Автоматика и телемеханика, № 7, 2025

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2025 г. А.Н. КАРКИЩЕНКО, д-р физ.-мат. наук (karkishalex@gmail.com)
(Научно-конструкторское бюро робототехники и систем управления, Таганрог)

ОБ ЭМЕРДЖЕНТНОСТИ СИСТЕМ БИНАРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Рассматривается возникновение эффекта эмерджентности в терминах отображений, реализуемых произвольными системами. При этом эмерджентность интерпретируется как «сверхаддитивное» расширение класса отображений при объединении систем или возникновении новых связей между элементами. В работе дается описание эмерджентных свойств в моделях систем, реализующих бинарные отображения. Структура взаимодействия элементов в таких системах описывается конечным ориентированным графом. Исследуются классы отображений при теоретико-множественных операциях над такими системами, и показано «сверхаддитивное» расширение отображений при объединении. Вводится и обосновывается коэффициент эмерджентности. Доказаны нижняя и верхняя оценки для этого коэффициента.

Ключевые слова: бинарное отображение, теоретико-множественные операции, эмерджентность, коэффициент эмерджентности.

DOI: 10.31857/S0005231025070076, **EDN:** JSCDTJ

1. Введение

В системном анализе понятие эмерджентности является одним из наиболее интересных свойств сложных систем. В стандартной формулировке *эмерджентность* – это появление новых свойств и качеств, не присущих элементам, входящим в состав системы. В качестве синонима эмерджентности используется также термин «системный эффект». История возникновения и развития понятия эмерджентности в рамках общей теории систем, а также базовые идеи, лежащие в основе этого явления, изложены в [1]. В частности, со ссылкой на [2] указывается, что эмерджентное поведение может быть понято, исходя из природы и поведения его частей плюс знание, как эти части взаимодействуют.

Большое количество работ посвящено философскому и общеметодологическому осмыслению этого явления в целом [3]. В [4] обосновываются категории сильной и слабой эмерджентности, эти понятия являются достаточно условными, и между ними трудно провести четкую границу. Более того, считается, что эмерджентность может проявляться на континууме от «слабого» до «сильного» [5]. Эмерджентность считается *сильной*, если не существует приемлемой теории, которая могла бы объяснить или вывести поведение системы на основе свойств или поведения ее компонентов. Напротив, эмерджентность является *слабой*, если отчетливо наблюдается зависимость между поведением компонентов и поведением системы. В [6] делается попытка математически доказать возможность определить понятие сильной эмерджентности. Работа [7] посвящена формализации понятия эмерджентности, основанного на энтропии. Утверждается, что существует связь между энтропией и эмерджентностью в сложных системах в том смысле, что рост энтропии является индикатором возможного появления эмерджентных событий и состояний. В заключении авторы формулируют вопрос о том, как выразить энтропию системы через энтропию составляющих ее подсистем.

Попытки дать формальное описание таких эффектов в конкретных физических или инженерных системах вызывают значительные затруднения, поэтому примеров таких исследований значительно меньше. Здесь следует отметить работу [8], в которой рассматривается возникновение эмерджентных эффектов в искусственных системах, а также [9], посвященную исследованию принципов и подходов к построению инженерных систем, обладающих такими свойствами. Конкретные примеры проявлений системного эффекта в реальных физических системах можно найти, например, в работах [10–13].

Из-за отсутствия четкого понимания эмерджентность в разных исследованиях определяется по-своему. Например, в [14, 15] она понимается как способность взаимодействующих автономных агентов формировать согласованное поведение без внешнего управления, а только на основе внутреннего взаимодействия. Похожий взгляд отражен в работе [16], в которой рассматриваются процессы самоорганизации и эмерджентности при формировании общего словарного запаса на первичных стадиях возникновения человеческих сообществ. Основная идея также основана на моделировании взаимодействия агентов, действующих на основе небольшого количества простых правил, что и приводит к эмерджентным эффектам.

Исследование эмерджентности тесно связано с исследованием процессов, которые приводят к сложному поведению системы при относительно простом поведении ее элементов. Возможно, формальное обоснование подобных процессов даже в относительно узких конкретных случаях таких систем является ключевым вопросом понимания природы возникновения эмерджентности как таковой. Данные вопросы являются центральными в [17].

Системный эффект обнаруживается в различных по своей природе системах – полиметаллические соединения, химические процессы, коллективное принятие решений в социальных структурах и др. Многообразие его проявлений предопределяет формальные методы, которые наиболее приемлемы для исследования в каждом случае. Это могут быть уравнения, описывающие упругое взаимодействие твердых тел, законы протекания химических реакций или алгоритмы принятия компромиссных решений, в частности, алгоритмы группового управления в многоагентных системах. Исследование системных эффектов предполагает предварительное построение формальной модели, которая должна правильно предсказывать поведение исследуемого объекта или процесса при допустимых воздействиях на него.

Общепринято, что для существования любой системы необходимы системообразующие факторы, которые способствуют образованию системы, являются внешними по отношению к ее элементам, а также не вызываются необходимостью к объединению [18]. Во многих случаях роль таких факторов играют связи между элементами, природа которых определяется природой элементов, образующих систему.

Основное предположение, которое послужило мотивом для данной работы, состоит в том, что достаточно универсальным способом исследования эмерджентности является исследование отображений, осуществляемых сложной системой в зависимости от отображений, реализуемых элементами системы, и от состояния системообразующих факторов, т.е. структуры связей между элементами системы. Это почти очевидно в случае систем обработки информации, в том числе включающих в себя людей.

Ниже рассматривается класс систем, реализующих бинарные отображения. В определенном смысле их можно рассматривать как автоматные отображения. Несмотря на кажущуюся простоту, по широте их применения и выразительности автоматные отображения во многих случаях не уступают классическим алгебраическим структурам. Известно также, что полугруппы, группы и кольца автоматов, а также их функциональные системы способствовали решению ряда непростых абстрактно-математических проблем.

Модели систем бинарных отображений не позволяют полностью объяснить все процессы системной эмерджентности. Тем не менее, они демонстрируют важные свойства, которые присущи этому явлению. Например, так называемый «сверхаддитивный» эффект, который возникает при объединении систем, а также возникновение предельных циклов в множестве состояний. В физических системах предельным циклам соответствуют аттракторы, которые можно рассматривать как возможные макросостояния в многомасштабных системах. В случае систем бинарных отображений появляется возможность перейти к строго формальным моделям и получить ряд количественных характеристик процессов, отражающих эмерджентность. Следует отметить, что сверхаддитивные эффекты на классах бинарных отображений по уже почти общепринятой терминологии и классификации можно отнести к классу слабой эмерджентности [4–6], поскольку существует высокий уровень прослеживаемости между функциями элементов и функциями системы в целом.

Основная задача, которая ставится и решается в данной статье состоит в том, чтобы установить природу и строго объяснить причину возникновения эмерджентных эффектов в системах, реализующих бинарные отображения, а также ввести и обосновать удобную количественную меру для измерения степени проявления таких эффектов.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 приводятся основные определения, обозначения и термины, которые используются далее в тексте. Разделы 3 и 4 содержат вывод основных соотношений, описывающих реализуемые бинарные отображения в системах со структурой полного графа и произвольного ориентированного графа соответственно. В разделе 5 доказываются утверждения, описывающие классы бинарных отображений, которые получаются в результате теоретико-множественных операций над системами. Описывается также возникающий при этом системный эффект. Раздел 6 посвящен определению и обоснованию коэффициента эмерджентности для бинарных систем, а также доказательству двусторонних оценок для него.

2. Основные определения и обозначения

Будем использовать *кронекерово произведение* $A \otimes B$ матриц A и B, а именно, если $A = (a_{ij})$ – матрица размеров $m \times n$, а B – размеров $p \times q$, то по определению матрица $A \otimes B = (a_{ij}B)$ и имеет, очевидно, размеры $mp \times nq$. Определение и свойства кронекерова произведения можно найти, например, в [19]. В частности, далее потребуется равенство $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$, связывающее обычное и кронекерово произведения, причем матрицы A, B, C и D имеют размеры, при которых все произведения определены. Это свойство обобщается на произвольное число сомножителей. Кронекерово произведение матриц $A_1,\ A_2,\ \ldots\ ,\ A_k$ будем для удобства обозначать $A_1 \otimes A_2 \otimes\ \ldots\ \otimes A_k = \mathop{\otimes}\limits_{i=1}^{k} A_i$. В частности, кронекерову k-ю степень матрицы A будем записывать в виде $\underbrace{A \otimes \ldots \otimes A}_{k} = A^{[k]}$. Важно принимать во внимание некоммутативность кронекерова произведения.

Кронекеровым расширением вектора $a = (a_1\ a_2\ \ldots\ a_n)^\top$ будем называть вектор

$$\bar{a} = (1 \quad a_1 \quad a_2 \quad (a_1 a_2) \quad \ldots \quad (a_1 a_2 \ldots a_n))^\top = \\ = \begin{pmatrix} 1 \\ a_n \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \otimes \ldots \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

Под *кронекеровым расширением по строкам* матрицы A понимается матрица $\bar{A}$, каждая строка которой, рассматриваемая как вектор, является кронекеровым расширением соответствующей строки матрицы A. *Адамаровым произведением* матриц A и B называется матрица $A * B$, получающаяся в результате поэлементного перемножения этих матриц [19]. Это произведение определено для матриц, имеющих одинаковые размеры, и является коммутативной операцией. Матрицу будем называть *мономиальной* по столбцам, если каждый ее столбец состоит из нулей за исключением одного элемента, который равен единице.

Далее потребуются некоторые базовые определения из теории графов. Пусть задан ориентированный граф $H = (V, E)$, где $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ – множество вершин, а $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_p\} \subseteq V \times V$ – множество дуг. В графе допускаются петли, т.е. дуги вида $e = (v, v)$. Если $v_i \in V$, то ρ_i будет обозначать *полустепень захода* вершины v_i, т.е. число дуг вида (v, v_i), входящих в эту вершину, так что $\sum\limits_{i=1}^{n} \rho_i = |E|$. Граф с n вершинами, который содержит все возможные дуги и петли, т.е. когда $E = V \times V$, $|E| = n^2$, называется *полным ориентированным графом с петлями* (или для краткости просто *полным графом*), будем обозначать его K_n. Если же $E = \varnothing$, то такой граф называется *нуль-графом* и обозначается O_n.

Матрицей смежности ориентированного графа H называется квадратная матрица $R = (r_{ij})$ размера $n \times n$, в которой $r_{ij} = 1$, если $(v_i, v_j) \in E$, и $r_{ij} = 0$ в противном случае. *Объединением* и *пересечением* графов $H_1 = (V, E_1)$ и $H_2 = (V, E_2)$ с одним и тем же множеством вершин называются графы $H_1 \cup H_2 = (V, E_1 \cup E_2)$ и $H_1 \cap H_2 = (V, E_1 \cap E_2)$ соответственно.

3. Системы со структурой полного графа

Под *системой* будем понимать совокупность n взаимодействующих функциональных элементов, которые функционируют в дискретном времени $t = 0, 1, 2, \ldots$ и могут находиться в одном из двух *состояний* – 0 или 1. Состояние z_i i-го элемента в момент времени $t+1$ определяется булевой функцией $z_i(t+1) = f_i\left(x_1(t+1), \ldots, x_m(t+1); z_1(t), \ldots, z_n(t)\right)$, зависящей от двух групп аргументов. Аргументы первой группы – это внешние аргументы $x_1(t+1), \ldots, x_m(t+1)$, представляющие собой двоичные внешние сигналы, аргументы второй группы – это внутренние аргументы $z_1(t), \ldots, z_n(t)$, которые являются состояниями соответствующих элементов системы в момент времени t. Функции z_i, $i = 1, \ldots, n$, будем называть *функциями состояния* элементов, а упорядоченный набор состояний всех элементов – *состоянием системы*. Считаем, что система не зависит от случайных факторов.

Последовательность состояний системы можно рассматривать как бинарное отображение последовательности внешних аргументов и предыдущих состояний. В общем случае функции, реализуемые элементами, могут не зависеть от состояний некоторых других элементов, что определяется структурой связей между элементами. Поэтому последовательность состояний зависит от: 1) функций, реализуемых каждым элементом системы, и 2) структуры связей между элементами. Если система содержит n элементов с m входами, то каждый элемент может описываться одной из 2^{m+n} булевых функций.

Структуру системы удобно задавать с помощью ориентированного графа, вершины которого находятся во взаимно-однозначном соответствии с элементами системы, а дуги соответствуют связям между выходами одних элементов и входами других. Поскольку состояние каждого элемента может зависеть и от его собственного состояния, то граф системы может иметь петли. Описанную систему можно рассматривать как синхронную *последовательностную* логическую сеть, реализующую *автоматное* отображение [20].

Рассмотрим систему из n элементов со структурой K_n. Реализуемое ею отображение можно описать системой функций состояний, в которой правые части – некоторые булевы функции: $z_i(t+1) = f_i(x_1(t+1), \dots, x_m(t+1), z_1(t), \dots, z_n(t))$, $i = 1, \dots, n$. Далее будем рассматривать случай, когда отсутствуют внешние аргументы, т.е. $z_i(t+1) = f_i\left(z_1(t), \dots, z_n(t)\right)$, $i = 1, \dots, n$. По аналогии с дифференциальными уравнениями такую систему можно назвать автономной, описывающей «собственное свободное движение» или, в терминологии системного анализа, закрытой системой, демонстрирующей свое поведение, зависящее от начального состояния $z_1(0), \dots, z_n(0)$. Опишем отображения, реализуемые такой системой при всех возможных функциях состояний элементов системы.

Как известно [21–23], любую булеву функцию от n переменных можно однозначно задать ее *арифметическим представлением*:

$$\begin{aligned} z_i(t+1) = f_i(z_1(t), \dots, z_n(t)) = a_0^i + a_1^i z_1(t) + a_2^i z_2(t) + a_{12}^i z_1(t) z_2(t) + \dots \\ \dots + a^i_{k_1 \dots k_p} z_{k_1}(t) \cdot \ldots \cdot z_{k_p}(t) + \dots + a^i_{1\dots n} z_1(t) \cdot \ldots \cdot z_n(t), \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{1}$$

где $a_0^i, a_1^i, a_2^i, a_{12}^i, \dots, a^i_{k_1\dots k_p}, \dots, a^i_{1\dots n}$ – целые числа, однозначно определяющие функцию f_i.

Рассмотрим кронекерово расширение вектора $z = (z_1 \ z_2 \ \dots \ z_n)^\top$:

$$\begin{aligned} \bar{z} = (1 \quad z_1 \quad z_2 \quad (z_1 z_2) \quad \dots \quad (z_1 z_2 \dots z_n))^\top = \\ = \begin{pmatrix} 1 \\ z_n \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ z_{n-1} \end{pmatrix} \otimes \ \dots \ \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ z_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда систему соотношений (1) можно записать в матричном виде:

$$z(t+1) = A\bar{z}(t), \tag{2}$$

где A – матрица размера $n \times 2^n$ соответствующих коэффициентов.

Равенство (2) можно записать иначе. Вектор $\bar{z}(t)$ принимает 2^n различных значений, и каждому из них ставится в соответствие образ при отображении A. Поэтому можно записать 2^n равенств (2), соответствующих различным $\bar{z}(t)$. По индукции легко доказать, что все возможные 2^n значений вектора $\bar{z}(t)$, записанные в естественном порядке, образуют матрицу $Q_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{[n]}$. Обозначим через B матрицу, столбцы которой являются образами соответствующих векторов $\bar{z}(t)$. Очевидно, что эта матрица полностью и однозначно описывает реализуемое системой бинарное отображение. Тогда все 2^n возможных равенств (2) можно записать компактно в виде $B = AQ_n$. Поскольку $Q_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{[n]}$, то сразу получаем

$$A = BQ_n^{-1}. \tag{3}$$

Эта формула дает явное выражение коэффициентов арифметического представления функций состояния всех элементов системы, которая реализует бинарное отображение, заданное с помощью матрицы B. Однозначность решения (3) означает, что в системе со структурой K_n может быть осуществлено любое отображение. Иными словами, *класс отображений*, реализуемых в такой системе, совпадает с множеством всех возможных отображений. Если структура системы отличается от K_n, то это уже не будет выполняться.

Далее опишем классы реализуемых бинарных отображений в зависимости от структуры системы, задаваемой произвольным ориентированным графом (не обязательно графом K_n).

4. Системы с произвольной структурой и классы отображений

Рассмотрим общий случай, когда система имеет произвольную структуру, задаваемую ориентированным графом $H = (V, E)$. Функция состояния i-го элемента зависит от состояния j-го элемента в том случае, если одновременно выполняются два условия: 1) имеется связь между входом i-го элемента и выходом j-го и 2) значение состояния j-го элемента является для i-го существенной переменной. Первое условие определяется структурой системы, а второе – функцией состояния. В этом отражается взаимосвязь внутриэлементной и надэлементной организации системы. Система со структурой K_n является максимально «информированной», поскольку каждый элемент имеет информацию о состояниях всех остальных элементов (включая его самого) и может быть настроен на выполнение любой функции.

Охарактеризуем класс отображений, реализуемых системой с произвольной структурой H. Пусть $R = (r_{ij})$ – матрица смежности графа H. Воспользовавшись арифметическим представлением (1), получим аналогичное (2) матричное соотношение $z(t+1) = A\bar{z}(t)$, где, как и раньше, A – матрица, каждая строка которой образована коэффициентами соответствующих арифметических представлений.

Однако в общем случае $z_i(t+1)$ зависит не от всех значений $z_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, а лишь от некоторых, определяемых структурой системы. Говоря точнее, $z_i(t+1)$ существенно зависит от $z_j(t)$, если $r_{ji} = 1$, и, соответственно, не зависит при $r_{ji} = 0$. Таким образом, вся информация о структурной зависимости i-го элемента от остальных элементов содержится в i-м столбце матрицы R. Если $z_i(t+1)$ структурно не зависит от $z_j(t)$, то можно считать, что коэффициент a_j^i в разложении равен нулю или, в общем случае, можно записать $a_j^i = r_{ji}u_j^i$. Ясно, что в остальных членах разложения, например, $a^i_{k_1\dots k_2} z_{k_1}(t)\cdot\ldots\cdot z_{k_2}(t)$, коэффициент $a^i_{k_1\dots k_2}$ также равен нулю, если отсутствует хотя бы одна из связей k_1-го, …, k_p-го элементов со входом i-го элемента. Это равносильно равенству: $a^i_{k_1\dots k_p} = r_{k_1 i}\cdot\ldots\cdot r_{k_p i} u^i_{k_1\dots k_p}$. Следовательно, матрицу A можно записать в виде адамарова произведения двух матриц:

$$A = \begin{pmatrix} a^1_0 & a^1_1 & a^1_2 & a^1_{12} & \dots & a^1_{1\dots n} \\ a^2_0 & a^2_1 & a^2_2 & a^2_{12} & \dots & a^2_{1\dots n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^n_0 & a^n_1 & a^n_2 & a^n_{12} & \dots & a^n_{1\dots n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^1_0 & u^1_1 & u^1_2 & u^1_{12}\dots u^1_{1\dots n} \\ u^2_0 & u^2_1 & u^2_2 & u^2_{12}\dots u^2_{1\dots n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots\;\dots \\ u^n_0 & u^n_1 & u^n_2 & u^n_{12}\dots u^n_{1\dots n} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & r_{11} & r_{21} & (r_{11}\cdot r_{21})\dots(r_{11}\cdot\ldots\cdot r_{n1}) \\ 1 & r_{12} & r_{22} & (r_{12}\cdot r_{22})\dots(r_{12}\cdot\ldots\cdot r_{n2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots\quad\dots\quad\dots \\ 1 & r_{1n} & r_{2n} & (r_{1n}\cdot r_{2n})\dots(r_{1n}\cdot\ldots\cdot r_{nn}) \end{pmatrix}.$$

Первая матрица в произведении, обозначим ее через U, – собственно матрица коэффициентов представления. Вторая матрица отражает структурную зависимость элементов системы. Она, очевидно, является кронекеровым расширением по строкам $\overline{R^\top}$ транспонированной матрицы смежности R. Матрица $\overline{R^\top}$, очевидно, состоит из нулей и единиц, как и матрица R. Ввиду этого, матричное соотношение можно записать следующим образом:

$$z(t+1) = \left(U * \overline{R^\top}\right)\bar{z}(t). \tag{4}$$

Это выражение определяет отображения, реализуемые системой с произвольной структурой H, определяемой матрицей смежности R. В частности, если $H = K_n$, все элементы матрицы R, следовательно, и матрицы $\overline{R^\top}$, равны единице, и формула (4) совпадает с формулой (2).

Подобно тому, как из (2) было получено выражение (3) для коэффициентов арифметического представления, определяющее матрицу A, из соотношения (4) можно выразить $U * \overline{R^\top}$:

$$U * \overline{R^\top} = BQ_n^{-1}. \tag{5}$$

Однако в отличие от предыдущего случая в данном соотношении матрица B не может быть произвольной; она должна быть двоичной матрицей, но такой чтобы в правой части (5) были гарантированно равны нулю элементы, местоположения которых определяются положением нулевых элементов матрицы $\overline{R^\top}$.

Каждое состояние системы можно отождествить с двоичным вектором. Если записать все возможные состояния системы в естественном порядке, то они образуют двоичную матрицу G размера $n\times 2^n$. Для $n = 2, 3$ эти матрицы показаны ниже:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Каждый столбец матрицы B является одним из возможных состояний системы, поэтому можно записать $B = GP$, где P – мономиальная по столбцам матрица размера $2^n \times 2^n$. Иными словами, GP – это та же самая матрица B, что и в выражении для коэффициентов арифметического представления (3), но записанная явно с помощью мономиальной матрицы P, т.е. множества матриц B и всех мономиальных матриц P находятся во взаимно однозначном соответствии. Это позволяет в дальнейшем оперировать не всеми возможными образами двоичных векторов при отображении, а всеми мономиальными по столбцам матрицами, что с формальной точки намного удобнее. Подставляя это равенство в формулу (5) для матрицы коэффициентов арифметического представления в случае произвольной структуры, получаем

$$U * \overline{R^\top} = GPQ_n^{-1}. \tag{6}$$

В дальнейшем будем называть это равенство *соотношением для коэффициентов*. Если матрица P удовлетворяет данному условию при некоторой матрице U, то она полностью описывает бинарное отображение, реализуемое системой с заданной структурой H. Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между отображениями и мономиальными матрицами, удовлетворяющими соотношению для коэффициентов (6) при некоторой матрице U. Поэтому каждое отображение можно отождествлять с соответствующей мономиальной матрицей P.

Обозначим через $\mathfrak{P}$ множество всех мономиальных матриц размера $2^n \times 2^n$. Очевидно, что $\mathfrak{P}$ – это полугруппа с единицей, которая содержит, в частности, подполугруппу изоморфную симметрической группе $\mathbb{S}_{2^n}$. Множество $\mathcal{P}(H) \subseteq \mathfrak{P}$ преобразований P, удовлетворяющих соотношению для коэффициентов (6) при некоторой матрице U, определяет *класс отображений*, реализуемых системой со структурой графа H. Это можно пояснить следующим образом.

Отображение всех возможных состояний системы полностью определяется совокупностью конкретных отображений, реализуемых каждым элементом этой системы, т.е. булевыми функциями, описывающими их функционирование. В свою очередь, эти функции полностью определяются соответствующими коэффициентами их арифметических представлений. Но эти коэффициенты однозначно определяются матрицей B, а в силу сказанного выше, соответствующей мономиальной матрицей P. В случае структуры полного графа для *любого возможного отображения* состояний системы можно вычислить коэффициенты арифметических представлений функций элементов, при которых система будет реализовывать это отображение.

Для системы с произвольной структурой это не так, поскольку функции, реализуемые элементами системы, а значит, и системой в целом, ограничены имеющейся структурой системы, т.е. связями между элементами. Поэтому не каждое отображение может быть реализовано в такой системе. Поскольку отображение состояний системы полностью определяется мономиальной матрицей P, то это означает, что не для каждой матрицы P могут быть найдены функции элементов, а значит, и коэффициенты их арифметических представлений так, чтобы выполнялось соотношение для коэффициентов (или равенство) (6). Все возможные отображения, которые могут быть реализованы в системе при фиксированной структуре за счет всевозможных выборов функций элементов, и образуют класс отображений при заданной структуре.

Охарактеризуем матрицы P, входящие в множество $\mathcal{P}(H)$. Для этого потребуется вспомогательное «индексное» множество. Пусть для удобства матрицы $\overline{R^\top}$ и U заданы с помощью обычной двухиндексной нумерации, т.е. $\overline{R^\top} = (\bar{r}_{ij})$, $U = (u_{ij})$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, 2^n$. Введем множество $\mathrm{Ind}\overline{R^\top} = \{(i,j)|\ i = 1, \ldots, n,\ \ j = 1, \ldots, 2^n,\ \ \bar{r}_{ij} = 0\}$. Иначе говоря, $\mathrm{Ind}\overline{R^\top}$ образовано всевозможными парами индексов, которые определяют позиции нулевых элементов матрицы $\overline{R^\top}$. Следующее утверждение дает описание множества $\mathcal{P}(H)$, не зависящее от U.

Утверждение 1. $\mathcal{P}(H) = \left\{P|\ P \in \mathfrak{P},\ g_i P q_j^{(-1)} = 0,\ (i,j) \in \mathrm{Ind}\overline{R^\top}\right\}.$

Доказательство. Пусть g_i и $q_j^{(-1)}$ обозначают i-ю строку в G и j-й столбец в Q_n^{-1}. Тогда (i,j)-элемент матрицы, стоящей в соотношении для коэффициентов (6) справа, очевидно, равен $g_i P q_j^{(-1)}$. Если соответствующий элемент матрицы $\overline{R^\top}$ равен нулю, т.е. $\bar{r}_{ij} = 0$, то равен нулю также (i,j)-элемент матрицы $U * \overline{R^\top}$. Поэтому для того, чтобы выполнялось матричное равенство для коэффициентов (6), необходимо должно быть $g_i P q_j^{(-1)} = 0$. В противном случае, т.е. при $\bar{r}_{ij} = 1$, (i,j)-элемент матрицы $U * \overline{R^\top}$ равен (i,j)-элементу матрицы U. Так как этот элемент является одним из коэффициентов, то, полагая его равным $g_i P q_j^{(-1)}$, получаем необходимое равенство элементов слева и справа. Поэтому мономиальная матрица $P \in \mathfrak{P}$ удовлетворяет соотношению для коэффициентов (6), если она удовлетворяет системе соотношений $g_i P q_j^{(-1)} = 0$, $(i,j) \in \mathrm{Ind}\overline{R^\top}$, что доказывает утверждение.

Каждая структура H порождает класс $\mathcal{P}(H)$ бинарных отображений, образующихся при всевозможных функциональных настройках элементов системы. В частности, если $H = K_n$, то R – матрица из единиц. В этом случае, очевидно, $\mathcal{P}(K_n) = \mathfrak{P}$, и значит, в такой системе может быть реализовано любое отображение. Если структура системы – нуль-граф, т.е. $H = O_n$, то $R = \mathbf{0}$, и $\mathcal{P}(O_n)$ содержит 2^n матриц P, характеризующихся тем, что у них элементы какой-то из строк равны единице, а остальные – нулю.

Следующее утверждение дает явное выражение для мощности $|\mathcal{P}(H)|$ класса отображений $\mathcal{P}(H)$, реализуемых системой со структурой H.

Утверждение 2. Пусть структура системы задается ориентированным графом $H = (V, E)$, $|V| = n$, ρ_i – полустепень захода вершины i в графе H, $i = 1, \ldots, n$. Тогда

$$|\mathcal{P}(H)| = 2^{\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{\rho_i}}. \tag{7}$$

Доказательство. Число различных бинарных отображений, реализуемых i-м элементом с ρ_i входами при всех возможных функциональных настройках, равно $2^{2^{\rho_i}}$. Поэтому $|\mathcal{P}(H)| = 2^{2^{\rho_1}} \cdot 2^{2^{\rho_2}} \cdot \ \ldots \ \cdot 2^{2^{\rho_n}} = 2^{\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{\rho_i}}$.

Следствие 1. *1)* $|\mathcal{P}(K_n)| = 2^{n2^n}$; *2)* $|\mathcal{P}(O_n)| = 2^n$.

В следующем разделе дается описание классов бинарных отображений, которые получаются в результате теоретико-множественных операций над системами.

5. Операции над системами и классы реализуемых отображений

Пусть имеются две системы со структурами H_1 и H_2. Возникает вопрос: существуют ли классы отображений, которые при подходящих функциях состояния элементов могут быть реализованы как в первой, так и во второй системе? Если существуют, то как их охарактеризовать? Исследуем этот вопрос.

Напомним еще раз, что, как было описано выше, каждое отображение возможных состояний системы с заданной структурой и фиксированными функциями элементов, однозначно описывается мономиальной по столбцам матрицей P. При всех возможных функциях элементов получается класс отображений, реализуемых системой с данной структурой. Поэтому описание классов отображений сводится к описанию всех возможных и допустимых мономиальных матриц.

Если некоторое отображение, определяемое матрицей P, реализуется как первой, так и второй системой, то $P \in \mathcal{P}(H_1)$ и $P \in \mathcal{P}(H_2)$, следовательно, $P \in \mathcal{P}(H_1) \cap \mathcal{P}(H_2)$. Справедливо и обратное, любая матрица P, лежащая в пересечении множеств $\mathcal{P}(H_1)$ и $\mathcal{P}(H_2)$, определяет отображение, реализуемое каждой системой.

Утверждение 3. $\mathcal{P}(H_1 \cap H_2) = \mathcal{P}(H_1) \cap \mathcal{P}(H_2)$ *для любых* H_1 *и* H_2.

Доказательство. Пусть $R_1 = \left(r_{ij}^{(1)}\right)$ и $R_2 = \left(r_{ij}^{(2)}\right)$ – матрицы смежности графов H_1 и H_2. Тогда $\mathcal{P}(H_1)$ определяется системой соотношений $g_i P q_j^{(-1)} = 0$, $(i,j) \in \mathrm{Ind}\overline{R_1^\top}$, а $\mathcal{P}(H_2)$ – системой соотношений $g_i P q_j^{(-1)} = 0$, $(i,j) \in \mathrm{Ind}\overline{R_2^\top}$. Если $P \in \mathcal{P}(H_1) \cap \mathcal{P}(H_2)$, то это значит, что P должно удовлетворять каждой из этих систем или, иначе, удовлетворять системе соотношений $g_i P q_j^{(-1)} = 0$, $(i,j) \in \mathrm{Ind}\overline{R_1^\top} \cup \mathrm{Ind}\overline{R_2^\top}$.

Введем матрицу $\overline{R^\top}$, которая определяется следующим образом: (i,j)-элемент этой матрицы равен нулю, если равен нулю соответствующий элемент хотя бы одной из матриц $\overline{R_1^\top}$ или $\overline{R_2^\top}$, и единице, когда оба элемента равны единице. Тогда, очевидно, $\mathrm{Ind}\overline{R^\top} = \mathrm{Ind}\overline{R_1^\top} \cup \mathrm{Ind}\overline{R_2^\top}$. Непосредственно из определения матрицы $\overline{R^\top}$ следует, что $\overline{R^\top} = \overline{R_1^\top} * \overline{R_2^\top}$. Покажем теперь, что $\overline{R^\top}$ является кронекеровым расширением по строкам матрицы $R^\top = (R_1 * R_2)^\top =$

$= R_1^\top * R_2^\top$, т.е. $\overline{R^\top} = \overline{R_1^\top * R_2^\top}$. Для этого достаточно доказать соотношение

$$\overline{R_1^\top * R_2^\top} = \overline{R_1^\top} * \overline{R_2^\top}. \tag{8}$$

Прежде всего, заметим, что первые столбцы этих матриц равны, поскольку содержат только единицы. Покажем, что равны и остальные элементы. Произвольный элемент матрицы, стоящей слева, имеет вид $\left(r_{k_1 i}^{(1)} r_{k_1 i}^{(2)}\right) \cdot \ldots$ $\ldots \cdot \left(r_{k_p i}^{(1)} r_{k_p i}^{(2)}\right)$, $p = 1, \ldots, n$, а соответствующий элемент правой матрицы – $\left(r_{k_1 i}^{(1)} \cdot \ldots \cdot r_{k_p i}^{(1)}\right) \cdot \left(r_{k_1}^{(2)} \cdot \ldots \cdot r_{k_p i}^{(2)}\right)$. Оба выражения отличаются лишь порядком сомножителей, следовательно, равны. Поэтому равенство (8) справедливо. Но $R = R_1 * R_2$ является матрицей смежности графа $H = H_1 \cap H_2$, из чего следует справедливость утверждения.

Следствие 2. $\mathcal{P}(H_1 \cap \ \ldots \ \cap H_k) = \mathcal{P}(H_1) \cap \ \ldots \ \cap \mathcal{P}(H_k)$ *для любых* $H_1, \ldots, H_k$.

Данное следствие доказывается по индукции. Утверждение 3 устанавливает точную связь между классами бинарных отображений и системами при их пересечении. Аналогичное соотношение для объединения систем в общем случае неверно, однако имеет место следующее включение.

Утверждение 4. $\mathcal{P}(H_1 \cup H_2) \supseteq \mathcal{P}(H_1) \cup \mathcal{P}(H_2)$ *для любых* H_1 *и* H_2.

Доказательство. Пользуясь утверждением 3, имеем

$$\mathcal{P}(H_1 \cup H_2) \cap \mathcal{P}(H_1) = \mathcal{P}\left((H_1 \cup H_2) \cap H_1)\right) = \mathcal{P}(H_1).$$

Отсюда следует, что $\mathcal{P}(H_1) \subseteq \mathcal{P}(H_1 \cup H_2)$. Аналогично получаем $\mathcal{P}(H_2) \subseteq$ $\subseteq \mathcal{P}(H_1 \cup H_2)$. Из этих двух включений следует справедливость утверждения.

Содержательный смысл утверждения 4 состоит в том, что множество классов отображений, реализуемых системой со структурой $H = H_1 \cup H_2$, больше, чем простое объединение классов отображений объединяемых систем. Этот факт в известном смысле отражает свойственный системам «сверхаддитивный эффект», соответствующий тезису «целое больше суммы своих частей». Классы отображений, реализуемые в системе со структурой графа H и не реализуемые ни в одной из объединяемых систем, демонстрируют эффект эмерджентности, понимаемой в узком смысле. Данное утверждение легко обобщается на любое число систем.

Следствие 3. $\mathcal{P}(H_1 \cup \ \ldots \ \cup H_k) \supseteq \mathcal{P}(H_1) \cup \ \ldots \ \cup \mathcal{P}(H_k)$ *для любых* $H_1, \ldots, H_k$.

Из утверждения 4 вытекает свойство монотонности по включению систем.

Следствие 4. Из $H_1 \subseteq H_2$ *следует* $\mathcal{P}(H_1) \subseteq \mathcal{P}(H_2)$.

Охарактеризуем более подробно левую и правую части утверждения 4.

Утверждение 5. Множество $\mathcal{P}(H_1 \cup H_2)$ состоит из тех и только тех матриц $P \in \mathfrak{P}$, которые удовлетворяют системе соотношений $g_i P q_j^{(-1)} = 0$, $(i,j) \in \mathrm{Ind}\overline{(R_1 + R_2 - R_1 * R_2)^\top}$.

Доказательство. Пусть $H = H_1 \cup H_2$. Очевидно, что матрица смежности R структуры H связана с матрицами смежности R_1 и R_2 структур H_1 и H_2 равенством $R = R_1 + R_2 - R_1 * R_2$. Ввиду этого из утверждения 1 следует справедливость доказываемого утверждения.

Утверждение 6. Множество $\mathcal{P}(H_1) \cup \mathcal{P}(H_2)$ состоит из тех и только тех матриц $P \in \mathfrak{P}$, которые удовлетворяют системе соотношений

$$g_i P q_j^{(-1)} g_k P q_l^{(-1)} = 0, \quad (i,j) \in \mathrm{Ind}\overline{R_1^\top}, \quad (k,l) \in \mathrm{Ind}\overline{R_2^\top}. \tag{9}$$

Доказательство. Если $P \in \mathcal{P}(H_1)$ или $P \in \mathcal{P}(H_2)$, то P удовлетворяет системе соотношений (9). Обратно, если P не принадлежит, например, $\mathcal{P}(H_1)$, но удовлетворяет (9), то при некотором $(i,j) \in \mathrm{Ind}\overline{R_1^\top}$ имеет место $g_i P q_j^{(-1)} \neq$ $\neq 0$. Если рассмотреть уравнения системы соотношений (9), в которых индексы i и j совпадают с выбранными, т.е. $g_i P q_j^{(-1)} g_k P q_l^{(-1)} = 0$, $(k,l) \in \mathrm{Ind}\overline{R_2^\top}$, то получим соотношения $g_k P q_l^{(-1)} = 0$, $(k,l) \in \mathrm{Ind}\overline{R_2^\top}$. Следовательно, $P \in \mathcal{P}(H_2)$. Подобным образом, матрица P, не принадлежащая $\mathcal{P}(H_2)$ и удовлетворяющая (9), принадлежит $\mathcal{P}(H_1)$, что и доказывает утверждение.

6. Коэффициент эмерджентности

Как показано выше, при объединении систем проявляется «сверхаддитивное» свойство, которое выражается в том, что новая система способна реализовать отображения, которые не реализуемы ни одной из исходных систем. Чтобы количественно охарактеризовать этот эффект необходимо ввести подходящий скалярный показатель, который можно интерпретировать как степень несводимости свойств системы к свойствам ее элементов.

Наиболее простой и прямолинейный подход состоит в использовании отношения $\frac{|\mathcal{P}(H_1 \cup H_2)|}{|\mathcal{P}(H_1) \cup \mathcal{P}(H_2)|}$, показывающего кратность превышения количества реализуемых отображений при объединении систем. Однако несмотря на простоту, такой показатель оказывается трудно интерпретируемым. Это связано с тем, что он принимает очень большие значения из-за дважды экспоненциального роста мощности классов этих отображений, как это установлено в утверждении 2. Следующие соображения предполагают несколько иной подход к построению такого показателя. Рассмотрим простые примеры.

Пусть граф структуры трехэлементной системы имеет соответственно $n = 3$ вершины и $\rho_1 = \rho_2 = 1$, $\rho_3 = 2$ – полустепени захода его вершин. Тогда в силу утверждения 2 мощность класса реализуемых отображений равна $2^{2^1 + 2^1 + 2^2} = 2^8 = 256$. С другой стороны, в точности такую мощность будет иметь класс отображений, реализуемых системой со структурой K_2 с двумя элементами, т.е. $2^{2 \cdot 2^2} = 2^8 = 256$.

Еще один аналогичный пример. В графе H имеется $n = 6$ вершин с полустепенями захода $2, 1, 1, 2, 3, 2$. Тогда $|\mathcal{P}(H)| = 2^{2^2+2^1+2^1+2^2+2^3+2^2} = 2^{24}$. Но такой же по мощности класс отображений реализует структура K_3, т.е. $|\mathcal{P}(K_3)| = 2^{3\cdot 2^3} = 2^{24} = |\mathcal{P}(H)|$. Иными словами, в каждом из этих случаев для некоторого μ выполняется равенство $2^{\mu 2^\mu} = 2^{2^{\rho_1}+2^{\rho_2}+\ldots+2^{\rho_n}}$ или

$$\mu 2^\mu = 2^{\rho_1} + 2^{\rho_2} + \ldots + 2^{\rho_n}. \tag{10}$$

В этих примерах μ – наименьшее число вершин полного графа с петлями, который реализует в точности такое же число отображений, что и некоторый граф с заданными полустепенями захода вершин. В рассмотренных случаях μ было целым числом и могло быть интерпретировано как число вершин полного ориентированного графа. В общем случае решение μ уравнения (10) при произвольных $\rho_1,\ \rho_2,\ \ldots,\ \rho_n$ не будет целым. Тем не менее, спекулятивно рассуждая, можно считать, что решение уравнения (10) является скалярной характеристикой рассматриваемого класса отображений как минимального, но «размытого» (не целого) числа вершин полного ориентированного графа с петлями, реализующего такое же число различных отображений. Поскольку функция $\mu 2^\mu$ является положительной и монотонно возрастающей на $[0, \infty)$, то при любой правой части уравнение (10) имеет единственный корень.

Величину μ можно рассматривать как меру $\mu = \mu\,[\mathcal{P}(H)]$ множества $\mathcal{P}(H)$ на булеане $2^{\mathfrak{P}}$, где $\mathfrak{P}$, как было определено выше, – множество всех мономиальных матриц соответствующего размера. Данная мера, очевидно, не является аддитивной, но является *монотонной* по включению классов, поскольку $\mu\,[\mathcal{P}(H_1)] \leqslant \mu\,[\mathcal{P}(H_2)]$ при $\mathcal{P}(H_1) \subseteq \mathcal{P}(H_2)$.

Коэффициентом эмерджентности $\kappa\,(H_1, H_2)$ при объединении систем H_1 и H_2 будем называть величину $\kappa(H_1, H_2) = \frac{\mu[\mathcal{P}(H_1 \cup H_2)]}{\mu[\mathcal{P}(H_1) \cup \mathcal{P}(H_2)]}$. Из этого определения следует, что $\mu\,[\mathcal{P}(H_1 \cup H_2)] = \mu_1$ и $\mu\,[\mathcal{P}(H_1) \cup \mathcal{P}(H_2)] = \mu_2$ – корни соответствующих уравнений

$$\mu_1 2^{\mu_1} = \log_2 |\mathcal{P}(H_1 \cup H_2)|\,, \tag{11}$$

$$\mu_2 2^{\mu_2} = \log_2 |\mathcal{P}(H_1) \cup \mathcal{P}(H_2)| = \log_2 (|\mathcal{P}(H_1)| + |\mathcal{P}(H_2)| - |\mathcal{P}(H_1 \cap H_2)|)\,. \tag{12}$$

Введенное понятие коэффициента эмерджентности легко может быть обобщено на произвольное число объединяемых систем. Следующая теорема дает двусторонние оценки введенного коэффициента.

Т е о р е м а 1. *Коэффициент эмерджентности $\kappa\,(H_1, H_2)$ при объединении любых двух n-элементных систем H_1 и H_2 удовлетворяет неравенствам*

$$1 \leqslant \kappa(H_1, H_2) < 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{e \ln 2}} \approx 2{,}2372.$$

Полученная верхняя оценка является достаточно точной, что особенно заметно при возрастании n. В нижеследующей таблице приведены значения максимального коэффициента эмерджентности для $n = 2, \ldots, 20$ (с точностью до четырех знаков после запятой). Сравнение приведенных данных с найденной верхней оценкой позволяет высказать предположение о ее асимптотической точности.

Значения максимального коэффициента эмерджентности

n	Максимальный коэффициент эмерджентности	n	Максимальный коэффициент эмерджентности
		11	2,0822
2	1,2553	12	2,1245
3	1,3729	13	2,1567
4	1,4979	14	2,1807
5	1,5981	15	2,1980
6	1,6946	16	2,2102
7	1,7869	17	2,2184
8	1,8803	18	2,2236
9	1,9610	19	2,2265
10	2,0281	20	2,2278

7. Заключение

В работе предложен аппарат для исследования системных эффектов, возникающих в произвольных системах бинарного отображения. Несмотря на двоичную природу реализуемых отображений, для исследования используется стандартная алгебраическая техника, что упрощает описание и понимание эффектов эмерджентности в узком смысле. Проведенный анализ позволяет сделать вывод, что наблюдаемые в таких системах классы отображений и их преобразования при теоретико-множественных операциях над структурами этих систем схожи с эффектом «расширения» при объединения классических алгебраических структур. Полученные результаты, в частности, утверждения 3, 4 и следствия из них, а также оценки для коэффициента эмерджентности, даваемые теоремой 1, позволяют установить в каких случаях и какой в количественном измерении эмерджентный эффект может быть достигнут при агрегировании бинарных систем. Это можно использовать, например, для оптимизации коллективного поведения отдельных групп функционирующих объектов или субъектов.

Рассмотренная в работе модель двоичных отображений – достаточно узкий класс отображений. Однако из-за своей относительной простоты она позволяет выявить некоторые закономерности, присущие системным взаимодействиям и даже количественно их охарактеризовать. В этом, собственно, и состояла мотивация данной работы. Обобщение данных исследований на более общий класс системных взаимодействий (даже в автономном случае) потребует привлечения более сложного математического аппарата, связанного с морфизмами на дифференциальных многообразиях и построение подходящих мер на таких объектах. Это тема отдельного непростого исследования. Но подобная теория может дать более естественное описание эффектов эмерджентности в физических средах и в технических системах.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1.

Левое неравенство сразу следует из утверждения 4 и монотонности функции $x2^x$. Докажем правое неравенство.

Пусть $H_1 = (V, E_1)$ и $H_2 = (V, E_2)$ – произвольные ориентированные графы и $|V| = n$. Рассмотрим множества дуг $E_C = E_1 \cap E_2$, $E_A = E_1 \backslash E_C$ и $E_B = E_2 \backslash E_C$. Эти множества, очевидно, попарно не пересекаются. Построим три графа $H_A = (V, E_A)$, $H_B = (V, E_B)$ и $H_C = (V, E_C)$; обозначим через $\rho_i^A, \rho_i^B, \rho_i^C$, $i = 1, \ldots, n$, – соответственно полустепени захода их вершин. Тогда $H_1 = H_A \cup H_C = (V, E_A \cup E_C)$, $H_2 = H_B \cup H_C = (V, E_B \cup E_C)$ и в силу утверждения 2 можно записать уравнения (11) и (12) следующим образом:

$$\mu_1 2^{\mu_1} = \sum_{i=1}^{n} 2^{\rho_i^A + \rho_i^B + \rho_i^C}, \quad \mu_2 2^{\mu_2} = \log_2 \left(2^{\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{\rho_i^A + \rho_i^C}} + 2^{\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{\rho_i^B + \rho_i^C}} - 2^{\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{\rho_i^C}} \right).$$

Пусть $\rho_i^A + \rho_i^B + \rho_i^C = m_i$ для некоторых фиксированных $m_i \leqslant n$, $i = 1, \ldots, n$. В этом случае правая часть в первом уравнении является постоянной величиной, и, значит, в силу монотонности функции $x2^x$ коэффициент эмерджентности κ будет достигать максимального значения при наименьшем значении правой части второго уравнения. Для отыскания такого значения необходимо решить задачу

$$\varphi = 2^{\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{m_i - \rho_i^A}} + 2^{\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{m_i - \rho_i^B}} - 2^{\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{m_i - \rho_i^A - \rho_i^B}} \xrightarrow{\rho_i^A,\, \rho_i^B} \min.$$

Найдем стационарные точки функции φ. Вычислив частные производные по ρ_j^A, ρ_j^B, $j = 1, \ldots, n$, и приравняв их к нулю, после эквивалентных преобразований получаем:

$$\text{(П.1)} \qquad \begin{aligned} 2^{\rho_j^B} \cdot 2^{\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{m_i - \rho_i^A}} &= 2^{\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{m_i - \rho_i^A - \rho_i^B}}, \\ 2^{\rho_j^A} \cdot 2^{\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{m_i - \rho_i^B}} &= 2^{\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{m_i - \rho_i^A - \rho_i^B}}, \end{aligned} \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Поскольку правые части равны, то $2^{-\rho_j^A} \cdot 2^{\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{m_i - \rho_i^A}} = 2^{-\rho_j^B} \cdot 2^{\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{m_i - \rho_i^B}}$, $j = 1, \ldots, n$. Обозначим $X = \sum\limits_{i=1}^{n} 2^{m_i - \rho_i^A}$, $Y = \sum\limits_{i=1}^{n} 2^{m_i - \rho_i^B}$ и перепишем выражение в виде:

$$\text{(П.2)} \qquad 2^{m_j - \rho_j^A} \cdot 2^X = 2^{m_j - \rho_j^B} \cdot 2^Y.$$

Просуммируем последнее равенство по j, получим: $X2^X = Y2^Y$. Функция $x2^x$ строго монотонно возрастает при $x \geqslant 0$, поэтому последнее уравнение имеет единственное решение $X = Y$, а значит, из (П.2) получаем, что $\rho_j^A = \rho_j^B = \rho_j$, $j = 1, \ldots, n$. Подставим эти условия в любое из уравнений (П.1), после логарифмирования и перегруппировки слагаемых получим: $\rho_j + \sum\limits_{i=1}^{n} \left(2^{m_i - \rho_i} - 2^{m_i - 2\rho_i}\right) = 0$. При $\rho_i \geqslant 0$ все слагаемые в левой части неотрицательны, поэтому последнее равенство возможно только тогда, когда все эти слагаемые равны нулю, откуда следует, что все $\rho_i = 0$. В допустимой области это единственная стационарная точка, в которой может достигаться экстремум. Эта точка лежит на границе области, и значение функции в ней равно $\varphi = 2^{\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{m_i}}$. Однако с помощью стандартной техники исследования на экстремум с помощью вторых производных можно показать, что квадратичная форма, описывающая второй дифференциал функции φ в найденной точке, является знаконеопределенной, т.е. в этой точке экстремума нет. Это значит, что экстремальное значение функция φ принимает на границе области $\rho_i^A, \rho_i^B \geqslant 0$, $\rho_i^A + \rho_i^B \leqslant m_i$, т.е. при условии $\rho_i^A, \rho_i^B \geqslant 0$, $\rho_i^A + \rho_i^B = m_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Для отыскания стационарной точки на границе подставим $\rho_i^B = m_i - \rho_i^A$ в выражение для функции f: $f = 2^{\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{m_i - \rho_i^A}} + 2^{\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{\rho_i^A}} - 2^n$. Вычислив производные по ρ_j^A и приравняв их к нулю, после преобразований получим систему уравнений для отыскания стационарных точек:

$$2^{\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{m_i - \rho_i^A}} \cdot 2^{m_j - \rho_j^A} = 2^{\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{\rho_i^A}} \cdot 2^{\rho_j^A}, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{П.3}$$

Просуммируем все уравнения по j и обозначим $X = \sum\limits_{i=1}^{n} 2^{m_i - \rho_i^A}$ и $Y = \sum\limits_{i=1}^{n} 2^{\rho_i^A}$, в результате получим $X2^X = Y2^Y$. Данное равенство возможно только при $X = Y$. Поэтому из (П.3) получаем $2^{m_j - \rho_j^A} = 2^{\rho_j^A}$, откуда $\rho_j^A = \frac{m_j}{2} = \rho_j^B$, $j = 1, \ldots, n$. Рутинное исследование с помощью вторых производных показывает, что в этой точке действительно достигается минимум функции $\varphi_{\min} = 2^{1 + \sum\limits_{i=1}^{n} 2^{\frac{m_i}{2}}} - 2^n$. Таким образом, для нахождения наибольшего значения коэффициента эмерджентности κ при условии $\rho_i^A + \rho_i^B + \rho_i^C = m_i$ получаем уравнения:

$$\mu_1 2^{\mu_1} = \sum_{i=1}^{n} 2^{m_i}, \tag{П.4}$$

$$\mu_2 2^{\mu_2} = \log_2 \left(2 \cdot 2^{\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{\frac{m_i}{2}}} - 2^n \right). \tag{П.5}$$

Оценим снизу правую часть (П.5). Поскольку $2^{\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{\frac{m_i}{2}}} - 2^n \geqslant 0$ при любых m_i, $i = 1, \ldots, n$, то

$$\log_2\left(2 \cdot 2^{\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{\frac{m_i}{2}}} - 2^n\right) \geqslant \log_2 2^{\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{\frac{m_i}{2}}} = \sum_{i=1}^{n} 2^{\frac{m_i}{2}} > \left(\sum_{i=1}^{n} 2^{m_i}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Наряду с уравнением (П.5) рассмотрим уравнение $\bar{\mu}_2 2^{\bar{\mu}_2} = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{m_i}\right)^{\frac{1}{2}}$. В силу монотонности функции $x2^x$ заключаем, что $\bar{\mu}_2 < \mu_2$. Следовательно, $\kappa = \frac{\mu_1}{\mu_2} < \frac{\mu_1}{\bar{\mu}_2} = \bar{\kappa}$, поэтому $\bar{\kappa}$ можно рассматривать как верхнюю оценку для κ.

Поделим теперь уравнение (П.4) на $(\bar{\mu}_2 2^{\bar{\mu}_2})^2$: $\frac{\mu_1 2^{\mu_1}}{\bar{\mu}_2^2 2^{2\bar{\mu}_2}} = \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\mu}_2} 2^{\bar{\mu}_2(\bar{\kappa}-2)} = 1$. Рассмотрим последнее уравнение как неявно заданную функцию $\bar{\kappa}$, зависящую от $\bar{\mu}_2$, т.е. $F(\bar{\mu}_2, \bar{\kappa}) = \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\mu}_2} 2^{\bar{\mu}_2(\bar{\kappa}-2)} - 1 = 0$. Найдем экстремум неявной функции $\bar{\kappa}$ от $\bar{\mu}_2$. Для того, чтобы было $\bar{\kappa}'_{\bar{\mu}_2} = 0$, должно выполняться равенство $F'_{\bar{\mu}_2} = -\frac{\bar{\kappa}}{\bar{\mu}_2^2} 2^{\bar{\mu}_2(\bar{\kappa}-2)} + \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\mu}_2} 2^{\bar{\mu}_2(\bar{\kappa}-2)} (\bar{\kappa} - 2) \ln 2 = 0$. Решая совместно уравнения $F'_{\bar{\mu}_2} = 0$ и $F = 0$, находим два решения этих уравнений: $\bar{\kappa}_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{e \ln 2}}$. Поскольку коэффициент эмерджентности заведомо положительная величина, то получаем окончательно, $\kappa < \bar{\kappa} = 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{e \ln 2}} \approx 2{,}2372$. С помощью стандартных методов можно показать, что найденное значение является единственным максимумом исследуемой функции, что доказывает верхнюю оценку для κ.

Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Damper R.I.* Editorial for the Special Issue on “Emergent Properties of Complex Systems”: Emergence and levels of abstraction // Int. J. Syst. Sci. 2000. V. 31. No. 7. P. 811–818. https://doi.org/10.1080/002077200406543
2. *Crick F.* The Astonishing Hypothesis. The Scientific Search for the Soul. London: Simon and Schuster, 1994.
3. *Goldstein J.A.* Emergence and Radical Novelty: From Theory to Methods // Handbook of Research Methods in Complexity Science. Edward Elgar Publishing. 2018. Chapter 23. P. 507–524.
4. *Chalmers D.J.* Strong and Weak Emergence / In: The Re-Emergence of Emergence: The Emergentist Hypothesis from Science to Religion. Oxford: Oxford University Press, 2006. P. 244–254.
5. *Bedau M.A.* Weak Emergence // JSTOR. Philosophical Perspectives: Mind, Causation, and World. 1997. V. 11. P. 375–399.
6. *Bar-Yam Y.* A Mathematical Theory of Strong Emergence Using Multiscale Variety // Complexity. 2004. V. 9. No. 6. P. 15–24.
7. *Johnson J.J. IV, Tolk A., Sousa-Poza A.* A Theory of Emergence and Entropy in Systems of Systems // Procedia Comput. Sci. 2013. No. 20. P. 283–289.

8. *Stepney S., Polack F.A.C., Turner H.R.* Engineering Emergence // 11th International Conference on Engineering of Complex Computer Systems (ICECCS 2006). Stanford. USA. 2006.
9. *Fromm J.* On Engineering and Emergence // arXiv preprint nlin/0601002. 2006.
10. *Alexander J.R. Jr, Challef S.* Control: An Emergent Property of Biological Neurons // Int. J. Syst. Sci. 2000. V. 31. No. 7. P. 895–909.
11. *Chen Y., Reggia J.A.* The Temporal Correlation Hypothesis for Self-Organizing Feature Maps // Int. J. Syst. Sci. 2000. V. 31. No. 7. P. 911–921.
12. *Watters P.A.* Time-Invariant Long-Range Correlations in Electroencephalogram Dynamics // Int. J. Syst. Sci. 2000. V. 31. No. 7. P. 819–825.
13. *Channon A.D., Damper R.I.* Towards the Evolutionary Emergence of Increasingly Complex Advantageous Behaviours // Int. J. Syst. Sci. 2000. V. 31. No. 7. P. 843–860.
14. *Cucker F., Smale S.* Emergent Behavior in Flocks // IEEE Trans. Autom. Control. 2007. V. 52. No. 5. P. 852–862.
15. *Cucker F., Smale S.* On the Mathematics of Emergence // Jpn. J. Math. 2007. V. 2. P. 197–227.
16. *Ke J., Minett J., Au C.-P., Wang W.S.-Y.* Self-Organization and Selection in the Emergence of Vocabulary // Complexity. 2002. V. 7. No. 3. P. 41–54.
17. *Benjamin D.P.* On the Emergence of Intelligent Global Behaviours from Simple Local Actions // Int. J. Syst. Sci. 2000. V. 31. No. 7. P. 861–872. https://doi.org/10.1080/002077200406589
18. *Сурмин Ю.П.* Теория систем и системный анализ: уч. пособие. Киев: МАУП, 2003.
19. *Marcus M., Mink H.* A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities. Boston. Allys and Bacon, 1964.
20. *Cavanagh J.* Sequential Logic. Analysis and Synthesis. CRC Press, Taylor&Francis Group. 2007.
21. *Малюгин В.Д.* Реализация булевых функций арифметическими полиномами // АиТ. 1982. № 4. С. 84–93.
22. *Rubio A.J.* Algebraic Representation of Boolean Functions // Int. J. Electron. 1984. V. 56. No. 5. P. 735–739. https://doi.org/10.1080/00207218408938868
23. *Jain J.* Arithmetic Transform of Boolean Functions / In: Representations of Discrete Functions. Springer. Boston. MA. 1996. P. 133–161. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-1385-4-6

Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.В. Виноградовым.

Поступила в редакцию 02.02.2025

После доработки 28.03.2025

Принята к публикации 17.04.2025