

© 2025 г. Р. ХИЛЬДЕБРАНД, д-р физ.-мат. наук (khildebrand.r@mipt.ru),
Т. ШИКАКЕ МАПУНГВАНА (tendaichikake@phystech.edu)
(Московский физико-технический институт, Долгопрудный)

О ПРОБЛЕМЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С УПРАВЛЕНИЕМ В ДИСКЕ¹

Рассматривается задача быстрогодействия с симметрией типа Фуллера и управлением в двухмерном диске единичного радиуса. Задача обладает аналитическим решением, с неявным представлением функции Беллмана. Оптимальное значение этой задачи служит в качестве верхней границы на оптимальное значение другой задачи оптимального управления с симметрией типа Фуллера, содержащей в оптимальном синтезе особый режим второго порядка и решаемой аналитически.

Ключевые слова: оптимальное управление, симметрия Фуллера, особый режим, задача быстрогодействия.

DOI: 10.31857/S0005231025080052, EDN: UTDQEM

1. Введение

Задачи оптимального управления обычно решаются с помощью принципа максимума Понтрягина (ПМП), который приводит к гамильтоновой системе с разрывной правой частью [1]. Так как вследствие этого правая часть не удовлетворяет условию Липшица, теорема Пикара о существовании и единственности решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) не применима, и фазовый портрет системы может содержать различного рода сингулярности. Эти сингулярности проявляют себя в оптимальном синтезе в виде особых режимов. Чтобы уметь строить оптимальный синтез, нужно владеть информацией о структуре особых режимов и порождающих их сингулярностей. Одним из приемов исследования этих объектов является решение *модельной системы*, которая, с одной стороны, достаточно простая, в лучшем случае решается аналитически, а с другой стороны, структурно устойчива и содержит в себе сингулярность исследуемого типа.

Феномен особых режимов в оптимальном управлении был представлен в [2], где приведен пример системы, в которой оптимальное управление претерпевает бесконечное число переключений из одного экстремального значения в другое за конечный отрезок времени. Это явление называют *четтерингом*. Особые режимы были систематически исследованы, в том числе в [3–6]. Феномен четтеринга детально исследован в [7, 8]. Более сложная система, в которой четтеринг присутствует в комбинации с фрактальной структурой

¹ Исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (госзадание), номер проекта FSMG-2024-0011.

поведения оптимального управления, переключающегося хаотичным образом между тремя экстремальными значениями, была исследована в [9, 10].

В данной работе исследуются особые режимы второго порядка в продолжение программы, инициированной в [7]. Впервые задача оптимального управления с особым режимом второго порядка была аналитически решена в [2]. Она имеет вид

$$(1) \quad \min \int_0^{\infty} \frac{x^2}{2} dt : \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = u, \quad u \in [-1, 1].$$

Особая траектория второго порядка, присутствующая в фазовом портрете гамильтоновой системы, есть траектория $x(t) = y(t) \equiv 0$. Стыковка неособой траектории оптимального синтеза задачи (1) с особой траекторией происходит за конечное время с бесконечным числом переключений управления u между экстремальными значениями ± 1 . Функция Беллмана задачи (1) была посчитана явно в [9] и задается по формуле

$$(2) \quad \omega_{1D}(x, y) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{3}xy^3 - \frac{1}{15}y^5 - \gamma(y^2 + 2x)^{\frac{5}{2}}, & x \geq -\beta y|y|; \\ \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{3}xy^3 + \frac{1}{15}y^5 - \gamma(y^2 - 2x)^{\frac{5}{2}}, & x \leq -\beta y|y|, \end{cases}$$

где $\beta \approx 0,4446$ есть корень алгебраического уравнения

$$36\beta^4 + 3\beta^2 - 2 = 0,$$

а $\gamma = \frac{-\beta^2 + 2\beta - \frac{2}{3}}{10(1-2\beta)^{\frac{3}{2}}} \approx 0,06753$. Напомним, что выражение $-\omega_{1D}(x_0, y_0)$ является оптимальным значением функционала в задаче с начальными условиями $x(0) = x_0, y(0) = y_0$.

В оптимальном синтезе задачи присутствует непрерывная группа симметрий. А именно, если $(x(t), y(t), u(t))$ является оптимальной траекторией в задаче (1), то для любого $\lambda > 0$ траектория

$$(3) \quad (x_\lambda(t), y_\lambda(t), u_\lambda(t)) = (\lambda^2 x(\lambda^{-1}t), \lambda y(\lambda^{-1}t), u(\lambda^{-1}t))$$

также является оптимальной [7]. Также для любого $\lambda > 0$ функция Беллмана удовлетворяет условию

$$(4) \quad \omega_{1D}(\lambda^2 x, \lambda y) = \lambda^5 \omega_{1D}(x, y).$$

В монографии [7] рассмотрен аналог задачи (1) с двухмерным управлением. Эта задача имеет вид

$$(5) \quad \min \int_0^{\infty} \frac{\|x\|^2}{2} dt : \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = u, \quad u \in U = \mathbb{D},$$

где $\mathbb{D} = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \|u\| \leq 1\}$ – диск единичного радиуса, а $x(t), y(t)$ – векторно-значные функции. Оптимальный синтез этой задачи также содержит особую траекторию второго порядка $(x, y) = (0, 0)$ в пространстве $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Задача обладает той же симметрией (3), но вдобавок еще вращательной симметрией. А именно, для любой оптимальной траектории $(x(t), y(t), u(t))$ задачи (5) и любой ортогональной матрицы $O \in O(2)$ траектория

$$(6) \quad (Ox(t), Oy(t), Ou(t))$$

также является оптимальной. Функция Беллмана ω_{2D} в задаче (5) обладает симметриями

$$\omega_{2D}(\lambda^2 x, \lambda y) = \lambda^5 \omega_{2D}(x, y), \quad \omega_{2D}(Ox, Oy) = \omega_{2D}(x, y)$$

для любого $\lambda > 0$ и любой матрицы $O \in O(2)$. Вращательная симметрия позволяет рассматривать функцию Беллмана как функцию от грамиана $\begin{pmatrix} \langle x, x \rangle & \langle x, y \rangle \\ \langle x, y \rangle & \langle y, y \rangle \end{pmatrix}$ векторов x, y , что эффективно сокращает размерность на 1. Значение в момент t этой 2×2 матрицы на оптимальной траектории зависит только от начального значения грамиана.

В [7, Предложение 7.8] было показано, что в случае линейно зависимых начальных значений $x(0), y(0)$ задача (5) сводится к одномерной задаче (1), и векторы $x(t), y(t)$ все время остаются в одномерном подпространстве, натянутом на начальные значения. В частности, для линейно зависимых векторов $x = r_x(\cos \varphi, \sin \varphi)^T$, $y = r_y(\cos \varphi, \sin \varphi)^T$ функция Беллмана удовлетворяет условию

$$\omega_{2D}(x, y) = \omega_{1D}(r_x, r_y),$$

где числа r_x, r_y принимают любые вещественные значения.

Кроме оптимальных траекторий, исходящих из линейно зависимых начальных векторов, в задаче (5) существует семейство *автомодельных* оптимальных траекторий, полученное в [7, Предложение 7.9, Следствие 7.3]. На этих траекториях тангенс угла между векторами x и y не зависит от времени и равен $-\sqrt{5}/2$ (значения $\sqrt{5}$ и $\sqrt{5}/2$ в [7, стр. 233] оба ошибочны), а тангенс угла между векторами y и u также постоянен и равен $-\sqrt{5}$. Более того, справедливо равенство $2\langle y, y \rangle = \sqrt{6\langle x, x \rangle}$. Из этого следует, что грамиан начальных условий $x(0), y(0)$ на этих автомодельных траекториях задан выражением

$$(7) \quad \begin{pmatrix} \langle x(0), x(0) \rangle & \langle x(0), y(0) \rangle \\ \langle x(0), y(0) \rangle & \langle y(0), y(0) \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_0^4}{54} & -\frac{\lambda_0^3}{27} \\ -\frac{\lambda_0^3}{27} & \frac{\lambda_0^2}{6} \end{pmatrix}$$

для некоторого $\lambda_0 > 0$. Грамиан на траектории эволюционирует согласно закону

$$(8) \quad \begin{pmatrix} \langle x(t), x(t) \rangle & \langle x(t), y(t) \rangle \\ \langle x(t), y(t) \rangle & \langle y(t), y(t) \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda(t)^4}{54} & -\frac{\lambda(t)^3}{27} \\ -\frac{\lambda(t)^3}{27} & \frac{\lambda(t)^2}{6} \end{pmatrix}, \quad \lambda(t) = \lambda_0 - t.$$

Из этого следует интерпретация параметра λ_0 как времени прибытия траектории в особый режим в начале координат $(x, y) = (0, 0)$.

Если углы между векторами x, y, u постоянны, то сами векторы все быстрее оборачиваются вокруг начала координат, делая бесконечное число оборотов за конечное время. Более детально, направление каждого из этих векторов задано зависящим от времени фазовым углом [7, Предложение 7.9, Следствие 7.3]

$$(9) \quad \varphi(t) = \sigma\sqrt{5}\log(\lambda_0 - t) + \text{const},$$

где $\sigma \in \{-1, +1\}$ определяет направление вращения вокруг начала координат, а аддитивная константа зависит от фаз начальных условий.

Полная картина оптимального синтеза в задаче (5) на данный момент неизвестна. В настоящей работе вычисляется верхняя оценка на оптимальное значение задачи, с предъявлением явного субоптимального решения. Эта оценка должна удовлетворять нескольким критериям, потенциально противоречащим друг другу:

- оценка должна быть достаточно близка к истинному значению;
- оценку нужно уметь численно эффективно использовать, например, если она задается единым аналитическим выражением.

Как стало понятным из предшествующего анализа, оптимальные решения для разных начальных значений могут сильно отличаться друг от друга. Построение оценки, которая, с одной стороны, всюду близка к истинному значению, а с другой стороны, не задается мозаикой разных выражений в разных областях фазового пространства, является непростой задачей.

Предлагаемый подход состоит в решении *задачи быстрого действия*

$$(10) \quad \begin{aligned} \min (T - t_0): \quad & \dot{x} = y, \quad \dot{y} = u, \quad u \in U = \mathbb{D}, \\ & x(T) = y(T) = 0, \quad x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \end{aligned}$$

которая с точностью до смещения временной переменной t имеет то же множество допустимых траекторий, что и задача (5), но отличается от последней функционалом цены. Задача быстрого действия решается в разделе 2. В разделе 3 полученное решение подставляется в функционал цены исходной задачи (5), и получается искомую верхнюю оценку. В разделе 4 верхняя оценка сравнивается с истинным оптимальным значением в задаче (5) на тех траекториях, для которых последнее известно. Этот анализ показывает, что, с

одной стороны, качество оценки достаточно хорошее на всех таких начальных значениях, с другой стороны, оценка задается единым аналитическим выражением.

2. Задача быстродействия

В этом разделе явно решается задача быстродействия (10).

Применим ПМП. Введем сопряженные переменные ϕ, ψ и составим функцию Понтрягина

$$(11) \quad \mathcal{H} = -1 + \langle \phi, y \rangle + \langle \psi, u \rangle.$$

Оптимальное управление в случае $\psi \neq 0$ задается выражением $\hat{u} = \arg \max_{u \in U} \mathcal{H} = \frac{\psi}{\|\psi\|}$. Динамика сопряженных переменных следует закону

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = -\phi, \quad \dot{\phi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = 0.$$

Так как конечное время T не фиксировано, имеем также условие трансверсальности

$$(12) \quad \mathcal{H}(T) = \langle \psi, \hat{u} \rangle - 1 = \|\psi\| - 1 = 0.$$

Отсюда следует, что функция $\psi(t) = \phi t + \psi(0)$ аффинная и в конечный момент времени $t = T$ приходит на окружность единичного радиуса.

В силу вращательной симметрии можно без ограничения общности полагать, что вектор $\dot{\psi} = -\phi = (\alpha, 0)^\top$ параллелен единичному базисному вектору $e_1 = (1, 0)^\top$ и $\alpha \geq 0$. В случае $\alpha > 0$ выберем начальный момент времени t_0 таким образом, чтобы значение $\psi(0) = (0, \beta)^\top$ было коллинеарно базисному вектору e_2 и $\beta \geq 0$.

Случай $\alpha\beta = 0$: В этом случае сопряженная переменная ψ пребывает в одномерном линейном подпространстве пространства \mathbb{R}^2 . Тогда и векторы u, y, x должны эволюционировать в этом подпространстве, и задача сводится к известной одномерной задаче быстродействия с ускорением, ограниченным по модулю единицей. Эта задача имеет также вид (10), но все переменные рассматриваются как скаляры.

В этой задаче сопряженная переменная ϕ является постоянным скаляром. Сдвинем переменную времени таким образом, что конечный момент времени T равен нулю. Тогда переменная ψ в конечный момент времени принимает значение $\psi(T) = \psi(0) = \sigma \in \{-1, +1\}$ и как функция от времени задается выражением $\psi(t) = \sigma - \phi t$. Оптимальное управление u кусочно-постоянно и имеет вид

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} +1, & \text{если } \sigma > \phi t, \\ -1, & \text{если } \sigma < \phi t. \end{cases}$$

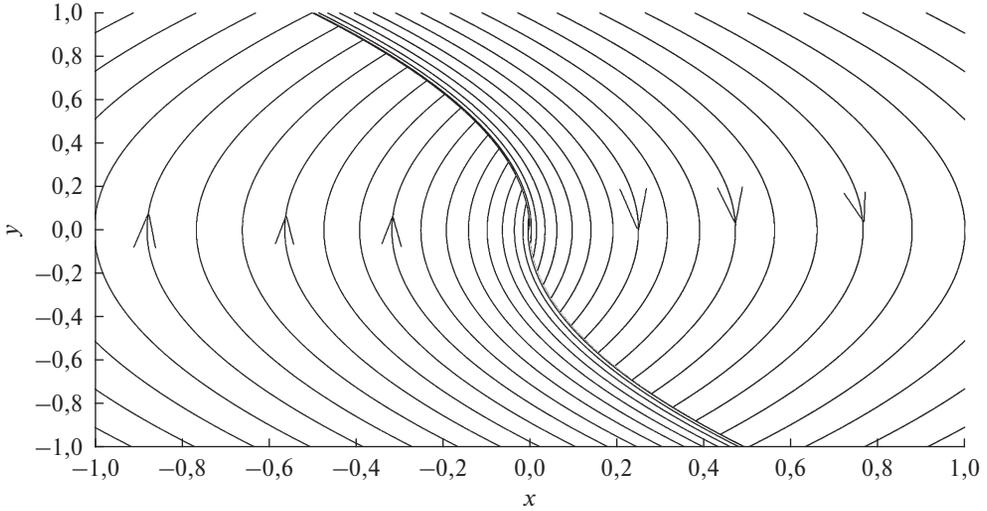


Рис. 1. Оптимальный синтез в одномерной задаче быстродействия.

Эквивалентно, полагая $\tilde{\phi} = \sigma\phi$, получаем

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} +\sigma, & \text{если } 1 > \tilde{\phi}t, \\ -\sigma, & \text{если } 1 < \tilde{\phi}t. \end{cases}$$

Отсюда вытекает

$$y(t) = \int_0^t \hat{u}(s) ds = \begin{cases} \sigma t, & \text{если } 1 > \tilde{\phi}t, \\ -\sigma(t - \tilde{\phi}^{-1}) + \sigma\tilde{\phi}^{-1}, & \text{если } 1 < \tilde{\phi}t \end{cases}$$

и далее

$$x(t) = \int_0^t y(s) ds = \begin{cases} \sigma \frac{t^2}{2}, & \text{если } 1 > \tilde{\phi}t, \\ -\sigma \frac{t^2 - \tilde{\phi}^{-2}}{2} + 2\sigma\tilde{\phi}^{-1}(t - \tilde{\phi}^{-1}) + \sigma \frac{\tilde{\phi}^{-2}}{2}, & \text{если } 1 < \tilde{\phi}t. \end{cases}$$

Случай $1 > \tilde{\phi}t$ возможен, только если $x = \sigma \frac{y^2}{2} = -\frac{y|y|}{2}$, и тогда $t_0 = \sigma y_0$. Во всех других точках на плоскости переменных x, y имеем $1 < \tilde{\phi}t$. Отсюда следует, что множество решений уравнения $x + \frac{y|y|}{2} = 0$ разделяет плоскость переменных x, y на две области, в которых оптимальны два крайних значения управления. Разделяющая области кривая состоит из траекторий, которые приходят непосредственно в начало координат (см. рис. 1). Слева от разделяющей кривой имеем $\hat{u} = +1$ и $\sigma = -1$, справа $\hat{u} = -1$ и $\sigma = 1$. Траектории системы переключаются на противоположное значение управления, когда они достигают сепарирующую кривую.

В частности, в случае $1 < \tilde{\phi}t$ имеем

$$\hat{u} = -\sigma = -\text{sign} \left(x_0 + \frac{y_0|y_0|}{2} \right).$$

Далее, имеем $\sigma y_0 = -t_0 + 2\tilde{\phi}^{-1}$, $\sigma x_0 = -\frac{t_0^2}{2} + 2\tilde{\phi}^{-1}t_0 - \tilde{\phi}^{-2}$ и вследствие этого

$$\tilde{\phi}^{-1} = -\sqrt{\sigma x_0 + \frac{y_0^2}{2}}, \quad t_0 = -\sigma y_0 - 2\sqrt{\sigma x_0 + \frac{y_0^2}{2}}.$$

При $t_0 < t < -\sqrt{\sigma x_0 + \frac{y_0^2}{2}}$ окончательно получаем

$$y(t) = -\sigma t - 2\sigma\sqrt{\sigma x_0 + \frac{y_0^2}{2}}, \quad x(t) = -\frac{\sigma t^2}{2} - 2\sigma\sqrt{\sigma x_0 + \frac{y_0^2}{2}}t - x_0 - \frac{\sigma y_0^2}{2},$$

где $\sigma = \text{sign} \left(x_0 + \frac{y_0|y_0|}{2} \right)$.

Случай $\alpha > 0$, $\beta > 0$: В этом случае имеем $\psi(t) = (\alpha t, \beta)^\top$. В силу $\|\psi(T)\| = 1$ имеем $\beta \leq 1$ и $\alpha^2 T^2 + \beta^2 = 1$.

Введем нормализованную временную переменную $\tau = \alpha t$ и нормализованные начальный момент времени $\tau_0 = \alpha t_0$ и конечный момент времени $\bar{\tau} = \alpha T$. Тогда получим $\beta = \sqrt{1 - \bar{\tau}^2}$. Отсюда следует $\|\psi(t)\| = \sqrt{\tau^2 + 1 - \bar{\tau}^2}$. Таким образом, оптимальное управление имеет вид

$$(13) \quad \hat{u} = \frac{\psi}{\|\psi\|} = \frac{(\tau, \beta)^\top}{\sqrt{\tau^2 + \beta^2}}.$$

Так как динамика системы автономна, функция Понтрягина (11) постоянна вдоль траектории, и условие трансверсальности (12) дает интеграл энергии $\mathcal{H} = -1 - \alpha y_1 + \sqrt{\tau^2 + \beta^2} \equiv 0$. Отсюда имеем

$$(14) \quad y_1 = \frac{\sqrt{\tau^2 + \beta^2} - 1}{\alpha}.$$

Вторая компонента вектора $y(t)$ получается по формуле

$$(15) \quad y_2 = \int_T^t \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 s^2 + \beta^2}} ds = \int_{\bar{\tau}}^{\tau} \frac{\beta}{\sqrt{s^2 + \beta^2}} \frac{ds}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} \left(\text{arsinh} \frac{\tau}{\beta} - \text{artanh} \bar{\tau} \right).$$

Здесь воспользовались соотношением $\text{arsinh} \frac{\bar{\tau}}{\beta} = \text{arsinh} \frac{\bar{\tau}}{\sqrt{1 - \bar{\tau}^2}} = \text{artanh} \bar{\tau}$.

Интегрируя далее, получим для компонент вектора $x(t) = \int_T^t y(s) ds = \int_{\bar{\tau}}^{\tau} y(s/\alpha) \frac{ds}{\alpha}$

$$x_1 = \frac{1}{2\alpha^2} \tau \sqrt{\tau^2 + \beta^2} + \frac{\beta^2}{2\alpha^2} \text{arsinh} \frac{\tau}{\beta} - \frac{\tau}{\alpha^2} - \frac{1}{2\alpha^2} (\beta^2 \text{artanh} \bar{\tau} - \bar{\tau}),$$

$$x_2 = \frac{\beta\tau}{\alpha^2} \text{arsinh} \frac{\tau}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha^2} \sqrt{\tau^2 + \beta^2} - \frac{\beta\tau}{\alpha^2} \text{artanh} \bar{\tau} + \frac{\beta}{\alpha^2}.$$

Вычислим элементы матрицы Грама векторов x, y . Подставляя полученные выше выражения для элементов x, y , получим после упрощения, что

$$\begin{aligned}
 \alpha^4 \|x\|^2 &= \frac{1}{4}\tau^4 + \left(\beta^2 \operatorname{artanh}^2 \bar{\tau} + \frac{5\beta^2}{4} + 1 \right) \tau^2 - (\beta^2 \operatorname{artanh} \bar{\tau} + \bar{\tau}) \tau + \\
 &+ \frac{1}{4} (4\beta^4 + 3\beta^2 + 1 + \beta^4 \operatorname{artanh}^2 \bar{\tau} - 2\beta^2 \bar{\tau} \operatorname{artanh} \bar{\tau}) - \\
 &- \tau^2 \sqrt{\tau^2 + \beta^2} + \frac{1}{2} (3\beta^2 \operatorname{artanh} \bar{\tau} + \bar{\tau}) \tau \sqrt{\tau^2 + \beta^2} - 2\beta^2 \sqrt{\tau^2 + \beta^2} - \\
 &- 2\beta^2 \tau^2 \operatorname{artanh} \bar{\tau} \operatorname{arsinh} \frac{\tau}{\beta} + \beta^2 \tau \operatorname{arsinh} \frac{\tau}{\beta} - \frac{\beta^2}{2} (\beta^2 \operatorname{artanh} \bar{\tau} - \bar{\tau}) \operatorname{arsinh} \frac{\tau}{\beta} - \\
 (16) \quad &- \frac{3\beta^2}{2} \tau \sqrt{\tau^2 + \beta^2} \operatorname{arsinh} \frac{\tau}{\beta} + \beta^2 \tau^2 \operatorname{arsinh}^2 \frac{\tau}{\beta} + \frac{\beta^4}{4} \operatorname{arsinh}^2 \frac{\tau}{\beta},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha^3 \langle x, y \rangle &= \frac{1}{2}\tau^3 + \left(\beta^2 \operatorname{artanh}^2 \bar{\tau} + \frac{\beta^2}{2} + 1 \right) \tau - \frac{\beta^2}{2} \sqrt{\tau^2 + \beta^2} \operatorname{arsinh} \frac{\tau}{\beta} + \\
 (17) \quad &+ \frac{1}{2} (\beta^2 \operatorname{artanh} \bar{\tau} + \bar{\tau}) \sqrt{\tau^2 + \beta^2} - \frac{3}{2} \tau \sqrt{\tau^2 + \beta^2} + \frac{\beta^2}{2} \operatorname{arsinh} \frac{\tau}{\beta} - \\
 &- \frac{1}{2} (\beta^2 \operatorname{artanh} \bar{\tau} + \bar{\tau}) + \beta^2 \tau \operatorname{arsinh}^2 \frac{\tau}{\beta} - 2\beta^2 \tau \operatorname{artanh} \bar{\tau} \operatorname{arsinh} \frac{\tau}{\beta},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha^2 \|y\|^2 &= \tau^2 - 2\sqrt{\tau^2 + \beta^2} + \beta^2 \operatorname{arsinh}^2 \frac{\tau}{\beta} - 2\beta^2 \operatorname{artanh} \bar{\tau} \operatorname{arsinh} \frac{\tau}{\beta} + \\
 (18) \quad &+ (\beta^2 \operatorname{artanh}^2 \bar{\tau} + \beta^2 + 1).
 \end{aligned}$$

2.1. Вычисление параметров $\alpha, \bar{\tau}, \tau_0$

Чтобы численно вычислить оптимальную траекторию в задаче быстрогодействия для заданной матрицы Грама $\begin{pmatrix} \|x_0\|^2 & \langle x_0, y_0 \rangle \\ \langle x_0, y_0 \rangle & \|y_0\|^2 \end{pmatrix}$, надо обратить зависимость начальных данных от параметров $\alpha, \bar{\tau}, \tau_0$, т.е. вычислить значения этих параметров.

Зависимость начальных данных от параметра α алгебраическое. Умножение параметра α на положительную константу λ приводит к умножению грамиана справа и слева на диагональную матрицу $\operatorname{diag}(\lambda^{-2}, \lambda^{-1})$. В конусе \mathcal{S}_+^2 неотрицательно определенных матриц размера 2×2 это действие определяет орбиты радиального типа. Каждая орбита пересекает аффинное компактное сечение конуса \mathcal{S}_+^2 в ровно одной точке. Сама орбита зависит только от параметров $\tau_0, \bar{\tau}$. Она может быть представлена, например, соотношениями $\frac{\|x_0\|^2}{\|y_0\|^4}, \frac{\langle x_0, y_0 \rangle}{\|y_0\|^3}$.

Зависимость орбиты от этих параметров не может быть обращена явно. Чтобы прояснить эту зависимость, вычислим пределы вышеупомянутых со-

отношений, когда параметры $\tau_0, \bar{\tau}$ стремятся к границе своей области определения. Напомним, что $-1 < \bar{\tau} < 1$, $\tau_0 < \bar{\tau}$.

В пределе $\tau_0 \rightarrow \bar{\tau}$ получим $\operatorname{arsinh} \frac{\tau_0}{\beta} \rightarrow \operatorname{arsinh} \frac{\bar{\tau}}{\beta} = \operatorname{artanh} \bar{\tau}$, $\sqrt{\tau_0^2 + \beta^2} \rightarrow 1$. Подставляя вместе с $\tau = \tau_0$ в (16), (17), (18), получим, что грамиан векторов x_0, y_0 стремится к 0. Однако если в то же время устремить $\alpha \rightarrow 0$ таким образом, что соотношение $\frac{\bar{\tau} - \tau_0}{\alpha} = T - t_0$ равно 1, то управление стремится к $\hat{u} \equiv (\bar{\tau}, \beta)^\top$ и траектория стремится к отрезку параболы, заданной по формуле $x(t) = \frac{1}{2}(t - T)^2 \hat{u}$, $y(t) = (t - T) \hat{u}$. Отсюда получаем $x_0 \rightarrow \frac{1}{2}(\bar{\tau}, \beta)^\top$, $y_0 \rightarrow -(\bar{\tau}, \beta)^\top$, и грамиан стремится к матрице $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$. В частности,

$$\frac{\|x_0\|^2}{\|y_0\|^4} \rightarrow \frac{1}{4}, \quad \frac{\langle x_0, y_0 \rangle}{\|y_0\|^3} \rightarrow -\frac{1}{2}.$$

В пределе $\bar{\tau} \rightarrow \pm 1$ получаем $\beta \rightarrow 0$, $\beta \operatorname{arsinh} \frac{\tau}{\beta} \rightarrow 0$, $\beta \operatorname{artanh} \bar{\tau} \rightarrow 0$, $\sqrt{\tau^2 + \beta^2} \rightarrow |\tau|$. Подставляя в (16), (17), (18), имеем

$$\begin{aligned} \alpha^4 \|x\|^2 &\rightarrow \frac{1}{4} \tau^4 + \tau^2 + \frac{1}{4} - \tau^2 |\tau| + \frac{1}{2} \bar{\tau} \tau |\tau| - \bar{\tau} \tau, \\ \alpha^3 \langle x, y \rangle &\rightarrow \frac{1}{2} (|\tau| - 1) (\tau (|\tau| - 2) + \bar{\tau}), \\ \alpha^2 \|y\|^2 &\rightarrow (|\tau| - 1)^2. \end{aligned}$$

При $\bar{\tau} \rightarrow -1$ получаем $\tau \leq -1$ и $|\tau| = -\tau$. Положив $\alpha = -1 - \tau_0$, снова имеем $T - t_0 \rightarrow 1$ и получаем предел $\begin{pmatrix} \|x_0\|^2 & \langle x_0, y_0 \rangle \\ \langle x_0, y_0 \rangle & \|y_0\|^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$. В итоге соотношения $\frac{\|x_0\|^2}{\|y_0\|^4}$, $\frac{\langle x_0, y_0 \rangle}{\|y_0\|^3}$ снова стремятся к тем же предельным значениям $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2}$.

При $\bar{\tau} \rightarrow 1$ получаем

$$\begin{pmatrix} \|x_0\|^2 & \langle x_0, y_0 \rangle \\ \langle x_0, y_0 \rangle & \|y_0\|^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \frac{(\tau_0 (|\tau_0| - 2) + 1)^2}{\alpha^4} & -\frac{1}{2} \frac{(1 - |\tau_0|)(\tau_0 (|\tau_0| - 2) + 1)}{\alpha^3} \\ -\frac{1}{2} \frac{(1 - |\tau_0|)(\tau_0 (|\tau_0| - 2) + 1)}{\alpha^3} & \frac{(1 - |\tau_0|)^2}{\alpha^2} \end{pmatrix}$$

и $\frac{\|x_0\|^2}{\|y_0\|^4} \rightarrow \frac{1}{4} \frac{(\tau_0 (|\tau_0| - 2) + 1)^2}{(1 - |\tau_0|)^4}$, $\frac{\langle x_0, y_0 \rangle}{\|y_0\|^3} \rightarrow -\frac{1}{2} \frac{\tau_0 (|\tau_0| - 2) + 1}{|1 - |\tau_0|| (1 - |\tau_0|)}$. Если $\tau_0 \geq 0$, то эти пределы снова равны $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2}$. При $\tau_0 \leq 0$ они равны $\frac{((1 + \tau_0)^2 - 2)^2}{4(1 + \tau_0)^4}$, $\frac{(1 + \tau_0)^2 - 2}{2|1 + \tau_0|(1 + \tau_0)}$, и $\lim_{\bar{\tau} \rightarrow 1} \frac{\|x_0\|^2}{\|y_0\|^4} = \left(\lim_{\bar{\tau} \rightarrow 1} \frac{\langle x_0, y_0 \rangle}{\|y_0\|^3} \right)^2$.

При $\bar{\tau} = 1$, $\tau_0 \in (-\infty, -1)$ соотношение $\frac{\langle x_0, y_0 \rangle}{\|y_0\|^3}$ монотонно растет от $-\frac{1}{2}$ до $+\infty$. При $\tau_0 \in (-1, 0]$ оно монотонно растет от $-\infty$ до $-\frac{1}{2}$. Предельные значения соотношений $\frac{\|x_0\|^2}{\|y_0\|^4}$, $\frac{\langle x_0, y_0 \rangle}{\|y_0\|^3}$ на границе представлены на рис. 2. Предел отличен от $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$ только при $\bar{\tau} \rightarrow 1$, $\tau_0 < 0$, в этом случае его геометрическое место – парабола.

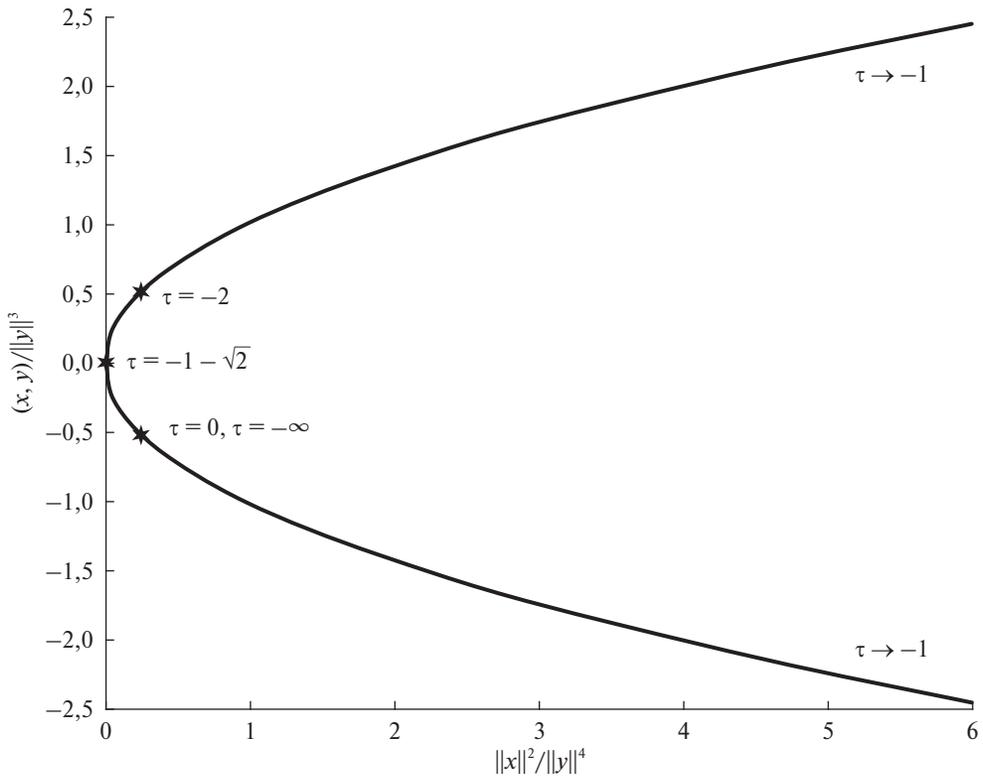


Рис. 2. Пределы соотношений $\frac{\|x_0\|^2}{\|y_0\|^4}, \frac{\langle x_0, y_0 \rangle}{\|y_0\|^3}$ при стремлении параметров $\bar{\tau}, \tau_0$ к границе их области определения.

Наконец, при $\tau_0 \rightarrow -\infty$ грамиан стремится к бесконечности. Однако если одновременно устремить $\alpha \rightarrow +\infty$ таким образом, что $\frac{-\tau_0}{\alpha} \rightarrow 1$, то ведущие члены в выражении для τ_0 доминируют, и снова получим $\begin{pmatrix} \|x_0\|^2 & \langle x_0, y_0 \rangle \\ \langle x_0, y_0 \rangle & \|y_0\|^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

В итоге, если параметры $\bar{\tau}, \tau_0$ обходят границу своей области определения, то пара соотношений $\left(\frac{\|x_0\|^2}{\|y_0\|^4}, \frac{\langle x_0, y_0 \rangle}{\|y_0\|^3}\right)$ двигается по параболе, представленной на рис. 2, включая бесконечно удаленную точку. За исключением интервала $(\bar{\tau}, \tau_0) \in \{1\} \times \mathbb{R}_-$ пара соотношений стремится к значениям $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$. При $\bar{\tau} \in (-1, +1), \tau_0 < \bar{\tau}$ пара принимает значения справа от параболы.

Значения параметров $\alpha, \bar{\tau}, \tau_0$, приводящие к заданному грамиану векторов x_0, y_0 , можно вычислить следующим образом. Сначала вычисляем соотношения $\frac{\|x_0\|^2}{\|y_0\|^4}, \frac{\langle x_0, y_0 \rangle}{\|y_0\|^3}$. Затем определяем значения параметров $\tau_0, \bar{\tau}$, дающие эти соотношения. Это можно осуществить, например, отследив кривые уровня соотношений на плоскости параметров $\bar{\tau}, \tau_0$, найдя графически их пересечение и уточнив значения методом Ньютона. Наконец, находим значение параметра α , например, из (18).

3. Верхняя граница на оптимальное значение

В этом разделе вычисляется значение функционала цены задачи (5) на оптимальном решении задачи быстрогодействия 2. Рассмотрим снова два случая из предыдущего раздела.

Случай $\alpha > 0, \beta > 0$: Значение функционала цены на оптимальной для задачи быстрогодействия траектории равно

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^T \|x(s)\|^2 ds = \frac{1}{2} \int_{\tau_0}^{\bar{\tau}} \|x(\tau/\alpha)\|^2 \frac{d\tau}{\alpha} = \frac{1}{2\alpha^5} \int_{\tau_0}^{\bar{\tau}} \alpha^4 \|x\|^2 d\tau.$$

Интегрируя выражение (16) по переменной τ , получим

$$\begin{aligned} & \frac{\tau^5}{20} + \frac{1}{3} \left(\frac{71}{36} \beta^2 + \beta^2 \operatorname{artanh}^2 \bar{\tau} + 1 \right) \tau^3 - \frac{1}{2} (\beta^2 \operatorname{artanh} \bar{\tau} + \bar{\tau}) \tau^2 + \\ & + \frac{1}{36} (9\beta^4 \operatorname{artanh}^2 \bar{\tau} - 18\beta^2 \bar{\tau} \operatorname{artanh} \bar{\tau} + 56\beta^4 + 27\beta^2 + 9) \tau - \\ & - \frac{1}{9} (3\beta^2 \bar{\tau} - 5\beta^4 \operatorname{artanh} \bar{\tau}) \sqrt{\tau^2 + \beta^2} - \frac{11\beta^2}{8} \tau \sqrt{\tau^2 + \beta^2} + \\ & + \frac{1}{18} (13\beta^2 \operatorname{artanh} \bar{\tau} + 3\bar{\tau}) \tau^2 \sqrt{\tau^2 + \beta^2} - \frac{1}{4} \tau^3 \sqrt{\tau^2 + \beta^2} - \frac{5\beta^4}{8} \operatorname{arsinh} \frac{\tau}{\beta} - \\ & - \frac{\beta^2}{2} (\beta^2 \operatorname{artanh} \bar{\tau} - \bar{\tau}) \tau \operatorname{arsinh} \frac{\tau}{\beta} + \frac{\beta^2}{2} \tau^2 \operatorname{arsinh} \frac{\tau}{\beta} - \frac{2\beta^2}{3} \tau^3 \operatorname{artanh} \bar{\tau} \operatorname{arsinh} \frac{\tau}{\beta} - \\ & - \frac{5\beta^4}{9} \sqrt{\tau^2 + \beta^2} \operatorname{arsinh} \frac{\tau}{\beta} - \frac{13\beta^2}{18} \tau^2 \sqrt{\tau^2 + \beta^2} \operatorname{arsinh} \frac{\tau}{\beta} + \\ & + \frac{\beta^4}{4} \tau \operatorname{arsinh}^2 \frac{\tau}{\beta} + \frac{\beta^2}{3} \tau^3 \operatorname{arsinh}^2 \frac{\tau}{\beta}. \end{aligned}$$

При $\tau = \bar{\tau}$ это выражение принимает вид

$$\frac{1}{1080} ((1024\beta^4 - 163\beta^2 + 54)\bar{\tau} - 675\beta^4 \operatorname{artanh} \bar{\tau}).$$

Поэтому значение $-\omega^{TO}$ функционала на оптимальной траектории для задачи быстрогодействия удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} -\alpha^5 \omega^{TO} = & -\frac{\tau_0^5}{40} - \frac{1}{6} \left(\frac{71}{36} \beta^2 + \beta^2 \operatorname{artanh}^2 \bar{\tau} + 1 \right) \tau_0^3 + \frac{1}{4} (\beta^2 \operatorname{artanh} \bar{\tau} + \bar{\tau}) \tau_0^2 - \\ & - \frac{1}{72} (9\beta^4 \operatorname{artanh}^2 \bar{\tau} + 27\beta^2 + 56\beta^4 - 18\beta^2 \bar{\tau} \operatorname{artanh} \bar{\tau} + 9) \tau_0 + \\ & + \frac{1}{2160} ((1024\beta^4 - 163\beta^2 + 54)\bar{\tau} - 675\beta^4 \operatorname{artanh} \bar{\tau}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{18}(3\beta^2\bar{\tau} - 5\beta^4 \operatorname{artanh}\bar{\tau})\sqrt{\tau_0^2 + \beta^2} + \frac{11\beta^2}{16}\tau_0\sqrt{\tau_0^2 + \beta^2} - \\
& - \frac{1}{36}(13\beta^2 \operatorname{artanh}\bar{\tau} + 3\bar{\tau})\tau_0^2\sqrt{\tau_0^2 + \beta^2} + \frac{1}{8}\tau_0^3\sqrt{\tau_0^2 + \beta^2} + \\
& + \frac{5\beta^4}{16}\operatorname{arsinh}\frac{\tau_0}{\beta} + \frac{\beta^2}{4}(\beta^2 \operatorname{artanh}\bar{\tau} - \bar{\tau})\tau_0\operatorname{arsinh}\frac{\tau_0}{\beta} - \frac{\beta^2}{4}\tau_0^2\operatorname{arsinh}\frac{\tau_0}{\beta} + \\
& + \frac{\beta^2}{3}\tau_0^3\operatorname{artanh}\bar{\tau}\operatorname{arsinh}\frac{\tau_0}{\beta} + \frac{5\beta^4}{18}\sqrt{\tau_0^2 + \beta^2}\operatorname{arsinh}\frac{\tau_0}{\beta} + \\
& + \frac{13\beta^2}{36}\tau_0^2\sqrt{\tau_0^2 + \beta^2}\operatorname{arsinh}\frac{\tau_0}{\beta} - \frac{\beta^4}{8}\tau_0\operatorname{arsinh}^2\frac{\tau_0}{\beta} - \frac{\beta^2}{6}\tau_0^3\operatorname{arsinh}^2\frac{\tau_0}{\beta}.
\end{aligned}$$

Случай $\alpha\beta = 0$: Для одномерной задачи оптимального управления имеем

$$\frac{x(t)^2}{2} = \begin{cases} \frac{t^4}{8}, & \text{если } t > -\sqrt{\sigma x_0 + \frac{y_0^2}{2}}, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{t^2}{2} + 2\sqrt{\sigma x_0 + \frac{y_0^2}{2}}t + \sigma x_0 + \frac{y_0^2}{2} \right)^2, & t < -\sqrt{\sigma x_0 + \frac{y_0^2}{2}}. \end{cases}$$

Отсюда в силу $\tilde{\phi}^{-1} = -\sqrt{\sigma x_0 + \frac{y_0^2}{2}}$, $\sigma = \operatorname{sign}\left(x_0 + \frac{y_0|y_0|}{2}\right)$ и $t_0 = -\sigma y_0 + 2\tilde{\phi}^{-1}$ получаем, что значение функционала задачи (1) на оптимальной для задачи быстрогодействия траектории равно

$$\begin{aligned}
(19) \quad \frac{1}{2} \int_{t_0}^0 x(t)^2 dt &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\tilde{\phi}^{-1}} \left(\frac{t^2}{2} - 2\tilde{\phi}^{-1}t + \tilde{\phi}^{-2} \right)^2 dt + \int_{\tilde{\phi}^{-1}}^0 \frac{t^4}{8} dt \\
&= -\frac{t_0^5}{40} + \frac{t_0^4\tilde{\phi}^{-1}}{4} - \frac{5}{6}t_0^3\tilde{\phi}^{-2} + t_0^2\tilde{\phi}^{-3} - \frac{t_0\tilde{\phi}^{-4}}{2} + \frac{\tilde{\phi}^{-5}}{12} \\
&= -\frac{23}{60}\tilde{\phi}^{-5} + \frac{\tilde{\phi}^{-4}\sigma y_0}{2} - \frac{\tilde{\phi}^{-2}\sigma y_0^3}{6} + \frac{\sigma y_0^5}{40} \\
&= \frac{\sigma y_0 x_0^2}{2} + \frac{x_0 y_0^3}{3} + \frac{\sigma y_0^5}{15} + \frac{23}{60} \left(\sigma x_0 + \frac{y_0^2}{2} \right)^{5/2}.
\end{aligned}$$

4. Качество аппроксимации

В этом разделе сравнивается значение функционала на субоптимальной траектории с оптимальными значениями для тех начальных данных, для которых оптимальное значение известно.

Рассмотрим сначала одномерную задачу (1). Так как оптимальное значение (2) (помноженное на -1) и значение (19) на траектории задачи быстрогодействия удовлетворяют соотношению (4), относительная разница этих значений

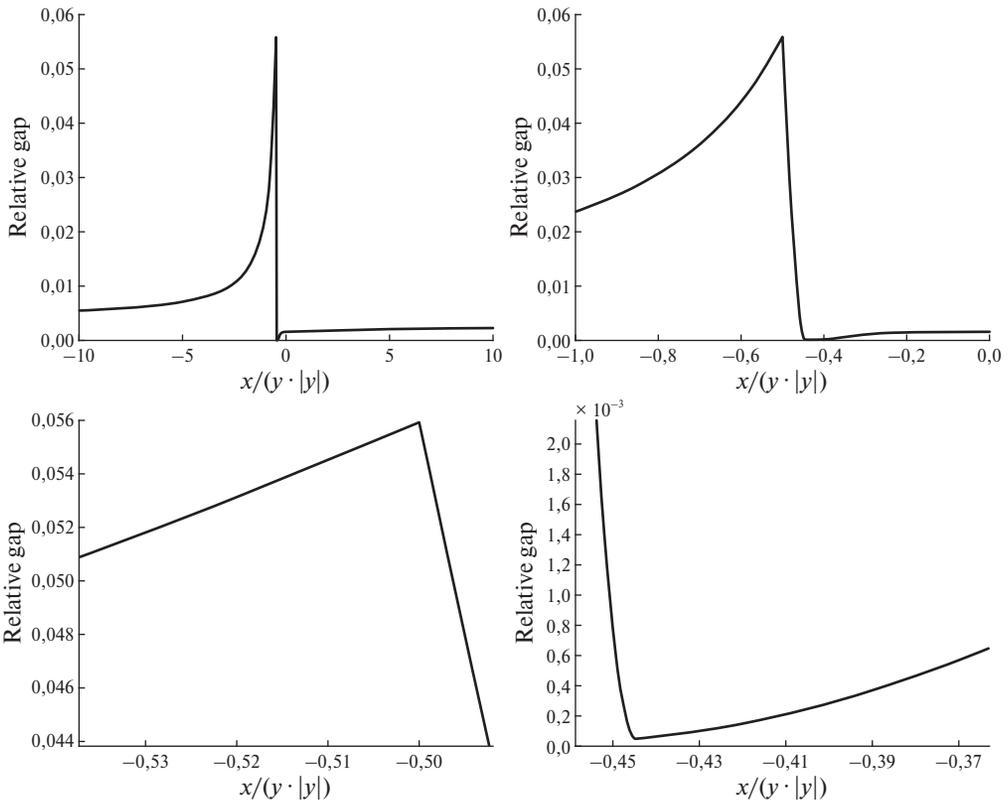


Рис. 3. Относительная разница между значением функционала задачи (1) на оптимальной для задачи быстрогодействия траектории и оптимальным значением.

зависит только от соотношения $\frac{x}{|y|y}$. Эта разница представлена на рис. 3. В задаче быстрогодействия управление на оптимальных траекториях переключается на кривой $x = -\frac{y|y|}{2}$, в то время как на оптимальных для исходной задачи (1) траекториях управление переключается на кривой $x = -\beta y|y|$, где $\beta \approx 0,4446$. Графики справа и снизу на рис. 3 являются увеличениями деталей графика в левом верхнем углу. Разница колеблется между $5,4 \cdot 10^{-5}$ и $5,6 \cdot 10^{-2}$.

Так как и задача быстрогодействия (10), и задача (5) сводятся к их одномерным аналогам рис. 1 и (1), в случае, если начальные значения векторов x, y коллинеарны, указанный разрыв имеет место также для значений в двухмерных задачах.

Рассмотрим теперь автомодельные траектории, найденные в [7]. Сначала вычислим оптимальные значения функционала задачи (5) на этих траекториях. В силу (4) функция Белмана на траекториях, удовлетворяющих условию (8), имеет вид

$$\omega_{2D}(x(t), y(t)) = \frac{\lambda(t)^5}{\lambda_0^5} \omega_{2D}(x(0), y(0)).$$

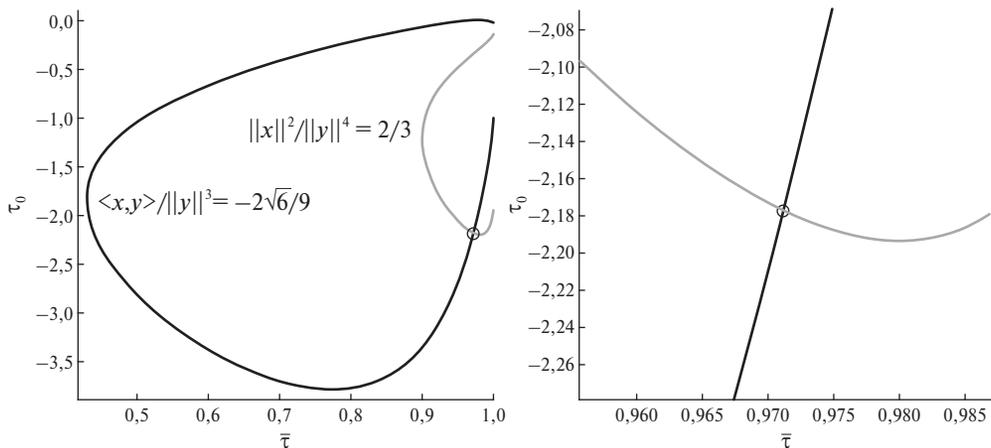


Рис. 4. Линии уровня соотношений $\frac{\|x_0\|^2}{\|y_0\|^4}$, $\frac{\langle x_0, y_0 \rangle}{\|y_0\|^3}$ в плоскости параметров $(\bar{\tau}, \tau_0)$ для значений, отвечающих автомодельной траектории.

Дифференцируя по t и пользуясь соотношением $\frac{d\omega(x(t), y(t))}{dt} = \frac{1}{2}\|x(t)\|^2$, получим

$$(20) \quad \omega_{2D}(x(0), y(0)) = -\frac{\lambda_0^5}{540}.$$

Вычислим значение функционала задачи (5) на оптимальных для задачи быстродействия траекториях с теми же начальными условиями (7). Для этого нужно обратить зависимость (16), (17), (18), т.е. вычислить значения параметров $\alpha, \tau, \bar{\tau}$, приводящих к нужным начальным векторам.

Следуя схеме, предложенной в конце раздела 2, сначала вычислим линии уровня соотношений $\frac{\|x_0\|^2}{\|y_0\|^4}$, $\frac{\langle x_0, y_0 \rangle}{\|y_0\|^3}$ в плоскости параметров $(\bar{\tau}, \tau_0)$. В силу (7) получаем

$$\frac{\|x_0\|^2}{\|y_0\|^4} = \frac{2}{3}, \quad \frac{\langle x_0, y_0 \rangle}{\|y_0\|^3} = \frac{2\sqrt{6}}{9}.$$

Соответствующие линии уровня представлены на рис. 4. Значения параметров $\bar{\tau}, \tau_0$, которые соответствуют автомодельной траектории, на рисунке даны единственной точкой пересечения линий уровня (кружочек). Уточнив полученные графически приближения методом Ньютона, получим значения параметров

$$\bar{\tau} \approx 0,97116420999, \quad \tau_0 \approx -2,17695799429.$$

Подставляя их в (18) и полагая $\|y_0\|^2 = \frac{\lambda_0^2}{6}$ в силу (7), получим значение параметра $\alpha \approx 4,13415835032 \lambda_0^{-1}$.

Подставляя полученные значения параметров в выражение для функционала цены, получим субоптимальное значение цены $\approx 0,0019779902706 \lambda_0^5$. Сравнивая с оптимальным значением (20), вычисленным выше, получаем относительную ошибку $\approx 6,8 \cdot 10^{-2}$.

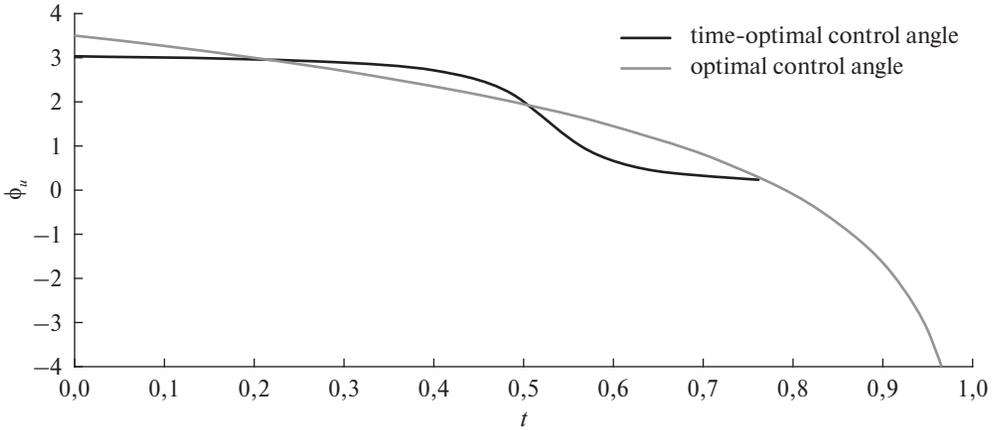


Рис. 5. Эволюция фазового угла оптимального управления для задачи (5) и для задачи быстродействия (10) при одном и том же начальном значении векторов x, y , лежащих на автомодельной траектории с временем перехода в начало координат $T = 1$.

Сравним теперь оптимальное управление на автомодельной траектории с управлением на траектории задачи быстродействия с теми же начальными значениями векторов x, y , соответствующими $\lambda_0 = 1$. Тогда оптимальной для задачи (5) траектории нужно единичное время, чтобы прийти в начало координат.

Оптимальное для задачи быстродействия управление задано (13), где τ пробегает интервал от τ_0 до $\bar{\tau}$, а исходная переменная времени t – интервал от 0 до $T^{TO} = \alpha^{-1}(\bar{\tau} - \tau_0) \approx 0,7614904746$. Отметим, что управление вращается по часовой стрелке вокруг начала координат. Заметим также, что время прихода в начало координат меньше, чем время прихода $T = 1$ автомодельной траектории, поскольку в задаче быстродействия минимизируется именно это время прихода. На рис. 5 фазовый угол управления в задаче быстродействия представлен как функция от времени.

В силу (9) оптимальное управление на автомодельной траектории задано по формуле

$$\hat{u} = (\cos \varphi(t), \sin \varphi(t))^T, \quad \varphi(t) = \sqrt{5} \log(T - t) + \text{const},$$

где $T = \lambda_0 = 1$ есть время прихода траектории в начало координат, а константа есть угол управления в начальный момент времени $t = 0$. Для вычисления этой константы сначала вычислим начальное значение вектора y по формулам (14), (15). Оно задается выражением

$$y(0) \approx \begin{pmatrix} 0,2878394861 \\ -0,2895083711 \end{pmatrix}.$$

Как было сказано в разделе 1, оптимальное управление направлено с разницей в угол $\pi - \arctg \sqrt{5}$ по отношению к y , что дает начальное значение

угла управления $\approx 3,5035658841$. При $t \rightarrow T = 1$ угол управления стремится как логарифм к $-\infty$, и управление совершает бесконечное число оборотов вокруг начала координат за конечное время. Зависимость угла управления от времени представлена на рис. 5. При $t \rightarrow 1$ фаза оптимального управления стремится к $-\infty$.

5. Заключение и перспективы

В данной работе рассмотрены две задачи оптимального управления. Эти задачи обладают одним и тем же множеством допустимых траекторий, но имеют разные функционалы цены. Задача быстродействия (10) решается аналитически, но в задаче (5), в которой возникает особый режим второго порядка, явно известен только ограниченный набор оптимальных траекторий.

Описано решение задачи быстродействия, которое использовано для построения верхней границы на оптимальное значение в задаче (5). Сравнение субоптимальных траекторий (оптимальных для задачи быстродействия) с известными оптимальными в задаче (5) траекториями показывает, что относительная ошибка по значению функционала колеблется от тысячных долей процента до нескольких процентов. Разница в фазе оптимального управления может быть существенной и достигать 45 градусов.

Верхняя оценка на оптимальное значение функционала может быть использована для ограничения области в расширенном фазовом пространстве, в которой могут лежать оптимальные траектории задачи (5). Это, в свою очередь, упростит изучение оптимального синтеза в этой задаче. Более конкретно в [9] было показано, что симметрия Фуллера (3) влечет за собой соотношение $\omega(x, y) = \frac{1}{5}(\langle \psi, y \rangle + 2\langle \phi, x \rangle)$ на функцию Беллмана задачи, где ϕ, ψ – сопряженные с x, y переменные. Поэтому верхняя оценка на значение функционала в некоторой точке (x, y) влечет линейное неравенство на оптимальные значения сопряженных переменных в этой точке.

Численные эксперименты показывают, что автомодельная траектория является отталкивающей в фактор-пространстве расширенного фазового пространства по действию групп симметрии, в то время как траектории, соответствующие одномерному аналогу (1) задачи, являются притягивающими. Формальное доказательство этого свойства и качественное описание оптимального синтеза в задаче (5) остаются открытыми и будут исследоваться в последующих работах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mischchenko E.F.* The Mathematical Theory of Optimal Processes / New York, London: Wiley, 1962.
2. *Fuller A.T.* Relay control systems optimized for various performance criteria / Proceedings of the First World Congress IFAC. Butterworth, 1960. P. 510–519.
3. *Kelley H.J., Kopp R.E., Moyer M.G.* Singular extremals / Topics in Optimization. New York: Acad. Press, 1967. P. 63–101.

4. *Marchal C.* Chattering arcs and chattering controls // J. Optimiz. Theory App. 1973. V. 11. No. 5. P. 441–468.
5. *Lewis R.M.* Definitions of order and junction condition in singular control problems // SIAM J. Contr. Optim. 1980. V. 18. No. 1. P. 21–32.
6. *Kupka I.* Generic properties of extremals in optimal control problems / Differential geometric control theory, Boston: Birkhäuser, 1983. Progr. Math. V. 27. P. 310–315.
7. *Zelikin M.I., Borisov V.F.* Theory of chattering control with applications to astronautics, robotics, economics, and engineering / Boston: Birkhäuser, 1994.
8. *Lokutsievskiy L.V.* Generic structure of the lagrangian manifold in chattering problems. // Sbornik Math. 2014. V. 205. No. 3. P. 432–458.
9. *Zelikin M.I., Melnikov N.B., Hildebrand R.* Topological structure of a typical fibre of optimal synthesis for chattering problems // P. Steklov Inst. Math. 2001. V. 233. P. 116–142.
10. *Zelikin M.I., Lokutsievskiy L.V., Hildebrand R.* Typicality of chaotic fractal behaviour of integral vortices in hamiltonian systems with discontinuous right hand side // Journal of Mathematical Sciences. 2017. V. 221. No. 1. P. 1–136.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 03.03.2025

После доработки 20.05.2025

Принята к публикации 27.06.2025