Автоматика и телемеханика, № 9, 2025

© 2025 г. Р.С. БИРЮКОВ, канд. физ.-мат. наук (biryukovrs@gmail.com)
(Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского),
М.М. КОГАН, д-р физ.-мат. наук (mkogan@nngasu.ru)
(Научно-технологический университет "Сириус", Сочи)

СИНТЕЗ РОБАСТНЫХ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ ПО ЗАШУМЛЕННЫМ ТЕКУЩИМ ДАННЫМ[1]

В статье излагается новый подход к построению робастных законов управления неопределенной динамической системой с обобщенной H_∞-нормой в качестве критерия. Параметры закона управления настраиваются в процессе реального функционирования системы по мере поступления текущих измерений состояния и управления, получаемых с ошибкой. Результаты численного моделирования активного гашения колебаний сооружений при сейсмических воздействиях иллюстрируют эффективность рассматриваемого подхода.

Ключевые слова: текущие данные, робастное управление, обобщенная H_∞-норма, двойственные системы, линейные матричные неравенства.

DOI: 10.31857/S0005231025090035, **EDN:** VMTKUI

1. Введение

В статье разрабатывается новый подход к построению оптимальных законов управления линейными динамическими объектами с неизвестными математическими моделями при неизмеряемых возмущениях и неопределенных начальных условиях, использующий априорную и текущую информацию в online режиме. Как известно, один из самых распространенных методов построения робастного управления основан на минимаксном подходе: синтезируется закон управления, который обеспечивает наилучшую оценку оптимизируемого функционала на всем множестве значений неопределенных параметров, определяемом на основе априорной информации (см., например, [1, 2]). При всех достоинствах такой подход имеет существенный недостаток: гарантируемая верхняя оценка функционала из-за большой величины множества неопределенности оказывается достаточно грубой, а при отсутствии точной априорной информации множество неопределенности может оказаться таким большим, что робастного закона управления не существует.

В последнее время в теории управления наблюдается значительный интерес к развитию методов, использующих данные, получаемые предварительно на стадии эксперимента. В англоязычной литературе получаемое таким образом управление называется "data-driven control" [3, 4]. Первоначально в осно-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 24-11-20023).

ву этих методов был положен фундаментальный результат в [5], показывающий, что для полной характеризации линейной стационарной динамической системы без возмущений может быть использована единственная траектория, полученная при выполнении так называемого условия неисчезающего возбуждения. В [6] было показано, что параметризация замкнутой системы управления на основе экспериментальных данных позволяет синтезировать законы управления, используя линейные матричные неравенства. В [7] было установлено, что для построения законов управления по экспериментальным данным достаточно выполнения менее ограничительного условия информативности данных по отношению к изучаемому свойству. Затем эти методы были распространены для систем с возмущениями [8–11], в [12] – для линейных нестационарных систем, а в [13] осуществлен синтез стабилизирующего управления на основе измерений, полученных с ошибкой.

Результаты математического моделирования, приведенные в этих работах, показывают, что уже при сравнительно небольших амплитудах возмущений гарантированная оценка показателя качества управления оказывается достаточно завышенной. Это происходит по причине того, что с ростом амплитуды помехи множество объектов, согласованных с экспериментальными данными, значительно расширяется. Кроме того, к экспериментальным данным в большинстве из этих работ предъявляются определенные требования: матрица, составленная из измерений состояний и управлений по траектории системы, должна быть максимального строчного ранга. Для выполнения этого рангового условия требуется, чтобы входные сигналы в экспериментах обеспечили неисчезающее возбуждение в системе, необходимое для идентифицируемости неизвестных параметров. И хотя формально для обеспечения информативности данных не требуется неисчезающее возбуждение в системе, множество неопределенности может стать неограниченным даже при небольших амплитудах помех, если для экспериментальных данных не выполняется ранговое условие.

Указанные обстоятельства наводят на мысль о синтезе управления, использующем как априорные, так и экспериментальные данные. В [14–20] параметры обратной связи по состоянию для линейных стационарных систем на бесконечном горизонте, нестационарных систем на конечном горизонте, а также некоторых классов нелинейных систем находятся при совместном использовании априорных и экспериментальных данных путем решения минимаксной задачи на множестве неизвестных параметров, согласованных с априорной информацией и экспериментальными данными. Такие законы управления, получаемые на основе решения линейных матричных неравенств, обеспечивают заведомо меньшее значение гарантированной оценки функционала, чем классическое робастное управление и чем закон управления, построенный только по экспериментальным данным.

Вместе с тем, экспериментальный этап, который предшествует синтезу закона управления и на котором входные сигналы выбираются исходя из требований информативности получаемых данных, не всегда возможно реализовать в силу, например, неустойчивости объекта. Кроме того, имеются объекты управления, параметры которых зависят от состояния окружающей среды, например, от температуры или давления. В этих случаях управление, синтезированное по данным, полученным на предварительном этапе, может оказаться не совсем подходящим при других условиях. Вместо этого было бы желательно на каждом шаге реального функционирования системы по мере получения новых текущих данных перестраивать параметры закона управления на основе решения минимаксной задачи для множества моделей, согласованных с имеющейся к данному моменту времени информацией. Поскольку это множество на каждом шаге сокращается или, в крайнем случае, не возрастает, то определяемые при этом обратные связи будут обеспечивать монотонно убывающие или невозрастающие гарантируемые значения функционала для неизвестного объекта. Процесс настройки параметров прекращается, когда гарантируемое значение функционала становится меньше желаемого. Именно такой подход разработан в настоящей работе. При этом не требуется обеспечивать выполнение условий информативности и снимается существенный вопрос о количестве измерений, которое необходимо сделать. Иллюстративный пример активного гашения колебаний сооружений при сейсмических воздействиях демонстрирует эффективность синтезируемого закона управления.

2. Формулировка задачи

Рассмотрим неопределенную систему вида

$$x_{t+1} = A_{real}x_t + B_{real}u_t + B_w w_t, \quad x(0) = x_0, \\ z_t = Cx_t + Du_t, \quad t = 0, 1, \ldots, \tag{2.1}$$

где $x_t \in \mathrm{R}^{n_x}$ – состояние, $u_t \in \mathrm{R}^{n_u}$ – управление, $w_t \in \mathrm{R}^{n_w}$ – возмущение, $z_t \in \mathrm{R}^{n_z}$ – целевой (управляемый) выход. Предполагается, что начальное состояние x_0 может быть произвольным, возмущение $\{w_t, t \geqslant 0\}$ имеет ограниченную l_2-норму, т.е. $\|w\| = (\sum_{t=0}^{\infty} |w_t|^2)^{1/2} < \infty$, где $|\cdot|$ обозначает евклидову норму соответствующего вектора, и состояние доступно для управления в контуре обратной связи. Системные матрицы, собранные в матрицу $\Omega_{real} = (A_{real}\ B_{real})$, неизвестны, но предполагается, что пара (A_{real}, B_{real}) стабилизируема, а матрица B_w, которая, в частности, может быть единичной, известна.

Так как системные матрицы неизвестны, то стандартные методы построения оптимальных законов управления не применимы. В связи с этим для синтеза закона управления будут привлечены априорные данные, как это принято в робастном управлении, и текущие данные, что характерно для адаптивного управления. А именно, допустим, что возмущение w_t в системе имеет ограниченную евклидову норму, а состояние и управление измеряются с некоторыми ограниченными помехами так, что

$$\widehat{x}_t = x_t + \xi_t, \quad \widehat{u}_t = u_t + \eta_t, \tag{2.2}$$

где $\widehat{x}_t$ и $\widehat{u}_t$ – измерения состояния и управления в момент времени t, и

$$|\xi_t| \leqslant \varepsilon_\xi, \quad |\eta_t| \leqslant \varepsilon_\eta, \quad |w_t| \leqslant \varepsilon_w \quad \forall\, t \geqslant 0. \tag{2.3}$$

Заметим, что измерения состояния $\widehat{x}_t$ и управления $\widehat{u}_t$, которые будут входит в текущие данные, содержат указанные ограниченные ошибки, а управлению доступно состояние x_t.

В общем плане требуется синтезировать законы управления вида линейной обратной связи по состоянию с настраиваемыми параметрами на основе априорной и текущей информации в ходе реального функционирования системы так, чтобы через некоторый промежуток времени прийти к стационарным значениям, при которых минимизируется влияние начальных условий и внешнего возмущения на целевой выход замкнутой стационарной системы.

3. Характеризация нормы в терминах двойственной системы

Прежде, чем перейти к решению задачи, напомним основные факты относительно обобщенной H_∞-нормы от входа w_t к выходу z_t заданной замкнутой системы при управлении $u_t = \Theta x_t$, описываемой уравнениями

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= (A + B\Theta)x_t + B_w w_t, \\ z_t &= (C + D\Theta)x_t. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Обобщенная H_∞-норма характеризует влияние начальных условий и внешнего возмущения на l_2-норму целевого выхода, т.е. на переходной процесс, и определяется как

$$\|H\|_{g\infty}(\Omega, \Theta) = \sup_{\{x_0,\, w_t \in l_2\}} \frac{\|z\|}{\left(x_0^{\mathrm{T}} R^{-1} x_0 + \|w\|^2\right)^{1/2}}, \tag{3.2}$$

где $\Omega = (A\ B)$ и $R = R^{\mathrm{T}} \succ 0$ – весовая матрица, отражающая меру сравнительной важности для целевого выхода неопределенности в начальных условиях и внешнем возмущении, $S \succ T$ означает, что матрица $S - T$ положительно определенная, а $S \succeq T$ – что матрица $S - T$ неотрицательно полуопределенная. В этом определении предполагается, что знаменатель правой части в (3.2) не обращается в ноль и

$$H(s) = (C + D\Theta)[sI - (A + B\Theta)]^{-1} B_w$$

передаточная матрица замкнутой системы от возмущения к целевому выходу. В частности, обобщенная H_∞-норма при нулевых начальных условиях в системе совпадает со стандартной H_∞-нормой, а при отсутствии внешнего возмущения она характеризует максимальное значение квадратичного функционала целевого выхода при начальном состоянии, принадлежащем эллипсоиду $x^{\mathrm{T}} R^{-1} x \leqslant 1$. Имеют место следующие утверждения относительно вычисления этих норм, которые будут применяться далее.

Лемма 3.1 [21]. *Обобщенная H_∞-норма системы* (3.1) *удовлетворяет условию $\|H\|_{g\infty} < \gamma$ тогда и только тогда, когда существует положительно определенная квадратичная форма $V(x) = x^{\mathrm{T}}Yx$, $Y \prec \gamma^2 R^{-1}$, для которой при всех ненулевых x_t и w_t выполняется неравенство*

$$\Delta V(x_t) + |z_t|^2 - \gamma^2|w_t|^2 < 0, \tag{3.3}$$

где $\Delta V(x_t) = V(x_{t+1}) - V(x_t)$ обозначает приращение функции $V(x)$ по траектории соответствующей системы.

Лемма 3.2 [17]. *Обобщенная H_∞-норма системы* (3.1) *удовлетворяет условию $\|H\|_{g\infty} < \gamma$ тогда и только тогда, когда существует положительно определенная квадратичная форма $V_d(x) = x^{\mathrm{T}}Px$, $P \succ R$, для приращения которой по траектории двойственной системы*

$$\begin{aligned} x_{t+1}^{(d)} &= (A + B\Theta)^{\mathrm{T}} x_t^{(d)} + (C + D\Theta)^{\mathrm{T}} w_t^{(d)}, \\ z_t^{(d)} &= B_w^{\mathrm{T}} x_t^{(d)} \end{aligned} \tag{3.4}$$

при всех ненулевых $x_t^{(d)}$ и $w_t^{(d)}$ выполняется неравенство

$$\Delta V_d(x_t^{(d)}) + |z_t^{(d)}|^2 - \gamma^2|w_t^{(d)}|^2 < 0. \tag{3.5}$$

Замечание 3.1. Для обобщенной H_∞-нормы матрицы квадратичных форм $V(x) = x^{\mathrm{T}}Yx$ и $V_d(x^{(d)}) = x^{(d)\mathrm{T}}Px^{(d)}$ прямой и двойственной систем связаны соотношением $P = \gamma^2 Y^{-1}$.

Замечание 3.2. При выполнении условий каждой из перечисленных выше лемм соответствующие системы являются асимптотически устойчивыми при отсутствии возмущений.

4. Априорные и текущие данные

Пусть, как это принято в традиционных методах синтеза робастного управления, имеется априорная информация о том, что реальная матрица $\Omega_{real} = (A_{real}\ B_{real})$ находится строго внутри области, определяемой неравенством

$$(\Omega - \Omega_*)(\Omega - \Omega_*)^{\mathrm{T}} \preceq \rho^2 I, \quad \Omega_* = (A_*\ B_*)\,, \tag{4.1}$$

где Ω_* и ρ характеризуют номинальный объект и размер области неопределенности. Запишем неравенство (4.1) в виде

$$F_a(\Omega) := (\Omega \quad I)\, \Psi_a\, (\Omega \quad I)^{\mathrm{T}} \preceq 0, \tag{4.2}$$

где

$$\Psi_a = \left(\begin{array}{c|c} I & \star \\ \hline -\Omega_* & \Omega_*\Omega_*^{\mathrm{T}} - \rho^2 I \end{array} \right), \tag{4.3}$$

$\star$ заменяет соответствующий блок симметрической матрицы. Назовем $\Delta^{(a)} := \{\Omega \in \mathrm{R}^{n_x \times (n_x+n_u)} : F_a(\Omega) \preceq 0\}$ множеством матриц, согласованных с априорной информацией. Согласно предположению $\Omega_{real} \in \Delta^{(a)}$.

Текущие данные, полученные в момент времени $t+1$, в силу (2.1) и (2.2) удовлетворяют уравнению

$$\widehat{x}_{t+1} = \Omega_{real}\widehat{\varphi}_t + (I \ \Omega_{real} \ B_w) \begin{pmatrix} \xi_{t+1} \\ \zeta_t \\ w_t \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

в котором

$$\widehat{\varphi}_t := \begin{pmatrix} \widehat{x}_t \\ \widehat{u}_t \end{pmatrix}, \quad \zeta_t =: -\begin{pmatrix} \xi_t \\ \eta_t \end{pmatrix}.$$

Множество матриц Ω, которые удовлетворяют уравнению (4.4) при некотором возмущении и помехах, для которых выполняются ограничения (2.3), назовем множеством матриц, согласованных с данными $\widehat{x}_t, \widehat{x}_{t+1}$ и $\widehat{u}_t$, и обозначим $\Delta_t^{(p)}$. Ясно, что $\Omega_{real} \in \Delta_t^{(p)}$ и что множество $\Delta_t^{(p)}$ соответствует всем системам, которые могли бы генерировать эти данные. Данное множество характеризуется следующим образом.

Лемма 4.1. *Матрицы $\Omega \in \Delta_t^{(p)}$, согласованные с данными $\widehat{x}_t, \widehat{x}_{t+1}$ и $\widehat{u}_t$, удовлетворяют неравенству*

$$(\Omega \quad I) \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_t\widehat{\varphi}_t^{\mathrm{T}} - d^2 I & \star \\ -\widehat{x}_{t+1}\widehat{\varphi}_t^{\mathrm{T}} & \widehat{x}_{t+1}\widehat{x}_{t+1}^{\mathrm{T}} - (I + B_w B_w^{\mathrm{T}})d^2 \end{pmatrix} (\Omega \quad I)^{\mathrm{T}} \preceq 0, \tag{4.5}$$

где $d^2 = 2\varepsilon_\xi^2 + \varepsilon_\eta^2 + \varepsilon_w^2$.

Доказательство этого и последующих утверждений приведены в Приложении. Пусть к фиксированному моменту времени k получены измерения состояний $\widehat{x}_0, \ldots, \widehat{x}_k$ и выбранных ранее управлений $\widehat{u}_0, \ldots, \widehat{u}_{k-1}$ системы (2.1) при некоторых неизвестных возмущениях $w_0, \ldots, w_{k-1}$. Матрицы Ω, согласованные со всеми данными $\widehat{x}_0, \ldots, \widehat{x}_k$, $\widehat{u}_0, \ldots, \widehat{u}_{k-1}$, полученными к моменту времени $k \geqslant 1$, принадлежат множеству $\Delta_{[0,\,k-1]}^{(p)} = \bigcap_{t=0}^{k-1} \Delta_t^{(p)}$ и определяются неравенствами (4.5) для $t = 0, \ldots, k-1$. Обозначим $\boldsymbol{\Delta}_0 = \Delta^{(a)}$ и $\boldsymbol{\Delta}_k = \Delta^{(a)} \bigcap \Delta_{[0,\,k-1]}^{(p)}$, $k \geqslant 1$ множество матриц Ω, согласованных с априорной информацией и полученными к моменту времени k данными $\widehat{x}_0, \ldots, \widehat{x}_k$, $\widehat{u}_0, \ldots, \widehat{u}_{k-1}$ для $k \geqslant 1$. Заметим, что $\boldsymbol{\Delta}_0 \supseteq \boldsymbol{\Delta}_1 \supseteq \ldots$ и что $\Omega_{real} \in \boldsymbol{\Delta}_k$ для любого $k \geqslant 0$.

Однако так как проверка того, что пересечение эллипсоидов включено в заданный эллипсоид, не может быть представлена как задача полуопределенного программирования (см. [22]), заменим множество $\boldsymbol{\Delta}_k$ его внешней эллипсоидальной аппроксимацией. Это позволит находить закон управления, минимизирующий верхнюю границу рассматриваемой нормы замкнутой системы для всех моделей, согласованных с имеющимися данными.

5. Внешняя аппроксимация множества $\mathbf{\Delta}_k$

Суммируя неравенства (4.2) и (4.5) с некоторыми неотрицательными множителями $\mu \geqslant 0$, $\tau_0 \geqslant 0, \ldots, \tau_{k-1} \geqslant 0$, получим, что все матрицы Ω, согласованные с априорными и текущими данными к моменту времени k, удовлетворяют неравенству

$$\widehat{F}_{\mu,\tau_0^{k-1}}(\Omega) := (\Omega \quad I)\Psi(\mu, \tau_0^{k-1})(\Omega \quad I)^{\mathrm{T}} \preceq 0, \quad k \geqslant 1, \tag{5.1}$$

где

$$\Psi(\mu, \tau_0^{k-1}) = \begin{pmatrix} \mu I + \sum\limits_{t=0}^{k-1} \tau_t(\widehat{\varphi}_t \widehat{\varphi}_t^{\mathrm{T}} - d^2 I) & \star \\ -\mu\Omega_* - \sum\limits_{t=0}^{k-1} \tau_t \widehat{x}_{t+1}\widehat{\varphi}_t^{\mathrm{T}} & \mu(\Omega_*\Omega_*^{\mathrm{T}} - \rho^2 I) + \sum\limits_{t=0}^{k-1} \tau_t \widehat{x}_{t+1}\widehat{x}_{t+1}^{\mathrm{T}} - M_k \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

$$\tau_0^{k-1} = (\tau_0, \ldots, \tau_{k-1}), \quad M_k := \sum_{t=0}^{k-1} \tau_t (I + B_w B_w^{\mathrm{T}}) d^2.$$

Определим $\widehat{\mathbf{\Delta}}_k(\mu, \tau_0^{k-1}) = \Big\{\Omega \in \mathrm{R}^{n_x \times (n_x+n_u)} : \widehat{F}_{\mu,\tau_0^{k-1}}(\Omega) \preceq 0\Big\}$ как множество матриц Ω, удовлетворяющих неравенству (5.1) при фиксированных $\mu \geqslant 0$, $\tau_0^{k-1} \geqslant 0$. Таким образом, $\mathbf{\Delta}_k \subseteq \widehat{\mathbf{\Delta}}_k(\mu, \tau_0^{k-1})$ для любых $\mu \geqslant 0$, $\tau_0^{k-1} \geqslant 0$ и $\Omega_{real} \in \widehat{\mathbf{\Delta}}_k(\mu, \tau_0^{k-1})$. Это множество при определенных значениях $\mu \geqslant 0$ и $\tau_0^{k-1} \geqslant 0$ будет далее служить внешней аппроксимацией множества $\mathbf{\Delta}_k$.

Выясним, при каких условиях множество $\widehat{\mathbf{\Delta}}_k(\mu, \tau_0^{k-1})$ является ограниченным. Обозначим соответствующие блоки матрицы (5.2) через $\Psi_{ij}(\mu, \tau_0^{k-1})$, $i, j = 1, 2$, аргументы которых будут иногда опускаться.

Лемма 5.1. Если

$$\Psi_{11} = \mu I + \sum_{t=0}^{k-1} \tau_t (\widehat{\varphi}_t \widehat{\varphi}_t^{\mathrm{T}} - d^2 I) \succ 0, \tag{5.3}$$

то множество $\widehat{\mathbf{\Delta}}_k(\mu, \tau_0^{k-1})$ является ограниченным матричным эллипсоидом, определяемым неравенством

$$(\Omega + \Psi_{12}^{\mathrm{T}}\Psi_{11}^{-1})\Psi_{11}(\Omega + \Psi_{12}^{\mathrm{T}}\Psi_{11}^{-1})^{\mathrm{T}} \preceq \Gamma_k, \tag{5.4}$$

где $\Gamma_k = \Psi_{12}^{\mathrm{T}}\Psi_{11}^{-1}\Psi_{12} - \Psi_{22} \succeq 0$.

Замечание 5.1. Условие (5.3) означает, что "энергия" измеряемого сигнала на всем интервале с учетом априорной информации должна превышать суммарную "энергию" возмущения и помехи в измерениях. Если это условие не выполнено, то множество $\widehat{\mathbf{\Delta}}_k(\mu, \tau_0^{k-1})$ не ограничено (см. лемму 2.1 в [19]).

6. Робастный закон управления на основе текущих данных

Для построения робастного управления с матрицей в обратной связи, настраиваемой по текущим данным, требуется предварительно решить следующую вспомогательную задачу: определить матрицу Θ, при которой будет минимальна верхняя граница обобщенной H_∞-нормы неопределенной замкнутой стационарной устойчивой системы вида (3.1) для всех $\Omega \in \widehat{\mathbf{\Delta}}_k(\mu, \tau_0^{k-1})$ при некоторых $\mu \geqslant 0$ и $\tau_0^{k-1} \geqslant 0$. Для каждой модели с матрицей Ω, вообще говоря, может существовать своя функция Ляпунова, которая согласно лемме 3.1 характеризует границу рассматриваемой нормы. Однако далее будут получены условия существования единой функции Ляпунова для всех $\Omega \in \widehat{\mathbf{\Delta}}_k(\mu, \tau_0^{k-1})$. Это вносит некоторый консерватизм, но позволяет получить необходимые и достаточные условия существования такой функции и найти соответствующие обратные связи. Заметим, что аналогичный подход применялся в робастном управлении при определении так называемой квадратичной устойчивости и стабилизации в условиях неопределенности (см., например, [23]).

Определение 6.1. Закон управления $u_t = \Theta x_t$ назовем гарантирующим обобщенным H_∞-управлением с уровнем γ для неопределенной системы (3.1) *при априорных и текущих данных к моменту времени k, если существует функция $V_k(x) = x^{\mathrm{T}} Y_k x$, $0 \prec Y_k \prec \gamma^2 R^{-1}$ и такие $\mu \geqslant 0$ и $\tau_0^{k-1} \geqslant 0$, что неравенство* (3.3) *выполняется при всех $\Omega \in \widehat{\mathbf{\Delta}}_k(\mu, \tau_0^{k-1})$.*

Согласно лемме 3.1 и замечанию 3.2 замкнутая система с гарантирующим обобщенным H_∞-управлением с уровнем γ является асимптотически устойчивой и $\|H\|_{g\infty} < \gamma$ для всех моделей, согласованных с априорными и текущими данными к моменту времени k.

Теорема 6.1. Закон управления $u_t = \Theta x_t$ является гарантирующим обобщенным H_∞-управлением с уровнем γ для неопределенной системы (3.1) *при текущих данных к моменту времени k тогда и только тогда, когда $\Theta = Q_k P_k^{-1}$ и следующее линейное матричное неравенство разрешимо относительно $P_k = P_k^{\mathrm{T}} \succ R$, Q_k, $\mu \geqslant 0$ и $\tau_0^{k-1} \geqslant 0$:*

$$\begin{pmatrix} -P_k & \star & \star & \star \\ \begin{pmatrix} P_k \\ Q_k \end{pmatrix} & -\Psi_{11} & \star & \star \\ 0 & -\Psi_{21} & -\Psi_{22} - P_k + B_w B_w^{\mathrm{T}} & \star \\ (C\ D)\begin{pmatrix} P_k \\ Q_k \end{pmatrix} & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{pmatrix} \prec 0, \tag{6.1}$$

где Ψ_{ij}, $i, j = 1, 2$ обозначают соответствующие блоки матрицы $\Psi(\mu, \tau_0^{k-1})$, заданной в (5.2).

Замечание 6.1. Если в неравенстве (6.1) положить $\mu = 0$, то априорная информация не будет включена в синтез управления, а если положить $\tau_0^{k-1} = 0$, то не используются текущие данные.

Замечание 6.2. Если матрица $\Psi(\mu, \tau_0^{k-1})$ состоит из данных, полученных при эксперименте на интервале $[0, k-1]$ с разомкнутой неопределенной системой при управлениях, определяемых экспериментатором, то теорема 6.1 остается верна. Заметим, что в этом случае при $\mu = 0$ и $\tau_0 = \cdots = \tau_{k-1} = 1$ соответствующее множество $\widehat{\mathbf{\Delta}}_k(\mu, \tau_0^{k-1})$ совпадает с множеством матриц, согласованных с полученными данными, как это определено в [6, 7, 16]. Это означает, что рассмотренный здесь подход приводит к результатам, менее консервативным, чем в указанных работах.

Назовем минимальное значение $\gamma > 0$, при котором разрешимо неравенство (6.1), гарантированной обобщенной H_∞-нормой неопределенной системы по данным к моменту времени k и обозначим ее γ_k^*, а соответствующую матрицу обратной связи обозначим как Θ_k. Так как неравенство (6.1) для момента времени k при $\tau_{k-1} = 0$ обращается в неравенство (6.1) для момента времени $k-1$, то гарантированные обобщенные H_∞-нормы по мере поступления текущей информации образуют невозрастающую последовательность, т.е.

$$\gamma_0^* \geqslant \gamma_1^* \geqslant \cdots . \tag{6.2}$$

Теперь перейдем непосредственно к синтезу робастного управления. В качестве матрицы параметров управления в начальный момент времени возьмем матрицу, получаемую на основе только априорной информации, т.е. $\Theta_0 = Q_0 P_0^{-1}$, где P_0 и Q_0 – решение неравенства (6.1) при $\tau_0^{k-1} = 0$ и $\gamma = \gamma_0^*$. При $t = 1, \ldots, N-1$ матрицы Θ_t вычисляются как в теореме 6.1 для минимального $\gamma = \gamma_t^*$. При $t \geqslant N$ положим $\Theta_t = \Theta_{N-1}$.

Теорема 6.2. Для неопределенной системы (2.1) *при законе управления $u_t = \Theta_t x_t$, где Θ_t при $t = 0, \ldots, N-1$ вычисляются как в теореме 6.1 при минимальном $\gamma > 0$ и $\Theta_t = \Theta_{N-1}$ при $t \geqslant N$, после настройки параметров выполняется*

$$\sum_{t=N-1}^{\infty} |z_t|^2 < \gamma_{N-1}^{*2} \left(x_{N-1}^{\mathrm{T}} R^{-1} x_{N-1} + \sum_{t=N-1}^{\infty} |w_t|^2 \right) \quad \forall\, w_t. \tag{6.3}$$

Как следует из (6.2) и (6.3), при синтезе закона управления на основе текущих данных требуется разрешить компромисс между качеством замкнутой системы, получаемой после окончания настройки, и длительностью интервала настройки, т.е. затратами: чем больше N, тем меньше γ_{N-1}^* и наоборот.

В том случае, когда радиус неопределенности достаточно большой, т.е. априорная информация грубая, неравенство (6.1) при $\tau_0^{k-1} = 0$ может не иметь решений. Это означает, что не существует единого регулятора, обеспечивающего устойчивость для всех моделей из начального множества $\mathbf{\Delta}_0$. В этом случае в качестве начального управления выбирается случайный вектор. Если на следующем шаге по-прежнему не существует единого регулятора для нового множества моделей $\widehat{\mathbf{\Delta}}_1(\mu, \tau_0) \subseteq \mathbf{\Delta}_0$, то также выбирается случайное управление, и этот процесс продолжается до момента времени t_*, пока у неравенства (6.1) не появится решение. Гарантированная оценка качества управления, данная в теореме 6.2, в этом случае остается в силе, если за начальный момент времени принять $t = t_*$.

7. Иллюстративный пример

Рассмотрим модель колебаний трехэтажного здания при сейсмическом воздействии на фундамент. На рис. 1 изображена общая схема указанного процесса. Этажи здания представляются материальными точками, последовательно связанными между собой и с фундаментом линейными упругими и диссипативными элементами. Колебания, порождаемые сейсмическим воздействием (движением фундамента), происходят в горизонтальной плоскости. Будем считать, что здание является однородным, т.е. массы материальных точек, коэффициенты упругости и демпфирования упругих и диссипативных элементов одинаковые. При указанном предположении динамика рассматриваемой конструкции (в безразмерных переменных и параметрах) описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\beta\big(2\dot{x}_1 - \dot{x}_2\big) - \big(2x_1 - x_2\big) + w, \\ \ddot{x}_2 &= -\beta\big(2\dot{x}_2 - \dot{x}_1 - \dot{x}_3\big) - \big(2x_2 - x_1 - x_3\big) + u + w, \\ \ddot{x}_3 &= -\beta\big(\dot{x}_3 - \dot{x}_2\big) - \big(x_3 - x_2\big) + w, \\ z &= -x_1 - \beta\dot{x}_1 + \alpha u, \end{aligned} \tag{7.1}$$

где x_i – координаты материальных точек относительно подвижного фундамента, u – демпфирующая сила, порожденная установленной в здании системой активной виброзащиты, w – с точностью до знака ускорение фундамента,

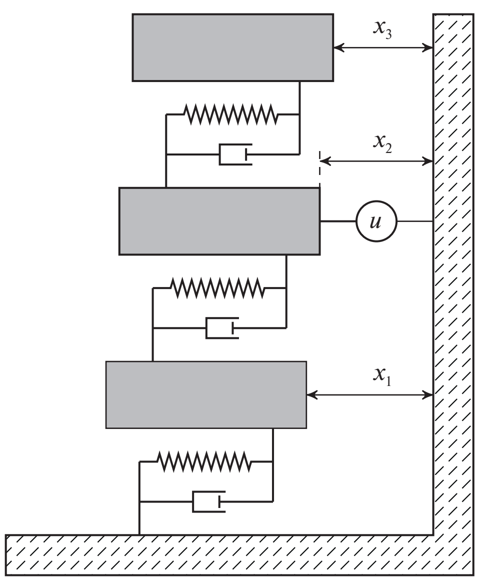

Рис. 1. Схематическое изображение здания как многомассовой упругой системы.

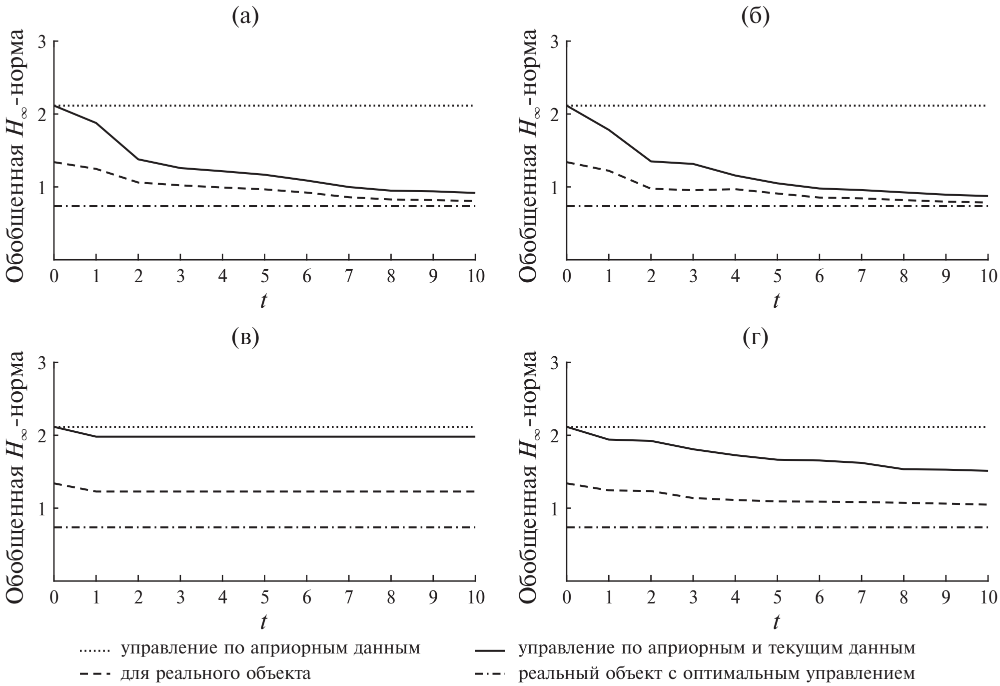

Рис. 2. Эволюции гарантированных обобщенных H_∞-норм при использовании различной информации с $\varepsilon_\xi = 0{,}01$ в следующих случаях: *а* – $\varepsilon_w = 0{,}01$, $\varepsilon_0 = 2$, *б* – $\varepsilon_w = 0{,}01$, $\varepsilon_0 = 5$, *в* – $\varepsilon_w = 0{,}1$, $\varepsilon_0 = 2$, *г* – $\varepsilon_w = 0{,}1$, $\varepsilon_0 = 5$.

z – целевой скалярный выход, определяющий максимальную силу, противодействующую смещению упругого объекта относительно основания, β – параметр демпфирования. Задача виброизоляции состоит в поиске управления, минимизирующего в некотором смысле z.

Перейдем от непрерывной системы к дискретной с шагом дискретизации $h = 0{,}5$. Зададим следующие числовые значения параметров: $\alpha = 0{,}1$, $\beta = 0{,}1$, $R = 0{,}01I$. Центр матричной сферы $\mathbf{\Delta}^{(a)}$ состоит из матриц дискретной модели системы (7.1) при $\beta = 0{,}2$, и неравенство (4.1) выполняется при $\rho = 0{,}07$. Помеха в измерении состояния, возмущение и начальное состояние выбирались случайно на сферах радиусов ε_ξ, ε_w и ε_0 соответственно, помеха при измерении управления отсутствовала, т.е. $\varepsilon_\eta = 0$. Всего неопределенная система (7.1) в канонической форме содержит 49 неизвестных параметров.

На рис. 2 для $\varepsilon_\xi = 0{,}01$ показаны эволюции гарантированной обобщенной H_∞-нормы γ_t^* неопределенной системы (7.1) при законе управления $u_t = \Theta_t x_t$ на основе априорных и текущих данных (сплошная кривая); обобщенная H_∞-норма $\|H\|_{g\infty}(\Omega_{real}, \Theta)$ для замкнутой системы, состоящей из реального объекта и стационарной обратной связи с $\Theta = \Theta_t$ (пунктирная кривая); гарантированная обобщенная H_∞-норма неопределенной системы (7.1) с робастным управлением $u_t = \Theta_0 x_t$, полученным на основе только априорных данных (штриховая линия); оптимальная H_∞-норма при оптимальном управ-

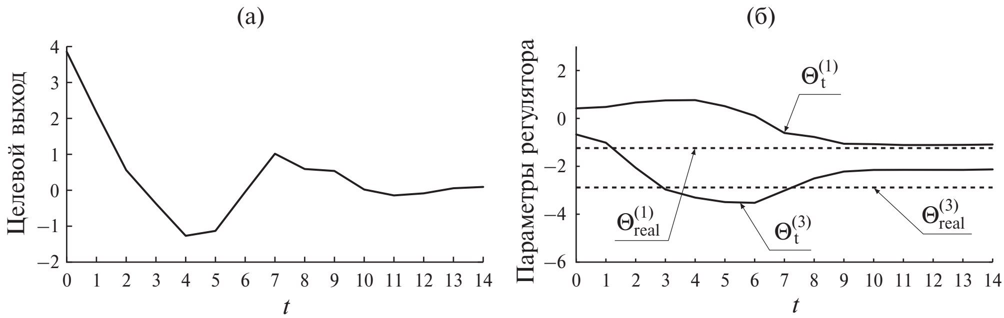

Рис. 3. Эволюция *а* – целевого выхода и *б* – двух настраиваемых параметров для реальной системы при $u_t = \Theta_t x_t$.

Рис. 4. Эволюция гарантированной обобщенной H_∞-нормы для $\varepsilon_\xi = 0{,}01$ и $\varepsilon_w = 0{,}1$ в случае, когда не существует единого робастного регулятора по априорной информации, при *а* – $\varepsilon_0 = 3$ и *б* – $\varepsilon_0 = 5$.

лении для реальной замкнутой системы (штрих-пунктирная линия). Как видно из сравнения случаев *а* и *б* или *в* и *г* на этом рисунке, увеличение начального состояния ведет к "увеличению" блока Ψ_{11} и соответственно к уменьшению матричного эллипсоида $\widehat{\mathbf{\Delta}}_k(\mu, \tau_0^{k-1})$, что в конечном итоге приводит к ускорению сходимости обобщенной H_∞-нормы к минимальному значению. Сравнение случаев *а* и *б* со случаями *в* и *г* показывает, что с увеличением амплитуды возмущения скорость сходимости показателя замедляется вплоть до возможной остановки. Это связано с тем, что увеличивается множество моделей, согласованных с полученными данными. Рисунок 3 иллюстрирует типичные траектории целевого выхода и двух из шести параметров управления на основе априорных и текущих данных для реальной системы.

Рисунок 4 демонстрирует, что даже когда априорная информация при $\rho = 0{,}2$ не точная и гарантированная обобщенная H_∞-норма неопределенной системы (7.1) с робастным управлением $u_t = \Theta_0 x_t$, полученным на основе только априорных данных, не может быть определена, к восьмому шагу при

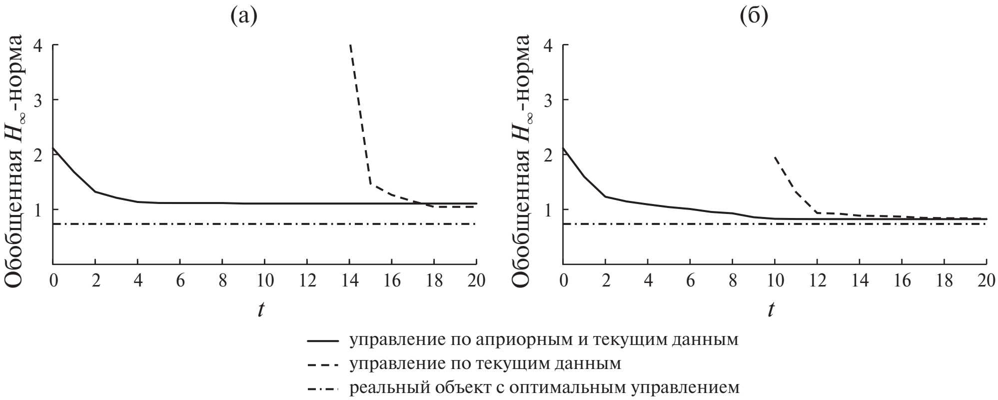

Рис. 5. Эволюции гарантированных обобщенных H_∞-норм при использовании совместно априорной и текущей информации и только текущей информации для $\varepsilon_\xi = 0{,}01$, $\varepsilon_w = 0{,}1$ при *а* – $\varepsilon_0 = 3$ и *б* – $\varepsilon_0 = 5$.

$\varepsilon_0 = 3$ и к десятому шагу при $\varepsilon_0 = 5$ текущей информации становится достаточно для того, чтобы неравенство (6.1) стало разрешимым и регулятор быстро настроился.

Рисунок 5, на котором для сравнения показаны эволюции гарантированных обобщенных H_∞-норм при использовании совместно априорных и текущих данных (сплошная кривая) и только текущих данных (пунктирная кривая), демонстрирует позитивную роль априорной информации в рассматриваемом синтезе управления: управление только по текущим данным “включается” только на 14 или 10 шагах, тогда как управление по совместной информации с первого шага обеспечивает приемлемый уровень качества системы.

8. Заключение

В статье разработан новый метод синтеза законов управления неизвестной динамической системой на основе априорной информации и зашумленных текущих данных, получаемых в процессе реального функционирования системы. На каждом шаге матрица параметров обратной связи находится путем решения линейных матричных неравенств так, чтобы минимизировать верхнюю границу обобщенной H_∞-нормы замкнутой системы для всех моделей, согласованных с данными, полученными к этому шагу. Доказано, что последовательность получаемых при этом гарантированных значений соответствующей нормы монотонно не возрастает и что при остановке процесса настройки полученный регулятор обеспечивает определенное качество замкнутой системы. Отличительная особенность предлагаемого подхода состоит в том, что для его реализации не требуется выполнять условие неисчезающего возбуждения в системе для ее идентификации. Кроме того, в отличие от адаптивного управления, где основным вопросом является установление сходимости настраиваемых параметров к их истинным значениям и отсутствует возможность оценить качество получаемой системы, здесь имеется возможность в реальном времени отслеживать значение оптимизируемого функционала. Численное моделирование активной защиты сооружений от сейсмических воздействий демонстрирует эффективность предложенного подхода.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 4.1. Для матриц Ω, согласованных с данными $\widehat{x}_t, \widehat{x}_{t+1}$ и $\widehat{u}_t$, для некоторых возмущений и помех, удовлетворяющих ограничениям (2.3), верно равенство (4.4). Отсюда следует, что выполняется неравенство

$$
\begin{gathered}
(\widehat{x}_{t+1} - \Omega\widehat{\varphi}_t)(\widehat{x}_{t+1} - \Omega\widehat{\varphi}_t)^{\mathrm{T}} = \\
= (I\ \Omega\ B_w) \begin{pmatrix} \xi_{t+1} \\ \zeta_t \\ w_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{t+1} \\ \zeta_t \\ w_t \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} (I\ \Omega\ B_w)^{\mathrm{T}} \preceq \\
\preceq d^2 \left(I\ \Omega\ B_w\right) \left(I\ \Omega\ B_w\right)^{\mathrm{T}}.
\end{gathered}
\tag{П.1}
$$

Записывая это эквивалентно в виде

$$
\Omega(\widehat{\varphi}_t\widehat{\varphi}_t^{\mathrm{T}} - d^2 I)\Omega^{\mathrm{T}} - \Omega\widehat{\varphi}_t\widehat{x}_{t+1}^{\mathrm{T}} - \widehat{x}_{t+1}\widehat{\varphi}_t^{\mathrm{T}}\Omega^{\mathrm{T}} + \widehat{x}_{t+1}\widehat{x}_{t+1}^{\mathrm{T}} - (I + B_w B_w^{\mathrm{T}})d^2 \preceq 0,
$$

получим (4.5). В свою очередь, если выполнено неравенство в (П.1), то, как показано в [13], для некоторого возмущения и помех, удовлетворяющих ограничениям (2.3), имеет место равенство (4.4).

Доказательство леммы 5.1. Записывая неравенство (5.1) как

$$
\Omega\Psi_{11}\Omega^{\mathrm{T}} + \Omega\Psi_{12} + \Psi_{12}^{\mathrm{T}}\Omega^{\mathrm{T}} + \Psi_{22} \preceq 0
$$

и выделяя полный квадрат, приведем его к виду (5.4). Так как $\Omega_{real} \in \in \widehat{\mathbf{\Delta}}_k(\mu, \tau_0^{k-1})$, то это множество не пусто и, следовательно, $\Gamma_k \succeq 0$. Умножая (5.4) слева на a^{T} и справа на a и учитывая, что $\Psi_{11} > 0$, получим

$$
|(\Omega + \Psi_{12}^{\mathrm{T}}\Psi_{11}^{-1})^{\mathrm{T}} a|^2 \leqslant \lambda_{\min}^{-1}(\Psi_{11})\lambda_{\max}(\Gamma_k) \quad \forall\, a : |a| = 1
$$

$$
\Rightarrow \|(\Omega + \Psi_{12}^{\mathrm{T}}\Psi_{11}^{-1})\|^2 \leqslant \lambda_{\min}^{-1}(\Psi_{11})\lambda_{\max}(\Gamma_k),
$$

т.е. множество $\widehat{\mathbf{\Delta}}_k(\mu, \tau_0^{k-1})$ ограничено.

Доказательство теоремы 6.1. Пусть неравенство (6.1) разрешимо при некоторых $P_k = P_k^{\mathrm{T}} \succ R$, Q_k, $\mu \geqslant 0$ и $\tau_0^{k-1} \geqslant 0$. Заменим в нем $Q_k = \Theta P_k$ и, применяя лемму Шура относительно отрицательно определенного блока, стоящего в первой строке и первом столбце, придем к эквивалентному неравенству

$$\begin{pmatrix} \Upsilon - \Psi_{11} & \star & \star \\ -\Psi_{21} & -\Psi_{22} - P_k + B_w B_w^{\mathrm{T}} & \star \\ (C\ D)\Upsilon & 0 & (C\ D)\Upsilon(C\ D)^{\mathrm{T}} - \gamma^2 I \end{pmatrix} \prec 0,$$

$$\Upsilon = \begin{pmatrix} I \\ \Theta \end{pmatrix} P_k \begin{pmatrix} I \\ \Theta \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Непосредственная подстановка показывает, что последнее неравенство выполняется тогда и только тогда, когда для функции $V_k(x^{(a)}) = x^{(a)\mathrm{T}} P_k x^{(a)}$ с $P_k \succ R$ при всех ненулевых $x_t^{(a)}$, $w_t^{(a)}$ и w_t^{Δ} выполняется неравенство

$$\text{(П.2)} \qquad \Delta V_k(x_t^{(a)}) + |z_t^{(a)}|^2 - \gamma^2 |w_t^{(a)}|^2 - \begin{pmatrix} w_t^{\Delta} \\ x_t^{(a)} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \Psi(\mu, \tau_0^{k-1}) \begin{pmatrix} w_t^{\Delta} \\ x_t^{(a)} \end{pmatrix} < 0,$$

в котором $\Delta V_k(x_t^{(a)}) = V_k(x_{t+1}^{(a)}) - V_k(x_t^{(a)})$ обозначает приращение функции $V_k(x^{(a)})$ по траектории системы

$$\text{(П.3)} \qquad \begin{aligned} x_{t+1}^{(a)} &= \begin{pmatrix} I \\ \Theta \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} w_t^{\Delta} + \begin{pmatrix} I \\ \Theta \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} (C\ D)^{\mathrm{T}}\, w_t^{(a)}, \\ z_t^{(a)} &= B_w^{\mathrm{T}} x_t^{(a)}. \end{aligned}$$

Далее, если в (П.3) положить $w_t^{\Delta} = \Omega^{\mathrm{T}} x_t^{(a)}$, то эти уравнения примут вид

$$\text{(П.4)} \qquad \begin{aligned} x_{t+1}^{(d)} &= \begin{pmatrix} I \\ \Theta \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \Omega^{\mathrm{T}} x_t^{(d)} + \begin{pmatrix} I \\ \Theta \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} (C\ D)^{\mathrm{T}}\, w_t^{(d)}, \\ z_t^{(d)} &= B_w^{\mathrm{T}} x_t^{(d)} \end{aligned}$$

и совпадают с уравнениями двойственной системы для исходной системы

$$\text{(П.5)} \qquad \begin{aligned} x_{t+1} &= \Omega \begin{pmatrix} I \\ \Theta \end{pmatrix} x_t + B_w w_t, \\ z_t &= (C\ D) \begin{pmatrix} I \\ \Theta \end{pmatrix} x_t. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для функции $V_k(x^{(d)}) = x^{(d)\mathrm{T}} P_k x^{(d)}$ с $P_k \succ R$ при всех ненулевых переменных $x_t^{(d)}$, $w_t^{(d)}$ системы (П.4) выполняются неравенства

$$\text{(П.6)} \quad \Delta V_k(x_t^{(d)}) + |z_t^{(d)}|^2 - \gamma^2 |w_t^{(d)}|^2 - x_t^{(d)\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \Omega^{\mathrm{T}} \\ I \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \Psi(\mu, \tau_0^{k-1}) \begin{pmatrix} \Omega^{\mathrm{T}} \\ I \end{pmatrix} x_t^{(d)} < 0.$$

Так как для всех $\Omega \in \widehat{\mathbf{\Delta}}_k(\mu, \tau_0^{k-1})$ имеем $(\Omega\, I)\Psi(\mu, \tau_0^{k-1})(\Omega\, I)^{\mathrm{T}} \preceq 0$, то для функции $V_k(x^{(d)}) = x^{(d)\mathrm{T}} P_k x^{(d)}$ с $P_k \succ R$ при всех ненулевых переменных $x_t^{(d)}$, $w_t^{(d)}$ и всех $\Omega \in \widehat{\mathbf{\Delta}}_k(\mu, \tau_0^{k-1})$ выполняются неравенства

$$\Delta V_k(x_t^{(d)}) + |z_t^{(d)}|^2 - \gamma^2 |w_t^{(d)}|^2 < 0. \tag{П.7}$$

С учетом леммы 3.2 отсюда следует, что $u_t = \Theta x_t$ является гарантирующим обобщенным H_∞-управлением с уровнем γ.

Обратно, пусть $u_t = \Theta x_t$ является гарантирующим обобщенным H_∞-управлением с уровнем γ. Тогда из определения и леммы 3.2 следует, что для двойственной системы (П.4) существует функция $V_k(x^{(d)}) = x^{(d)\mathrm{T}} P_k x^{(d)}$ с $P_k \succ R$ и такие $\widehat{\mu} \geqslant 0$ и $\widehat{\tau}_0^{k-1} \geqslant 0$, что при всех $\Omega \in \widehat{\mathbf{\Delta}}_k(\widehat{\mu}, \widehat{\tau}_0^{k-1})$ выполняется неравенство (П.7). Покажем, что для функции $V_k(x^{(a)}) = x^{(a)\mathrm{T}} P_k x^{(a)}$ с $P_k \succ R$ по траектории системы (П.3) выполняется неравенство

$$\Delta V_k(x_t^{(a)}) + |z_t^{(a)}|^2 - \gamma^2 |w_t^{(a)}|^2 < 0 \tag{П.8}$$

при всех ненулевых $x_t^{(a)}$, $w_t^{(a)}$ и w_t^{Δ}, удовлетворяющих неравенству

$$\begin{pmatrix} w_t^{\Delta} \\ x_t^{(a)} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \Psi(\widehat{\mu}, \widehat{\tau}_0^{k-1}) \begin{pmatrix} w_t^{\Delta} \\ x_t^{(a)} \end{pmatrix} \leqslant 0. \tag{П.9}$$

Действительно, выберем $x_t^{(a)} = x_t^{(d)}$, $w_t^{(a)} = w_t^{(d)}$ и для каждого w_t^{Δ}, удовлетворяющего (П.9), определим Ω как решение линейного матричного уравнения $x_t^{(a)\mathrm{T}}\Omega = w_t^{\Delta\mathrm{T}}$, в котором для каждого столбца матрицы Ω имеется одно уравнение. При этом из (П.9) следует, что $x_t^{(a)\mathrm{T}}(\Omega\, I)\Psi(\widehat{\mu}, \widehat{\tau}_0^{k-1})(\Omega\, I)^{\mathrm{T}} x_t^{(a)} \leqslant 0$, т.е. $\Omega \in \widehat{\mathbf{\Delta}}_k(\widehat{\mu}, \widehat{\tau}_0^{k-1})$. Таким образом, при таком Ω уравнения (П.3) совпадают с уравнениями (П.4), а неравенство (П.8) совпадает с неравенством (П.7).

В силу неущербности S-процедуры при одном ограничении выполнение неравенства (П.8) при ограничении (П.9) эквивалентно выполнению неравенства

$$\Delta V_k(x_t^{(a)}) + |z_t^{(a)}|^2 - \gamma^2 |w_t^{(a)}|^2 - \nu \begin{pmatrix} w_t^{\Delta} \\ x_t^{(a)} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \Psi(\widehat{\mu}, \widehat{\tau}_0^{k-1}) \begin{pmatrix} w_t^{\Delta} \\ x_t^{(a)} \end{pmatrix} < 0$$

при некотором $\nu \geqslant 0$. Заметим, что по предположению Ω_{real} находится строго внутри $\widehat{\mathbf{\Delta}}_k(\widehat{\mu}, \widehat{\tau}_0^{k-1})$, поэтому при $w_t^{\Delta} = \Omega_{real}^{\mathrm{T}} x_t^{(a)}$ неравенство (П.9) является строгим. Так как $\Psi(\mu, \tau_0^{k-1})$ линейно зависит от μ и τ_0^{k-1}, то, обозначая $\nu\widehat{\mu} = \mu$ и $\nu\widehat{\tau}_0^{k-1} = \tau_0^{k-1}$, получим неравенство (П.2), которое эквивалентно линейному матричному неравенству (6.1) при $Q_k = \Theta P_k$.

Доказательство теоремы 6.2. Как и в доказательстве теоремы 6.1 при $k = N-1$, получим, что для функции $V_{N-1}(x_t^{(d)}) = x_t^{(d)\mathrm{T}} P_{N-1} x_t^{(d)}$ с

$P_{N-1} > R$ по траектории системы (П.4) при всех $\Omega \in \widehat{\mathbf{\Delta}}_{N-1}(\mu, \tau_0^{N-1})$ выполняется неравенство (П.6). Следовательно, согласно леммам 3.1, 3.2 и замечанию 3.1 для функции $V_{N-1}(x_t) = x_t^{\mathrm{T}} Y_{N-1} x_t$, где $Y_{N-1} = \gamma_{N-1}^{*2} P_{N-1}^{-1}$, по траектории системы (2.1), $u_t = \Theta_{N-1} x_t$ для всех $\Omega \in \widehat{\mathbf{\Delta}}_{N-1}(\mu, \tau_0^{N-1})$ при $t \geqslant N-1$ выполняются неравенства

$$\triangle V_{N-1}(x_t) + |z_t|^2 - \gamma_{N-1}^{*2} |w_t|^2 < 0.$$

Суммируя эти неравенства, начиная с $t = N-1$, и учитывая, что $\lim_{t\to\infty} V_{N-1}(x_t) = 0$ и $Y_{N-1} < \gamma_{N-1}^{*2} R^{-1}$, получим (6.3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
2. *Petersen I.R., Tempo R.* Robust Control of Uncertain Systems: Classical Results and Recent Developments // Automatica. 2014. V. 50. No. 5. P. 1315–1335.
3. *Markovsky I., Huang L., Dörfler F.* Data-driven control based on the behavioral approach: from theory to applications in power systems // IEEE Control Syst. 2023. V. 43. No. 5. P. 28–68.
4. *Waarde H.J., Eising J., Camlibel M.K., Trentelman H.L.* Data-driven control based on the behavioral approach: from theory to applications in power systems // IEEE Control Syst. 2023. V. 43. No. 6. P. 32–66.
5. *Willems J.C., Rapisarda P., Markovsky I., De Moor B.* A note on persistency of excitation // Syst. Control Lett. 2005. V. 54. P. 325–329.
6. *De Persis C., Tesi P.* Formulas for Data-Driven Control: Stabilization, Optimality and Robustness // IEEE Trans. Automat. Control. 2020. V. 65. No. 3. P. 909–924.
7. *Waarde H.J., Eising J., Trentelman H.L., Camlibel M.K.* Data Informativity: a New Perspective on Data-Driven Analysis and Control // IEEE Trans. Automat. Control. 2020. V. 65. No. 11. P. 4753–4768.
8. *Berberich J., Koch A., Scherer C.W., Allgower F.* Robust data-driven state-feedback design // Proc. Amer. Control Conf. 2020. P. 1532–1538.
9. *Bisoffi A., De Persis C., Tesi P.* Trade-offs in learning controllers from noisy data // Syst. Control Lett. 2021. V. 154. Article 104985.
10. *Waarde H.J., Camlibel M.K., Mesbahi M.* From Noisy Data to Feedback Controllers: Nonconservative Design via a Matrix S-Lemma // IEEE Trans. Automat. Control. 2022. V. 67. No. 1. P. 162–175.
11. *Bisoffi A., De Persis C., Tesi P.* Data-driven Control via Petersen's Lemma // Automatica. 2022. V. 145. Article 110537.
12. *Nortmann B., Mylvaganam T.* Direct data-driven control of LTV systems // IEEE Trans. Automat. Control. 2023. V. 68. P. 4888–4895.
13. *Bisoffi A., De Persis C., Monshizadeh N.* Controller synthesis for input-state data with measurement errors // IEEE Cotrol Syst. Lett. 2024. V. 8. P. 1571–1576.
14. *Berberich J., Scherer C.W., Allgower F.* Combining Prior Knowledge and Data for Robust Controller Design // IEEE Trans. Automat. Control. 2023. V. 68. No. 8. P. 4618–4633.

15. *Коган М.М., Степанов А.В.* Синтез субоптимальных робастных регуляторов на основе априорных и экспериментальных данных // АиТ. 2023. № 8. С. 24–42.

16. *Li L., De Persis C., Tesi P., Monshizadeh N.* Data-based Transfer Stabilization in Linear Systems // IEEE Trans. Automat. Control. 2024. V. 69. P. 1866–1873.

17. *Коган М.М., Степанов А.В.* Синтез обобщенного H_∞-субоптимальных управления по экспериментальным и априорным данным // АиТ. 2024. № 1. С. 3–20.

18. *Niknejad N., Modares H.* Physics-Informed Data-Driven Safe and Optimal Control Design // IEEE Control Syst. Lett. 2024. V. 8. P. 285–290.

19. *Коган М.М., Степанов А.В.* Как улучшить робастное управление линейной нестационарной системой с помощью экспериментальных данных // АиТ. 2024. № 6. С. 115–139.

20. *Kogan M.M., Stepanov A.V.* Robust H_∞ Control with Transients for LTV Systems Based on Prior Knowledge and Data // Automatica. 2025. V. 173. Article 112083.

21. *Balandin D.V., Biryukov R.S., Kogan M.M.* Pareto suboptimal H_∞ controls with transients // Proc. Eur. Control Conf. 2021, Rotterdam. P. 542–547.

22. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.

23. *Petersen I.R., McFarlane D.C.* Optimal Guaranteed Cost Control and Filtering for Uncertain Linear Systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1994. V. 30. No. 9. P. 1971–1977.

24. *Якубович В.А.* S-процедура в нелинейной теории управления // Вестн. Ленинград. ун.-та. Математика. 1977. Т. 4. С. 73–93.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 03.03.2025

После доработки 20.05.2025

Принята к публикации 27.06.2025