

© 2025 г. В. МИРАСЬЕРРА, д-р философии (vmirasierra@us.es)
(Университет Севильи, Испания),
М. МАММАРЕЛЛА, д-р философии (martina.mammarella@cnr.it),
Ф. ДАББЕНЕ, д-р философии (fabrizio.dabbene@cnr.it)
(Политехнический университет Турина, Италия),
Т. АЛАМО, д-р философии (talamo@us.es)
(Университет Севильи, Испания)

ТОЧНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ МНОЖЕСТВ С ВЕРОЯТНОСТНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ С ПОМОЩЬЮ ПАКЕТНОГО ВЕРОЯТНОСТНОГО МАСШТАБИРОВАНИЯ

Вычисление “надежных” в вероятностном смысле областей остается актуальной проблемой в стохастических постановках задач теории систем. Точно вычислить такие области можно для некоторых конкретных задач; однако, как правило, результаты вычислений слишком сложны (например, невыпуклые или несвязные множества) и неприменимы для приложений реального времени. В данной работе представлена основанная на случайной выборке процедура для получения “точных” внутренних аппроксимаций вероятностно-надежной области. Предлагаемый подход не требует каких-либо предположений о распределении вероятностей, а внутренняя аппроксимация может быть найдена в автономном режиме (офлайн). В отличие от аналогичных подходов предлагаемое пакетное вероятностное масштабирование включает в себя усиленное ограничение на точность, позволяющее настраивать степень консерватизма полученной аппроксимации.

Ключевые слова: рандомизированные алгоритмы, вероятностная робастность, неопределенные системы, статистическая теория обучения.

DOI: 10.31857/S0005231025080031, **EDN:** UTBLUS

1. Введение

Реальные системы часто не являются детерминированными и включают неопределенность, требуя разработки робастных и стохастических стратегий управления. При робастном управлении [1–3] неопределенность предполагается неизвестной, но ограниченной некоторой компактной областью, а регулятор строится исходя из гарантированного выполнения ограничений для всех допустимых значений неопределенности. При стохастическом управлении [4–6], напротив, используются вероятностные соображения и вводится понятие вероятностных ограничений [7]. В отличие от жестких ограничений для вероятностных ограничений допускается нарушение, но при условии, что вероятность их выполнения остается выше заданного порога.

Ослабление ограничений и учет вероятностей делают стохастические схемы менее консервативными по сравнению с их робастными аналогами. Более того, стохастические схемы позволяют работать с неопределенностями с бесконечным носителем. В свою очередь, процедура построения в результате оказывается гораздо более сложной по двум основным причинам. Во-первых, очень трудно проверить, являются ли решения задач с вероятностными ограничениями допустимыми; во-вторых, вероятностные ограничения обычно не являются выпуклыми (например, см. [8, рис. 1] и [9, рис. 1]).

В последнее десятилетие основанные на случайной выборке схемы стали использоваться в качестве эффективного инструмента для решения стохастических задач. Ключевую роль в этой области исследований сыграл, в частности, Б.Т. Поляк, одним из первых признав потенциал рандомизированных методов при решении оптимизационных задач со стохастической неопределенностью; например, см. [10–12]. Эти работы проложили путь к последующим результатам, сочетающим выборку и оптимизацию; одним из примеров может служить сценарный подход, предложенный в [13]. Обзор соответствующих методов можно найти в [14, 15].

Вероятностно-надежная область, также называемая *множеством с вероятностными ограничениями* (*chance constrained set, CCS*), состоит из всех точек, удовлетворяющих вероятностным ограничениям. В общем случае точное вычисление CCS громоздко и требуется, чтобы неопределенность имела некоторое распределение [16, 17]. Кроме того, в силу геометрической сложности CCS может быть непригодным для приложений реального времени [18]. В связи с этим, актуальным является решение проблемы аппроксимации вероятностно-надежных областей с помощью множеств настраиваемой сложности.

Для задачи стохастического управления было предложено несколько релаксаций, опирающихся на вычислительно эффективные аппроксимации множества с вероятностными ограничениями. Эти релаксации могут быть либо основаны на некоторых неравенствах концентрации, например использующих априорные знания о структуре неопределенности [19], либо построены с помощью методов случайной выборки [20, 21].

Настоящая работа развивает результаты исследований [9, 22], где была представлена основанная на случайной выборке методология внутренней аппроксимации множеств CCS, названная *вероятностным масштабированием* (*probabilistic scaling, PS*). В рамках этого подхода сначала находится простое аппроксимирующее множество, которое затем масштабируется для выполнения требуемых вероятностных гарантий. Все эти операции выполняются в режиме *офлайн*, а компромисс между необходимым размером выборки и требованием к точности аппроксимации может быть настроен пользователем.

В данной статье обсуждается и расширяется метод пакетного вероятностного масштабирования (доложенный в предварительной форме на конференции [22]) за счет определения новой меры точности аппроксимирующего мно-

жества. Затем показывается, как построить аппроксимирующее множество для выполнения требуемых вероятностных гарантий при соблюдении указанного ограничения на точность. Таким образом, пользователь получает возможность одновременно настраивать сложность и приемлемость полученного аппроксимирующего множества, достигая компромисса между требуемым размером выборки и вычислительной сложностью задачи аппроксимации, которая проводится в автономном режиме (офлайн).

Статья организована следующим образом. В разделе 2 приводятся постановка задачи аппроксимации множества с вероятностными ограничениями, а также численный пример для сравнения различных подходов. В разделе 3 рассматриваются решения этой задачи с помощью статистической теории обучения: сначала классический вероятностный подход к масштабированию (раздел 3.1), а затем его расширение до пакетной структуры (раздел 3.2). Раздел 4 посвящен пакетному вероятностному масштабированию с “плотным” погружением (*tight immersed pack-based probabilistic scaling, TI-PBPS*), являющемуся основным научным результатом статьи. В разделе 5 проводится сравнительный анализ различных подходов с точки зрения консерватизма.

Обозначения: $\mathbb{N}_{\geq 0}$ – множество натуральных чисел, включающее 0. Символ $\oplus$ соответствует сумме Минковского для множеств. При заданном наборе из N скаляров $\{x_1, \dots, x_N\}$, скаляр $x_{1:N}$ обозначает наименьший из них, $x_{2:N}$ – второй наименьший и т.д. до $x_{N:N}$, который является наибольшим скаляром. При заданном $r \geq 0$ величина $x_{1+r:N}$ соответствует тому, что не более, чем r элементов из набора $\{x_1, \dots, x_N\}$ строго меньше $x_{1+r:N}$. Биномиальное распределение задано в виде

$$B(s; N, \varepsilon) = \sum_{i=0}^s \binom{N}{i} \varepsilon^i (1 - \varepsilon)^{N-i}.$$

2. Аппроксимация множеств с вероятностными ограничениями

Рассмотрим задачу робастности, в которой настройки регулятора и вспомогательные переменные параметризованы с помощью вектора $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^{n_\theta}$ (называемого далее *настраиваемым параметром*). Вектор неопределенности w представляет собой одну из допустимых реализаций случайного вектора с заданным распределением вероятности $\text{Pr}_{\mathcal{W}}$ с (возможно, неограниченным) носителем $\mathcal{W}$. Тогда типичное “выборочное” ограничение может быть задано как

$$(1) \quad g(\theta, w) \leq 0,$$

где функция $g : \mathbb{R}^{\Theta \times \mathcal{W}} \rightarrow \mathbb{R}$ отражает требование к θ при заданном w . В частности, при робастной постановке ограничение (1) должно выполняться для всех возможных значений w . Очевидно, что ограничения в робастном виде бессмысленны в некоторых ситуациях, например при неограниченном носителе w [23]. В таких случаях естественно допустить, что ограничение (1) может

быть нарушено для некоторых элементов $\mathcal{W}$. Эта концепция строго формализована в определении вероятностных ограничений.

Определение 1 [множество ε -CCS [9]]. Рассмотрим вероятностную меру $\text{Pr}_{\mathcal{W}}$ на $\mathcal{W}$. При заданном уровне нарушения $\varepsilon \in (0; 1)$ определим ε -вероятностное ограничивающее множество ε -CCS следующим образом:

$$\Omega(\varepsilon) = \{\theta \in \Theta : \text{Pr}_{\mathcal{W}}\{g(\theta, w) > 0\} \leq \varepsilon\}.$$

Недавно было предложено несколько подходов к построению вероятностно гарантированной аппроксимации множества с вероятностными ограничениями. Эти подходы основаны на результатах с использованием выборки (например, см. [21, 24, 25]). При заданном $\mathcal{W}$ рассмотрим выборку $\mathbf{z} = \{w_1, \dots, w_N\}$ из N независимых одинаково распределенных (н.о.р.) случайных элементов из $\mathcal{W}$. В этом случае будем говорить, что $\mathbf{z}$ принадлежит декартову произведению $\mathcal{W}^N \doteq \mathcal{W} \times \dots \times \mathcal{W}$ (N раз), а $\mathbf{z}$ выбирается в соответствии с вероятностной мерой произведения $\text{Pr}_{\mathcal{W}^N}$. Введем понятие индикаторной функции, которое впоследствии будет использовано для переопределения множества с вероятностными ограничениями.

Определение 2 [индикаторная функция для g]. При заданных $\theta \in \Theta$ и $w \in \mathcal{W}$ индикаторная функция $I^g : \Theta \times \mathcal{W} \rightarrow \{0, 1\}$ ограничения (1) имеет вид

$$I^g(\theta, w) \doteq \begin{cases} 0, & \text{если } g(\theta, w) \leq 0, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В контексте статистической теории обучения можно найти аппроксимации для множества ε -CCS с помощью ограничения на эмпирическое среднее, т.е. величину

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I^g(\theta, w_i).$$

А именно, при $\mathbf{z} = \{w_1, \dots, w_N\} \in \mathcal{W}^N$ и так называемом уровне отбрасывания $r \geq 0$ величина $\rho = \frac{r}{N}$ ограничивает эмпирическое среднее таким образом, что множество

$$(2) \quad \Phi_{\rho_N}(\mathbf{z}) \doteq \left\{ \theta \in \Theta : \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I^g(\theta, w_i) \leq \rho \right\}$$

аппроксимирует множество $\Omega(\varepsilon)$. Обращаем внимание, неравенство $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I^g(\theta, w_i) \leq \frac{r}{N}$ означает, что ограничение $g(\theta, w_i) \leq 0$ нарушается не более чем r элементами $\mathbf{z}$.

Замечание 1. При заданном ε множество $\Omega(\varepsilon)$ является фиксированным. С другой стороны, когда множество ε -CCS аппроксимируется с использованием случайной выборки (например, см. [9, 26]), соответствующее множество-аппроксимация имеет случайный характер, поскольку оно построено по случайной выборке $\mathbf{z} \in \mathcal{W}^N$.

Предположим, что индикаторная функция I^g имеет конечную размерность Вапника–Червоненкиса (VC-размерность) [27] и что $\rho < \varepsilon$. Тогда вероятность того, что $\Phi_{\rho_N}(\mathbf{z})$ является внутренней аппроксимацией для $\Omega(\varepsilon)$, т.е.

$$\Pr_{\mathcal{W}^N} \{ \Phi_{\rho_N}(\mathbf{z}) \subseteq \Omega(\varepsilon) \},$$

сходится к единице с ростом размера выборки N . В [28] в явном виде вычислены оценки для размера N выборки, которые гарантируют, что $\Phi_{\rho_N}(\mathbf{z})$ вложено в $\Omega(\varepsilon)$ с заданной доверительной вероятностью $\delta \in (0; 1)$, т.е. $\Pr_{\mathcal{W}^N} \{ \Phi_{\rho_N}(\mathbf{z}) \subseteq \Omega(\varepsilon) \} \geq 1 - \delta$.

Размер выборки линейно растет с VC-размерностью I^g , умноженной на некоторый коэффициент, больший чем $\frac{1}{\varepsilon}$. Однако, как показано в [9], эта аппроксимация может быть очень консервативной. Кроме того, в случае невыпуклой функции g полученная аппроксимация, как правило, является невыпуклым (и часто несвязным) множеством. Это обстоятельство может существенно затруднить практическое применение аппроксимации, делая ее непригодной для решения задач реального времени.

Исходя из этих рассуждений, в [9, 22] авторы предложили идею вероятностного масштабирования. В рамках данного подхода вводится исходное простое аппроксимирующее множество (*simple approximating set, SAS*) $\theta_c \oplus \Omega_0$, которое обладает двумя основными свойствами: (i) оно достаточно хорошо отражает геометрию вероятностного множества $\Omega(\varepsilon)$ и одновременно (ii) является достаточно простым. От исходного множества SAS не требуется каких-либо гарантий вероятностного характера, оно лишь должно передавать геометрию множества ε -CCS.

В [9] показано, как *масштабировать* это множество вокруг его центра θ_c для получения масштабируемого множества SAS

$$\Omega(\gamma) = \theta_c \oplus \gamma \Omega_0.$$

Кроме того, введена основанная на случайной выборке процедура для построения вероятно осмысленной аппроксимации множества ε -CCS. В частности, при заданной геометрии Ω_0 и центре масштабирования θ_c цель вероятностного масштабирования – найти наибольший масштабный коэффициент $\bar{\gamma}$ такой, что

$$(3) \quad \Pr_{\mathcal{W}} \{ \theta_c \oplus \bar{\gamma} \Omega_0 \subseteq \Omega(\varepsilon) \} \geq 1 - \delta.$$

Следовательно, выборочное ограничение

$$(4) \quad \Pr_{\mathcal{W}} \{ g(\theta, w) \leq 0 \} \geq 1 - \varepsilon$$

будет выполнено с вероятностью, не меньшей $1 - \delta$.

Процедура построения такой аппроксимации подробно рассмотрена в [9]; см. краткое формальное описание в разделе 3.1.

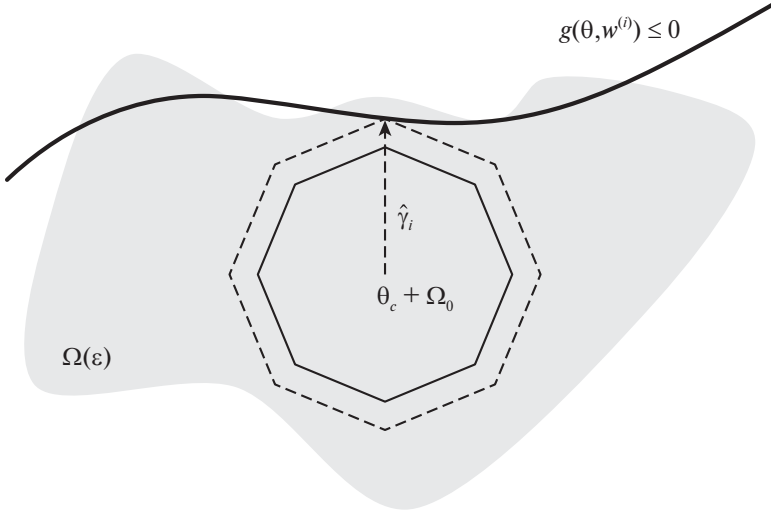


Рис. 1. Схема вероятностного масштабирования.

На рис. 1 приведена простая иллюстрация данного подхода. Затененная область соответствует множеству ε -CCS, в общем случае (как видно) это может быть невыпуклое множество. Тогда необходимо:

- 1) выбрать аппроксимирующее множество–“кандидата” $\theta_c + \Omega_0$ (черный многоугольник);
- 2) сгенерировать выборку $\mathbf{z} = \{w_1, \dots, w_N\} \in \mathcal{W}^N$ для определения оптимального масштабного коэффициента $\bar{\gamma}$;
- 3) для каждой случайной реализации w_i вычислить максимальный масштабный коэффициент γ_i таким образом, чтобы масштабированное множество (пунктирный многоугольник) не нарушало ограничений, соответствующих w_i ;
- 4) выбрать оптимальный масштабный коэффициент в виде $\bar{\gamma} = \gamma_{1+r:N}$, т.е. как r -ое наименьшее значение среди γ_i .

Тогда для $B(r; N, \varepsilon) \leq \delta$ будет справедливо (3).

Несмотря на неоспоримые преимущества *вероятностного масштабирования* (особенно в расширенной версии, где вычислительная сложность дополнительно снижается с помощью описанных выше множеств SAS [9]), масштабированное решение может оказаться консервативным. Эта проблема наглядно продемонстрирована на следующем примере из [22].

Пример 1. Рассмотрим задачу с отдельными вероятностными ограничениями, где каждое ограничение задается касательной к единичному кругу заданного размера в случайной точке с равномерным распределением. В этом случае очевидно, что единичный шар является вероятностно-надежной областью с вероятностью 1, в то время как множество ε -CCS всегда является немного большей масштабированной версией единичного шара по мере уве-

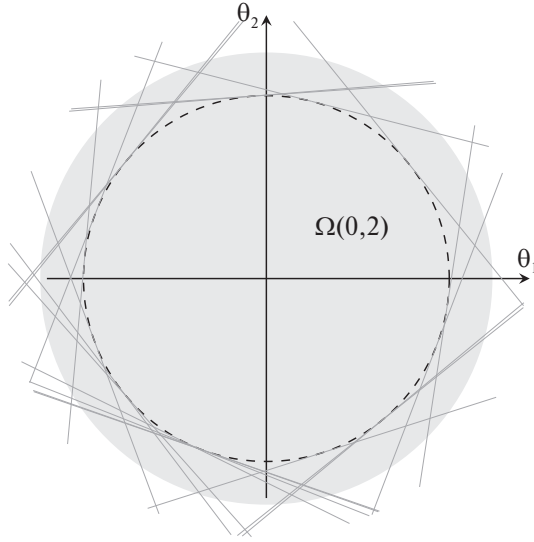


Рис. 2. Затененный круг – $\Omega(0,2)$, пунктирный круг – SAS (единичный круг), отрезки касательных – выборочные ограничения.

личения ε . В частности, легко показать, что точный радиус, соответствующий области с вероятностными ограничениями $\Omega(\varepsilon)$, может быть найден с помощью некоторых трансцендентных функций. На рис. 2 дана иллюстрация этого примера в $\mathbb{R}^2$: пунктирная линия соответствует единичному кругу в $\mathbb{R}^2$, а внешний затененный круг – множеству с вероятностными ограничениями $\Omega(\varepsilon)$ для конкретного значения $\varepsilon = 0,20$.

Предположим, что необходимо аппроксимировать множество ε -CCS с помощью эмпирического среднего $\Phi_{\rho_N}(\mathbf{z})$ (2). Для этого генерируем N случайных линейных ограничений в виде касательных к единичному шару в точках, равномерно распределенных на его поверхности, и строим аппроксимацию как их пересечение (возможно, отбрасывая самые “плохие” из них). Ясно, что такая аппроксимация не сможет охватить затененный круг.

Кроме того, используя вероятностный подход к масштабированию, выберем единичный шар в качестве начальной аппроксимации $\theta_c \oplus \Omega_0$ множества с вероятностными ограничениями $\Omega(\varepsilon)$. Затем, применяя описанную выше процедуру, будем масштабировать эту начальную геометрию вокруг ее центра (начала координат), чтобы получить внутреннюю аппроксимацию $\Omega(\varepsilon)$ с заданной доверительной вероятностью $\delta \in (0; 1)$. Очевидно, однако, что схема масштабирования всегда дает единичную гипербсферу, поскольку каждое выборочное ограничение является касательной к ней – значит, все масштабные коэффициенты будут равны единице. Следовательно, радиус истинного множества $\Omega(\varepsilon)$ не может быть найден с помощью простых процедур, основанных на случайной выборке. Обращаем внимание, что этот радиус может быть значительно больше единицы, особенно при увеличении n_θ (рис. 3).

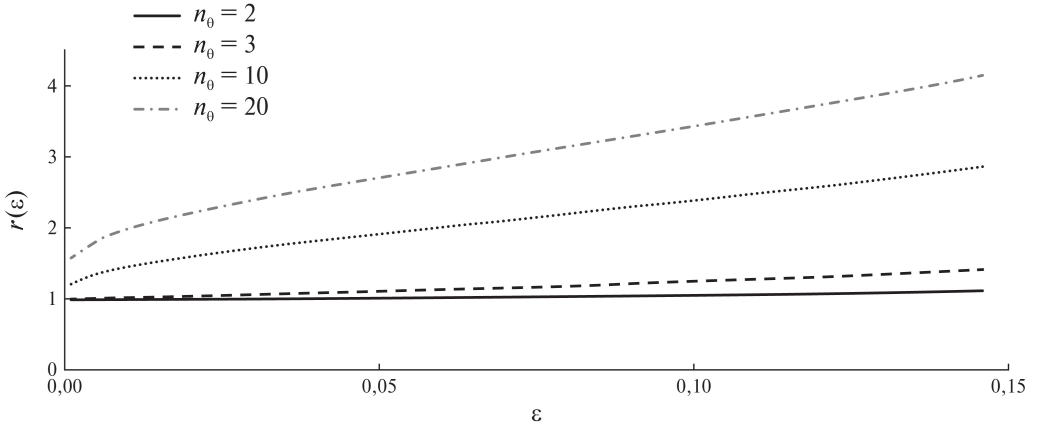


Рис. 3. Радиус r множества $\Omega(\varepsilon)$ как функция ε для различных размерностей задачи n_θ .

С другой стороны, в текущем примере большие масштабные коэффициенты можно получить масштабированием единичной окружности, рассматривая только те области, в которых нарушено более заданного количества ограничений. В данной работе прибегаем к *пакетной стратегии*, успешно применяемой в контексте статистической теории обучения [28] и в выпуклом случае [29], чтобы получить менее консервативные размеры выборки и гарантировать включение масштабированного множества во множество с вероятностными ограничениями с заданной доверительной вероятностью. В частности, цель авторов – расширить пакетную стратегию, впервые предложенную в [22], для получения выборочных аппроксимаций $\Omega(\varepsilon)$ с настраиваемой сложностью, не требующих каких-либо априорных знаний о задаче, например симметрии. Способность предлагаемого подхода к уменьшению степени консерватизма будет позже продемонстрирована на примере 1.

3. Предварительные сведения

В этом разделе напомним некоторые сведения о пакетной стратегии, необходимые для описания основных результатов данной работы. В следующем разделе представим *пакетное вероятностное масштабирование* (*pack-based probabilistic scaling, PBPS*) [22] и расширим этот подход для дальнейшего уменьшения степени консерватизма аппроксимирующего множества. Начнем с понятия *пакета выборок*.

Определение 3 [пакет из L выборок]. При заданном целом числе L набор $\mathbf{z} = \{w_1, \dots, w_L\} \in \mathcal{W}^L$ называется *пакетом размера L* .

Расширим понятие индикаторной функции (определение 2) на пакетный случай.

Определение 4 [пакетная индикаторная функция]. При заданных целых числах s и L , $0 \leq s < L$, и пакете $\mathbf{z} \in \mathcal{W}^L$ размера L пакетная индикаторная

торная функция $I_s^g : \Theta \times \mathcal{W}^L \rightarrow \{0, 1\}$ имеет вид

$$(5) \quad I_s^g(\theta, \mathbf{z}) \doteq \begin{cases} 0, & \text{если } \sum_{\ell=1}^L I^g(\theta, w_\ell) \leq s, \\ 1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $I_s^g(\theta, \mathbf{z})$ показывает, нарушает ли точка θ более чем s ограничений, связанных с реализациями неопределенности пакета $\mathbf{z}$.

Определение 5 [пакетная вероятностно-надежная область]. *Пакетная вероятностно-надежная область $\Phi_s(\mathbf{z})$ – множество точек, которые нарушают не более s ограничений, связанных с реализацией неопределенности $\mathbf{z}$:*

$$\Phi_s(\mathbf{z}) \doteq \{\theta \in \Theta \mid I_s^g(\theta, \mathbf{z}) = 0\}.$$

В следующем разделе обобщим результаты по вероятностному масштабированию применительно к пакетной стратегии. В частности, опишем процедуру масштабирования множества $\theta_c \oplus \Omega_0$ вокруг его центра θ_c , гарантирующую включение масштабированного (основанного на пакетах) множества в $\Omega(\varepsilon)$ с доверительной вероятностью $\delta \in (0; 1)$.

3.1. Обобщенное вероятностное масштабирование

Сначала введем определение масштабного коэффициента в рамках пакетного подхода.

Определение 6 [коэффициент масштабирования пакета]. *При заданном масштабируемом множестве $SAS \Omega(\gamma)$, определяемом центром масштабирования $\theta_c \in \Theta$ и геометрией Ω_0 , и заданном пакете $\mathbf{z} \in \mathcal{W}^L$ масштабный коэффициент пакета для $\Omega(\gamma)$, соответствующий реализации вероятностных ограничений $g(\theta, w_i) \leq 0, \forall w_i \in \mathbf{z}$, имеет вид*

$$(6) \quad \gamma^s(\theta_c, \Omega_0, \mathbf{z}) \doteq \begin{cases} 0, & \text{если } \theta_c \notin \Phi_s(\mathbf{z}), \\ \max_{\theta_c \oplus \gamma \Omega_0 \subseteq \Phi_s(\mathbf{z})} \gamma & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Теперь формализуем обобщенную задачу вероятностного масштабирования, рассматривая M н.о.р. пакетов $\mathbf{z}_i$ размера L каждый. Заметим, что вероятностное масштабирование [9] является ее частным случаем при $M = N$ и $L = 1$ (N пакетов размера 1).

Свойство 1 [обобщенное вероятностное масштабирование]. *При заданных параметре точности $\varepsilon \in (0; 1)$ и доверительной вероятности $\delta \in (0; 1)$ рассмотрим целочисленный уровень отбрасывания $r \geq 0$ и предположим, что M выбрано исходя из условия*

$$(7) \quad B(r; M, \varepsilon) \leq \delta.$$

Сгенерируем M н.о.р. пакетов $\mathbf{z}_i \in \mathcal{W}^L$, $i = 1, \dots, M$, размера L . Для каждого пакета $\mathbf{z}_i$ вычислим соответствующий ему масштабный коэффициент γ_i как

$$\gamma_i \doteq \gamma^s(\theta_c, \Omega_0, \mathbf{z})$$

(формула (6)) и определим $\bar{\gamma} \doteq \gamma_{1+r:M} > 0$. Тогда с вероятностью, не меньшей $1 - \delta$, справедливо

$$\Pr_{\mathcal{W}^L} \{ \theta_c \oplus \bar{\gamma} \Omega_0 \not\subseteq \Phi_s(\mathbf{z}) \} \leq \varepsilon.$$

Доказательство. Это свойство можно получить из результатов выпуклого сценарного подхода [21, 26] в случае скалярного θ . Другой способ – использовать свойства обобщенной функции $\max$ [30, свойство 3]. Рассмотрим задачу оптимизации

$$(8) \quad \max_{\gamma} \quad \gamma$$

при ограничениях $\theta_c \oplus \gamma \Omega_0 \subseteq \Phi_s(\mathbf{z}), \quad i = 1, \dots, M.$

При наличии допустимого решения, используя определение $\gamma^s(\cdot)$, эту задачу можно записать в виде

$$(9) \quad \max_{\gamma} \quad \gamma$$

при ограничениях $\gamma \leq \gamma^s(\theta_c, \Omega_0, \mathbf{z}), \quad i = 1, \dots, M.$

Согласно [21, 26] при отбрасывании не более r ограничений в выпуклой задаче с M вероятностными ограничениями вероятность нарушения ограничений решением, полученным из случайной выпуклой задачи, не превышает ε с вероятностью, не меньшей $1 - \delta$, где

$$\delta = \binom{d+r-1}{d-1} B(d+r-1; M, \varepsilon),$$

а d – количество переменных. Сначала заметим, что задача (9) является выпуклой и имеет единственную скалярную переменную γ , т.е. $d = 1$. Также легко проверяются предположения, необходимые для применения результатов [21, 26]. В частности, невырожденность следует из скалярности задачи, а единственность может быть гарантирована введением правила тай-брейка (tie-break). Значит, при допущении r нарушений в вышеприведенной задаче минимизации с вероятностью, не меньшей $1 - \delta$, $\delta = B(r; M, \varepsilon)$, оптимальное решение $\bar{\gamma}$ задачи (9) с не более чем r отброшенными ограничениями удовлетворяет неравенству

$$\Pr_{\mathcal{W}^L} \{ \bar{\gamma} > \gamma^s(\theta_c, \Omega_0, \mathbf{z}) \} \leq \varepsilon.$$

Следовательно, с вероятностью, не меньшей $1 - \delta$, справедливо

$$\Pr_{\mathcal{W}^L} \{ \theta_c \oplus \bar{\gamma} \Omega_0 \not\subseteq \Phi_s(\mathbf{z}) \} \leq \varepsilon.$$

Заметим, что задача (9) с отбрасыванием ограничений может быть непосредственно решена упорядочиванием значений $\gamma_i = \gamma^s(\theta_c, \Omega_0, \mathbf{z}_i)$. Очевидно, если допускается $r \geq 0$ нарушений, оптимальное значение γ будет равно $\bar{\gamma} = \gamma_{1+r:N}$. Меньшие значения γ будут удовлетворять ограничению на включение, но не будут оптимальными, а большие значения γ уже не будут удовлетворять ограничению на включение. $\square$

Как уже говорилось, результат [22, свойство 1] может быть получен из свойства 2, если задать $M = N$ и $L = 1$. См. следствие ниже.

Следствие 1 [классическое вероятностное масштабирование]. *Предположим, что N выбрано исходя из условия*

$$B(r; N, \varepsilon) \leq \delta$$

и $\mathbf{z} \in \mathcal{W}^N$. Для каждого ограничения $i = 1, \dots, N$ определим $\gamma_i = \gamma^r(\theta_c, \Omega_0, \mathbf{z}_i)$ и допустим, что $\bar{\gamma} = \gamma_{1+r:N} > 0$. Тогда с вероятностью, не меньшей $1 - \delta$, справедливо

$$\Pr_{\mathcal{W}}\{\theta_c \oplus \bar{\gamma}\Omega_0 \notin \Omega(\varepsilon)\} \leq \varepsilon.$$

Доказательство простое и следует непосредственно из определения 1. Данное следствие показывает, что вероятностный подход к масштабированию [9] можно рассматривать как частный случай более общей пакетной схемы.

Найти аппроксимации множества ε -CCS с помощью классического вероятностного масштабирования в целом легко; при этом не требуется никаких предположений об используемых вероятностях (таких как конечная VC-размерность), обеспечиваются вероятностные гарантии для масштабируемой области, а эффективность метода доказана в [9]. Несмотря на все свои преимущества, классическое вероятностное масштабирование все же может приводить к очень консервативным решениям, см. пример 1. В этом случае, если $\gamma_i = 1$ для всех $i = 1, \dots, N$ и все ограничения учитываются независимо, отбрасывание некоторых из них никак не повлияет на масштабированное аппроксимирующее множество.

В следующем разделе опишем пакетное вероятностное масштабирование, впервые предложенное в [22]. Для тех же исходных множеств SAS этот вариант классического вероятностного масштабирования, применяемый в рамках пакетной стратегии, может приводить к менее консервативным результатам за счет (потенциально) более высоких вычислительных затрат.

Важно подчеркнуть, что уровень отбрасывания r задается пользователем исходя из того, что большие значения r делают результирующее множество менее чувствительным к экстремальным значениям за счет большего размера выборки N . С другой стороны, выпуклость масштабированного аппроксимирующего множества не зависит от уровня отбрасывания r и зависит только от выбора геометрии множества SAS.

Замечание 2. Свойство 1 можно конкретизировать и на случай $r = 0$. Пусть M таково, что $(1 - \varepsilon)^M \leq \delta$. Сгенерируем M н.о.р. пакетов $\mathbf{z}_i \in \mathcal{W}^L$

размера L и определим $\gamma_i \doteq \gamma^s(\theta_c, \Omega_0, \mathbf{z}_i)$. Допустим, что $\bar{\gamma} = \gamma_{1:M} > 0$. Тогда с вероятностью, не меньшей $1 - \delta$, справедливо $\Pr_{\mathcal{W}^L} \{\theta_c \oplus \bar{\gamma}\Omega_0 \not\subseteq \Phi_s(\mathbf{z})\} \leq \varepsilon$.

3.2. Пакетное вероятностное масштабирование

Основная идея пакетного вероятностного масштабирования заключается в том, чтобы разделить выборки неопределенности на пакеты и допустить некоторые нарушения ограничений внутри каждого пакета. В отличие от обычного вероятностного масштабирования, где масштабный коэффициент вычисляется *независимо* для каждого ограничения, в рамках пакетного подхода ограничения внутри каждого пакета учитываются *все вместе*. В конечном счете, это может привести к более точным аппроксимациям множества ε -CCS и уменьшить размер выборки.

Пусть N сгенерированных ограничений разбиты на M пакетов по L ограничений в каждом, т.е. $\mathbf{z} = \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_M\} = \{w_1, \dots, w_N\}$, причем $\mathbf{z} \in \mathcal{W}^N$ и $\mathbf{z}_i \in \mathcal{W}^L$ для $i = 1, \dots, M$. Следующая теорема позволяет определить подходящий масштабный коэффициент, используя пакетный подход, чтобы масштабированное множество SAS было полностью включено во множество ε -CCS с заданной доверительной вероятностью δ .

Теорема 1 [пакетное вероятностное масштабирование]. Рассмотрим геометрию Ω_0 , центр масштабирования θ_c , параметр точности $\varepsilon \in (0; 1)$, доверительную вероятность $\delta \in (0; 1)$, а также неотрицательные целые числа M, L, s , $L > s$, удовлетворяющие условию

$$(10) \quad B(s; L, \varepsilon)^M \leq \delta.$$

Для каждого пакета ограничений $i = 1, \dots, M$ пусть $\mathbf{z}_i \in \mathcal{W}^L$ и $\gamma_i \doteq \gamma^s(\theta_c, \Omega_0, \mathbf{z}^{(i)})$ задано формулой (6). Предположим, что $\bar{\gamma} = \gamma_{1:M} > 0$. Тогда с вероятностью, не меньшей $1 - \delta$, справедливо

$$\theta_c \oplus \bar{\gamma}\Omega_0 \subseteq \Omega(\varepsilon).$$

Доказательство. Положим $p = 1 - B(s; L, \varepsilon)$. Согласно замечанию 2, выбрав M исходя из условия $B(s; L, \varepsilon)^M \leq \delta$ и $\bar{\gamma} = \gamma_{1:M} > 0$, с вероятностью, не меньшей $1 - \delta$, получаем

$$\Pr_{\mathcal{W}^L} \{\theta_c \oplus \bar{\gamma}\Omega_0 \not\subseteq \Phi_s(\mathbf{z})\} \leq p.$$

Это условие эквивалентно $\Pr_{\mathcal{W}^L} \{I_s^g(\theta, \mathbf{z}) = 1, \forall \theta \in \theta_c \oplus \bar{\gamma}\Omega_0\} \leq p$. Более того, из свойства 3 (см. Приложение 3) следует, что

$$(11) \quad \Pr_{\mathcal{W}^L} \{I_s^g(\theta, \mathbf{z}) = 1\} \leq p \iff \Pr_{\mathcal{W}} \{I^g(\theta, w) = 1\} \leq \varepsilon.$$

Таким образом, получаем $\Pr_{\mathcal{W}}^L \{I^g(\theta, w) = 1\} \leq \varepsilon, \forall \theta \in \theta_c \oplus \bar{\gamma}\Omega_0$, что эквивалентно $\theta_c \oplus \bar{\gamma}\Omega_0 \subseteq \Omega(\varepsilon)$. $\square$

В отличие от обычного вероятностного масштабирования, размер выборки в PBPS задается двумя параметрами: количеством пакетов M и размером каждого пакета L . Размер выборки вычисляется по формуле $N = ML$. Следовательно, условие (10) определяется тремя настраиваемыми параметрами: M , L и s . Подобно уровню отбрасывания r обычного вероятностного масштабирования, большие значения уровня отбрасывания каждого пакета s делают аппроксимирующее множество менее чувствительным к экстремальным значениям. Что касается M и L , то их можно выбрать по любому критерию, например минимизировать размер выборки N . Более подробную информацию можно найти в [22].

В следующем разделе подход PBPS будет расширен за счет введения схемы “ужесточения” ограничений, а именно, *плотного погружения* (*tight immersion*), чтобы получить более точную аппроксимацию множества ε -CCS. Это расширение дает очевидный способ настройки параметров пакета (см. раздел 4.1).

4. Плотное погружение

Введем понятие плотного погружения.

Определение 7 [τ -плотное погружение]. Множество $\mathcal{S}$ является τ -плотно погруженным во множество ε -CCS $\Omega(\varepsilon)$, если

$$(12a) \quad \mathcal{S} \subseteq \Omega(\varepsilon),$$

$$(12b) \quad \mathcal{S} \not\subseteq \Omega(\tau\varepsilon),$$

где $\tau \in [0, 1)$ – показатель плотности.

Замечание 3. Если множество ε -CCS $\Omega(\varepsilon)$ строго возрастает по ε , т.е. $\forall \tau_1, \tau_2 \in [0, 1), \tau_1 < \tau_2$, то выполнено $\Omega(\tau_1\varepsilon) \subset \Omega(\tau_2\varepsilon)$. Следовательно, чем больше τ , тем больше будет $\Omega(\tau\varepsilon)$.

Плотное погружение гарантирует, что аппроксимирующее множество будет находиться *внутри* множества ε -CCS (12a) и, более того, *не внутри* консервативного множества, характеризуемого τ (12b). Поэтому оно накладывает более строгое условие, чем обычная *внутренняя аппроксимация*. Тем не менее, плотное погружение не должно использоваться для сравнения качества двух различных геометрий. Действительно (см. рис. 4), для одной и той же геометрии множество с наибольшим значением τ лучше аппроксимирует множество ε -CCS (рис. 4,а). Напротив, для разных геометрий плотное погружение само по себе не означает хорошей аппроксимации (рис. 4,б).

Следующее свойство дополняет определение 7 плотного погружения.

Свойство 2. Если аппроксимирующее множество $\underline{\Omega}(\varepsilon)$ является τ -плотно погруженным во множество $\Omega(\varepsilon)$, то оно также является $\tilde{\tau}$ -плотно погруженным в него, где $\tilde{\tau} \in [0, \tau)$.

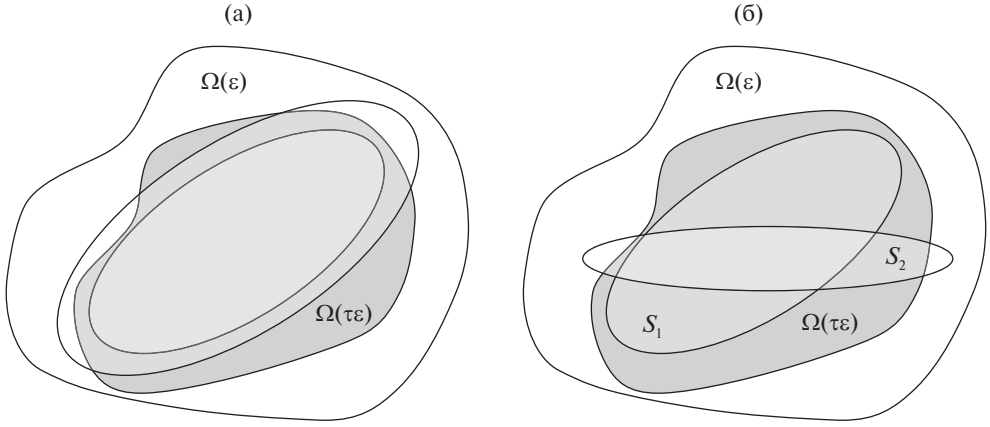


Рис. 4. Концепция плотного погружения.

Доказательство. По определению 7 τ -плотное погружение множества $\underline{\Omega}(\varepsilon)$ во множество $\Omega(\varepsilon)$ означает $\underline{\Omega}(\varepsilon) \not\subseteq \Omega(\tau\varepsilon)$. Тогда для любого $\tilde{\tau} \in [0, \tau)$ имеем $\Omega(\tilde{\tau}\varepsilon) \subseteq \Omega(\tau\varepsilon)$. Следовательно, условие $\underline{\Omega}(\varepsilon) \not\subseteq \Omega(\tilde{\tau}\varepsilon)$ (12b) выполняется для любого $\tilde{\tau} \in [0, \tau)$ и доказательство завершено. $\square$

Далее выберем подходящие параметры пакета (M, L, s) , чтобы при пакетном вероятностном масштабировании условие (12b) выполнялось с доверительной вероятностью $1 - \bar{\delta}$, $\bar{\delta} \in (0, 1)$. Таким образом, при заданном множестве SAS Ω_0 с центром θ_c определим оптимальный масштабный коэффициент $\bar{\gamma}$, при котором масштабируемое множество $\mathcal{S} = \theta_c \oplus \bar{\gamma}\Omega_0$ будет плотно погружено в $\Omega(\varepsilon)$.

Теорема 2 [пакетное вероятностное масштабирование с плотным погружением]. Рассмотрим множество SAS с геометрией Ω_0 и центром масштабирования θ_c , параметр точности $\varepsilon \in (0, 1)$, доверительную вероятность $\bar{\delta} \in (0, 1)$, показатель плотности $\tau \in [0, 1)$, а также неотрицательные целые числа M, L, s , $L > s$, удовлетворяющие условию

$$(13) \quad B(s; L, \tau\varepsilon)^M \geq 1 - \bar{\delta}.$$

Сгенерируем M н.о.р. мультивыборок $\mathbf{z}_i \in \mathcal{W}^L$, $i = 1, \dots, M$, и для каждого i -го пакета вероятностных ограничений зададим масштабный коэффициент пакета в виде (6), т.е. $\gamma_i = \gamma^s(\theta_c, \Omega_0, \mathbf{z}_i)$. Допустим, что $\bar{\gamma} = \gamma_{1:M} > 0$. Тогда с вероятностью, не меньшей $1 - \bar{\delta}$, справедливо

$$\theta_c \oplus \bar{\gamma}\Omega_0 \subseteq \Omega(\varepsilon), \quad \theta_c \oplus \bar{\gamma}\Omega_0 \not\subseteq \Omega(\tau\varepsilon).$$

Доказательство. Пусть $p = B(s; L, \tau\varepsilon)$. Согласно свойству 5 из Приложения 5, выбрав параметры (M, L, s) исходя из (13), получаем оптимальный масштабный коэффициент $\bar{\gamma} = \gamma_{1:M} > 0$, удовлетворяющий с вероятностью, не меньшей $1 - \bar{\delta}$, неравенству $\text{Pr}_{\mathcal{W}^L} \{\theta_c \oplus \bar{\gamma}\Omega_0 \subseteq \Phi_s(\mathbf{z})\} \leq p$. Это условие можно эквивалентно записать как

$$\text{Pr}_{\mathcal{W}^L} \{I_s^g(\theta, \mathbf{z}) = 0, \quad \forall \theta \in \theta_c \oplus \bar{\gamma}\Omega_0\} \leq p.$$

Из свойства 4 (Приложение 2) следует, что

$$(14) \quad \Pr_{\mathcal{W}^L} \{I_s^g(\theta, \mathbf{z}) = 0\} \leq p \iff \Pr_{\mathcal{W}} \{I^g(\theta, w) = 0\} \leq 1 - \tau\varepsilon.$$

Таким образом, можно заключить, что

$$\Pr_{\mathcal{W}} \{I^g(\theta, w) = 0\} \leq 1 - \tau\varepsilon, \quad \forall \theta \in \theta_c \oplus \bar{\gamma}\Omega_0,$$

т.е. $\theta_c \oplus \bar{\gamma}\Omega_0 \not\subseteq \Omega(\tau\varepsilon)$ с вероятностью, не меньшей $1 - \bar{\delta}$. $\square$

Замечание 4. Отметим, что в теореме 2 используется “уточняющая” доверительная вероятность $1 - \bar{\delta}$ вместо исходной $1 - \delta$. Она определяется пользователем и может быть выбрана ниже исходной доверительной вероятности для уменьшения размера выборки.

4.1. Настройка параметров пакета

В этом разделе покажем, как выбрать подходящие параметры (M, L, s) пакетного подхода для плотного погружения с доверительными вероятностями δ и $\bar{\delta}$ соответственно. В силу свойства 1 и теоремы 2 условия (12a) и (12b) будут выполнены при выборе параметров пакета (M, L, s) следующим образом:

$$(15a) \quad M \ln B(s; L, \varepsilon) \leq \ln \delta,$$

$$(15b) \quad M \ln B(s; L, \tau\varepsilon) \geq \ln(1 - \bar{\delta}).$$

Заметим, что неравенство (15a) дает вероятностные гарантии, а (15b) используется только для уточнения решения. Поскольку $B(s; L, \varepsilon)$ – отрицательная величина, можно разделить (15a) на $\ln B(s; L, \varepsilon)$, получив

$$M \geq \frac{\ln \delta}{\ln B(s; L, \varepsilon)}.$$

Следовательно, для справедливости (15a) достаточно выбрать

$$(16) \quad M = \left\lceil \frac{\ln \delta}{\ln B(s; L, \varepsilon)} \right\rceil.$$

Аналогично, для выполнения (15b) M должно быть выбрано исходя из

$$(17) \quad M \leq \frac{\ln(1 - \bar{\delta})}{\ln B(s; L, \tau\varepsilon)}.$$

Для заданного набора параметров $(\varepsilon, \delta, \tau, \bar{\delta})$ существует множество комбинаций (M, L, s) , удовлетворяющих (16) и (17). В данной работе предлагаются два различных критерия ζ : (i) минимизировать количество возможных комбинаций из $s + 1$ ограничений, т.е. $\zeta = M \binom{L}{s+1}$, (ii) минимизировать общий

размер выборки, т.е. $\zeta = ML$. Тогда параметры пакета (M, L, s) являются решением следующей задачи оптимизации:

$$(18) \quad \begin{aligned} (M^o, L^o, s^o) = \underset{M, L, s \in \mathbb{N}_{\geq 0}}{\operatorname{argmin}} \quad & \zeta \\ \text{при ограничениях} \quad & M \leq \frac{\ln(1 - \bar{\delta})}{\ln B(s; L, \tau \varepsilon)}, \\ & M = \left\lceil \frac{\ln \delta}{\ln B(s; L, \varepsilon)} \right\rceil, \\ & L \geq s + 1. \end{aligned}$$

Для решения задачи (18) используем полный перебор [31], чтобы найти подходящую комбинацию параметров пакета (M, L, s) (см. пример ниже).

Пример 2. При заданных $\varepsilon = 0,05, \delta = 0,001, \bar{\delta} = 0,1$ для каждого $s = [1, 30]$ определим M по формуле (16). Затем проверим условие (17) для пар (L, s) , где $L = [s + 1, \dots, s + 300]$. Наконец, среди всех пар, удовлетворяющих (17), выберем ту, что доставляет минимум критерию ζ (либо $\zeta = M \binom{L}{s+1}$, либо $\zeta = ML$). В табл. 1 приведены параметры пакета (M, L, s) , полученные при решении задачи (18) с помощью предложенного подхода (оба критерия ζ). Согласно табл. 1 для каждого рассматриваемого критерия увеличение показателя плотности τ приводит к росту как необходимого размера выборки (N), так и комбинаторной сложности ($M \binom{L}{s+1}$). Если количество доступных наблюдений w_i ограничено, можно добиться плотного погружения, используя всего 390 наблюдений, но за счет более высокой комбинаторной сложности. Более того, можно ограничить сверху размер выборки $N = ML$ в задаче оптимизации (18) и получить параметры пакета, минимизирующие комбинаторную сложность при выполнении ограничения на размер выборки. Обращаем внимание, что плотное погружение обычно находится в автономном режиме (офлайн), поэтому сложность вычисления аппроксимации CCS не мешает работе контуров управления в режиме онлайн.

Таблица 1. Параметры пакета, размер выборки и количество возможных комбинаций TI-RBPS для $\tau = [0,2 \ 0,3 \ 0,4 \ 0,5]$, доставляющих минимум двум критериям ζ

Критерий: $\min M \binom{L}{s+1}$						Критерий: $\min N$				
τ	M	L	s	N	$M \binom{L}{s+1}$	M	L	s	N	$M \binom{L}{s+1}$
0,2	43	27	2	1,16e+03	1,25e+05	2	195	4	3,90e+02	4,46e+09
0,3	155	27	3	4,19e+03	2,72e+06	2	303	8	6,06e+02	1,05e+17
0,4	2681	20	4	5,36e+04	4,16e+07	4	278	10	1,11e+03	6,28e+19
0,5	15 033	29	6	4,36e+05	2,35e+10	8	309	14	2,47e+03	9,68e+25

5. Результаты

Сравним аппроксимации множества 0,05-CCS (см. пример 1), полученные с помощью обычного вероятностного масштабирования (PS) и пакетного вероятностного масштабирования с плотным погружением (TI-PBPS) для различных размерностей n_θ . В качестве начальной SAS-аппроксимации $\theta_c \oplus \Omega_0$ выберем единичный шар с центром в начале координат. Таким образом, получаемые аппроксимирующие множества являются шарами с центром в начале координат и радиусом α . Для каждой из рассматриваемых размерностей используем процедуру Монте-Карло для равномерного генерирования 10^7 линейных ограничений в виде касательных к единичной сфере. Пользуясь симметрией задачи, вычислим точки пересечения вероятностных ограничений с фиксированной координатной осью и используем их для вычисления точного значения радиуса для множества 0,05-CCS. Затем найдем радиусы аппроксимирующих множеств, полученных с помощью PS и TI-PBPS для различных значений показателя плотности τ . Для снижения вариативности результатов радиусы TI-PBPS соответствуют медианному радиусу трех отдельных экспериментов, каждый из которых содержит различные реализации ограничений.

Согласно рис. 5 для данной конкретной задачи техника TI-PBPS дает существенно лучшие результаты, чем PS (самая нижняя пунктирная линия): полученные аппроксимирующие радиусы ближе к реальным (самая верхняя пунктирная линия). Как и ожидалось, с увеличением показателя плотности τ качество аппроксимации, полученной с помощью TI-PBPS, повышается.

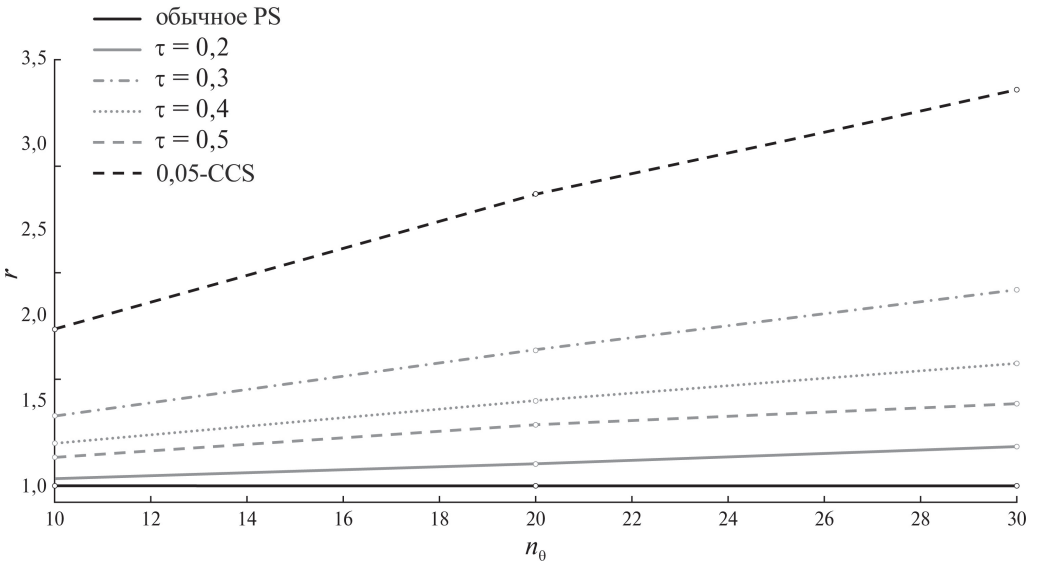


Рис. 5. Сравнение радиусов α аппроксимирующего множества для различных размерностей задачи n_θ , полученных с помощью PS и TI-PBPS при $\varepsilon = 0,05$, $\delta = 0,001$ и $\bar{\delta} = 0,1$.

6. Заключение

В данной работе рассмотрен подход вероятностного масштабирования для вычисления аппроксимаций множеств с вероятностными ограничениями на основе случайных выборок. Этот подход позволяет пользователю сначала выбрать любое множество, а затем применить линейное преобразование для аппроксимации вероятностно-надежной области с желаемыми вероятностными гарантиями. В результате сложность аппроксимации настраивается априори. Кроме того, предложен пакетный вариант вероятностного масштабирования с плотным погружением, позволяющий сделать решение менее консервативным. Компромисс между размером выборки, сложностью задачи и степенью консерватизма этого подхода может быть настроен пользователем. Будущие исследования могут быть направлены на улучшение предложенного решения, например, за счет применения схем выборки по важности [32].

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Свойство 3. Рассмотрим целочисленные параметры $L > s \geq 0$, пакет $\mathbf{z} \in \mathcal{W}^L$ и допустимый уровень нарушения $\varepsilon \in (0; 1)$. Для $w \in \mathcal{W}$ справедливо неравенство

$$(П.1.1) \quad \Pr_{\mathcal{W}^L} \{I_s^g(\theta, \mathbf{z}) = 1\} \leq 1 - B(s; L, \varepsilon) \iff \Pr_{\mathcal{W}} \{I^g(\theta, w) = 1\} \leq \varepsilon.$$

Доказательство. Определим $E(\theta) = \Pr_{\mathcal{W}} \{I^g(\theta, w) = 1\}$. Тогда

$$(П.1.2) \quad \Pr_{\mathcal{W}^L} \{I_s^g(\theta, \mathbf{z}) = 0\} = \sum_{i=0}^s \binom{L}{i} E(\theta)^i (1 - E(\theta))^{L-i} = B(s; L, E(\theta)).$$

Введем обозначение $p = 1 - B(s; L, \varepsilon)$. Поскольку $B(s; L, \varepsilon)$ – строго убывающая функция ε (см. [23, свойство 4]), имеем

$$(П.1.3) \quad B(s; L, E(\theta)) \geq B(s; L, \varepsilon) = 1 - p \iff E(\theta) \leq \varepsilon.$$

Следовательно,

$$(П.1.4) \quad \Pr_{\mathcal{W}^L} \{I_s^g(\theta, \mathbf{z}) = 1\} \leq p \iff \Pr_{\mathcal{W}} \{I^g(\theta, w) = 1\} \leq \varepsilon.$$

Доказательство завершено. $\square$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Свойство 4. Рассмотрим целочисленные параметры $L > s \geq 0$, пакет $\mathbf{z} \in \mathcal{W}^L$, выборку $w \in \mathcal{W}$ и допустимый уровень нарушения $\varepsilon \in (0; 1)$. Справедливо неравенство

$$\Pr_{\mathcal{W}^L} \{I_s^g(\theta, \mathbf{z}) = 0\} \leq B(s; L, \tau\varepsilon) \iff \Pr_{\mathcal{W}} \{I^g(\theta, w) = 0\} \leq 1 - \tau\varepsilon.$$

Доказательство. Вспомнив определение $E(\theta) = \Pr_{\mathcal{W}} \{I^g(\theta, w) = 1\}$, имеем

$$\Pr_{\mathcal{W}^L} \{I_s^g(\theta, \mathbf{z}) = 0\} = \sum_{i=0}^s \binom{L}{i} E(\theta)^i (1 - E(\theta))^{L-i} = B(s; L, E(\theta)).$$

Поскольку $B(s; L, \tau\varepsilon)$ строго убывает по $\tau\varepsilon$ (см. [23, свойство 4]), получаем

$$\begin{aligned} \Pr_{\mathcal{W}^L} \{I_s^g(\theta, \mathbf{z}) = 0\} = B(s; L, E(\theta)) &\leq B(s; L, \tau\varepsilon) \iff \\ \iff \Pr_{\mathcal{W}} \{I^g(\theta, w) = 1\} = E(\theta) &\geq \tau\varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Pr_{\mathcal{W}^L} \{I_s^g(\theta, \mathbf{z}) = 0\} \leq B(s; L, \tau\varepsilon) \iff \Pr_{\mathcal{W}} \{I^g(\theta, w) = 0\} \leq 1 - \tau\varepsilon. \quad \square$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Свойство 5. При заданных параметре точности $p \in (0, 1)$ и доверительной вероятности $\bar{\delta} \in (0, 1)$ предположим, что количество пакетов M выбрано исходя из условия

$$1 - p^M \leq \bar{\delta}.$$

Для каждого пакета ограничений $i = 1, \dots, M$ сгенерируем M н.о.р. мультивыборок $\mathbf{z} \sim \Pr_{\mathcal{W}^L}$ и определим $\gamma_i = \gamma^s(c, \Omega_0, \mathbf{z}_i)$. Предположим, что $\bar{\gamma} = \gamma_{1:M} > 0$. Тогда с вероятностью, не меньшей $1 - \bar{\delta}$, справедливо

$$\Pr_{\mathcal{W}^L}^M \{c \oplus \bar{\gamma} \Omega_0 \subseteq \Phi_s^g(\mathbf{z})\} \leq p.$$

Доказательство. Этот результат доказывается по аналогии со свойством 1. Рассмотрим следующую задачу оптимизации:

$$\begin{aligned} \text{(П.3.1)} \quad & \min_{\gamma} \quad \gamma \\ & \text{при ограничениях} \quad c \oplus \gamma \Omega_0 \not\subseteq \Phi_s^g(\mathbf{z}_i), \quad i = 1, \dots, M. \end{aligned}$$

Если задача (П.3.1) имеет допустимое решение, то в силу (6) можно записать (П.3.1) в виде

$$\begin{aligned} \text{(П.3.2)} \quad & \min_{\gamma} \quad \gamma \\ & \text{при ограничениях} \quad \gamma > \gamma^s(c, \Omega_0, \mathbf{z}_i), \quad i = 1, \dots, M. \end{aligned}$$

Согласно подходу “генерирование/отбрасывание” [21, 26] при отбрасывании не более $M - 1$ ограничений и $d = 1$ (одна переменная), вероятность нарушения масштабированного аппроксимирующего множества ограничений не

превышает $p \in (0; 1)$ с вероятностью, не меньшей $1 - \bar{\delta}$, где доверительная вероятность $\bar{\delta}$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}\bar{\delta} &= \binom{M-1}{M-1} B(M-1; M, p) = \sum_{i=0}^{M-1} \binom{M}{i} p^i (1-p)^{M-i} = \\ &= 1 - \sum_{i=M}^M \binom{M}{i} p^i (1-p)^{M-i} = 1 - p^M.\end{aligned}$$

Если отбросить не более $M - 1$ ограничений, то оптимальное решение задачи (П.3.2) будет иметь вид $\bar{\gamma} = \gamma_{1:M}$, причем $\gamma_i = \gamma^s(c, \Omega_0, \mathbf{z})$. Соответственно, получаем $\Pr_{\mathcal{W}^L}^M \{\bar{\gamma} \leq \gamma(c, \Omega_0, \mathbf{z})\} \leq p$; следовательно, с вероятностью, не меньшей $1 - \bar{\delta}$, справедливо

$$\Pr_{\mathcal{W}^L}^M \{\theta_c \oplus \bar{\gamma} \Omega_0 \subseteq \Phi_s^g(\mathbf{z})\} \leq p.$$

□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bemporad A., Morari, M.* Robust model predictive control: A survey / Robustness in Identification and Control. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Garulli A., Tesi A. (Eds.). London: Springer, 1999. V. 245.
<https://doi.org/10.1007/BFb0109870>
2. *Mayne D., Seron M., Raković S.* Robust model predictive control of constrained linear systems with bounded disturbances // Automatica. 2005. V. 41. No. 2. P. 219–224.
3. *Mayne D., Raković S., Findeisen R., Allgöwer F.* Robust output feedback model predictive control of constrained linear systems // Automatica. 2006. V. 42. No. 7. P. 1217–1222.
4. *Lorenzen M., Dabbene F., Tempo R., Allgöwer F.* Constraint-tightening and stability in stochastic model predictive control // IEEE Transactions on Automatic Control. 2016. V. 62. No. 7. P. 3165–3177.
5. *Farina M., Giullioni L., Scattolini R.* Stochastic linear model predictive control with chance constraints – a review // J. Process Control. 2016. V. 44. P. 53–67.
6. *Mesbah A.* Stochastic model predictive control: An overview and perspectives for future research // IEEE Control Systems Magazine. 2016. V. 36. No. 6. P. 30–44.
7. *Charnes A., Cooper W.* Chance constraints and normal deviates // J. Amer. Stat. Associat. 1962. V. 57. No. 297. P. 134–148.
8. *Küçükyavuz S., Jiang, R.* Chance-constrained optimization under limited distributional information: A review of reformulations based on sampling and distributional robustness // EURO J. Comput. Optim. 2022. V. 10. Art. No. 100030.
9. *Mammarella M., Mirasierra V., Lorenzen M., Alamo T., Dabbene F.* Chance-constrained sets approximation: A probabilistic scaling approach // Automatica. 2022. V. 137. Art. No. 110108.
10. *Polyak B., Tempo R.* Probabilistic robust design with linear quadratic regulators // Syst. Control Lett. 2001. V. 43. No. 5. P. 343–353.

11. *Calafiore G., Polyak B.* Stochastic algorithms for exact and approximate feasibility of robust LMIs // IEEE Transactions on Automatic Control. 2001. V. 46. No. 11. P. 1755–1759.
12. *Dabbene F., Gay P., Polyak B.* Recursive algorithms for inner ellipsoidal approximation of convex polytopes // Automatica. 2003. V. 39. P. 1773–1781.
13. *Calafiore G., Campi M.* The scenario approach to robust control design // IEEE Transactions on Automatic Control. 2006. V. 51. No. 5. P. 742–753.
14. *Tempo R., Calafiore G., Dabbene F.* Randomized Algorithms for Analysis and Control of Uncertain Systems, with Applications. London: Springer, 2013.
15. *Polyak B., Shcherbakov P.* Randomization in robustness, estimation, and optimization / Uncertainty in Complex Networked Systems: In Honor of Roberto Tempo. Basar T. (Ed.). Cham: Springer, 2018. P. 181–208.
16. *Kataoka S.* A stochastic programming model // Econometrica: J. Econom. Soc. 1963. P. 181–196.
17. *Prékopa A.* Logarithmic concave measures with application to stochastic programming // Acta Scientiarum Mathematicarum. 1971. V. 32. P. 301–316.
18. *Geng X., Xie L.* Data-driven decision making in power systems with probabilistic guarantees: Theory and applications of chance-constrained optimization // Ann. Rev. Control. 2019. V. 47. P. 341–363.
19. *Soudjani S., Majumdar R.* Concentration of measure for chance-constrained optimization // IFAC-PapersOnLine. 2018. V. 51. No. 16. P. 277–282.
20. *Lejeune M., Prékopa A.* Relaxations for probabilistically constrained stochastic programming problems: Review and extensions // Annals of Operations Research. 2018. P. 1–22.
21. *Campi M., Garatti S.* A sampling-and-discarding approach to chance-constrained optimization: Feasibility and optimality // J. Optim. Theory Appl. 2011. V. 148. No. 2. P. 257–280.
22. *Alamo T., Mirasierra V., Dabbene F., Lorenzen M.* Safe approximations of chance constrained sets by probabilistic scaling // 2019 18th European Control Conference (ECC). IEEE, 2019. P. 1380–1385.
23. *Alamo T., Tempo R., Luque A., Ramirez D.* Randomized methods for design of uncertain systems: Sample complexity and sequential algorithms // Automatica. 2015. V. 52. P. 160–172.
24. *Lorenzen M., Dabbene F., Tempo R., Allgöwer F.* Stochastic MPC with offline uncertainty sampling // Automatica. 2017. V. 81. P. 176–183.
25. *Mammarella M., Lorenzen M., Capello E., Park H., Dabbene F., Guglieri G., Romano M., Allgöwer F.* An offline-sampling SMPC framework with application to autonomous space maneuvers // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2018. V. 28. No. 2. P. 388–402.
26. *Calafiore G.* Random convex programs // SIAM J. Optim. 2010. V. 20. No. 6. P. 3427–3464.
27. *Vapnik V.* The Nature of Statistical Learning Theory. New York: Springer Science & Business Media, 1999.
28. *Alamo T., Tempo R., Camacho E.* Randomized strategies for probabilistic solutions of uncertain feasibility and optimization problems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2009. V. 54. No. 11. P. 2545–2559.

29. *Alamo T., Tempo R., Camacho E.* Improved sample size bounds for probabilistic robust control design: A pack-based strategy // 2007 46th IEEE Conference on Decision and Control. IEEE, 2007. P. 6178–6183.
30. *Alamo T., Manzano J., Camacho E.* Robust design through probabilistic maximization / Uncertainty in Complex Networked Systems. Springer, 2018. P. 247–274.
31. *Nievergelt J.* Exhaustive search, combinatorial optimization and enumeration: Exploring the potential of raw computing power // International Conference on Current Trends in Theory and Practice of Computer Science. Springer, 2000. P. 18–35.
32. *Lukashevich A., Gorchakov V., Vorobev P., Deka D., Maximov Y.* Importance sampling approach to chance-constrained DC optimal power flow // IEEE Transactions on Control of Network Systems. 2023. V. 11. No. 2. P. 928–937.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 03.03.2025

После доработки 20.05.2025

Принята к публикации 27.06.2025