

где x – n-мерный фазовый вектор, A_* – $n \times n$ постоянная матрица с элементами из числового поля $\mathbb{F}$, $t \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$.

Предположим, что исследуется устойчивость по первым m компонентам фазового вектора x системы (1). Обозначим первую группу координат фазового вектора через вектор y, а остальные компоненты составят вектор z. В связи с этим систему (1) представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= Ay(t) + Bz(t), \\ \frac{dz(t)}{dt} &= Cy(t) + Dz(t), \end{aligned} \tag{2}$$

где $y \in \mathbb{F}^m$, $z \in \mathbb{F}^p$, $A \in \mathbb{F}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{F}^{m\times p}$, $C \in \mathbb{F}^{p\times m}$, $D \in \mathbb{F}^{p\times p}$, $n = m + p$, $p > 0$.

Требуется определить условия на коэффициенты исследуемой системы так, чтобы решение $x(t) \equiv 0$ системы (1), (2) было устойчивым по компонентам, входящим в вектор y, т.е. y-устойчивым.

3. Некоторые сведения из линейной алгебры

3.1. Сопряженное пространство. Двойственные пространства. Аннуляторы

Пусть $\mathcal{V}$ – произвольное линейное пространство над полем $\mathbb{F}$.

Определение 1 [19, с. 33]. *Функция $\xi : \mathcal{V} \to \mathbb{F}$ называется линейным функционалом, если она является гомоморфизмом линейных пространств, т.е. если*

$$\xi(\nu_1 + \nu_2) = \xi(\nu_1) + \xi(\nu_2)$$

и

$$\xi(k\nu) = k\xi(\nu)$$

$\forall \nu, \nu_1, \nu_2 \in \mathcal{V}$, $\forall k \in \mathbb{F}$. *Линейные функционалы называются также ковекторами пространства $\mathcal{V}$.*

Множество всех линейных функционалов представляет собой подпространство пространства всех функций на $\mathcal{V}$ и обозначается через $\mathcal{V}'$.

Линейные функционалы называются также ковекторами пространства $\mathcal{V}$.

Определение 2 [19, с. 33]. *Линейное пространство $\mathcal{V}'$ называется пространством, сопряженным пространству $\mathcal{V}$.*

Базис $e^1, \ldots, e^n$ пространства $\mathcal{V}'$, удовлетворяющий соотношению

$$e^j(e_i) = \delta_i^j, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n,$$

называется сопряженным или двойственным базису $e_1, \ldots, e_n$ пространства $\mathcal{V}$, где δ_i^j – символ Кронекера.

Пусть $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ – два линейных пространства над полем $\mathbb{F}$. Предположим, что любым двум векторам $\nu \in \mathcal{V}$, $w \in \mathcal{W}$ сопоставлено такое число $\nu \mapsto \langle \nu, w \rangle \in \mathbb{F}$, что выполнены следующие условия:

а) для каждого фиксированного $w \in \mathcal{W}$ функция $\nu \mapsto \langle \nu, w \rangle$ является линейным функционалом на $\mathcal{V}$;

б) для каждого фиксированного $\nu \in \mathcal{V}$ функция $w \mapsto \langle \nu, w \rangle$ является линейным функционалом на $\mathcal{W}$;

в) для каждого вектора $\nu \in \mathcal{V}$ существует такой вектор $w \in \mathcal{W}$, что $\langle \nu, w \rangle \neq 0$, и наоборот, для каждого вектора $w \in \mathcal{W}$ существует такой вектор $\nu \in \mathcal{V}$, что $\langle \nu, w \rangle \neq 0$.

Определение 3 [19, с. 36]. *Функция $\nu, w \mapsto \langle \nu, w \rangle$, удовлетворяющая условиям а), б) и в), называется спариванием между пространствами $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$. Пространства $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$, для которых существует хотя бы одно спаривание, называются двойственными. Обозначение: $\mathcal{V}|\mathcal{W}$.*

Предложение 1 [19, с. 36]. *Линейное пространство $\mathcal{V}$ двойственно сопряженному пространству $\mathcal{V}'$:*

$$\mathcal{V}|\mathcal{V}'.$$

Полагая для любых $\nu \in \mathcal{V}$ и $\varphi \in \mathcal{V}'$

$$\langle \nu, \varphi \rangle := \varphi(\nu),$$

убеждаемся, что указанное соотношение определяет спаривание пространств $\mathcal{V}$ и $\mathcal{V}'$.

Пусть $S \subset \mathcal{V}$ – произвольное подмножество линейного пространства $\mathcal{V}$.

Определение 4 [19, с. 40]. *Совокупность всех линейных функционалов $\xi \in \mathcal{V}'$, равных нулю на любом векторе $\nu \in S$, называется аннулятором множества S и обозначается символом $\operatorname{Ann}(S)$.*

Теорема 1 [20, с. 41]. *Если $\mathcal{M}$ – m-мерное подпространство n-мерного векторного пространства $\mathcal{V}$, то $\operatorname{Ann}(\mathcal{M})$ есть $(n-m)$-мерное подпространство пространства $\mathcal{V}'$.*

Теорема 2 [20, с. 42]. *Если $\mathcal{M}$ – подпространство конечномерного векторного пространства $\mathcal{V}$, то $\operatorname{Ann}(\operatorname{Ann}(\mathcal{M})) = \mathcal{M}$.*

Приведем основные свойства аннуляторов:

1) Если $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$ – подмножества векторного пространства и $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$, то $\operatorname{Ann}(\mathcal{J}) \subset \operatorname{Ann}(\mathcal{I})$.

2) Если $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ – подпространства конечномерного векторного пространства, то

$$\operatorname{Ann}(\mathcal{M} \cap \mathcal{N}) = \operatorname{Ann}(\mathcal{M}) + \operatorname{Ann}(\mathcal{N}),\ \operatorname{Ann}(\mathcal{M} + \mathcal{N}) = \operatorname{Ann}(\mathcal{M}) \cap \operatorname{Ann}(\mathcal{N}).$$

3) $\dim \mathcal{M} + \dim \operatorname{Ann}(\mathcal{M}) = \dim \mathcal{V}$.

3.2. Циклические инвариантные подпространства

Рассмотрим n-мерное векторное пространство $\mathcal{V}$ над некоторым полем $\mathbb{F}$ и линейный оператор $\mathcal{A}$ в этом пространстве.

Определение 5 [21, с. 68]. *Говорят, что многочлен $f(t)$ аннулирует линейный оператор $\mathcal{A}$, если $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$. Нормализованный многочлен минимальной степени, аннулирующий $\mathcal{A}$, называется минимальным многочленом оператора $\mathcal{A}$.*

Обозначим минимальный многочлен оператора $\mathcal{A}$ в виде

$$\mu_{\mathcal{A}}(t) = t^m + \mu_m t^{m-1} + \cdots + \mu_2 t + \mu_1.$$

Пусть вектор $x \in \mathcal{V}$. Многочлен $f(t)$, удовлетворяющий соотношению

$$f(\mathcal{A})x = 0,$$

называется аннулирующим многочленом вектора x, а многочлен наименьшей степени, аннулирующий вектор x, называется минимальным аннулирующим многочленом вектора x.

Если $f(t) = t^k + \alpha_k t^{k-1} + \cdots + \alpha_2 t + \alpha_1$ – минимальный аннулирующий многочлен вектора x, то линейное подпространство с базисом

$$x, \mathcal{A}x, \ldots, \mathcal{A}^{k-1}x$$

называется циклическим подпространством относительно линейного оператора $\mathcal{A}$.

4. Основные результаты

Зафиксируем некоторое числовое поле $\mathbb{F}$. Будем исследовать частичную устойчивость системы (1), (2) над выбранным полем.

Очевидно, что свойство y-устойчивости системы (2) является инвариантным относительно z-преобразований вида $z = S\overline{z}$, где $S \in \mathbb{F}^{p\times p}$ – постоянная невырожденная матрица, т.е. это свойство не зависит от выбора базиса в пространстве $\mathbb{F}^p$. Используя алгебро-геометрические свойства исследуемой системы, постараемся выбрать базис в фазовом подпространстве переменных $z_1, \ldots, z_p$ так, чтобы получить желаемые условия устойчивости.

Проведя невырожденную замену z-переменных, получаем эквивалентную относительно свойства частичной устойчивости систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= Ay(t) + BS\overline{z}(t), \\ \frac{d\overline{z}(t)}{dt} &= S^{-1}Cy(t) + S^{-1}DS\overline{z}(t). \end{aligned} \tag{3}$$

В связи с вышесказанным рассмотрим линейный оператор $\mathcal{D} : \mathbb{F}^p \to \mathbb{F}^p$ и соответствующий сопряженный оператор $\mathcal{D}^*$, действующий в сопряженном пространстве $\mathbb{F}^{p*}$ линейных функционалов на пространстве $\mathbb{F}^p$. При этом имеет место соотношение:

$$\langle \mathcal{D}s, \psi\rangle = \langle s, \mathcal{D}^*\psi\rangle = \psi\left(\mathcal{D}s\right) \ \forall s \in \mathbb{F}^p, \forall \psi \in \mathbb{F}^{p*}.$$

Введем в рассмотрение линейные функционалы $b_i^* = b_i(s) \in \mathbb{F}^{p*}$, $i = 1, \ldots, m$, и построим инвариантные циклические подпространства относительно линейного оператора $\mathcal{D}^*$ с образующими b_i^*, $(i = 1, \ldots, m)$:

$$\begin{aligned} &U_1^* = \operatorname{span}\left(b_1^*, \mathcal{D}^*b_1^*, \ldots, \mathcal{D}^{*k_1-1}b_1^*\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &U_i^* = \operatorname{span}\left(b_i^*, \mathcal{D}^*b_i^*, \ldots, \mathcal{D}^{*k_i-1}b_i^*\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &U_m^* = \operatorname{span}\left(b_m^*, \mathcal{D}^*b_m^*, \ldots, \mathcal{D}^{*k_m-1}b_m^*\right). \end{aligned}$$

Таким образом, имеют место соотношения:

$$\mathcal{D}^*U_i^* \subseteq U_i^*, \quad i = 1, \ldots, m.$$

П р е д л о ж е н и е 2. Линейные подпространства $W_i^* = U_1^* + \dots + U_i^*$, $i = 1, \dots, m$, являются инвариантными подпространствами линейного оператора $\mathcal{D}^*$.

Таким образом,

$$\mathcal{D}^* \left(U_1^* + \dots + U_i^*\right) \subseteq U_1^* + \dots + U_i^*, \ \ \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

Очевидно, имеет место последовательность включений подпространств:

$$\{0\} \subseteq U_1^* \subseteq U_1^* + U_2^* \subseteq \dots \subseteq U_1^* + U_2^* + \dots + U_m^* \subseteq \mathbb{F}^{p*}.$$

Но с учетом инвариантности будет справедлива и цепочка включений:

$$\mathcal{D}^*\{0\} \subseteq \mathcal{D}^* U_1^* \subseteq \mathcal{D}^* \left(U_1^* + U_2^*\right) \subseteq \dots \subseteq \mathcal{D}^* \left(U_1^* + U_2^* + \dots + U_m^*\right) \subseteq \mathcal{D}^* \mathbb{F}^{p*}.$$

Используя свойства аннуляторов, имеем:

$$\begin{gathered}\mathrm{Ann}\left(\{0\}\right) \supseteq \mathrm{Ann}\left(U_1^*\right) \supseteq \mathrm{Ann}\left(U_1^* + U_2^*\right) \supseteq \cdots \\ \cdots \supseteq \mathrm{Ann}\left(U_1^* + U_2^* + \dots + U_m^*\right) \supseteq \mathrm{Ann}\left(\mathbb{F}^{p*}\right).\end{gathered}$$

Последнюю цепочку включений можно представить в виде

$$\mathbb{F}^p \supseteq \mathrm{Ann}\left(U_1^*\right) \supseteq \cap_{i=1}^{2} \mathrm{Ann}\left(U_i^*\right) \supseteq \dots \supseteq \cap_{i=1}^{m} \mathrm{Ann}\left(U_i^*\right) \supseteq \{0\}.$$

Таким образом, справедливы включения:

$$\mathcal{D}^* \left(U_1^* + \dots + U_i^*\right) \subseteq U_1^* + \dots + U_i^*, \ \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

Т е о р е м а 3. Подпространство $\sum\limits_{i=1}^{m} U_i^*$ является инвариантным подпространством оператора $\mathcal{D}^*$, $\dim \left(\sum\limits_{i=1}^{m} U_i^*\right) = k \Leftrightarrow \cap_{i=1}^{m} \mathrm{Ann}\left(U_i^*\right)$ – инвариантное подпространство оператора $\mathcal{D}$, $\dim\left(\cap_{i=1}^{m} \mathrm{Ann}\left(U_i^*\right)\right) = p - k$.

С л е д с т в и е 1. $\sum_{i=1}^{m} U_i^* = \mathbb{F}^{p*} \Leftrightarrow \cap_{i=1}^{m} \mathrm{Ann}\left(U_i^*\right) = \{0\}$.

П р е д л о ж е н и е 3. $\dim \left(\sum\limits_{i=1}^{m} U_i^*\right) = \mathrm{rang}(B, BD, \dots, BD^{p-1})$.

Т е о р е м а 4 (теорема о приводимости). *Если $\dim\left(\cap_{i=1}^{m} \mathrm{Ann}\left(U_i^*\right)\right) = k < p$, то существует невырожденное преобразование $z = S\overline{z}$, приводящее систему (2) к виду*

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= Ay(t) + \overline{B}_{11}\overline{z}_1(t), \\ \frac{d\overline{z}_1(t)}{dt} &= \overline{C}_1 y(t) + \overline{D}_{11}\overline{z}_1(t), \\ \frac{d\overline{z}_2(t)}{dt} &= \overline{C}_2 y(t) + \overline{D}_{21}\overline{z}_1(t) + \overline{D}_{22}\overline{z}_2(t), \end{aligned} \tag{4}$$

где $\overline{z}_1 \in \mathbb{F}^k, \ \overline{z}_2 \in \mathbb{F}^{p-k}$.

Т е о р е м а 5 (двойственная теорема о приводимости).

Если $\dim\left(\sum_{i=1}^{m} U_i^*\right) = p - k > 0$, *то существует невырожденное преобразование* $\overline{z} = Wz$, *приводящее систему* (2) *к виду* (4).

Т е о р е м а 6 (о частичной устойчивости). *Пусть выполнены условия теоремы 4. Для того чтобы система* (1) *была устойчива относительно первых m компонент фазового вектора x, необходимо и достаточно, чтобы система*

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= Ay(t) + \overline{B}_{11}\overline{z}_1(t), \\ \frac{d\overline{z}_1(t)}{dt} &= \overline{C}_1 y(t) + \overline{D}_{11}\overline{z}_1(t) \end{aligned} \tag{5}$$

была устойчива относительно всех переменных.

В некоторых частных случаях исследование частичной устойчивости системы (1) можно упростить.

П р е д л о ж е н и е 4. Если дополнительно к условиям теоремы 5 выполнено условие

$$\operatorname{im} C \subseteq \operatorname{Ann}\left(\sum_{i=1}^{m} U_i^*\right),$$

то система (2) *приводима к виду*

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= Ay(t) + \overline{B}_{11}\overline{z}_1(t), \\ \frac{d\overline{z}_1(t)}{dt} &= \overline{D}_{11}\overline{z}_1(t), \\ \frac{d\overline{z}_2(t)}{dt} &= \overline{C}_2 y(t) + \overline{D}_{21}\overline{z}_1(t) + \overline{D}_{22}\overline{z}_2(t), \end{aligned} \tag{6}$$

а вопрос y-устойчивости сводится к исследованию устойчивости системы

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= Ay(t) + \overline{B}_{11}\overline{z}_1(t), \\ \frac{d\overline{z}_1(t)}{dt} &= \overline{D}_{11}\overline{z}_1(t). \end{aligned} \tag{7}$$

Доказательства теорем и предложений даны в Приложении.

З а м е ч а н и е 1. При выполнении условий предложения 4 задача исследования частичной устойчивости сводится к исследованию устойчивости двух систем меньшего порядка. Подпространство $\operatorname{Ann}(U^*)$ является инвариантным подпространством относительно y-устойчивости в том смысле, что свойство y-устойчивости сохраняется при любом выборе матрицы C, столбцы которой являются произвольными векторами из подпространства $\operatorname{Ann}\left(\sum\limits_{i=1}^{m} U_i^*\right)$. Вообще говоря, малые вариации параметров системы (2) могут приводить к нарушению свойства частичной устойчивости.

Замечание 2. Отметим, что предложенный подход позволяет исследовать характер устойчивости любой компоненты фазового вектора исследуемой системы. Достаточно в системе исследуемую компоненту обозначить через y, а остальные компоненты составят вектор z. Таким образом реализуется алгоритм решения задачи исключения переменных, предложенной в [22].

5. Пример

Пусть исследуемая система имеет следующие исходные данные:

$$y \in \mathbb{R}^2, \quad z \in \mathbb{R}^4, \quad A \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad B \in \mathbb{R}^{2\times 4}, \quad C \in \mathbb{R}^{4\times 2}, \quad D \in \mathbb{R}^{4\times 4}, \quad n = 6, p = 4,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 9 & -23 & -46 & 8 \\ -3 & 5 & 22 & 16 \\ -6 & -2 & -10 & -4 \\ -15 & 19 & 38 & -10 \end{pmatrix}.$$

Исходя из данных задачи рассматриваем линейное пространство $\mathbb{R}^4$ и соответствующее сопряженное линейное пространство $\mathbb{R}^{4*}$, в которых действуют линейные операторы $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}^*$ соответственно.

Ковекторы $b_1^* = -\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 - 2\xi_4$ и $b_2^* = \xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3$ являются образующими векторами инвариантных циклических подпространств относительно линейного оператора $\mathcal{D}^*$.

Соответствующие подпространства – линейные оболочки своих базисов – имеют вид:

$$U_1^* = \operatorname{span}(-\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 - 2\xi_4, 6\xi_1 - 14\xi_2 - 28\xi_3 + 20\xi_4),$$
$$U_2^* = \operatorname{span}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3, -20\xi_2 - 34\xi_3 + 20\xi_4, -36\xi_1 + 348\xi_2 + 660\xi_3 - 384\xi_4).$$

Минимальные аннулирующие многочлены ковекторов b_1^* и b_2^* имеют соответственно вид

$$\mu_1(t) = t^2 + 24t + 108, \quad \mu_2(t) = t^3 + 30t^2 + 252t + 648.$$

При этом $\dim U_1^* = 2$, $\dim U_2^* = 3$, $\dim(U_1^* + U_2^*) = 3 < 4 = \dim \mathbb{R}^{4*}$.

$$\operatorname{Ann}(U_1^* + U_2^*) : \begin{cases} -\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 - 2\xi_4 = 0, \\ 6\xi_1 - 14\xi_2 - 28\xi_3 + 20\xi_4 = 0, \\ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0, \\ -20\xi_2 - 34\xi_3 + 20\xi_4 = 0, \\ -36\xi_1 + \xi_2 + 660\xi_3 - 384\xi_4 = 0. \end{cases}$$

Решая однородную систему линейных уравнений, находим базис пространства решений:

$$\operatorname{Ann}(U_1^* + U_2^*) = \operatorname{span}(-1, 1, 0, 1).$$

Выбирая базис подпространства $U_1^* + U_2^*$, частично согласованный с базисами подпространств U_1^* и U_2^*,

$$e^1 = -\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 - 2\xi_4, \quad e^2 = 6\xi_1 - 14\xi_2 - 28\xi_3 + 20\xi_4, \quad e^3 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$$

и дополняя его до базиса всего пространства $\mathbb{R}^{4^*}$ ковектором $e^4 = -\xi_1 + \xi_2 + \xi_4$, получаем соответствующий двойственный базис пространства $\mathbb{R}^4$:

$$e_1 = (1/4, 9/4, -5/2, -2), e_2 = (1/24, 5/24, -1/4, -1/6),$$
$$e_3 = (2/3, 4/3, -1, -2/3), e_4 = (-1/3, 1/3, 0, 1/3).$$

Тогда матрица перехода S от исходного базиса к новому имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/24 & 2/3 & -1/3 \\ 9/4 & 5/24 & 4/3 & 1/3 \\ -5/2 & -1/4 & -1 & 0 \\ -2 & -1/6 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Матрица оператора $\mathcal{D}$ в новом базисе принимает вид

$$D_e = S^{-1}DS = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -108 & -24 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ -162 & -35/2 & -60 & 24 \end{pmatrix}.$$

При этом

$$BS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^{-1}C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

В результате перехода к новому базису с помощью невырожденного преобразования $z = S\overline{z}$ приходим к системе:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overline{z}(t),$$

$$\frac{d\overline{z}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -108 & -24 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ -162 & -\frac{35}{2} & -60 & 24 \end{pmatrix} \overline{z}(t),$$

где $y \in \mathbb{R}^2$, $z \in \mathbb{R}^4$, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{2\times 4}$, $C \in \mathbb{R}^{4\times 2}$, $D \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, $n = 6$, $p = 4$.

Таким образом, исходная задача разбивается на две более простые подзадачи: исследование устойчивости двух систем

$$\frac{dy(t)}{dt} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} y(t) \quad \text{и} \quad \frac{d\overline{z}_1(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -108 & -24 & 0 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} \overline{z}_1(t).$$

При этом для второй системы характеристический многочлен имеет вид

$$\chi(t) = (-6 - t)\mu_1(t) = -\mu_2(t),$$

который является устойчивым. Таким образом, для y-устойчивости необходима и достаточна устойчивость первой системы.

6. Заключение

Предложен алгебро-геометрический подход к исследованию частичной устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами, позволяющий выяснить условия устойчивости y-компонент фазового вектора путем «поворота» фазового подпространства z-компонент. Благодаря использованию геометрических свойств этого подпространства, получены условия, при выполнении которых анализ устойчивости сводится к решению двух задач меньшей размерности. Показано, что при этом система обладает некоторыми свойствами инвариантности по отношению к свойству частичной устойчивости. Предлагаемый подход можно применить к исследованию устойчивости линейных дискретных систем и систем с запаздывающим аргументом, а также к решению задач с полиустойчивостью.

Дальнейшие направления исследований возможно проводить в областях частичной управляемости и стабилизации линейных систем, а также в области распространения данного подхода к исследованию задач частичной устойчивости линейных нестационарных систем и нелинейных систем дифференциальных уравнений.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство предложения 2. Пусть $\forall w_i^* = u_1^* + \dots + u_i^* \in W_i^* = U_1^* + \dots + U_i^*$. Так как $\mathcal{D}^* u_i \in U_i$ $(\forall i = 1, \dots, m)$ в силу инвариантности подпространств U_i^*, то $\mathcal{D}^* w_i = \mathcal{D}^*(u_1 + \dots + u_i) = \mathcal{D}^* u_1 + \dots + \mathcal{D}^* u_i \in U_1^* + \dots + U_i^* = W_i^*$ $(\forall i = 1, \dots, m)$. Таким образом, W_i $(\forall i = 1, \dots, m)$ – инвариантные подпространства оператора $\mathcal{D}^*$. Предложение 2 доказано.

Доказательство предложения 3. Доказательство следует из изоморфизма двух двойственных линейных пространств L и L^*, а также из свойств аннуляторов. Действительно, так как справедливо соотношение

$$\operatorname{Ann}\left(\sum_{i=1}^{m} U_i^*\right) = \cap_{i=1}^{m} \operatorname{Ann}\left(U_i^*\right),$$

то в исходных двойственных базисах аннулятор представим в виде

$$\operatorname{Ann}\left(\sum_{i=1}^{m} U_i^*\right) : \begin{cases} B\xi = 0, \\ BD\xi = 0, \\ \dots \\ BD^{p-1}\xi = 0. \end{cases}$$

Но тогда

$$\dim \operatorname{Ann}\left(\sum_{i=1}^{m} U_i^*\right) = \dim \mathbb{F}^{p*} - \operatorname{rang}(B, BD, \dots, BD^{p-1}).$$

С другой стороны, справедливо соотношение

$$\dim \sum_{i=1}^{m} U_i^* + \dim \operatorname{Ann}\left(\sum_{i=1}^{m} U_i^*\right) = \dim \mathbb{F}^{p*},$$

Учитывая два последних соотношения, имеем

$$\dim \sum_{i=1}^{m} U_i^* = \operatorname{rang}(B, BD, \dots, BD^{p-1}).$$

Предложение 3 доказано.

Доказательство теоремы 3. Докажем необходимость. Из предложения 2 следует, что $W^* = \sum\limits_{i=1}^{m} U_i^*$ – инвариантное подпространство относительно оператора $\mathcal{D}^*$. Пусть $\forall w^* \in W^*$, $\forall w \in \operatorname{Ann}(W^*) \Leftrightarrow \langle w, w^* \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \mathcal{D}w, w^* \rangle = \langle w, \mathcal{D}^* w^* \rangle = 0$, так как $\mathcal{D}^* w^* \in W^*$. Но тогда $\mathcal{D}w \in \operatorname{Ann}(W^*)$. Так как $\dim(W^*) + \dim(\operatorname{Ann}(W^*)) = k + \dim(\operatorname{Ann}(W^*)) = p$, то $\dim(\operatorname{Ann}(W^*)) = p - k$. Наконец, так как $\operatorname{Ann}(W^*) = \operatorname{Ann}\left(\sum_{i=1}^{m} U_i^*\right) = \cap_{i=1}^{m} \operatorname{Ann}\left(U_i^*\right)$, то необходимость доказана.

Доказательство достаточности получается дословным повторением необходимости при условии, что при доказательстве нужно двигаться в обратном направлении, т.е. двигаться с конца доказательства к его началу. Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Пусть $U^* = \sum_{i=1}^{m} U_i^*$, $\dim U^* = p - k > 0$. Таким образом $U^* = \operatorname{span}\left(e^1, \dots, e^{p-k}\right)$ и $e^1, \dots, e^{p-k}$ базис этого подпространства. Дополним эту систему векторов до базиса пространства $\mathbb{F}^{p*}$ с помощью векторов $e^{p-k+1}, \dots, e^p$. Этому базису в пространстве $\mathbb{F}^p$ соответствует двойственный базис $e_1, \dots, e_p$. Так как по предложению 2 следует, что $\sum_{i=1}^{m} U_i^*$ – инвариантное подпространство относительно оператора $\mathcal{D}^*$, то имеем $\forall u^* \in U^* \Rightarrow \mathcal{D}^* u^* \in U^* \Rightarrow \langle \mathcal{D}v, u^* \rangle = \langle v, \mathcal{D}^* u^* \rangle = u\left(\mathcal{D}v\right)\ \forall u \in \mathbb{F}^p, \forall u^* \in \mathbb{F}^{p*}$. Тогда

$$\langle \mathcal{D}e_j, e^i \rangle = \langle e_j, \mathcal{D}^* e^i \rangle = e^i\left(\mathcal{D}e_j\right) = 0 \ \ \forall i = 1, \dots, p-k, \ \ j = p-k+1, \dots, p.$$

Но это значит, что линейный оператор $\mathcal{D}$ имеет инвариантное подпространство $\mathrm{Ann}(U^*) \subseteq \mathbb{F}^p$. Поэтому в выбранном базисе матрица линейного оператора $\mathcal{D}$ принимает вид

$$D_e = \begin{pmatrix} \overline{D}_{11} & 0 \\ \overline{D}_{21} & \overline{D}_{22} \end{pmatrix}.$$

Остается построить матрицу невырожденного преобразования. Так как аннуляторы подпространств U_i^* представимы в виде множества однородных линейных систем

$$\mathrm{Ann}(U_i^*)\ (i = 1, \ldots, m) : \begin{cases} b_i\xi = 0, \\ b_i D\xi = 0, \\ \cdots \\ b_i D^{k_i - 1}\xi = 0, \end{cases}$$

то подпространство $\cap_{i=1}^m \mathrm{Ann}\left(U_i^*\right)$ представимо в виде

$$\begin{cases} B\xi = 0, \\ BD\xi = 0, \\ \cdots \\ BD^{p-1}\xi = 0. \end{cases} \tag{П.1}$$

Найдя фундаментальную систему решений однородной системы (П.1) $\xi_1, \ldots, \xi_{p-k}$ и дополнив ее до базиса пространства $\mathbb{F}^p$ системой векторов $\nu_1, \ldots, \nu_k$, получаем искомую матрицу преобразования:

$$S = (\nu_1, \cdots, \nu_k, \xi_1, \cdots, \xi_{p-k}).$$

Проведем в системе (2) замену переменных $z = S\overline{z}$. При этом система (3) принимает вид (4). Теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 5. Пусть $U^* = \sum_{i=1}^m U_i^*$, $\dim U^* = p - k > 0$. Таким образом, $U^* = \mathrm{span}\left(e^1, \ldots, e^{p-k}\right)$ и $e^1, \ldots, e^{p-k}$ – базис этого подпространства. Дополним эту систему векторов до базиса пространства $\mathbb{F}^{p*}$ с помощью векторов $e^{p-k+1}, \ldots, e^p$. Тогда согласно предложению 2 следует, что U^* – инвариантное подпространство относительно оператора $\mathcal{D}^*$. Поэтому матрица линейного оператора $\mathcal{D}^*$ в выбранном базисе имеет вид

$$D_e^* = W^{-1} D^* W = \begin{pmatrix} \overline{D^*}_{11} & \overline{D^*}_{12} \\ 0 & \overline{D^*}_{22} \end{pmatrix}.$$

Но тогда сопряженный оператор $\mathcal{D} = (\mathcal{D}^*)^*$ в двойственном базисе принимает вид

$$D = (D_e^*)^T = (W^{-1} D^* W)^T = W^T (D^*)^T W^{-T} = \begin{pmatrix} \overline{D}_{11} & 0 \\ \overline{D}_{21} & \overline{D}_{22} \end{pmatrix},$$

$$\overline{D}_{ij} = \overline{D^*}_{ij}^T, \quad i, j \in \{1, 2\}.$$

Откуда $S = W^{-T} \Rightarrow W = S^{-T}$. Искомое невырожденное преобразование равно $\overline{z} = Wz$.

Проведя в системе (2) замену $z = W^{-1}\overline{z}$, приходим к системе (4). Теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 6. Согласно теореме 4 существует преобразование, приводящее систему (2) к виду (4). При этом найденное преобразование сохраняет свойство y-устойчивости. В результате выделяется подсистема $(m+p-k)$-го порядка. Согласно следствию 1 для полученной подсистемы выполняется соотношение $\sum_{i=1}^{m} \overline{U}_i^* = \mathbb{F}^{p-k^*}$. Таким образом, $\mathrm{rang}(\overline{B}_{11}, \overline{B}_{11}\overline{D}_{11}, \ldots, \overline{B}_{11}\overline{D}_{11}^{p-k-1}) = p-k$. Так как порядок полученной подсистемы 5 равен $m+p-k$, то по следствию 1.1.2 [4, с. 38] получаем, что это условие является одновременно необходимым и достаточным для y-устойчивости системы (2). Теорема 6 доказана.

Доказательство предложения 4. Пусть выполнены условия теоремы 6 и дополнительно $\mathrm{im}\, C \subseteq \mathrm{Ann}\,(\sum_{i=1}^{m} U_i^*)$. Тогда

$$\left\{\begin{aligned} BC &= 0, \\ BDC &= 0, \\ &\ldots \\ BD^{p-1}C &= 0. \end{aligned}\right. \tag{П.2}$$

В результате в системе (5) матрица $\overline{C}_1 = 0$. Предложение 4 доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воротников В.И., Румянцев В.В.* Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. М.: Научный мир, 2001.
2. *Воротников В.И., Прокопьев В.П.* Об устойчивости движения относительно части переменных для линейных систем. // Прикладная математика и механика. 1978. Т. 42. Вып. 2. С. 268–271.
3. *Воротников В.И.* Частичная устойчивость и управление: состояние проблемы и перспективы развития // АиТ. 2005. № 4. С. 3–59.
4. *Воротников В.И.* Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М.: Наука, 1991.
5. *Зубов В.И.* Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л.: Судпромгиз, 1959.
6. *Мартынюк А.А., Чернецкая Л.Н.* О полиустойчивости линейных автономных систем // Докл. АН Украины. 1993. № 8. С. 17–19.
7. *Озиранер А.С.* Об исследовании устойчивости по части переменных при помощи квадратичных форм // Прикладная математика и механика. 1986. Т. 50. Вып. 1. С. 163–167.
8. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987.

9. *Chen Y., Qu X., Dai G., Aleksandrov A.Y.* Linear-transformation-based analysis and design of state consensus for multi-agent systems with state observers // J. Franklin Institute. 2015. V. 352. No. 9. P. 3447–3457.
10. *Chen Y., Qu X., Aleksandrov A.Y., Dai G.* Consensus of heterogeneous linear multi-agent systems: Linear-transformation-based partial stability approach // Transactions of the Institute of Measurement and Control. 2017. V. 39. No. 11. P. 1623–1630.
11. *Chen Y., Xu G., Zhan J.* Leader-following consensus of heterogeneous linear multi-agent systems: New results based on linear transformation method // Transactions of the Institute of Measurement and Control. 2021. V. 44(7). No. 7. P. 1473–1483.
12. *Абрамов С.А., Бронштейн М.* Решение линейных дифференциальных и разностных систем по отношению к части неизвестных // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 2. С. 229–241.
13. *Панферов А.А.* Системы дифференциальных уравнений с выделенной частью неизвестных // Программирование. 2015. № 2. С. 26–36.
14. *Панферов А.А.* Сателлитные неизвестные в неприводимых дифференциальных системах // Программирование. 2018. № 2. С. 42–50.
15. *Чудинов К.М.* Критерий устойчивости по части переменных автономной системы дифференциальных уравнений // Известия высших учебных заведений. Математика. 2003. № 4. С. 67–72.
16. *Чудинов К.М.* О геометрической природе частичной и условной устойчивости // Известия высших учебных заведений. Математика. 2008. № 3. С. 76–85.
17. *Никонов В. И.* Геометрический аспект устойчивости линейных систем относительно части переменных // Журн. Средневолж. мат. об-ва. 2011. Т. 13. № 2. С. 95–99.
18. *Никонов В.И.* К частичной устойчивости линейных систем относительно заданной компоненты фазового вектора //Журн. Средневолж. мат. об-ва. 2021. Т. 23. № 1. С. 43–57.
19. *Постников М.М.* Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра. М.: Наука, 1986.
20. *Халмош П.* Конечномерные векторные пространства. М.: Физматгиз, 1963.
21. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра. М.: Физико-математическая литература, 2000.
22. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 11.03.2025

После доработки 08.07.2025

Принята к публикации 23.07.2025