Автоматика и телемеханика, № 7, 2025

Управление в социально-экономических системах

© 2025 г. **М.И. ГЕРАСЬКИН, д-р экон. наук (innovation@ssau.ru)**
(Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева)

АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ ДЕЙСТВИЯМИ ИГРОКА В ИГРЕ ТРИПОЛИИ ПРИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЯХ СПРОСА И ИЗДЕРЖЕК

Рассматривается игра трех фирм олигополии, т.е. ситуация триполии, в случае линейных функций спроса и издержек игроков. Исследуется рефлексивное поведение игроков, которое формализовано с помощью предположительных вариаций, т.е. предположений игроков о влиянии их действий на действие контрагента. Разработан метод вычисления суммы предположительных вариаций некоторого игрока, которая является оптимальной по функциям полезности остальных игроков (окружения). Предложен алгоритм управления действиями игрока со стороны окружения, реализация которого формирует заданный ментальный тип игрока и предопределяет его целенаправленное поведение. Проведено численное моделирование иерархической игры, в которой осуществляется информационное управление действиями игрока со стороны окружения (Центра) на примере параметров телекоммуникационного рынка России. Численный эксперимент подтвердил работоспособность алгоритма управления и увеличение полезности окружения в результате управления.

Ключевые слова: олигополия, предположительная вариация, иерархическая игра, оптимальное управление, телекоммуникационный рынок.

DOI: 10.31857/S0005231025070043, **EDN:** JRNBPV

1. Введение

Теоретико-игровая модель олигополии как сферы экономики, в которой однотипный товар продают несколько фирм, формализует взаимодействие этих фирм как игроков. Игроки, как правило, считаются ценополучателями, т.е. сталкиваются с равновесной рыночной ценой на агрегированной кривой спроса, и совершают игровые действия (выбирают стратегии) в виде объемов предложения товара. Ключевая черта игры состоит в том, что равновесная цена зависит от действия всех игроков, поэтому при выборе стратегии игроки должны предугадывать действия контрагентов (окружения). Предсказанное игроком изменение действия окружения в ответ на единичное изменение действия игрока получило название предположительной вариации. Априорная неинформированность игрока о предположительных вариациях окружения предопределяет фундаментальную сложность игры олигополии. Как известно из классических моделей А. Курно [1] и Г. Штакельберга [2], оптимальные стратегии игроков зависят от двух факторов: обратной функции спроса на товар и функций издержек игроков. Поэтому чем проще форма этих функций, тем полнее и информативнее будет анализ исходов игры олигополии.

Игра олигополии, анализируемая при линейной функции спроса на товар и линейных функций издержек игроков [3–17], представляет собой наиболее типичный случай, рассматриваемый исследователями, поскольку такая модель игры является наиболее удобным инструментом изучения игровых стратегий. В частности, в такой постановке исследовались динамические игры олигополии на основе конечно-разностных уравнений реакций игроков [3–6], а также динамические игры с введением дифференциальных уравнений процесса изменения функций полезности игроков [7–9]. Изучалась разновидность динамической игры на основе фрактальных дифференциальных уравнений изменения действий игроков [10]. Рассматривались статические игры олигополии [11] и сопоставлялись равновесия Курно и Штакельберга.

Прикладные аспекты игры олигополии с линейными функциями спроса и издержек рассматривались в контексте выбора налоговой политики фирмы [12], при оценке последствий слияния фирм [13], в рамках проблемы входа новой фирмы в игре билатеральной олигополии [14], в случае продажи товарных наборов [15, 16], при внедрении новой технологии [17].

Вышеупомянутые исследования рассматривали неиерархическую теоретико-игровую модель олигополии, в которой игроки изначально равноправны, даже в случае лидерства по Штакельбергу: лидерство не обусловлено изначально установленной иерархией игроков, а возникает вследствие асимметрии информированности игроков в процессе игровой динамики. Уровни информированности формализуются с помощью рангов рефлексии r, а под рефлексией понимается [18] процесс выдвижения игроком предположений о стратегиях окружения. В результате этого процесса каждый игрок формирует множество окружающих его игроков-фантомов, существующих в его представлении, которые могут быть ведомыми на 1-м ранге рефлексии, лидерами по Штакельбергу первого уровня на 2-м ранге, лидерами по Штакельбергу $(r-1)$-го уровня на r-м ранге. Иными словами, на каждом ранге рефлексии игрок думает, что его окружают игроки рангом ниже. Соотнося эти теоретические рассуждения с практикой бизнеса, следует подчеркнуть, что принимающее решения лицо (ЛПР) на предприятии может не иметь понятия о лидерстве по Штакельбергу как научной категории. Но ЛПР при выборе действия на рынке по отношению к контрагентам должен учитывать их возможные реакции, т.е. должен рефлексировать. Поэтому если игрок верно предсказывает представления окружения, т.е. его фантомы совпадают с реальными игроками, то он в равновесии получает преобладание в соответствии с его уровнем лидерства [19]. Но в неиерархической модели игры лидер фактически не управляет окружающими игроками.

Однако в реальности нетрудно представить игровую ситуацию, в которой некоторая группа игроков может выбирать общую стратегию, направленную на повышение своих выигрышей за счет интересов одного игрока. Поэтому актуальным вопросом является изучение иерархической системы игроков олигополии, в которой группа игроков (Центр) управляет стратегией некоторого игрока посредством выбора стратегии группы, побуждающей игрока выбирать стратегию, оптимальную с позиций функций полезности группы. Процесс управления в этом случае также основан на вышеупомянутом свойстве рефлексивного поведения игроков. В данной статье эта проблема исследуется для модели игры трех игроков с линейными функциями спроса и издержек, что позволяет анализировать равновесия в явном виде.

2. Неиерархическая игра с линейными функциями спроса и издержек (линейная модель)

Неиерархическая модель рынка олигополии описывает поведение n игроков (фирм), поставляющих на рынок одинаковый товар, покупательский спрос на который характеризуется обратной функцией спроса $P(Q)$, убывающей по совокупному объему продаж $Q(P'_Q < 0)$. Игроки равноправны и выбирают действия (стратегии) в виде объемов предложения товара Q_i, сообразуясь со своими функциями издержек $C_i(Q_i)$, которые считаются возрастающими ($C'_{Qi} > 0$), с целью максимизации функции полезности $\pi_i(Q, Q_i) = P(Q)Q_i - C_i(Q_i)$.

Рассмотрим игровую задачу олигополии в случае линейных функций спроса и издержек игроков

$$
\begin{aligned}
&P(Q) = a - bQ, \quad A > 0, \quad b > 0, \quad a \gg b,\\
&C_i(Q_i) = B_{0i} + B_i Q_i, \quad B_{0i} \geqslant 0, \quad B_i > 0,
\end{aligned}
$$

где Q_i – действие i-го игрока; a, b, B_{0i}, B_i – постоянные коэффициенты, выражающие параметры функции спроса (максимальную цену a и темп снижения цены b) и параметры функции издержек (постоянные издержки B_{0i} и предельные издержки B_i). Суммарное действие игроков равно $Q = \sum_{i \in N} Q_i$.

В этом случае цели игроков выражаются в максимизации их функций полезности π_i следующим образом:

$$
(1) \qquad \max_{Q_i \geqslant 0} \pi_i(Q, Q_i) = \max_{Q_i \geqslant 0} [(a - bQ)Q_i - B_{0i} - B_i Q_i], \quad i \in N = \{1, \dots, n\},
$$

где N – множество игроков; n – количество игроков.

Вычисление равновесия Нэша Q_i^* в неиерархической игре $\Gamma = \langle N, \{Q_i, i \in N\}, \{\pi_i, i \in N\}\rangle$ базируется на необходимых условиях оптимальности $\frac{\partial \pi_i(Q_i^*, \rho_{ij})}{\partial Q_i} = 0$, $i, j \in N$, в которых фигурирует предположительная вариация i-го игрока. Для системы целевых функций (1) необходимые условия оптимальности имеют вид:

$$(2)\qquad a - bQ - b(1 + S_i^r)Q_i - B_i = 0, \quad i \in N, \quad S_i^r = \sum_{j \in N \setminus i} \rho_{ij}^r,$$

где S_i^r – сумма предположительных вариаций i-го игрока на r-м ранге рефлексии. Как следует из уравнений (2), величина *суммы предположительных вариаций* каждого игрока, которую в дальнейшем будем называть *СПВ*, играет ключевую роль для расчета равновесия в игре, поскольку остальные параметры в (2) можно считать общим знанием, а величина СПВ игрока может быть неизвестна его окружению.

Если ввести обозначение параметра типа игрока $\alpha_i = \frac{a - B_i}{b}$, то систему (2) можно представить в более удобном виде

$$(2,\mathrm{a})\qquad \alpha_i - (2 + S_i^r)Q_i - Q_{j\sum} = 0, \quad i \in N,$$

где $Q_{j\sum}$ – суммарное действие окружения i-го игрока; окружение обозначено как обобщенный игрок j.

Сравнительный анализ (1) и (2,a) позволяет вывести зависимость максимальной прибыли игрока i от его равновесного действия, т.е. функцию $\pi_i^* = \pi_i(Q_i^*)$, для случая рефлексивного поведения игроков.

Утверждение 1. Зависимость максимума функции полезности игрока от его равновесного действия при рефлексивном поведении игроков имеет вид

$$(3)\qquad \pi_i^* = b(1 + S_i^r)(Q_i^*)^2 - B_{0i}.$$

Доказательство. Из (1) следует, что

$$\pi_i = (a - b(Q_i + Q_{j\sum})) - B_i Q_i - B_{0i} = b(\alpha_i - (Q_i + Q_{j\sum}))Q_i - B_{0i};$$

с другой стороны, из (2,a) следует

$$\alpha_i - Q_i^* - Q_{j\sum}^* = (1 + S_i^r)Q_i^*$$

подстановка этого выражения в предыдущее приводит к (3).

Анализ уравнений (2) показывает, что вектор равновесных действий $\mathbf{Q}^* = \{Q_i^*, i \in N\}$ как решение этой системы зависит от вектора СПВ $\mathbf{S} = \{S_i, i \in N\}$. Поэтому если у некоторого игрока i величина СПВ будет такой, что в равновесии максимизируются функции полезности остальных игроков (окружения), то можно сказать, что окружение целенаправленно управляет этим игроком, т.е. возникает иерархически игра.

3. Иерархическая игра в линейной модели триполии

Рассмотрим игру олигополии в случае трех игроков (т.е. случай триполии). В рассматриваемой модели один игрок i противостоит всем остальным игрокам, т.е. окружению, которое имеет общую цель добиться от этого игрока действия, выгодного окружению. Поэтому далее будем называть этого игрока «управляемый игрок» или «объект управления – игрок» (*ОУ-игрок*). Будем обобщенно обозначать всех игроков окружения индексом «j».

Опишем систему информированности при рефлексивном поведении игроков в случае иерархической игры в виде следующих предположений относительно поведения и информированности игроков.

1) Все игроки имеют полную информированность о функциях полезности и действиях друг друга, выбирают действия одновременно, а управляемый игрок и окружение также независимы друг от друга.

2) Игроки окружения j информированы о предположительных вариациях друг друга и не информированы о значениях СПВ ОУ-игрока; они выбирают одинаковые стратегии (действия, обозначенные через q) и имеют одинаковую величину СПВ, которую обозначим через s. Кроме того, будем считать игроков окружения идентичными по параметру типа α_j, $j \in N\backslash i$, рассматривая среднее значение этого параметра как α. Соответственно значения целевых функций окружения будут одинаковы, обозначим их символом π. Игроки окружения могут скоординированно изменять значение СПВ в зависимости от СПВ управляемого игрока, причем эта зависимость обратная, т.е. с ростом СПВ управляемого игрока (снижением его уровня лидерства) СПВ окружения уменьшается (растет уровень лидерства окружения). Формализуем это предположение следующим образом:

$$q = Q_j, \quad \alpha = \frac{1}{n-1} \sum_{j \in N\backslash i} \alpha_j, \quad \pi = \pi_j, \tag{4}$$
$$s = S_j, \quad s' = \frac{\partial S_j}{\partial S_i} < 0, \quad s' = \mathrm{const} \forall j \in N\backslash i.$$

3) Управляемый игрок i в каждый момент игры выбирает действие независимо от действий окружения, учитывая предшествующие действия окружения. ОУ-игрок не информирован о значениях СПВ окружения, но может оценить их косвенно, по соотношению действий окружения и своих действий путем восстановления оптимальных реакций. ОУ-игрок определяет для себя значение СПВ как лидер по Штакельбергу, т.е. дифференцируя функцию оптимальной реакции окружения.

4) Оба контрагента (ОУ-игрок и окружение) не информированы об истинном уровне лидерства друг друга, т.е. не знают СПВ своего оппонента в игре.

Последнее предположение является ключевым для организации процесса информационного управления на основе манипуляции действиями ОУ-игрока. Выполняя целенаправленной действие, окружение может создать у

ОУ-игрока представление о том, что СПВ окружение изменилась, хотя на самом деле такое действие может быть единичным, а кривая реакции и СПВ окружения остаются неизменными.

Базируясь на этих предположениях, сформулируем иерархическую модель игры: если управляемый игрок выбирает оптимальное для себя действие с учетом имеющихся данных о значениях СПВ окружения, то окружение максимизирует свои функции полезности, побуждая ОУ-игрока выбрать наилучшее для окружения СПВ, т.е. для окружения ставится следующая задача:

$$\max_{S_i} \pi^*(q(s, S_i), \quad Q_i(s, S_i)), \quad s = s^0 = \text{const}, \tag{5}$$

при том что ОУ-игрок выбирает стратегию по условию

$$\max_{Q_i} \pi_i(Q(s, S_i), q(s, S_i)), \tag{6}$$

где s^0 – значение СПВ окружения в начальный момент игры.

Рассмотрим процесс управления поведением игрока i со стороны окружения, для чего определим СПВ этого игрока $\overline{S}_i$, которая оптимальна по функции полезности окружения (5), т.е. $\overline{S}_i = \arg\max\limits_{S_i} \pi(q(s, S_i), Q_i(s, S_i))$.

Утверждение 2. Значение СПВ управляемого игрока, максимизирующее функцию полезности окружения (5), *вычисляется из решения уравнения*

$$2(1+s)q^{*'}_{S_i} + q^* s' = 0 \tag{7}$$

при условии

$$s' < -\frac{(1+s)q^*}{2q^{*'}_{S_i}}. \tag{7,а}$$

Доказательство. Из условия оптимальности первого порядка, примененного к функции (3) для игроков окружения, т.е. к целевой функции игрока окружения π^*, получим:

$$\pi^{*'}_{S_i} = 2b(1+s)q^{*'}_{s_i} q^* + b(q^*)^2 s' = 0,$$

откуда следует (7). Условие оптимальности второго порядка

$$\pi^{*''}_{S_i S_i} = b\{2s' q^{*'}_{s_i} q^* + 2(1+s)(q^{*''}_{S_i S_i} q^* + q^{*2}) + 2q^{*'}_{S_i} q^* s' + q^{*2} s''\} < 0 \tag{7,б}$$

преобразуем, предположив слабое влияние изменения СПВ на сдвиг равновесия $q^{*''}_{S_i S_i}$ и учитывая $s'' = 0$ согласно (4); тогда

$$2s' q^{*'}_{s_i} + (1+s)q^* < 0. \tag{7,в}$$

Поскольку из анализа динамики уровней лидерства по Штакельбергу следует $q^{*'}_{s_i} > 0$ и в линейной модели олигополии $1 + s > 0$, то максимум достигается согласно (7,б) при $s' < 0$, как было введено в предположении (4), в частности, при условии (7,а).

Отметим, что уравнение (7) соответствует полученной ранее [20] формуле для задачи олигополии общего вида $2(1+S_i^r)Q_j^*Q_{jS_i}^{*'}P_Q' + \Big((1+S_i^r)P_{QS_i}''+ P_Q'\frac{\partial S_j^r}{\partial S_i}\Big)Q_j^{*2}=0$, поскольку в рассматриваемой модели линейных функций спроса и издержек $P_Q'=-b$, $P_{QS_i}''=0$.

4. Методы формирования оптимального управления

Уравнение (7) записано для каждого игрока окружения. Искомое значение $\overline{S}_i$ в (7) входит в выражения для $q_{s_i}^{*'}, q^*$, которые необходимы для вычисления этого неизвестного. Поэтому далее рассмотрим конкретный случай триполии, в котором без ограничения общности будем считать второго игрока объектом управления ($i=2$), а первого и третьего игроков – окружением ($j=1,3$).

Определим формулы расчета равновесия в рассматриваемой игре, а также решение задачи управления в иерархической системе (5).

Утверждение 3. В игре триполии, если игроки $j=1,3$ являются окружением, а игрок $i=2$ является объектом управления, то

i) функции оптимальных реакций управляемого игрока и окружения следующие:

$$q=\frac{\alpha-Q_2}{3+s},\quad Q_2=\frac{\alpha_2-2q}{2+S_2}; \tag{8,а}$$

ii) выражения равновесных действий имеют вид:

$$q^*=\frac{\alpha_2-\alpha(2+S_2)}{2-(2+S_2)(3+s)},\quad Q_2^*=\frac{2\alpha-\alpha_2(3+s)}{2-(2+S_2)(3+s)}; \tag{8,б}$$

iii) значение СПВ управляемого игрока, максимизирующее функцию полезности окружения, вычисляется из решения уравнения

$$2(1+s)\frac{zq^*-\alpha}{y}+q^*s'=0, \tag{8,в}$$

при условии

$$\frac{\pi_{S_iS_i}^{*''}}{b}=\frac{4q^*}{y}s'\left(\frac{zq^*}{2}+(1+s)q^*-\alpha\right)+2(1+s)q^{*2}<0, \tag{8,г}$$

где $y=2-(2+S_2)(3+s)$, $z=s'(2+S_2)+3+s$.

Доказательство. В рассматриваемом случае система (2,а) имеет вид

$$\begin{cases}\alpha_1-(2+S_1)Q_1-Q_3-Q_2=0,\\ \alpha_2-(2+S_2)Q_2-Q_1-Q_3=0,\\ \alpha_3-(2+S_3)Q_3-Q_1-Q_2=0,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2\alpha-2(2+s)q-2Q_2-2q=0,\\ \alpha_2-(2+S_2)Q_2-2q=0.\end{cases}$$

Отсюда следуют функции оптимальных реакций второго игрока и окружения (8,а), разрешение которых дает выражения равновесных действий (8,б). Введем обозначения для упрощения записи: $y = 2 - (2 + S_2)(3 + s)$, $z = s'(2 + S_2) + 3 + s$. В этом случае производная $q^{*'}_{S_2}$ вычисляется следующим образом:

$$q^{*'}_{S_2} = \frac{\alpha_2 z - \alpha[y + z(2 + S_2)]}{y^2} = \frac{z[\alpha_2 - \alpha(2 + S_2)]}{y^2} - \frac{\alpha y}{y^2} = \frac{zq^* - \alpha}{y}.$$

Поэтому уравнение (7) имеет вид (8,в).

Условие экстремума целевой функции окружения (7,а) второго порядка, учитывая $s'' = 0$, определим при следующем выражении $q^{*''}_{S_2 S_2}$ (т.е. в более точном виде, чем (7,а)):

$$q^{*''}_{S_2 S_2} = \frac{(z'q^* + zq^{*'}_{S_2})y - y'(zq^* - \alpha)}{y^2} = \frac{z'q^* + 2zq^{*'}_{S_2}}{y}.$$

Подставим это выражение в (7,б), и преобразуем с учетом $z' = 2s'$:

$$\frac{\pi^{*''}_{S_i S_i}}{b} = q^* \left(4s' \frac{zq^* - \alpha}{y} + 2(1 + s) \frac{2s'q^* + 2zq^{*'}_{S_2}}{y} \right) + 2(1 + s)q^{*2} =$$
$$= \frac{4q^*}{y} \left(z[s'q^* + (1 + s)q^{*'}_{S_2}] + s'[(1 + s)q^* - \alpha] \right) + 2(1 + s)q^{*2},$$

в последнем выражении согласно (7) сделаем замену $(1 + s)q^{*'}_{S_2} = -\frac{s'q^*}{2}$, поэтому получим достаточное условие максимума в виде (8,г).

Результаты, сформулированные в утверждении 3, позволяют найти $\overline{S}_2$.

Разработаем алгоритм достижения целевого для окружения значения $\overline{S}_2$. Пусть в игре в некоторый начальный момент 0 установилось равновесие (q^0, Q_2^0) при некоторых СПВ управляемого игрока S_2^0 и окружения s^0, значения которых неизвестны контрагентам. Определим фантомную реакцию окружения, при которой ОУ-игрок выберет СПВ, равную $\overline{S}_2$. Обозначим символом s_f значение СПВ, которое должно быть у окружения, чтобы ОУ-игрок определил свою СПВ как $\overline{S}_2$, и будем называть эту величиной *фантомной СПВ окружения.*

Утверждение 4. В игре триполии необходимым и достаточным условием для того, чтобы при фантомной СПВ окружения $(j = 1, 3)$ *управляемый игрок* $i = 2$ *установил свою реакцию по* $\overline{S}_2$, *является равенство*

$$s_f = -\frac{1}{\overline{S}_2} - 3. \qquad (9)$$

Доказательство. Если ОУ-игрок совершает действие Q_2, а в ответ получает от окружения действие q, то он рассчитывает свою СПВ, дифференцируя функцию реакции окружения. Фантомную реакцию окружения $q_f(Q_2)$

найдем, подставив в (8,а) неизвестную величину s_f: $q_f = \frac{\alpha - Q_2}{3+s_f}$. Тогда $S_2 = q'_{Q_2} = \left(\frac{\alpha - Q_2}{3+s_f}\right)'_{Q_2} = -\frac{1}{3+s_f}$. Поэтому если цель окружения побудить ОУ-игрока выбрать $\overline{S}_2$, то из $\overline{S}_2 = -\frac{1}{3+s_f}$ получим необходимую для этого СПВ окружения (9).

На основе результата утверждения 4 организуем следующий процесс управления, в котором рассмотрим моменты времени $0,\ t,\ t+1,\ t+2$ и т.д., показанные как верхние индексы действий игроков, $t > 0$.

1. Окружение в момент t совершает действие, вычисленное по его фантомной функции реакции:

$$q^t = \frac{\alpha - Q_2^0}{3 + s_f} = -\overline{S}_2(\alpha - Q_2^0).$$

2. ОУ-игрок в момент $t+1$ вычисляет СПВ по этому действию, которая согласно (9) равна $\overline{S}_2$, и переходит на новую функцию реакции $Q_2^{t+1} = \frac{\alpha_2 - 2q}{2+\overline{S}_2}$, по которой выбирает ответное действие:

$$Q_2^{t+1} = \frac{\alpha_2 - 2q^t}{2 + \overline{S}_2}.$$

3. Окружение в момент $t+2$ совершает действие по своей истинной функции реакции:

$$q^{t+2} = \frac{\alpha_2 - Q_2^{t+1}}{3 + s^0}.$$

4. ОУ-игрок в момент $t+3$ вычисляет СПВ по этому действию, которая равна S_2^0, и возвращается к исходной функции реакции $Q_2^{t+3} = \frac{\alpha_2 - 2q}{2+S_2^0}$.

5. В моменты $t+4, t+5$ и т.д. окружение и ОУ-игрок повторяют шаги 3, 4, в итоге равновесие в игре возвращается к исходному состоянию (q^0, Q_2^0).

В результате этого процесса в моменты $t+1,\ t+2$ окружение достигает желаемого результата и получает максимальную прибыль. Известно [3–6], что описанный итерационный процесс достаточно быстро сходится к расчетному равновесию (8,б), поэтому будем считать, что с момента $t+3$ состояние игры уже стабилизировалось. Следовательно, полагаем, что окружение получает дополнительный выигрыш в моменты $t+1$ и $t+2$, но может понести потери в момент t. Выигрыши, полученные в различные моменты времени, необходимо привести к сопоставимому уровню на основе метода дисконтирования $\pi_d(t) = \pi^t e^{-\rho t}$, использованного в динамических моделях олигополии [9]. Для оценки эффективности процесса управления сравним максимальные значения функции полезности окружения в моменты $0,\ t,\ t+1$ и $t+2$: управление эффективно, если

$$\pi^{*t}e^{-\rho t} + \pi^{*t+1}e^{-\rho(t+1)} + \pi^{*t+2}e^{-\rho(t+2)} \geqslant \pi^{*0}(e^{-\rho t} + e^{-\rho(t+1)} + e^{-\rho(t+2)}),$$

где ρ – коэффициент дисконтирования.

5. Экспериментальный анализ оптимального управления

Рассмотрим численные эксперименты, моделирующие процесс оптимального управления. Моделирование проведем на основе данных анализа тенденций спроса и издержек операторов телекоммуникационного рынка России [22], полученных для наиболее близкого к современности периода 2016–2021 гг. Линейная модель функции спроса на голосовой трафик мобильных операторов была сформирована в следующем виде:

$$P(Q) = a - bQ, \quad a = 1{,}6, \quad b = 0{,}000001;$$

функции издержек мобильных операторов рассмотрим без учета постоянных издержек, не влияющих на равновесие, в форме:

$$C_i(Q_i) = B_i Q_i, \quad B_1 = 0{,}0005, \quad B_2 = 0{,}0018, \quad B_3 = 0{,}0004,$$

где $i = 1$ соответствует МТС, $i = 2$ – Мегафон, $i = 3$ – Вымпелком.

Как и в разделе 4, будем считать второго игрока объектом управления (его действие обозначено через Q_2), а первого и третьего игроков – окружением ($j = 1, 3$), действия каждого из которых обозначим через q. На рис. 1 показаны линии оптимальных реакций игроков (обозначены через R) в случае равновесия Курно (значения СПВ равны $s = S_2 = 0$) и в случае трехстороннего лидерства по Штакельбергу (значения СПВ равны $s = S_2 = -0{,}5$); последний случай будем рассматривать как исходное положение в игре и обозначим точкой «0».

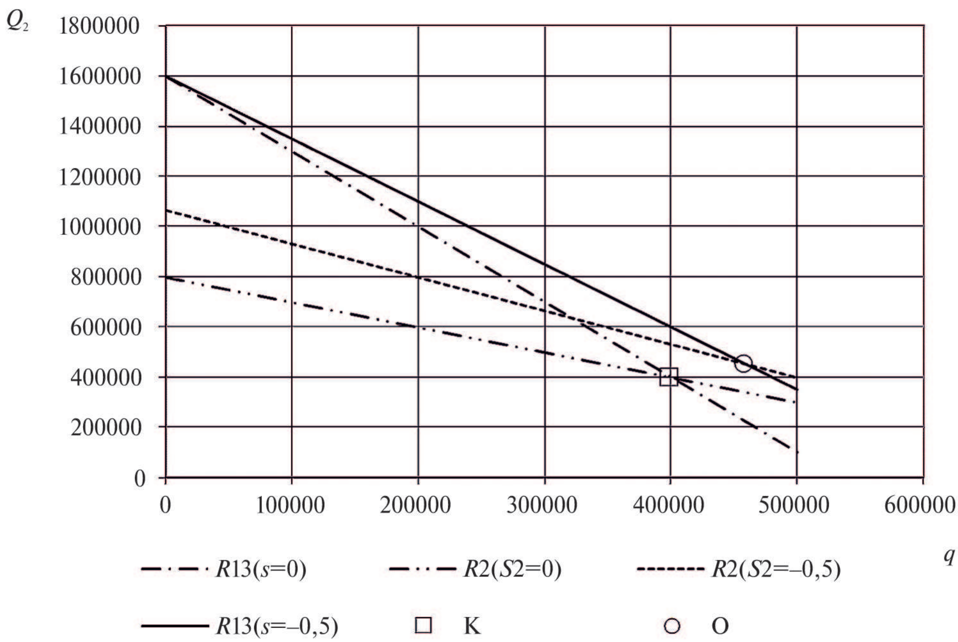

Рис. 1. Равновесие Курно (К) и трехстороннее лидерство по Штакельбергу (0).

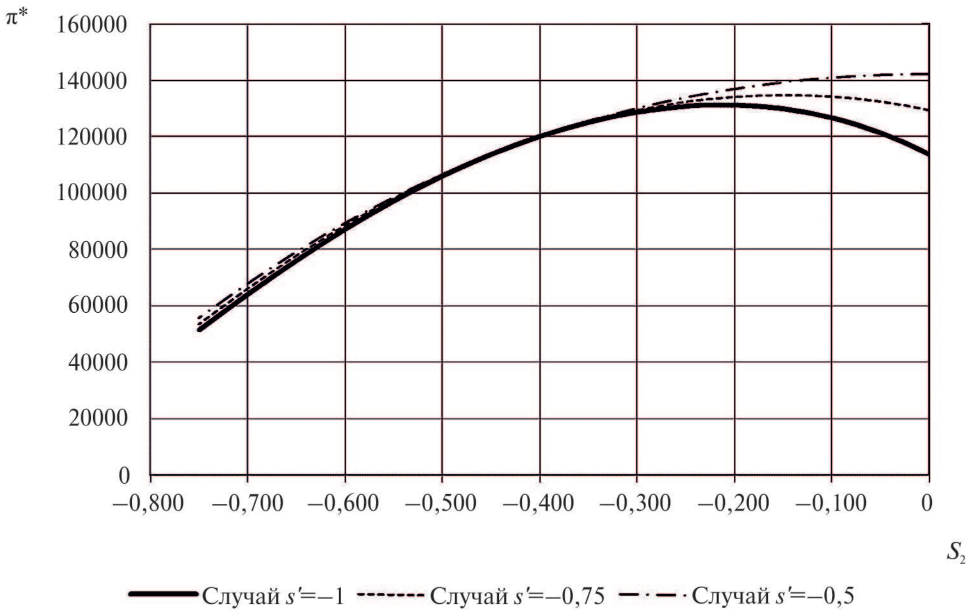

Рис. 2. Функции полезности окружения в зависимости от СПВ ОУ-игрока при различных значениях s'.

Анализ влияния характера изменения реагирования окружения на изменение реагирования ОУ-игрока, выражающегося величиной s', показан в табл. 1 и на рис. 2. При этом использована следующая модельная зависимость:

$$s = -1 + s'S_2,$$

которая обеспечивает диапазон $s \in (-1, 0]$ при $S_2 \in (-1, 0]$ и $s' \in (-1, 0]$. Из данных табл. 1 следует, что снижение интенсивности изменения СПВ окружения, т.е. уменьшение модуля s', обусловливает более близкое к нулю целевое значение СПВ ОУ-игрока $\overline{S}_2$, а также увеличение максимальной полезности окружения π^*. Графики на рис. 2 демонстрируют наличие максимума функции полезности окружения при определенных значениях СПВ ОУ-игрока, причем условие второго порядка (8,г) также было проверено.

Таблица 1. Влияние изменения СПВ окружения при изменении СПВ ОУ-игрока на оптимум окружения

Случай	s'	$\overline{S}_2$	q^*	π^*
1	-1	$-0{,}2338$	5 079 027	128 969
2	$-0{,}75$	$-0{,}1478$	518 714	134 506
3	$-0{,}5$	$-0{,}002$	533 454	142 260

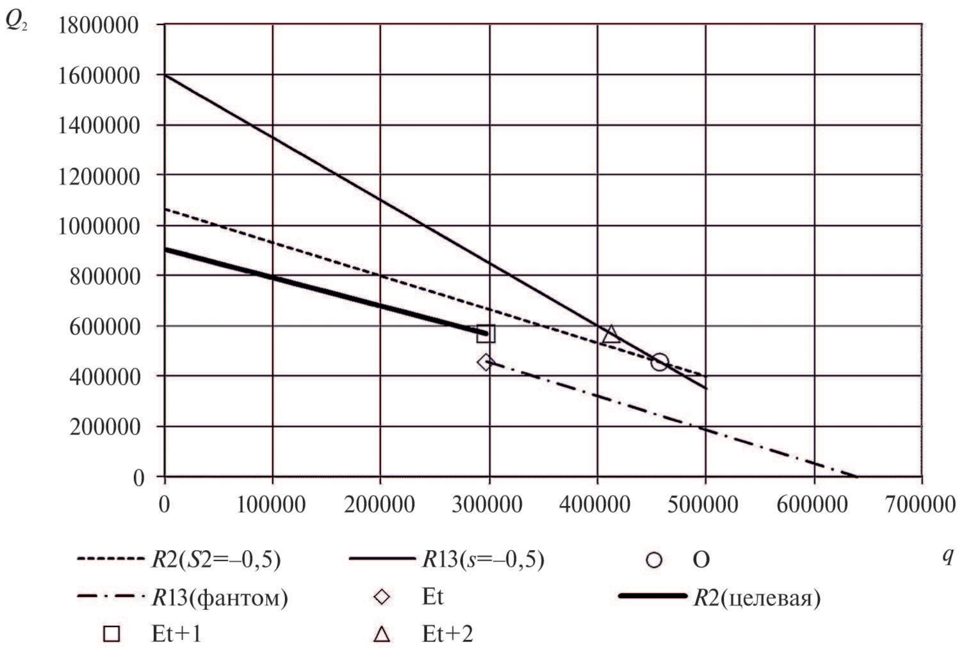

Рис. 3. Процесс информационного управления из лидерства по Штакельбергу (0).

На рис. 3 показан процесс информационного управления из состояния трехстороннего лидерства по Штакельбергу (точка 0) для случая $s' = -1$. На первом этапе действие окружения по его фантомной функции реакции R13(фантом) переводит игровую ситуацию в состояние E^t, причем ОУ-игрок совершает действие, соответствующее исходному положению в игре 0. Такое изменение действия окружения позволяет ОУ-игроку установить, что поведение окружения соответствует СПВ, равной $\overline{S}_2$, поэтому он на втором шаге изменяет свою функцию реакции на желательную для окружения $R2$(целевая). Тогда игровая ситуация трансформируется в состояние $E^{(t+1)}$, а действие окружения остается на уровне E^t. В ответ на третьем шаге окружение возвращается на свою истинную функцию реакции $R13(s = -0{,}5)$, поскольку окружение вычисляло оптимальную для себя целевую СПВ ОУ-игрока именно при исходном значении своей СПВ. В результате игровая ситуация переходит в состояние $E^{(t+2)}$. Дальнейший процесс восстановления исходного равновесия в точке 0 не показан, поскольку в момент $t + 2$ действия игроков уже близки к этой точке.

Экономический анализ эффектов информационного управления представлен в табл. 2 при ставке дисконтирования 10%. Суммарная дисконтированная полезность окружения за три периода процесса управления превышает суммарное дисконтированное значение его полезности при исходном состоянии игры, что подтверждает целесообразность такого управления с позиций окружения. Отметим, что в период t окружение получило также повышенную полезность, что проявляется не всегда; в рассматриваемой ситуации первое

Таблица 2. Экономический эффект информационного управления, $\rho = 0{,}1$

Период времени	$e^{-\rho t}$	Номинальные значения		Дисконтированные значения	
		π^{*0}	π^{*t}	π^{*0}	π^{*t}
t	0,905	104 761	163 474	94 821	147 963
$t+1$	0,819	104 761	129 758	85 823	106 301
$t+2$	0,741	104 761	85 005	77 680	63 031
Сумма				258 324	317 295

действие окружения было меньше, чем в исходном равновесии, вследствие чего повысилась равновесная цена; если бы первое действие окружения было противоположным, то его полезность снизилась.

6. Заключение

В статье продемонстрирована принципиальная возможность осуществления информационного управления действиями игрока в игре триополии со стороны игроков окружения. Рассмотренный случай линейных моделей функций спроса и издержек позволил вывести выражения оптимальных реакций и равновесных действий игроков, разработать алгоритм и наглядно проиллюстрировать результаты информационного управления. Получены следующие ключевые результаты.

Выведена зависимость максимума функции полезности игрока от его равновесного действия при рефлексивном поведении игроков, показывающая, что выигрыш игрока зависит как от его СПВ, так и от СПВ других игроков через равновесное действие игрока. Из этого вытекает, что варьируя СПВ других игроков, рассматриваемый игрок может увеличить свой максимальный выигрыш, что является основанием для управления этими игроками, причем параметром управления будет их СПВ. Однако один игрок не может манипулировать остальными игроками, тогда как совокупность игроков, действуя согласованно, может изменить представление какого-то одного игрока.

Поэтому исследована иерархическая игра, в которой окружение управляет некоторым игроком путем нахождения оптимального для него значения СПВ. Получено уравнение, позволяющее вычислить оптимальное по функции полезности окружения значение СПВ этого игрока. Для побуждения управляемого игрока к выбору требуемого значения СПВ использован метод оптимальных реакций, для которых выведены формулы в случае триполии. Также в игре трех лиц, двое из которых имеют общую цель, определены равновесные действия и составлено уравнение для расчета оптимального СПВ управляемого игрока.

В рассматриваемой модели триполии разработан метод определения действия окружения на основе фантомной реакции, которое побуждает управляемого игрока использовать при реагировании оптимальную для окружения

СПВ. На основе этого разработан алгоритм, моделирующий последовательность действий окружения и игрока в процессе управления и определена эффективность этого процесса.

Проведены численные эксперименты, показавшие действенность и экономический эффект алгоритма управления. Несмотря на то, что повышенную прибыль субъект управления получает только в два момента игры, с практической точки зрения это достаточно существенно. В реальном бизнесе момент игры, как правило, соответствует периоду опубликования отчетности фирмы, которая в полном объеме формируется ежегодно. Поэтому один или два года, в которых игроки окружения получают преобладающие выигрыши, могут привести к большим финансовым потерям управляемого игрока и даже к его полному вытеснению с рынка. Следовательно, результаты исследования имеют практическую значимость.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cournot A.A.* Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. London: Hafner. 1960. Original 1838.
2. *Stackelberg H.* Market Structure and Equilibrium: 1st Edition. Translation into English, Bazin, Urch & Hill, Springer, 2011. (Original 1934).
3. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Процессы рефлексии и равновесие в модели олигополии с лидером // АиТ. 2020. № 7. С. 113–128.
   Algazin G.I., Algazina D.G. Reflexion Processes and Equilibrium in an Oligopoly Model with a Leader // Autom. Remote Control. 2020. V. 81(7). P. 1258–1270.
4. *Алгазин Г.И., Алгазина Ю.Г.* К аналитическому исследованию условий сходимости процессов рефлексивного коллективного поведения в моделях олигополии // АиТ. 2022. № 3. С. 84–109.
   Algazin G.I., Algazina Y.G. To the Analytical Investigation of the Convergence Conditions of the Processes of Reflexive Collective Behavior in Oligopoly Models // Autom. Remote Control. 2022. V. 83(3). P. 367–388.
5. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Моделирование динамики коллективного поведения в рефлексивной игре с произвольным числом лидеров // Информатика и автоматизация. 2022. Т. 21. № 2. С. 339–375.
6. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Агрегативные игры олигополии при линейных функциях спроса и издержек агентов // МАК: Математики – Алтайскому краю. 2024. № 6. С. 99–101.
7. *Xiao Y., Zhang S., Peng Y.* Dynamic investigations in a Stackelberg model with differentiated products and bounded rationality // J. Comput. Appl. Math. 2022. V. 414. 114409.
8. *Ougolnitsky G., Gorbaneva O.* Sustainability of Intertwined Supply Networks // A Game-Theoretic Approach Games. 2022. V. 13(3). P. 35.
9. *Угольницкий Г.А., Усов А.Б.* Сравнительный анализ эффективности способов организации взаимодействия экономических агентов в моделях дуополии Курно с учётом экологических условий // АиТ. 2023. № 2. С. 150–168.
10. *Al-Khedhairi A.* Dynamical Study of Competition Cournot-like Duopoly Games Incorporating Fractional Order Derivatives and Seasonal Influences // Int. J. Nonlinear Scie. Numer. Simulation. 2020. V. 21(3–4). P. 339–359.

11. *Zouhar J., Zouharova M.* Stackelberg versus Cournot duopoly with asymmetric costs: primary markups, entry deterrence, and a comparison of social welfare and industry profits // Econom. Theory Bulletin. 2020. V. 8. P. 89–96.

12. *Collie D.R.* Taxation under oligopoly in a general equilibrium setting // J. Public Economic Theory. 2019. V. 21(4). P. 738–753.

13. *Ferrarese W.* When Multiple Merged Entities Lead in Stackelberg Oligopolies // Rev. Industr. Organization. 2020. V. 56(1). P. 131–142.

14. *Mukherjee A., Zeng C.* Social desirability of entry in a bilateral oligopoly-The implications of (non) sunk costs // Mathem. Social Scie. 2022. V. 118. P. 12–19.

15. *Zhou J.* Mixed bundling in oligopoly markets // J. Econom. Theory. 2021. V. 194. P. 105257.

16. *Shuai J., Yang H., Zhang L.* Dominant firm and competitive bundling in oligopoly markets // Games Econom. Behav. 2022. V. 132. P. 421–447.

17. *Zhang Y.* When should firms choose a risky new technology? An oligopolistic analysis // Econom. Modelling. 2020. V. 91. P. 687–693.

18. *Novikov D.A., Chkhartishvili A.G.* Reflexion and Control: Mathematical Models. London: CRC Press, 2014.

19. *Гераськин М.И.* Свойства предположительных вариаций в нелинейной модели олигополии Штакельберга // АиТ. 2020. № 6. С. 105–130.
Geraskin M.I. The Properties of Conjectural Variations in the Nonlinear Stackelberg Oligopoly Model // Autom. Remote Control. 2020. V. 81(6). P. 1051–1072.

20. *Гераськин М.И.* Информационное управление стратегией игрока в игре олигополии n лиц при рефлексивном поведении игроков // АиТ. 2025. № 6. С. 102–117.

21. *Гераськин М.И.* Объемные предположительные вариации в играх олигополии при различных функциях спроса и издержек и многоуровневом лидерстве // АиТ. 2024. № 7. С. 73–90.
Geraskin M.I. Quantity Conjectural Variations in Oligopoly Games under Different Demand and Cost Functions and Multilevel Leadership // Autom. Remote Control. 2024. V. 85 (7). P. 711–724.

22. *Гераськин М.И., Моисеева К.С.* Анализ тенденций спроса и издержек операторов телекоммуникационного рынка России // Прикладная математика и вопросы управления. 2023. № 3. С. 157–174.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Чхартишвили.

Поступила в редакцию 29.11.2024

После доработки 21.03.2025

Принята к публикации 25.03.2025