

© 2025 г. В.Ф. СОКОЛОВ, д-р физ.-мат. наук (sokolov@ipm.komisc.ru)  
(Коми научный центр УрО РАН, Сыктывкар)

## ОПТИМАЛЬНОЕ РОБАСТНОЕ СЛЕЖЕНИЕ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО МИНИМАЛЬНО-ФАЗОВОГО ОБЪЕКТА ПРИ НЕИЗВЕСТНЫХ СМЕЩЕНИИ И НОРМЕ ВНЕШНЕГО ВОЗМУЩЕНИЯ И НОРМАХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ<sup>1</sup>

Для дискретного минимально-фазового объекта управления с известной приближенной номинальной моделью, ограниченным смещенным внешним возмущением и операторными возмущениями по выходу и управлению рассмотрена задача оптимального отслеживания заданного ограниченного сигнала. Смещение и норма внешнего возмущения и нормы операторных возмущений предполагаются неизвестными. Показателем качества слежения служит зависящая от названных неизвестных параметров и задающего сигнала наихудшая асимптотическая ошибка отслеживания заданного ограниченного сигнала в классе рассматриваемых возмущений. Решение задачи оптимального слежения с заданной точностью базируется на оптимальной квантификации возмущений в рамках  $\ell_1$ -теории робастного управления, полиэдральном оценивании неизвестных параметров и использовании показателя качества задачи управления как идентификационного критерия.

*Ключевые слова:* робастное управление, оптимальное управление, ограниченное возмущение, неопределенность, квантификация возмущений, множественное оценивание.

**DOI:** 10.31857/S0005231025080041, **EDN:** UTCMAP

### 1. Введение

В настоящей работе рассматривается задача оптимального слежения для линейного дискретного динамического объекта с заданной и тестируемой передаточной функцией. Предполагается, что на объект воздействуют ограниченное внешнее возмущение с неизвестными смещением и границами и операторные возмущения (неопределенности) по выходу и управлению с неизвестными нормами (коэффициентами усиления). Задача рассматривается в рамках  $\ell_1$ -теории робастного управления, заложенной в работах [1, 2] и соответствующей сигнальному пространству  $\ell_\infty$  ограниченных вещественных последовательностей. Сложность задачи заключается в том, что для минимизации показателя качества в виде наихудшей в классе допустимых возмущений асимптотической ошибки слежения необходима компенсация неизвестного смещения и обоснованная оптимальная оценка показателя качества в условиях неидентифицируемости всех указанных выше неизвестных параметров.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена в рамках госзадания ФМИ ФИЦ Коми НЦ УрО РАН, проект № 125031203621-2.

Решение описанной оптимальной задачи слежения базируется на оптимальной квантификации возмущений с помощью множественного оценивания неизвестных параметров (set-membership approach) и использовании показателя качества задачи управления как идентификационного критерия. Множественное оценивание в идентификации систем, изначально базировавшееся на предположении известных верхних границ детерминированных возмущений, приобрело широкую популярность в конце 1980-х и сводилось к разработке вычислимых верхних и нижних аппроксимаций (эллипсоидов, параллелотопов и т.п.) множеств параметров, согласованных с данными измерений (ограничимся ссылками на первые специальные выпуски двух ведущих журналов по теории управления [3, 4]). Описания применений этих аппроксимаций к задачам управления редки и сопровождаются различными дополнительными предположениями типа априори известного стабилизирующего управления. Сторонниками стохастических моделей возмущений этот подход критикуется за консерватизм, порождаемый априорными предположениями об известных верхних границах возмущений. Параллельно с начала 1990-х начались активные исследования в области идентификации для робастного управления и квантификации неопределенностей. Полтора десятилетия спустя в обзорной статье [5] отмечалось, что деятельность по оценке множеств неопределенности часто ошибочно относилась к идентификации для управления, поскольку в большинстве этих работ цель управления не учитывалась при идентификации. Проблемы верификации модели и оценки неопределенностей до настоящего времени остаются актуальными [6, 7], но по-прежнему рассматриваются в основном вне контекста задач управления и с искусственными критериями, мотивированными целями собственно идентификации.

В настоящей работе оценка смещения и квантификация возмущений базируются на множественном оценивании и прямом использовании показателя качества задачи управления как идеального идентификационного критерия. Потенциальные возможности применения такого подхода возникают благодаря двум обстоятельствам. Во-первых, в  $\ell_1$ -теории робастного управления получены явные представления для асимптотических показателей качества через индуцированные нормы передаточных функций замкнутой системы управления и нормы всех возмущений и неопределенностей [8–11]. Во-вторых, модель ограниченных возмущений допускает прямое использование текущих данных измерений для онлайн верификации модели [12]. В общем случае такой подход к идентификации для управления вычислительно не реализуем ввиду сложности вычисления текущих оптимальных оценок. Но он реализуем в случае линейных или дробно-линейных относительно оцениваемых параметров показателей качества [13]. В рассматриваемой задаче показатель качества является невыпуклой дробно-квадратичной функцией неизвестных параметров (см. представление (9)). При известном смещении показатель качества становится дробно-линейным, и задача квантификации возмущений для этого случая решена в [14], где также сформулирована идея оценивания неизвестного смещения с использованием сетки тестируемых значений. В на-

стоящей статье дается строгое обоснование этой идеи и доказывается строгий результат о решении поставленной задачи асимптотически оптимального слежения с заданной точностью. Результаты моделирования и комментарии к ним иллюстрируют эффективность предложенного решения.

Обозначения:

$|\varphi|$  – евклидова норма вектора  $\varphi \in \mathbb{R}^n$ ;

$x_s^t = (x_s, x_{s+1}, \dots, x_t)$  для вещественной последовательности  $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$ ;

$|x_s^t| = \max_{s \leq k \leq t} |x_k|$ ;

$\|x\|_{ss} = \limsup_{t \rightarrow +\infty} |x_t|$ ;

$\|x\|_\infty = \sup_t |x_t|$  – норма в пространстве ограниченных последовательностей  $\ell_\infty$ ;

$\|x\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|$  – норма в пространстве абсолютно суммируемых последовательностей  $\ell_1$ ;

$\|G\| = \sum_{k=0}^{+\infty} |g_k| = \|g\|_1$  – индуцированная норма устойчивой линейной стационарной причинной системы  $G: \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty$  с передаточной функцией  $G(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k \lambda^k$ .

## 2. Модель управляемого объекта и содержательная постановка задачи

Модель управляемого объекта описывается уравнением

$$(1) \quad a(q^{-1})y_t = b(q^{-1})u_t + v_t, \quad t = 1, 2, 3, \dots,$$

где  $y_t \in \mathbb{R}$  – измеряемый выход объекта в момент времени  $t$ ,  $u_t \in \mathbb{R}$  – управление,  $v_t \in \mathbb{R}$  суммарное возмущение,  $q^{-1}$  – оператор сдвига назад ( $q^{-1}y_t = y_{t-1}$ ). Начальные данные  $y_{1-n}^0 = (y_{1-n}, \dots, y_0)$  произвольны,  $u_t = 0$  при  $t \leq 0$ . Полиномы

$$a(\lambda) = 1 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n, \quad b(\lambda) = b_1\lambda + \dots + b_m\lambda^m$$

характеризуют **номинальную модель** объекта, т.е. модель без возмущения  $v$ . Суммарное возмущение  $v$  имеет вид

$$(2) \quad v_t = c^w + \delta^w w_t + \delta^y \Delta^1(y)_t + \delta^u \Delta^2(u)_t, \quad \|w\|_\infty \leq 1, \quad \delta^w > 0, \quad \delta^y > 0, \quad \delta^u > 0.$$

Параметры  $c^w$  и  $\delta^w$  в (2) характеризуют соответственно смещение внешнего возмущения  $c^w + \delta^w w_t$  и верхнюю границу несмещенного возмущения  $\delta^w w$ . Числа  $\delta^y > 0$  и  $\delta^u > 0$  – коэффициенты усиления (индуцированные нормы) операторных возмущений по выходу и управлению соответственно и

$$(3) \quad |\Delta^1(y)_t| \leq p_t^y = \max_{t-\mu \leq k \leq t-1} |y_k|, \quad |\Delta^2(u)_t| \leq p_t^u = \max_{t-\mu \leq k \leq t-1} |u_k|.$$

В  $\ell_1$ -теории робастного управления эти возмущения называются неопределенностями с ограниченной памятью  $\mu$ , которая гарантирует независимость

асимптотической динамики замкнутой системы управления от начальных данных. Память неопределенностей  $\mu$  выбирается конструктором сколь угодно большой, но не бесконечной, без ущерба для гарантируемого качества управления. Описание возмущений в виде (2), (3) эквивалентно (см. [10, 11]) неравенствам

$$(4) \quad |v_t - c^w| \leq \delta^w + \delta^y p_t^y + \delta^u p_t^u \quad \forall t.$$

Априорная информация об управляемом объекте содержится в следующих предположениях.

П1. Полиномы  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda)$  номинального объекта управления известны,  $b_1 \neq 0$ .

П2. Корни полинома  $\frac{b(\lambda)}{\lambda}$  лежат вне замкнутого единичного круга комплексной плоскости.

П3. Столбец параметров  $\delta = (\delta^w, \delta^y, \delta^u)^T$  неизвестен, и неизвестно смещение  $c^w \in [c_{\min}^w, c_{\max}^w]$  с известными  $c_{\min}^w, c_{\max}^w$ .

П4. Известна асимптотическая верхняя граница  $\|r\|_{ss}$  задающего сигнала  $r$  или ее оценка сверху.

Предположение П1 подразумевает и тот случай, когда “истинная” номинальная модель неизвестна и для тестирования предоставлена ее оценка, полученная каким-либо методом ее идентификации. Предположение П2 гарантирует ограниченность управления  $u$ , если выход объекта  $y$  ограничен (такой объект называется минимально-фазовым). Предположение П4 будет прокомментировано после строгой постановки задачи в конце раздела 3. Еще одно обязательное предположение об ограничениях на нормы операторных возмущений будет сформулировано в разделе 3 после теоремы 1.

**Содержательная постановка задачи** заключается в построении управления, минимизирующего наихудшую асимптотическую ошибку отслеживания заданного ограниченного сигнала для множества возмущений, удовлетворяющих неравенствам (4).

Для решение оптимальной задачи с заданной точностью необходимы онлайн квантификация возмущений (т.е. оценивание их неизвестных параметров  $\delta$ ) для оценки качества слежения и компенсации неизвестного смещения  $c^w$ .

### 3. Качество слежения оптимального регулятора при известном смещении $c^w$ и постановка задачи

Пусть  $r = (r_1, r_2, r_3, \dots)$  – заданный ограниченный сигнал ( $r \in \ell_\infty$ ), и показатель качества задачи слежения имеет вид

$$(5) \quad J_\mu(c^w, \delta) = \sup_{v \in V} \|y - r\|_{ss}, \quad \|y - r\|_{ss} := \limsup_{t \rightarrow +\infty} |y_t - r_t|,$$

где  $V$  – множество возмущений  $v$ , удовлетворяющих неравенствам (4).

Рассмотрим регулятор, описываемый уравнением

$$(6) \quad b(q^{-1})u_t = (a(q^{-1}) - 1)y_t + r_t - c^w.$$

Заметим, что уравнение (6) задает значение  $u_{t-1}$ , а не  $u_t$ , не входящее в это уравнение. Тогда для выхода замкнутой системы управления (1), (6) получаем

$$(7) \quad y_t - r_t = v_t - c^w = \delta^w w_t + \delta^y \Delta^1(y)_t + \delta^u \Delta^2(u)_t.$$

В силу произвольности и непредсказуемости правой части в (7) регулятор (6) является **оптимальным** для показателя качества (5).

*Определение 1.* Замкнутая система (1), (6) называется робастной устойчивой в классе возмущений  $V$ , если  $J_\mu(c^w, \delta) < +\infty$ .

Для формулировки теоремы о качестве оптимального регулятора (6) введем обозначения для его передаточных функций от  $y$  и  $r$  к управлению  $u$ :

$$G_{uy}(\lambda) = \frac{a(\lambda) - 1}{b(\lambda)}, \quad G_{ur}(\lambda) = \frac{1}{b(\lambda)}.$$

*Теорема 1.* Пусть выполнены предположения П1, П2. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Замкнутая система (1), (6) робастно устойчива в классе  $V$  при памяти возмущений  $\mu = +\infty$  если и только если

$$(8) \quad \delta^y + \delta^u \|G_{uy}\| < 1.$$

Для системы с нулевыми начальными данными  $y_{1-n}^0$  и  $\mu = +\infty$

$$(9) \quad J(c^w, \delta) := J_{+\infty}(c^w, \delta) = \frac{\delta^w + \delta^y \|r\|_{ss} + \delta^u (|c^w| + \|r\|_{ss}) \|1/b(q^{-1})\|}{1 - \delta^y - \delta^u \|G_{uy}\|}.$$

2) Для системы с произвольными начальными данными  $y_{1-n}^0$  и  $\mu < +\infty$

$$(10) \quad J_\mu(c^w, \delta) \leq J(c^w, \delta) \quad \forall \mu > 0,$$

и если последовательность  $|r|$  равномерно часто попадает в окрестности верхнего предела  $\|r\|_{ss}$  (см. определение в [10]), то при любых начальных данных

$$(11) \quad J_\mu(c^w, \delta) \nearrow J(c^w, \delta) \quad (\mu \rightarrow +\infty),$$

где знак  $\nearrow$  означает монотонную сходимость снизу при  $\mu \rightarrow +\infty$ .

Доказательство теоремы 1 приведено в [14].

Заключительное предположение об ограничении на нормы операторных возмущений П5 вытекает из теоремы 1.

П5. Известно число  $\bar{\delta}$  такое, что

$$(12) \quad \delta^y + \delta^u \|G_{uy}\| \leq \bar{\delta} < 1.$$

Предположение П5 не ограничительно по сравнению с условием робастной устойчивости (8). По смыслу поставленной задачи параметр  $\bar{\delta}$  выбирается конструктором и может быть выбран сколь угодно близким к 1. Но для близких к 1 значений  $\delta^y + \delta^u \|G_{uy}\|$  показатель качества  $J_\mu(c^w, \delta)$  становится слишком большим и номинальную модель с заданными тестируемыми полиномами  $a(\lambda)$  и  $b(\lambda)$  или объект с такими операторными возмущениями можно считать неприемлемыми.

**Постановка задачи.** Требуется при априорной информации П1–П5 и заданном сигнале слежения  $r$  построить обратную связь вида  $u_t = U_t(y_1^t, u_1^{t-1})$  (и с конечной памятью), гарантирующую с заданной точностью неравенство

$$(13) \quad \|y - r\|_{ss} \leq J(c^w, \delta).$$

Главная сложность поставленной задачи заключается в обеспечении неравенства (13) в условиях неидентифицируемости  $c^w$  и  $\delta$  (см. раздел 4.1).

Используемый далее как идентификационный критерий показатель (9) зависит от  $\|r\|_{ss}$ . Если это значение априори не известно, вместо него можно использовать рекуррентно вычисляемые неубывающие оценки  $R_t = \max_{1 \leq k \leq t} |r_k| \leq \|r\|_\infty$ , чтобы гарантировать принципиально теоретически неулучшаемую гарантию качества слежения с заменой  $\|r\|_{ss}$  на  $\|r\|_\infty$ .

#### 4. Оптимальное слежение

Решение поставленной задачи базируется на оптимальной квантификации возмущений для тестируемой номинальной модели.

##### 4.1. Оптимальная квантификация возмущений при известном смещении $c^w$

Из уравнения объекта (1) и неравенств (4) следует, что при известном смещении  $c^w$  полная информация о неизвестном  $\delta$  в момент времени  $t$  содержится в априорном предположении П5 и включении

$$(14) \quad \delta \in D_t = \left\{ \hat{\delta} \geq 0 \mid |a(q^{-1})y_k - b(q^{-1})u_k - c^w| \leq \hat{\delta}^w + \hat{\delta}^y p_k^y + \hat{\delta}^u p_k^u \quad \forall k \leq t \right\},$$

где  $\hat{\delta} = (\hat{\delta}^w, \hat{\delta}^y, \hat{\delta}^u)^T$ . Система неравенств в (14) эквивалентна описанию системы (1)–(4) на промежутке  $[1, t]$  при любом управлении  $u_0^{t-1}$ . Тогда наилучшая относительно показателя качества  $J$  согласованная с измерениями  $y_0^t, u_0^{t-1}$  оценка параметра  $\delta$  имеет вид

$$(15) \quad \delta_t = \underset{\hat{\delta} \in D_t}{\operatorname{argmin}} J(c^w, \hat{\delta}).$$

Оптимальная задача (15) является задачей дробно-линейного программирования относительно неизвестной строки  $\hat{\delta}$  и стандартным образом сводится к задаче линейного программирования с помощью введения дополнительной вещественной переменной [15]. Число линейных относительно  $\hat{\delta}$  неравенств в описании множеств  $D_t$  может неограниченно возрастать с ростом  $t$ . Для обеспечения ограниченности числа неравенств и сходимости полиэдральных и векторных оценок неизвестного столбца  $\delta$  за конечное время выберем параметр  $\varepsilon_1 > 0$ , задающий размер мертвой зоны при обновлении оценок. Начальная полиэдральная оценка  $\delta$  имеет вид

$$P_0 = \left\{ \hat{\delta} = (\hat{\delta}^w, \hat{\delta}^y, \hat{\delta}^u)^T \mid \hat{\delta} \geq 0, \hat{\delta}^y + \hat{\delta}^u \|G_{uy}\| \leq \bar{\delta} < 1 \right\}, \quad \delta_0 = (0, 0, 0)^T.$$

Введем обозначения

$$(16) \quad \nu_{t+1} = |a(q^{-1})y_{t+1} - b(q^{-1})u_{t+1} - c^w|, \quad \phi_{t+1} = (1, p_{t+1}^y, p_{t+1}^u)^T$$

и запишем новое неравенство в описании  $D_{t+1}$  в виде

$$(17) \quad \delta \in \Omega_{t+1} = \left\{ \hat{\delta} \mid \nu_{t+1} \leq \hat{\delta}^T \phi_{t+1} \right\}.$$

Пусть  $P_t$  и  $\delta_t$  – полиэдральная и векторная оценки  $\delta$  в момент  $t$ . Положим

$$(18) \quad P_{t+1} = \begin{cases} P_t, & \text{если } \nu_{t+1} \leq \delta_t^T \phi_{t+1} + \varepsilon_1 |\phi_{t+1}|, \\ P_t \cap \Omega_{t+1}, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$(19) \quad \delta_{t+1} = \underset{\hat{\delta} \in P_{t+1}}{\operatorname{argmin}} J(c^w, \hat{\delta}).$$

Согласно (18), полиэдральная оценка  $P_{t+1}$  обновляется добавлением нового неравенства только если расстояние от  $\delta_t$  до полупространства  $\Omega_{t+1} \subset \mathbb{R}^3$  больше  $\varepsilon_1$ . Заметим, что все множественные оценки  $P_t$  не ограничены в направлении роста переменной  $\hat{\delta}^w$ .

#### 4.2. Оптимальное слежение при неизвестном смещении $c^w$

Для компенсации неизвестного смещения  $c^w \in [c_{\min}^w, c_{\max}^w]$  оно будет оцениваться с помощью сетки

$$(20) \quad c_k^w = c_{\min}^w + k\varepsilon_2, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad \varepsilon_2 = \frac{c_{\max}^w - c_{\min}^w}{N} > 0,$$

гарантирующей оценку смещения  $c^w$  с желаемой точностью  $\varepsilon_2/2$  за счет выбора достаточно большого  $N$ . Для каждого смещения  $c_k^w$  в каждый момент времени  $t$  будут вычисляться полиэдральные оценки  $P_{k,t}$  и векторные оценки  $\delta_{k,t}$  неизвестного вектора  $\delta$ . Номер наилучшей оценки  $k_t$  вектора  $\delta$  в момент времени  $t$  определим формулой

$$(21) \quad k_t = \underset{k}{\operatorname{argmin}} J(c_k^w, \delta_{k,t}).$$

Управление  $u_t$  в момент  $t$  определяется соответствующим этой оценке *адаптивным регулятором*

$$(22) \quad b(q^{-1})u_{t+1} = (a(q^{-1}) - 1)y_{t+1} + r_{t+1} - c_{k_t}^w.$$

После измерения выхода  $y_{t+1}$  невязки

$$\nu_{k,t+1} = |a(q^{-1})y_{t+1} - b(q^{-1})u_{t+1} - c_k^w|$$

и оценки  $P_{k,t+1}$  и  $\delta_{k,t+1}$  для  $k = 0, 1, \dots, N$  вычисляются согласно (16)–(19) (соответствующие формулы с индексом  $k$  в каждой из них для краткости не приводятся).

*Теорема 2. Пусть выполнены предположения П1–П5 и управление объектом (1) осуществляется адаптивным регулятором (22) с алгоритмом оценивания (16)–(19), (21) и параметром мертвой зоны  $\varepsilon_1$  в (18), удовлетворяющим неравенству*

$$(23) \quad 0 < \varepsilon_1 < \frac{1 - \bar{\delta}}{1 + \|G_{uy}\|}.$$

*Тогда число обновлений полиэдральных оценок  $P_{k,t}$  и векторных оценок  $\delta_{k,t}$  конечно для всех  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ , и ошибка слежения удовлетворяет неравенству*

$$(24) \quad \|y - r\|_{ss} \leq J(c_{k_\infty}^w, \delta_\infty + \varepsilon_1(1, 1, 1)^T) = J(c_{k_\infty}^w, \delta_\infty) + O(\varepsilon_1) \quad (\varepsilon_1 \rightarrow 0),$$

где  $k_\infty$  – финальное значение номера (21) наилучшей оценки неизвестного  $\delta$ ,  $\delta_\infty$  – финальное значение  $\delta_{k_\infty,t}$ , и

$$(25) \quad \begin{aligned} J(c_{k_\infty}^w, \delta_\infty) &\leq J\left(c^w, \delta + \left(\frac{\varepsilon_2}{2} + \varepsilon_1, \varepsilon_1, \varepsilon_1\right)\right) = \\ &= J(c^w, \delta) + O(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \quad (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \rightarrow 0). \end{aligned}$$

*Доказательство.* При любом управлении  $u_t$  для любого  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$  из уравнения объекта (1) и представления суммарного возмущения  $v$  в виде (4) следует

$$(26) \quad |a(q^{-1})y_{t+1} - b(q^{-1})u_{t+1} - c_k^w| \leq |c^w - c_k^w| + \delta^w + \delta^y p_{t+1}^y + \delta^u p_{t+1}^u \quad \forall t.$$

В силу представления (4) неравенства (26) позволяют рассматривать управляемый объект как виртуальный объект вида (1), в котором виртуальное внешнее возмущение имеет смещение  $c_k^w$  и норма несмещенного внешнего возмущения не превосходит

$$(27) \quad \bar{\delta}_k^w = |c^w - c_k^w| + \delta^w.$$

Докажем, что число обновлений оценок  $P_{k,t}$  и  $\delta_{k,t}$  конечно для всех  $k$ . При каждом обновлении оценок согласно (18)

$$\varepsilon_1 |\phi_{t+1}| < \nu_{t+1} - \delta_t^T \phi_{t+1}.$$

Тогда для любого  $\hat{\delta} \in \Omega_{t+1}$  из (17) имеем

$$\varepsilon_1 |\phi_{t+1}| < |(\hat{\delta} - \delta_t)^T \phi_{t+1}| \leq |\hat{\delta} - \delta_t| |\phi_{t+1}|$$

и, следовательно,  $|\hat{\delta} - \delta_t| > \varepsilon_1$ . Тогда для всех  $k$  расстояние от оценки  $\delta_{k,t}$  до полупространства  $\Omega_{k,t+1}$  больше  $\varepsilon_1$ . Так как  $P_{k,t+1} \subset \Omega_{k,t+1}$ , то расстояние от  $\delta_{k,t}$  до  $P_{k,t+1}$  также больше  $\varepsilon_1$ . Полиэдральные оценки  $P_{k,t}$  монотонно убывают по времени ввиду добавления новых неравенств. При этом шары радиуса  $\varepsilon_1/2$  с центрами  $\delta_{k,t}$  не пересекаются с аналогичными шарами с центрами в будущих обновленных оценках  $\delta_{k,s}$  (при  $s > t$ ) и, следовательно, со всеми шарами  $\delta_{k,s}$  при  $s \neq t$ . Из этого следует конечность числа возможных обновлений оценок  $\delta_{k,t}$  для всех  $k$ , так как все они находятся в соответствующих ограниченных множествах  $\{\hat{\delta}_k \mid J(c_k^w, \hat{\delta}_k) \leq J(c_k^w, (\bar{\delta}_k^w, \delta^y, \delta^u)^T)\}$ , где  $\bar{\delta}_k^w$  из (27).

Обозначим через  $\delta_{k,\infty} = (\delta_{k,\infty}^w, \delta_{k,\infty}^y, \delta_{k,\infty}^u)^T$  финальные значения, т.е. достигаемые за конечное время  $t_{k,\infty}$ , предельные значения оценок  $\delta_{k,t}$  и положим  $t_\infty = \max_k t_{k,\infty}$ . Тогда  $\delta_{k,t} = \delta_{k,\infty}$  для всех  $t \geq t_\infty$  и всех  $k$ .

Пусть  $k_\infty$  – установившийся номер наилучшей оценки вектора  $\delta$ :

$$k_\infty = \operatorname{argmin}_k J(c_k^w, \delta_{k,\infty}).$$

Тогда в силу (21)

$$(28) \quad J(c_{k_\infty}^w, \delta_{k_\infty}) \leq J(c_k^w, \delta_{k,\infty}) \quad \forall k.$$

Для всех  $t \geq t_\infty$  для невязок (26) в замкнутой адаптивной системе с установившимся регулятором в силу (18) имеем

$$(29) \quad \nu_{k_\infty,t} \leq \delta_{k_\infty}^T \phi_t + \varepsilon_1 |\phi_t| \leq (\delta_{k_\infty}^T + \varepsilon_1(1, 1, 1)) \phi_t,$$

откуда по теореме 1 следует (24).

Введем обозначение для номера наиболее близкой к  $c^w$  оценки  $c_{k_*}^w$ :

$$k_* = \operatorname{argmin}_k |c^w - c_{k_*}^w|.$$

Тогда  $|c^w - c_{k_*}^w| \leq \varepsilon_2/2$  и для всех  $t \geq t_\infty$  с учетом (18)

$$(30) \quad \begin{aligned} |a(q^{-1})y_{t+1} - b(q^{-1})u_{t+1} - c_{k_*,t}^w| &\leq \frac{\varepsilon_2}{2} + \delta^T \phi_{t+1} + \varepsilon_1 |\phi_t| \leq \\ &\leq \delta + \left(\frac{\varepsilon_2}{2} + \varepsilon_1, \varepsilon_1, \varepsilon_1\right)^T \phi_{t+1}. \end{aligned}$$

Из этого неравенства по теореме 1 следует

$$(31) \quad J(c_{k_*}^w, \delta_{k_*,\infty}) \leq J\left(c^w, \delta + \left(\frac{\varepsilon_2}{2} + \varepsilon_1, \varepsilon_1, \varepsilon_1\right)\right).$$

Используя (28) при  $k = k_*$  и (31) получаем неравенство (25). Наконец, слагаемое  $O(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$  в (25) следует из того, что  $J(c^w, \delta)$  является дробно-рациональной функцией  $\delta$  и ее знаменатель отделен от 0 в силу предположения П5. Теорема 2 доказана.

*Замечание 1.* Неравенства (24) и (25) означают субоптимальность решения поставленной задачи слежения (13). Гарантированная неравенством (25) оценка  $O(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$  точности решения поставленной оптимальной задачи является только качественной и ею нельзя воспользоваться для вычислений, поскольку  $c^w$  и  $\delta$  неизвестны. Наилучшей вычислимой оценкой точности решения задачи оптимального слежения для конкретной реализации возмущений является текущая разность

$$(32) \quad (\Delta J)_t = J(c_{k_t}^w, \delta_{k_t, t} + \varepsilon_1(1, 1, 1)^T) - J(c_{k_t}^w, \delta_{k_t, t}),$$

которая согласована с данными измерений  $y_{1-n}^t, u_1^t$  и гарантирована после сходимости оценок за конечное время. Хотя время сходимости оценок к финальному значению неизвестно, длительный период неизменных оценок фактически гарантирует справедливость этой оценки в силу теоремы 2. Если текущая оценка точности решения неудовлетворительна, можно в любой момент уменьшить выбранный параметр мертвой зоны  $\varepsilon_1$  для улучшения точности. При этом число обновлений оценок  $P_{k,t}$  и  $\delta_{k,t}$  может возрастать. Влияние шага сетки  $\varepsilon_2$  на точность оптимизации более прозрачно (слагаемое  $\varepsilon_2/2$  добавляется к оценкам  $\delta_{k,t}^w$ ) и его можно выбирать априори, учитывая при этом, что уменьшение шага сетки  $\varepsilon_2$  влечет увеличение числа параллельно вычисляемых полиэдральных оценок  $P_{k,t}$  и векторных оценок  $\delta_{k,t}$ .

## 5. Моделирование

Пусть объект управления описывается уравнением (1) с неизвестными параметрами номинальной модели

$$(33) \quad \theta^* = [a_1^*, a_2^*, b_1^*, b_2^*, b_3^*] = [-2, 7; 1, 8; 2; -3, 36; 1, 4],$$

а для тестирования дана номинальная модель с полюсами (корнями  $a(\lambda)$ ) 0,7 и 0,8, нулями (корнями  $b(\lambda)$ ) 1,1 и 1,3 и коэффициентом  $b_1 = 2$ . Этой номинальной модели соответствует неустойчивый минимально-фазовый объект (1) с параметрами

$$(34) \quad \theta = [a_1, a_2, b_1, b_2, b_3] = [-2, 6786; 1, 7857; 2; 3, 3566; 1, 3986],$$

немного отличающимися от параметров (33). Пусть управление объектом с параметрами (33) осуществляется адаптивным регулятором (22), оптимальным для тестируемого объекта с параметрами (34). Корни характеристического полинома этой замкнутой системы с точностью  $10^{-4}$  равны  $0,7512 \pm 8,9242i, 1,3032, 1,0945$ , по модулю больше 1, так что замкнутая система без операторных возмущений устойчива. Динамика этой замкнутой системы может рассматриваться как динамика системы с объектом с номинальными параметрами  $\theta$ , в котором присутствуют дополнительные относительно небольшие операторные возмущения

$$\Delta(y_{t-2}^{t-1}, u_{t-2}^{t-1}) = (a_1 - a_1^*)y_{t-1} + (a_2 - a_2^*)y_{t-2} + (b_1^* - b_1)u_{t-1} + (b_1^* - b_1)u_{t-2},$$

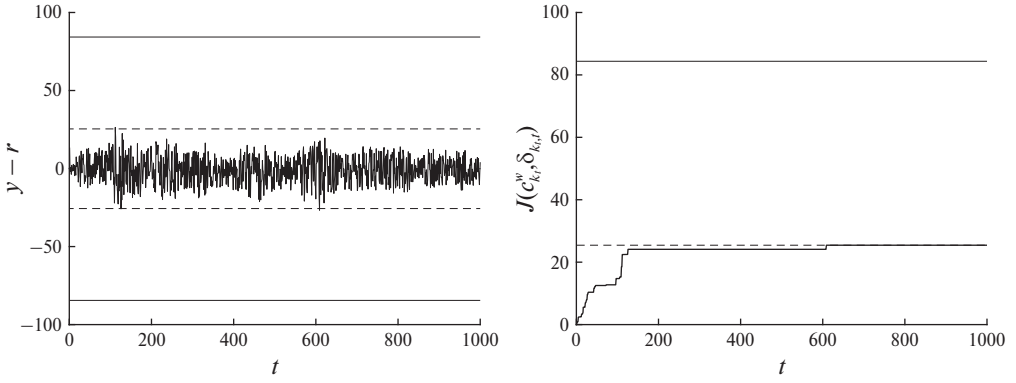


Рис. 1. Графики  $y - r$  (слева) и  $J(c_{k_t}^w, \delta_{k_t, t})$  (справа);  $\pm J(c^w, \delta)$  – сплошные прямые,  $\pm J(c_{k_\infty}^w, \delta_{k_\infty})$  – пунктирные прямые.

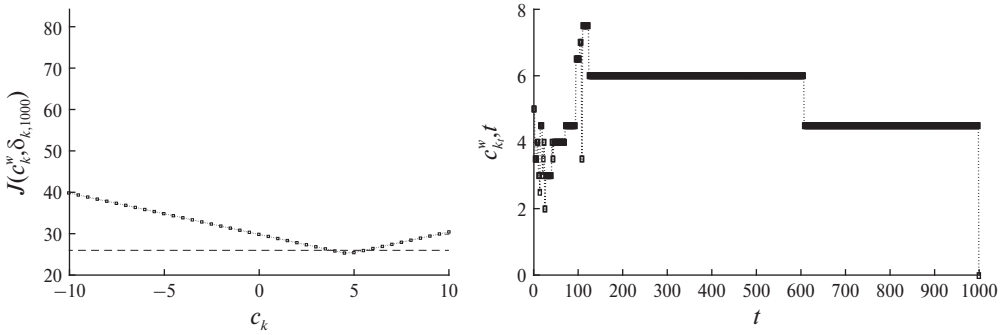


Рис. 2. Слева – значения  $J(c_k^w, \delta_{k, 1000})$ , справа – переключения оценок  $c_{k_t, t}^w$ .

проистекающие из “неточных” коэффициентов тестируемой номинальной модели. Возмущение  $v_t$  в номинальной модели с параметрами  $\theta$  моделируется в виде

$$(35) \quad v_t = c^w + \delta^w w_t + k_t^y \delta^y |y_{t-\mu}^{t-1}| + k_t^u \delta^u |u_{t-\mu}^{t-1}|, \quad |k_t^y| \leq 1, \quad |k_t^u| \leq 1, \quad \mu = 20.$$

Пусть сигнал слежения имеет вид  $r_t = 10 \sin t$  для всех  $t$ .

*Пример 1. Случайные возмущения.* Пусть неизвестные параметры в описании (35) имеют значения

$$(36) \quad c^w = 5, \quad \delta^w = 1, \quad \delta^y = \delta^u = 0,1,$$

и  $w_t, k_t^y, k_t^u$  – независимые равномерно распределенные на  $[-1, 1]$  псевдослучайные величины. Моделирование проводилось при следующих параметрах адаптивного управления: параметр мертвой зоны  $\varepsilon_1 = 10^{-6}$ ,  $c_{\min}^w = -10$ ,  $c_{\max}^w = 10$ , шаг сетки  $\varepsilon_2 = 0,5$ .

На рис. 1 представлены графики ошибки слежения  $y - r$  (слева) и текущих оптимальных оценок качества  $J(c_{k_t}^w, \delta_{k_t, t})$  (справа).

На рис. 2 слева представлены согласованные с измерениями на промежутке  $[1, 1000]$  финальные значения  $J(c_k^w, \delta_{k,1000})$  для всех  $k$ . Переключения оценок  $c_{k,t}^w$  неизвестного смещения  $c^w = 5$  представлены на рис. 2 справа. Заметим, что несмотря на симметричность распределений случайных величин  $w_t, k_t^y, k_t^u$  относительно нуля, установившаяся оценка смещения  $c_{1000}^w = 4,5$  отлична от  $c^w = 5$ .

Во всех численных экспериментах со случайными возмущениями и детерминированными “колебательными” возмущениями установившиеся согласованные с измерениями верхние границы ошибки слежения  $J(c_{k\infty}^w, \delta_{k\infty})$  значительно (в разы) меньше неизвестной оптимальной верхней границы  $J(c^w, \delta)$ . При этом при квантификации возмущений никак не проявляют себя операторные возмущения, поскольку текущие оценки  $\delta_t$  неизвестного вектора  $\delta$ , как правило, имеют вид  $\delta_t = (c_t^w, 0, 0)$ .

*Замечание 2.* Сторонниками стохастических моделей возмущений в теории идентификации систем множественное оценивание неизвестных параметров (set-membership approach) постоянно критикуется за кажущийся неизбежным консерватизм в связи с необходимой априорной информацией о верхних границах детерминированных возмущений (при этом подразумевается лишь консерватизм множественных оценок неизвестных параметров). Пример 1 иллюстрирует, что использование множественного оценивания и показателя качества задачи управления как идентификационного критерия гарантирует не просто неконсервативность согласованных с измерениями гарантий качества, но даже улучшенные гарантии качества по сравнению с оптимальным показателем качества (5), поскольку конкретные реализации возмущений в основной массе далеки от возмущений, максимизирующих ошибку слежения. Это аналогично тому, как в стохастическом случае усредненные показатели качества лучше, чем возможные наихудшие значения на конкретных “плохих” реализациях. При этом, однако, в задачах со стохастическими возмущениями задачи верификации модели возмущений, как правило, не обсуждаются. Оптимальность слежения в рамках детерминированной  $\ell_1$ -теории базируется на верификации модели возмущений и использовании достаточно полной получаемой в процессе управления информации о неизвестных параметрах, и платой за оптимальность служит соответствующий рост объема необходимых вычислений.

*Пример 2. “Плохие” детерминированные возмущения.* Цель этого примера – продемонстрировать “плохое” суммарное возмущение, при котором наглядно проявляется наличие операторных возмущений в суммарном возмущении  $v$ .

Рассмотрим управляемый объект (33) с суммарным возмущением вида (35) и параметрами (36) с уменьшенным  $\delta^u = 0,05$  и детерминированными последовательностями

$$(37) \quad w_t = \cos(50t), \quad k_t^y = \sin(70t), \quad k_t^u = \cos(\ln(0,5t)).$$

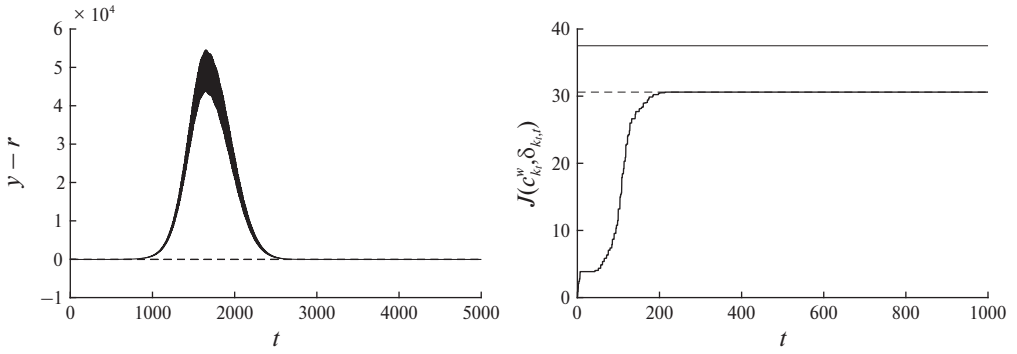


Рис. 3. Графики  $y - r$  (слева) и  $J(c_{k_t}^w, \delta_{k_t,t})$  (справа);  $J(c^w, \delta)$  – сплошная прямая,  $J(c_{k_\infty}^w, \delta_{k_\infty})$  – пунктирная прямая.

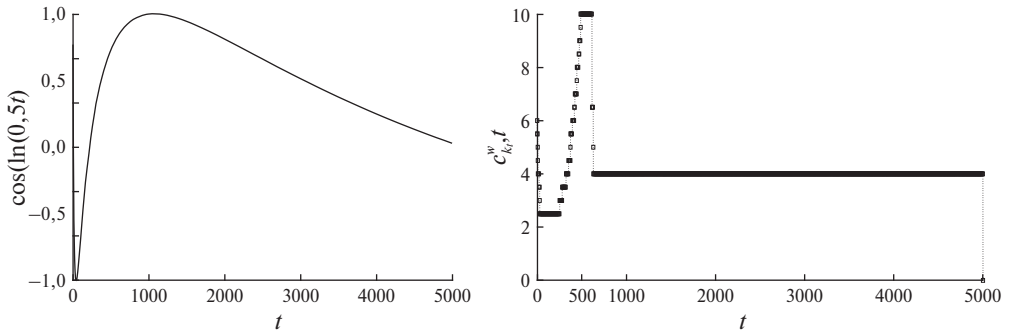


Рис. 4. Графики  $k_t^y$  и переключений оценок неизвестного смещения  $c^w = 5$ .

На левом графике рис. 3 представлена ошибка слежения  $y - r$ . При этом возмущении для всех  $t \geq 498$  оценки  $\delta_{k_t,t}^u > 0$ , и  $\delta_{k_t,t}^y = 0$ , и последние оценки таковы:  $\delta_{k_{5000},5000} = (1,6993; 0; 0,0581)$ ,  $c_{5000}^w = 4$ . Таким образом, с момента  $t = 498$  в оценках  $\delta_{k_t,t}$  норм возмущений проявляется операторное возмущение по управлению.

Известно, что в устойчивых линейных стационарных системах возможны большие отклонения от нуля, вызванные ненулевыми начальными данными или ограниченным возмущением [16, 17]. В примере 2 большое отклонение ошибки слежения (с  $\max_t |y_t - r_t| = 5,4573 \cdot 10^4$ ) в нелинейной замкнутой системе (1)–(6) может быть вызвано как переключением соответствующих разным оценкам смещения регуляторов, так и “несимметричностью” относительно нуля последовательности  $k_t^u = \cos(\ln(0,5t))$ , представленной на левом графике рис. 4. График текущих оптимальных оценок  $c_{k_t,t}^w$  неизвестного смещения  $c^w$  представлен на правом графике рис. 4, где установившаяся оценка смещения  $c_{k_\infty}^w = 4 \neq c^w = 5$ .

**Замечание 3.** Следует заметить, что несмотря на неприемлемые с точки зрения практических приложений значения ошибки слежения порядка  $10^4$  в переходном режиме, ее асимптотическое поведение при данном возмущении

характеризуется числами

$$\max_{t \in [4001, 5000]} |y_t - r_t| = 4,4163, \quad \max_{t \in [4901, 5000]} |y_t - r_t| = 2,7566.$$

Таким образом, фактическая установившаяся ошибка слежения на порядок меньше, чем финальная согласованная с данными измерений гарантируемая оценка ошибки слежения  $J(c_{k_\infty}^w, \delta_{k_\infty}) = 30,4421$ . Эта оценка, в свою очередь, лучше гарантируемого теоремой 1 оптимального (но неизвестного!) значения  $J(c^w, \delta) = 37,2971$ , несмотря на невысокую выбранную “точность” (размер сетки  $\varepsilon_2 = 0,5$ ) оценки смещения. Наконец, само оптимальное значение  $J(c^w, \delta)$  меньше наихудшей возможной асимптотической ошибки слежения, поскольку в  $J(c^w, \delta)$  не учтено, что тестируемый объект управления имеет номинальные параметры  $\theta^*$ , а не  $\theta$ . В итоге алгоритм адаптивной компенсации неизвестного смещения  $c^w$  выполняет свое предназначение, несмотря на возможные большие отклонения ошибки слежения от нуля, и даже “подстраивается” к конкретным реализациям возмущения  $v$ , уменьшая излишний консерватизм в гарантируемых оценках качества при не “максимизирующих” возмущениях.

*Замечание 4.* Приведенные графики переключений оценок  $c_{k_t}^w$  неизвестного смещения  $c^w$  иллюстрируют неидентифицируемость смещения  $c^w$  в описании (4) даже при отсутствии операторных возмущений, поскольку управление всегда происходит при конкретных реализациях возмущения  $v_t$ , для которых смещения (при любом их разумном определении) могут быть (правильнее сказать, будут) разными. То есть термин «смещение» по отношению к постоянной  $c^w$  в описании (4) относится именно к понятию смещения для класса всех возмущений, удовлетворяющих (4). В то же время текущие оценки  $c_{k_t}^w$  можно (или, скорее, следует) считать корректным определением (в контексте решаемой задачи управления) текущих оценок смещения для конкретной реализации суммарного возмущения  $v$ .

*Замечание 5.* Объем и скорость вычислений в описанных примерах можно охарактеризовать следующими показателями. Время вычислений на ноутбуке с 15,2 ГиБ ОЗУ и процессором 18 Intel Core Ultra 5 125Н в примере 1 равно 2,99 с, в примере 2 – 15,1169 с. Число неравенств в полиэдральных оценках  $P_{k,t}$  находится в интервале: 12–15 в примере 1 и в интервале 64–81 – в примере 2. Отношение этих показателей примерно соответствует отношению длин интервалов, равному 5. При этом показатели примера 2 на интервале времени  $[1, 10\,000]$  остаются теми же, что означает, что переходные процессы для конкретного рассмотренного возмущения  $v$  к моменту времени  $t = 5000$  уже завершились. Заметим, что время вычислений определяется в основном временем вычисления полиэдральных оценок  $P_{k,t}$  и оптимальных векторных оценок  $\delta_{k,t}$  в  $\mathbb{R}^3$  и практически не зависит от размерности вектора номинальных параметров  $\theta$ .

*Замечание 6.* Число неравенств в описании полиэдральных оценок  $P_{k,t}$  и, как следствие, время вычисления оптимальных оценок в (21) можно сокра-

титель исключением возможных лишних неравенств после добавления новых неравенств (17) [18]. В приведенных результатах моделирования это не делалось, чтобы продемонстрировать число возможных обновлений оценок даже при очень маленьком значении (почти нулевом с точки зрения оценки качества модели) параметра мертвой зоны  $\varepsilon_1$ .

## 6. Заключение

В статье рассмотрена задача оптимального, с заданной точностью, отслеживания заданного ограниченного сигнала для дискретного минимально-фазового объекта с известной или заданной для тестирования номинальной моделью, смещенным ограниченным внешним возмущением и операторными возмущениями с неизвестными нормами и смещением. Сложность задачи заключается в необходимости компенсации смещения на основе обоснованной оптимальной оценки качества управления в условиях неидентифицируемости всех неизвестных параметров. Решение задачи базируется на квантификации возмущений, множественном оценивании неизвестных параметров и использовании показателя качества управления как идеального идентификационного критерия. Такой подход позволяет глубже понять, продемонстрировать и реализовать максимальные возможности обратной связи, важность исследований которых подчеркивалась одним из ведущих экспертов по адаптивному управлению и идентификации систем L. Guo в аннотации к [19]:

“Основной целью адаптивной обратной связи является работа с динамическими системами с внутренними и/или внешними неопределенностями, используя доступную онлайн информацию. Таким образом, фундаментальной проблемой адаптивного управления является понимание максимальных возможностей (и ограничений) адаптивной обратной связи.”

и в аннотации к [20]:

“Наконец, мы рассмотрим более фундаментальные проблемы, связанные с максимальными возможностями и ограничениями механизма обратной связи при работе с неопределенными нелинейными системами, где механизм обратной связи определяется как класс всех возможных законов обратной связи.”

Полученное в статье решение не только заведомо гарантирует, с заданной точностью, ту же оценку качества слежения, что и при известных параметрах номинального объекта и возмущений, но дополнительно дает существенно лучшие гарантированные оценки качества в зависимости от конкретных реализаций детерминированных возмущений. Тем самым неявным образом учитывается то, что конкретные реализации возмущений, как правило, далеки от специальных реализаций возмущений, максимизирующих показатель качества управления, поскольку для максимизации оценки ошибки слежения суммарное возмущение  $v_t$  должно не только принимать максимальные зна-

чения на протяжении длительного интервала времени, но и иметь при этом определенные знаки на этом интервале.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Khammash M., Pearson J.B.* Performance robustness of discrete-time systems with structured uncertainty // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1991. V. AC-36. No. 4. P. 398–412.
2. *Khammash M., Pearson J.B.* Analysis and design for robust performance with structured uncertainty // *Syst. Control Lett.* 1993. V. 20. No. 3. P. 179–187.
3. *Kosut R., Goodwin G., Polis M.* (Eds.) Special issue on system identification for robust control design // *IEEE Transactions Automatic Control.* 1992. V. 37. No. 7. P. 900–1008.
4. *Soderstrom T., Astrom K.* (Eds.) Trends in System Identification (Special issue on system identification) // *Automatica.* 1995. V. 31. No. 12. P. 1689–1907.
5. *Gevers M.* A personal View of the Development of System Identification // *IEEE Control Syst. Magazine.* 2006. V. 26. No. 6. P. 93–105.
6. *FLamnabhi-Lagarigue F., Annaswamy A., Engell S., et. al.* Systems & Control for the future of humanity, research agenda: Current and future roles, impact and grand challenges // *Annual Reviews in Control.* 2017. V. 43. P. 1–64.
7. *Ljung L.* Revisiting Total Model Errors and Model Validation // *J. Syst. Sci. Complex.* 2021. V. 34. P. 1598–1603.
8. *Khammash M.H.* Robust steady-state tracking // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1995. V. 40. No. 11. P. 1872–1880.
9. *Khammash M.H.* Robust Performance: Unknown Disturbances and Known Fixed Inputs // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1997. V. 42. No. 12. P. 1730–1734.
10. *Соколов В.Ф.* Асимптотическое робастное качество дискретной системы слежения в  $\ell_1$ -метрике // *АиТ.* 1999. № 1. С. 101–112.
11. *Соколов В.Ф.* Робастное управление при ограниченных возмущениях. Сыктывкар: Коми научный центр УрО РАН. 2011. 218 с.
12. *Sokolov V.F.* Control-Oriented Model Validation and Errors Quantification in the  $\ell_1$  Setup // *IEEE Trans. Autom. Control.* 2005. V. 50. No. 10. P. 1501–1509.
13. *Соколов В.Ф.* Задачи адаптивного оптимального управления дискретными системами с ограниченным возмущением и линейными показателями качества // *АиТ.* 2018. № 6. С. 155–171.
14. *Sokolov V.F.* Optimal Error Quantification and Robust Tracking under Unknown Upper Bounds on Uncertainties and Biased External Disturbance // *Mathematics.* 2024. V. 12. № 2. P. 197.
15. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex Optimization. Cambridge University Press. 2003.
16. *Polyak D.T., Shcherbakov P.S., Smirnov G.* Peak effects in stable linear difference equations // *J. Difference Equat. Appl.* 2018. V. 24. No. 9. P. 1488–1502.
17. *Поляк Б.Т., Тремба А.А., Хлебников М.В., Щербakov П.С., Смирнов Г.В.* Большие отклонения в линейных системах при ненулевых начальных условиях // *АиТ.* 2015. № 6. С. 18–41.

18. *Walter E., Piet-Lahanier H.* Exact recursive polyhedral description of the feasible parameter set for bounded error // IEEE Transactions on Automatic Control. 1989. V. 34. P. 911–915.
19. *Guo L.* Exploring the maximum capability of adaptive feedback // Int. J. Adapt. Control Signal Process. 2002. V. 16. N. 5. P. 341–354.
20. *Guo L.* Feedback and uncertainty: Some basic problems and results // Annual Reviews in Control. 2020. V. 49 P. 27–36.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.*

Поступила в редакцию 03.03.2025

После доработки 20.05.2025

Принята к публикации 27.06.2025