Автоматика и телемеханика, № 7, 2025

Управление в технических системах

© 2025 г. **В.В. ХУТОРЦЕВ, д-р техн. наук (hvv.56@mail.ru)**
(Ростовский-на-Дону научно-исследовательский институт радиосвязи)

ПРОГРАММНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОИСКОМ ОБЪЕКТОВ В УСЛОВИЯХ ОГРАНИЧЕНИЙ НА КОЛИЧЕСТВО ЛИНИЙ ОБРАБОТКИ В НЕЗАВИСИМЫХ КАНАЛАХ ПОИСКОВОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрена задача поиска объектов наблюдения, математическая модель появления которых удовлетворяет закономерностям пуассоновского потока. Ее решение получено для случая, когда количество линий обработки в каналах многоканальной поисковой системы ограничено. В условиях высокой интенсивности появления объектов из потока это может привести к появлению очередей на их обработку. В качестве модели, используемой для определения закона поиска, рассмотрен набор систем массового обслуживания с независимыми входящими потоками, для которых системы дифференциальных уравнений Колмогорова описывают динамику изменения вероятностных характеристик их состояний в условиях ограничения на количество линий обработки в поисковых каналах. Рассмотрены две разновидности формулировки оптимизационной задачи – для вероятностного и временного критериев качества. Синтезирована итерационная процедура для формирования законов распределения интенсивностей поисковых усилий в каналах поисковой системы. Приведены примеры.

Ключевые слова: поиск объектов наблюдения, многоканальная поисковая система, распределение интенсивностей поиска, система дифференциальных уравнений Колмогорова.

DOI: 10.31857/S0005231025070028, **EDN:** JRJAYX

1. Введение

Задачи рационального распределения поисковых усилий в поисковых системах (ПС) [1–13] образуют один из важных классов задач общей теории управления наблюдениями [14–17]. Их эффективное решение обеспечивает уменьшение вероятности наличия необнаруженных объектов наблюдения (ОН) в зоне обзора ПС, сокращение времени их поиска, повышение достоверности обнаружения ОН и т.д. В частности, к таким задачам могут быть отнесены поиск и обнаружение космического мусора, поток частиц которого может рассматриваться как пуассоновский поток [18], мониторинг автомобильного трафика на многополосных автострадах, контроль воздушного движения в районах крупных аэропортов, мониторинг использования воздушного пространства мегаполисов и т.д.

Закономерности решения указанного класса задач могут быть использованы при управлении другими системами и сетями массового обслуживания, включая управление водными ресурсами, энергосетями, процессами передачи данных в телекоммуникационных системах и т.д. [19–26].

Наиболее общим предположением относительно структуры математической модели, описывающей ОН в процессе поиска, является предположение о произвольном (в том числе неограниченном) их количестве и появлении в области обзора в соответствии с закономерностями пространственно-временного случайного потока [27–30], как правило пуассоновского.

Исследованию задачи поиска в последнем случае посвящены работы [6–10]. Их общей чертой является отсутствие ограничений на количество линий обработки в каналах ПС. При определенных условиях это позволяло существенно упростить математические модели, лежащие в основе формирования законов распределения поисковых усилий. Однако для реальных ПС, в каналах которых количество линий обработки конечно, рассмотренные подходы к формированию законов распределения интенсивностей поисковых усилий использованы быть не могут. Это обусловлено особенностями математических моделей (уравнений Колмогорова), описывающих вариацию во времени вероятностных характеристик состояний каналов ПС в терминах задачи обслуживания в условиях ограничений на количество линий обработки в каждом из каналов [31–34].

В связи с этим актуальным становится вопрос определения управления распределением поисковых усилий для многоканальных ПС параллельного типа с независимыми каналами, у которых количество линий обработки в каждом канале ограничено.

2. Анализ структуры математической модели поиска

Пусть объекты наблюдения появляются в области обзора X поисковой системы в соответствии с закономерностями пространственно-временного пуассоновского потока φ [19–22]. Здесь $X \subset R^n$ $(1 \leq n \leq 3)$, $(x_1, \ldots, x_n)$ – декартова система координат в X.

Предположим, что область обзора X разбита на I подобластей X_i, $i = \overline{1, I}$, каждую из которых обслуживает соответствующий i-й канал ПС.

Будем полагать, что $X = \bigcup\limits_i X_i$, $X_i \bigcap X_j = \varnothing$, $i = \overline{1, I}$, $j = \overline{1, I}$, $i \neq j$. Тогда любые два потока, определяемые из φ как

$$\varphi_i(t) = \varphi(X_i, t), \quad \varphi_j(t) = \varphi(X_j, t), \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, I}, \quad i \neq j \tag{2.1}$$

являются пуассоновскими и независимыми [27, 30].

В соответствии с [8, 9, 27, 34, 35] меры интенсивностей, или интенсивности временных пуассоновских потоков $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1, I}$, соответственно $\xi_i(t)$, являются известными непрерывными и ограниченными детерминированными функциями и характеризуют временные пуассоновские потоки $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1, I}$, как потоки с переменными параметрами [27–29].

Для подобласти X_i вероятность появления одного очередного ОН в течение интервала времени $[t, t + \Delta t]$ определяется соотношением [32, 33]

$$\xi_i(t)\Delta t + o(\Delta t), \tag{2.2}$$

тогда как вероятность появления более одного ОН равна $o(\Delta t)$. Здесь $o(\Delta t)$ – остаток порядка малости выше, чем Δt.

Введем ограничение: для i-го канала ПС, $i = \overline{1, I}$, количество линий обработки ограничено и равно a_i.

Определим интервал времени поиска как $\Omega = [0, \bar{t}\,]$ и предположим, что в течение этого интервала i-й канал ПС обеспечивает интенсивность поиска $\lambda_i(t) \geq 0$.

Тогда в случае, когда в подобласти X_i присутствует k ОН, вероятность того, что в течение времени $[t, t + \Delta t]$ хотя бы один из них будет найден, составляет [8–10, 32, 33]

$$\begin{aligned} k\lambda_i(t)\Delta t + o(\Delta t), \quad k \leq a_i, \\ a_i\lambda_i(t)\Delta t + o(\Delta t), \quad k > a_i. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Иными словами при $k > a_i$ вероятность обнаружения ОН на $[t, t + \Delta t]$ с увеличением значений k перестает расти.

Интенсивности поиска $\lambda_i(t)$ в подобластях X_i, $i = \overline{1, I}$, полагаются неизвестными неотрицательными непрерывными ограниченными на $[0, \bar{t}]$ функциями времени, подлежащими определению в результате решения оптимизационной задачи.

Задача поисковой системы применительно к подобласти X_i может быть интерпретирована как задача ее обслуживания при потоке ОН, образующем нагрузку пуассоновского типа с мерой интенсивности $\xi_i(t)$. Для описания задач этого класса, как правило, используется математический аппарат процессов размножения и гибели [31–33]. Для описания закономерностей изменения характеристик таких процессов служат бесконечномерные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений Колмогорова относительно вероятностей пребывания процесса в каждом из возможных состояний, образующие совокупность задач Коши [32, 33, 36]:

$$\begin{aligned}
&\dot{P}_{i0} = -\xi_i(t)P_{i0} + \lambda_i(t)P_{i1}, \\
&\dot{P}_{ik} = -(\xi_i(t) + k\lambda_i(t))P_{ik} + \xi_i(t)P_{ik-1} + (k+1)\lambda_i(t)P_{ik+1}, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (k = 1, \ldots, a_i - 1), \\
&\dot{P}_{ik} = -(\xi_i(t) + a_i\lambda_i(t))P_{ik} + \xi_i(t)P_{ik-1} + a_i\lambda_i(t)P_{ik+1}, \quad k \geq a_i, \\
&P_{i0}(0) = 1, \quad P_{ik}(0) = 0, \quad i = \overline{1, I}, \quad t \in [0, \bar{t}],
\end{aligned} \tag{2.4}$$

где P_{i0} – вероятность отсутствия необнаруженных ОН в X_i или вероятность события, связанного с незадействованием ни одной из линий обработки i-го канала ПС при $t \in \Omega$; P_{ik} – вероятность нахождения в X_i k необнаруженных ОН или вероятность события, связанного с задействованием k линий обработки i-го канала ПС, если $1 \le k < a_i$, или a_i линий обработки, если $k \ge a_i$; функции $\{\lambda_i(t),\ \xi_i(t),\ i = \overline{1, I}\}$ на интервале Ω полагаются неотрицательными, непрерывными и ограниченными.

Задача Коши (2.4) отражает физический смысл задачи поиска, проводимого независимыми каналами ПС с конечным числом линий обработки и осуществляемого последовательно во времени по мере появления ОН в подобластях обзора X_i, $i = \overline{1, I}$.

Использование математических моделей (2.4) для определения закона управления распределением поисковых усилий в ПС является затруднительным в силу их бесконечной размерности. Кроме того, структуры указанных моделей не позволяют провести их свертку, например в терминах математических ожиданий количества необнаруженных ОН в каждом из каналов ПС, как, например, это было сделано в [10].

Под элементами обслуживания i-го канала будем понимать его линии обработки. Тогда очереди на обработку поисковой информации в i-м канале не возникают, если

– не занят ни один из его элементов обслуживания или не включена в обработку ни одна из линий обработки, что соответствует $k = 0$;

– заняты k элементов обслуживания ($k = 1, \ldots, a_i$) или включены в обработку k линий обработки.

Указанные состояния i-го канала можно представить множеством

$$S_i = \left\{ s_{i0}, s_{i1}, \ldots, s_{ik}\big|_{k=a_i} \right\}, \quad i = \overline{1, I}, \tag{2.5}$$

где каждое из подмножеств s_{ik} $(k = 0, 2, \ldots, a_i)$ включает $C_{a_i}^k = \frac{a_i!}{k!(a_i - k)!}$ элементов.

3. Постановка задачи

Обозначим через p_i, $i = \overline{1, I}$, вероятность события, связанного с однократным выходом i-го канала ПС из соответствующего множества (2.5) при условии, что в начальный момент времени количество занятых элементов обслуживания соответствовало условию $0 \le k \le a_i$. Отметим, что под однократным выходом i-го канала ПС $(i = \overline{1, I})$ из соответствующего множества состояний (2.5) подразумевается выход из S_i ровно один раз.

Такие события являются совместными и независимыми, а вероятность их суммы определяется соотношением [37]

$$p_\Sigma(t) = p_1(t) + p_2(t)(1 - p_1(t)) + \ldots + p_I(t) \prod_{i=1}^{I-1} (1 - p_i(t)). \tag{3.1}$$

Определим первый критерий качества функционирования поисковой системы соотношением

$$\Upsilon_1 = p_\Sigma(\bar{t}) + \eta \int\limits_0^{\bar{t}} \lambda(t)^{\mathrm{T}} \lambda(t) dt \to \min_{\lambda \in \Lambda}, \tag{3.2}$$

где $\lambda(t) = [\lambda_1(t) \dots \lambda_I(t)]^{\mathrm{T}}$ – вектор интенсивностей поиска; $\eta \in R^1$, $\eta > 0$ – весовой коэффициент; Λ – множество допустимых законов управления или законов распределения интенсивностей поиска.

Под множеством допустимых законов управления понимаются множество неотрицательных непрерывных и ограниченных на $[0, \bar{t}]$ функций времени.

Критерий (3.2) определим как вероятностный. Он предполагает минимизацию суммы двух компонент. Первая компонента характеризует значение в конечный момент времени наблюдения $\bar{t}$ вероятности выхода состояний хотя бы одного из поисковых каналов ПС из соответствующего множества (2.5), вторая – эквивалентна аналогу энергетических затрат ПС на проведение поиска.

Рассмотрим второй критерий качества. Для этого введем обозначения для математических ожиданий длительностей пребывания каналов ПС во множествах состояний, исключающих возникновение очередей на обработку поисковой информации: $m_i = \mathrm{M}[\tau_i]$, $i = \overline{1, I}$, где τ_i – случайная величина, определяющая длительность пребывания i-го канала ПС в соответствующем множестве состояний (2.5). Структуру второго критерия качества зададим соотношением

$$\Upsilon_2 = I\bar{t} - \sum_{i=1}^{I} m_i + \eta \int\limits_0^{\bar{t}} \lambda(t)^{\mathrm{T}} \lambda(t) dt \to \min_{\lambda \in \Lambda}. \tag{3.3}$$

Критерий (3.3) определим как временной. Он предполагает минимизацию в конечный момент наблюдения суммы двух компонент. Первая компонента характеризует сумму математических ожиданий длительностей пребывания каналов ПС в соответствующих множествах состояний (2.5), взятую со знаком минус, вторая, как и в (3.2), эквивалентна аналогу энергетических затрат ПС на проведение поиска.

Поставим задачу провести синтез законов управлений распределениями интенсивностей поисковых усилий $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1, I}$, $t \in \Omega$ в (2.4) между каналами многоканальной поисковой системы с конечным количеством линий обработки в каждом канале, обслуживающими непересекающиеся подобласти X_i, $i = \overline{1, I}$, области обзора ПС X, для вероятностного (3.2) и временного (3.3) критериев качества.

4. Синтез управления распределениями интенсивностей поисковых усилий в многоканальной ПС с конечным количеством линий обработки в каждом канале для вероятностного критерия качества

Рассмотрим процедуру синтеза управления поиском объектов наблюдения из пространственно-временного пуассоновского потока φ в многоканальной поисковой системе с независимыми каналами и конечным количеством линий обработки в каждом канале ПС применительно к вероятностному критерию качества (3.2). Для этого покажем справедливость следующего утверждения.

Утверждение 1. *Вероятность события, связанного с однократным выходом i-го канала ПС ($i = \overline{1, I}$) из соответствующего множества S_i состояний* (2.5) *при условии, что при $t = 0$ состояния этого канала принадлежали S_i, определяется соотношением*

$$p_i(t) = \bar{P}_{i\ a_i+1}(t), \tag{4.1}$$

где значение вероятности $\bar{P}_{i\ a_i+1}(t)$ определяется из решения системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&\dot{\bar{P}}_{i0}(t) = -\xi_i(t)\bar{P}_{i0}(t) + \lambda_i(t)\bar{P}_{i1}(t),\\
&\dot{\bar{P}}_{ik}(t) = -(\xi_i(t) + k\lambda_i(t))\bar{P}_{ik}(t) + \xi_i(t)\bar{P}_{ik-1}(t) + (k+1)\lambda_i(t)\bar{P}_{ik+1}(t),\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (k = 1, \ldots, a_i - 1),\\
&\dot{\bar{P}}_{ia_i}(t) = -(\xi_i(t) + a_i\lambda_i(t))\bar{P}_{ia_i}(t) + \xi_i(t)\bar{P}_{ia_i-1}(t),\\
&\dot{\bar{P}}_{ia_i+1}(t) = \xi_i(t)\bar{P}_{a_i}(t), \qquad i = \overline{1, I},
\end{aligned} \tag{4.2}$$

полученного при начальных условиях

$$\sum_{k=0}^{a_i} \bar{P}_{ik}(0) = 1, \quad \bar{P}_{i\ a_i+1}(0) = 0. \tag{4.3}$$

Доказательство утверждения приведено в Приложении.

Необходимо отметить, что уравнения (4.2) образуют совокупность фиктивных динамических систем [15] с векторным управлением $\lambda = [\lambda_1\ \lambda_2\ \ldots\ \lambda_I]^{\mathrm{T}}$. Начальные условия (4.3) определяют принадлежность при $t = 0$ состояний i-го канала множеству S_i и соответствуют отсутствию очереди на его входах.

Таким образом, для (3.1) получим

$$\begin{aligned}
p_\Sigma(\bar{t}) &= \bar{P}_{1\ a_1+1}(\bar{t}) + \bar{P}_{2\ a_2+1}(\bar{t})(1 - \bar{P}_{1\ a_1+1}(\bar{t})) + \ldots +\\
&\quad + \bar{P}_{I\ a_I+1}(\bar{t}) \prod_{i=1}^{I-1}(1 - \bar{P}_{i\ a_i+1}(\bar{t})).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

С учетом (3.2), (4.2) определим гамильтониан

$$H = \sum_{i=1}^{I} \psi_i^{\mathrm{T}} A_i \mathrm{P}_i + \eta\lambda^{\mathrm{T}}\lambda, \tag{4.5}$$

где $\psi_i = \psi_i(t) \in R^{a_i+2}$ – вектор сопряженных переменных; $\mathrm{P}_i(t) = \left[\bar{P}_{i0}(t)\ \bar{P}_{i1}(t)\ \ldots\ \bar{P}_{i\,a_i+1}(t)\right]^{\mathrm{T}}$; $A_i \in R^{(a_i+2)\times(a_i+2)}$; $A_i = \xi_i B_{i1} + \lambda_i B_{i2}$; структура матриц $B_{i1},\ B_{i2}$, следующая из (4.2), определена в Приложении.

Специфической особенностью матриц $B_{i1},\ B_{i2}$ является равенство нулю сумм элементов каждого столбца.

Из (4.5) получим системы уравнений относительно $\psi_i(t),\ i = \overline{1, I}$:

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial}{\partial \mathrm{P}_i}\mathrm{H} = -\left(\xi_i B_{i1}^{\mathrm{T}} + \lambda_i B_{i2}^{\mathrm{T}}\right)\psi_i, \quad t \in \Omega. \tag{4.6}$$

С учетом (4.4) краевые условия для (4.6) можно представить в виде

$$\psi_i(\bar{t}) = \frac{\partial}{\partial \mathrm{P}_i(\bar{t})} p_\Sigma(\bar{t}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & \prod\limits_{j=1, j\neq i}^{I}(1 - \bar{P}_{ja_j}(\bar{t})) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad i = \overline{1, I}. \tag{4.7}$$

Из условия минимума (4.5) по λ получим

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i}\mathrm{H} = \psi_i^{\mathrm{T}} B_{i2}\mathrm{P}_i + 2\eta\lambda_i = 0, \quad i = \overline{1, I}. \tag{4.8}$$

С учетом (4.8) определим структуру оптимального управления

$$\lambda_i = \frac{-\psi_i^{\mathrm{T}} B_{i2} P_i}{2\eta}, \quad i = \overline{1, I}. \tag{4.9}$$

Для решения двухточечной краевой задачи (ДТКЗ) (4.2), (4.6), (4.7) воспользуемся методом последовательных приближений Крылова–Черноусько [14, 15, 39]. Конкретизируя (4.3), будем полагать, что $\bar{P}_{i0}(0) = 1$.

Пусть на q-м шаге итерационной процедуры сформирован закон управления поиском (вектор интенсивностей поисковых усилий λ^q).

Метод последовательных приближений предполагает выполнение следующих операций.

1. Проводится решение уравнений (4.2) на интервале времени Ω в прямом времени и формируются значения векторов переменных P_i^q, $i = \overline{1, I}$, соответствующих распределению интенсивностей поиска λ_i^q, $i = \overline{1, I}$.

2. По полученным решениям в соответствии с (4.7) формируются конечные условия для сопряженных переменных $\psi_i^q(\bar{t})$, $i = \overline{1, I}$.

3. Проводится решение системы уравнений (4.6) на интервале времени Ω в обратном времени с конечными условиями (4.7) и определяются значения вектора сопряженных переменных $\psi_i^q(t)$, $t \in \Omega$, $i = \overline{1, I}$, соответствующие управлениям λ_i^q, $i = \overline{1, I}$, и вектору переменных P_i^q, $i = \overline{1, I}$.

4. По полученным значениям векторов $\mathrm{P}_i^q(t)$, $\psi_i^q(t)$, $i = \overline{1, I}$ в соответствии с (4.9) рассчитывается промежуточное значение вектора управлений, соответствующее $(q+1)$-му шагу итерационной процедуры

$$\tilde{\lambda}_i^{q+1} = \frac{-(\psi_i^q)^{\mathrm{T}} B_{i2} P_i^q}{2\eta}, \quad i = \overline{1, I}, \quad t \in \Omega. \tag{4.10}$$

5. Исходя из принципа частичного обновления управления [5, 8, 28] с учетом значений распределения интенсивностей поисковых усилий λ_i^q, $i = \overline{1, I}$, полученных на предыдущем шаге, проводится расчет законов управления интенсивностями поиска для $(q+1)$-й итерации

$$\lambda_i^{q+1}(t) = \varepsilon^q \tilde{\lambda}_i^{q+1}(t) + (1 - \varepsilon^q)\lambda_i^q(t), \quad i = \overline{1, I}, \quad t \in \Omega, \tag{4.11}$$

где $\varepsilon^q \in (0, 1)$.

Параметр ε^q обозначает степень обновления законов управления поиском $\lambda_i^q(t)$, $i = \overline{1, I}$, $t \in \Omega$. Он определяется из условия минимума целевой функции критерия (3.2) на соответствующем шаге итерационной процедуры.

Далее в качестве исходного для $(q+2)$-го шага используется управление $\lambda_i^{q+1}(t)$, и итерационная процедура 1–5 повторяется.

Необходимо отметить, что для начального шага итерационной процедуры $(q = 0)$ начальное распределение интенсивностей поиска λ_i^0, $i = \overline{1, I}$, выбирается из множества Λ допустимых законов управления.

Оптимальное управление (оптимальный закон распределения интенсивностей поисковых усилий) определяется соотношением

$$\lambda_{i\text{ОП}}(t) = \lim_{q \to \infty} \lambda_i^q(t), \quad i = \overline{1, I}, \quad t \in \Omega. \tag{4.12}$$

Отметим, что на каждом шаге итерационной процедуры частичная вариация управления (4.11), осуществляемая на основании решения оптимизационной задачи, направлена на уменьшение значений целевого функционала. Значения $\varepsilon^q \in (0, 1)$ в (4.11) выбираются из условия его максимального уменьшения. С другой стороны, в соответствии с (3.2) соответствующий этому критерию целевой функционал ограничен снизу (целевой функционал, по крайней мере, не может быть отрицательным). Таким образом, предел (4.12) существует.

На практике, как правило, ограничиваются конечным числом итераций $q \le Q$, где Q – номер шага, после которого вариации целевого функционала критерия (3.2) становятся незначительными. При этом полагают, что $\lambda_{i\text{ОП}}(t) \simeq \lambda_i^Q(t)$, $i = \overline{1, I}$.

5. Синтез управления распределениями интенсивностей поисковых усилий в многоканальной ПС с конечным количеством линий обработки в каждом канале для временного критерия качества

Пусть значение верхней границы $\bar{t}$ интервала наблюдения Ω выбрано так, что для плотностей распределения $w_i(t)$, $i = \overline{1, I}$, длительностей τ_i пребывания каналов ПС в соответствующих множествах (2.5) выполняются условия

$$\int_0^{\bar{t}} w_i(t)dt = 1, \ \forall i, i = \overline{1, I}, \tag{5.1}$$

т.е. плотности распределения финитны на Ω.

С учетом (5.1) преобразуем критерий (3.3).

Утверждение 2. При выполнении условия (5.1) *математическое ожидание длительности* τ_i *однократного пребывания* i*-го канала ПС во множестве* S_i (2.5) *с учетом начальных условий* (4.3) *определяется соотношением*

$$m_i = \int_0^{\bar{t}} (1 - \bar{P}_{ia_i+1}(t))dt. \tag{5.2}$$

Доказательство утверждения приведено в Приложении.

С учетом (5.2) преобразуем критерий качества (3.3). В результате получим

$$\Upsilon_2 = \int_0^{\bar{t}} \left[\eta\lambda(t)^{\mathrm{T}}\lambda(t) + \sum_{i=1}^{I} \bar{P}_{ia_i+1}(t) \right] dt \to \min_{\lambda\in\Lambda}. \tag{5.3}$$

Математическим моделям (4.2), (5.3) соответствует гамильтониан

$$H = \sum_{i=1}^{I} \left(\psi_i^{\mathrm{T}} A_i \mathrm{P}_i + \bar{P}_{ia_i+1}(t) \right) + \eta\lambda^{\mathrm{T}}\lambda. \tag{5.4}$$

Уравнения для сопряженных переменных определяются соотношениями

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial}{\partial \mathrm{P}_i}\mathrm{H} = -(\xi_i B_{i1}^{\mathrm{T}} + \lambda_i B_{i2}^{\mathrm{T}})\psi_i - U_i, \quad i = \overline{1, I}, \quad t \in \Omega, \tag{5.5}$$

где значения матриц B_{i1}, B_{i2}, как и в первом случае, определяются в соответствии с (П.2); $U_i \in R^{a_i+2}$, $U_i = [0\ 0\ \ldots\ \ 0\ 1]^{\mathrm{T}}$.

В соответствии с (5.3) краевые условия для (5.5) имеют вид $\psi_i(\bar{t}) = 0$, $i = \overline{1, I}$, а согласно (5.4) структура формируемых управлений совпадает с (4.9).

Для решения ДТКЗ (4.2), (5.5), как и для вероятностного критерия, необходимо использовать метод последовательных приближений Крылова–Черноусько. Порядок его применения аналогичен порядку, рассмотренному в предыдущем разделе.

Структура математических моделей в рассматриваемом случае позволяет проводить поканальную декомпозицию вычислительной процедуры оптимизации.

Необходимо отметить, что в случае, когда длительность интервала наблюдения не согласована со структурой хотя бы одной из плотностей распределения $w_i(t)$, $i = \overline{1, I}$ (т.е. равенство (5.1) выполняется лишь приближенно), получаемый результат переходит в категорию субоптимальных.

6. Примеры синтеза управления распределениями интенсивностей поисковых усилий в многоканальной ПС с конечным числом линий обработки в каждом канале

Пример 1. Рассмотрим двухканальную ПС ($I = 2$), у которой в первом канале три линии обработки, а во втором – четыре. Фиктивные динамические системы, соответствующие такой ПС, описываются математической моделью, состоящей из двух систем уравнений (4.2), для которых соответственно $a_1 = 3$ и $a_2 = 4$. Критерий качества (3.2) в этом случае приобретает вид

$$\Upsilon_1 = \bar{P}_{14}(\bar{t}) + \bar{P}_{25}(\bar{t}) - \bar{P}_{14}(\bar{t})\bar{P}_{25}(\bar{t}) + \eta \int\limits_0^{\bar{t}} \left(\lambda_1^2(t) + \lambda_2^2(t)\right) dt \to \min_{\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda}. \tag{6.1}$$

Решение прямых систем уравнений (4.2) при $i = 1, 2$ проводилось с начальными условиями, соответствующими (4.3),

$$\begin{aligned} &\bar{P}_{10}(0) = \bar{P}_{20}(0) = 1, \\ &\bar{P}_{11}(0) = \bar{P}_{12}(0) = \bar{P}_{13}(0) = \bar{P}_{14}(0) = 0, \\ &\bar{P}_{21}(0) = \bar{P}_{22}(0) = \bar{P}_{23}(0) = \bar{P}_{24}(0) = \bar{P}_{25}(0) = 0 \end{aligned}$$

на интервале времени поиска $\Omega = [0, 5]$. Здесь и далее параметры представлены в безразмерных переменных.

Сопряженные системы (4.6) полностью определяются структурами матриц (П.2), для которых

$$B_{11}, B_{12} \in R^{5\times5}; \quad B_{21}, B_{22} \in R^{6\times6}. \tag{6.2}$$

Их решение проводилось в обратном времени с конечными условиями, соответствующими (4.7)

$$\begin{aligned} \psi_1(\bar{t}) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \left[1 - \bar{P}_{25}(\bar{t})\right] \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \\ \psi_2(\bar{t}) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left[1 - \bar{P}_{14}(\bar{t})\right] \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Интенсивности появления ОН в подобластях X_1, X_2 зоны поиска ПС полагались линейными функциями времени: $\xi_1(t) = 2 + 0{,}4t$, $\xi_2(t) = 3 - 0{,}1t$ (прямые соответственно *1*, *2* на рис. 1).

Начальные распределения интенсивностей поисковых усилий λ_1^0, λ_2^0 полагались равномерными на интервале наблюдения (прямые *1*, *2* на рис. 2). Решения уравнений на интервале времени поиска проводилось с шагом $\Delta = 10^{-3}$.

Зависимость вероятности $p_\Sigma(\bar{t})$ выхода состояний хотя бы одного из двух поисковых каналов ПС из множеств состояний соответственно

$$S_1 = \{s_{10},\ s_{11},\ \ldots,\ s_{13}\}, \quad S_2 = \{s_{20},\ s_{21},\ \ldots,\ s_{24}\} \tag{6.4}$$

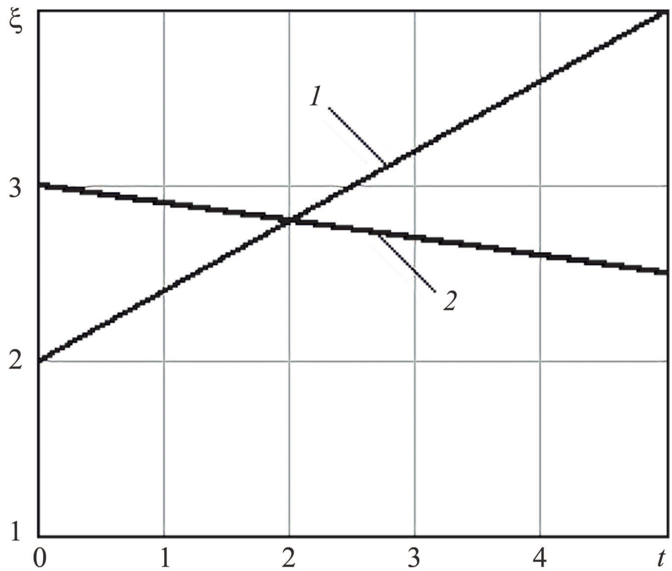

Рис. 1

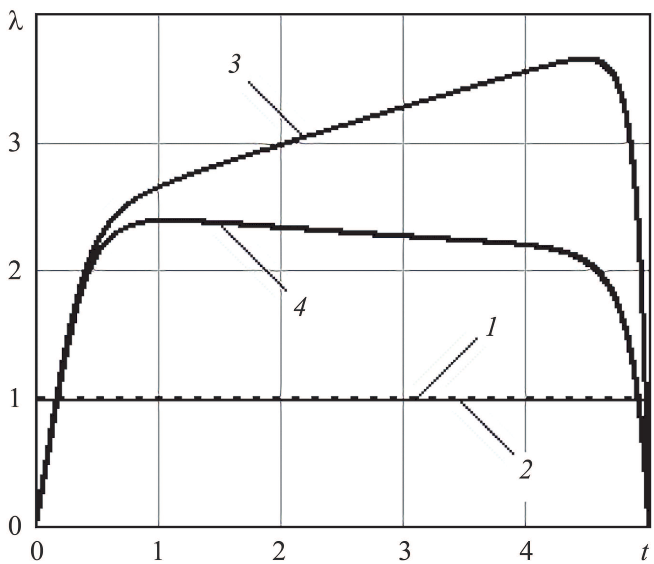

Рис. 2

от номера итерации q в процедуре последовательных приближений Крылова–Черноусько представлена на рис. 3.

Вариации вероятностной составляющей целевого функционала критерия (6.1) становятся незначительными уже при $q \geq Q = 7$. Структура оптимальных законов управления распределением интенсивностей поисковых усилий представлена на рис. 2. Для первого канала – кривая *3*, для второго – кривая *4*.

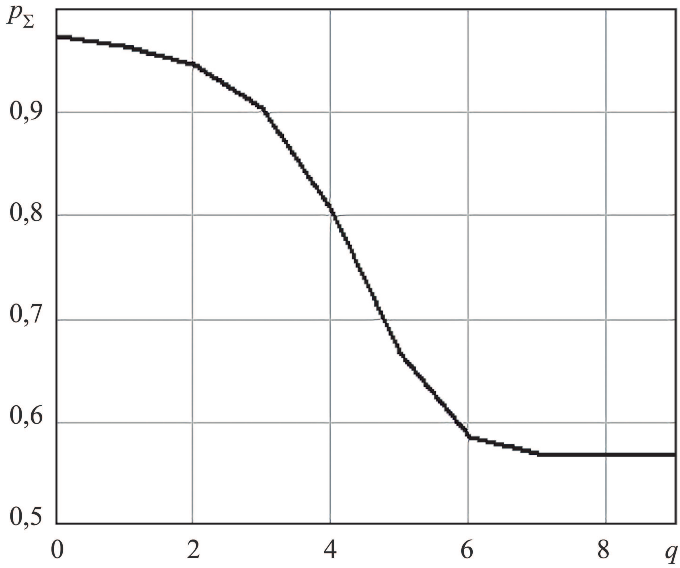

Рис. 3

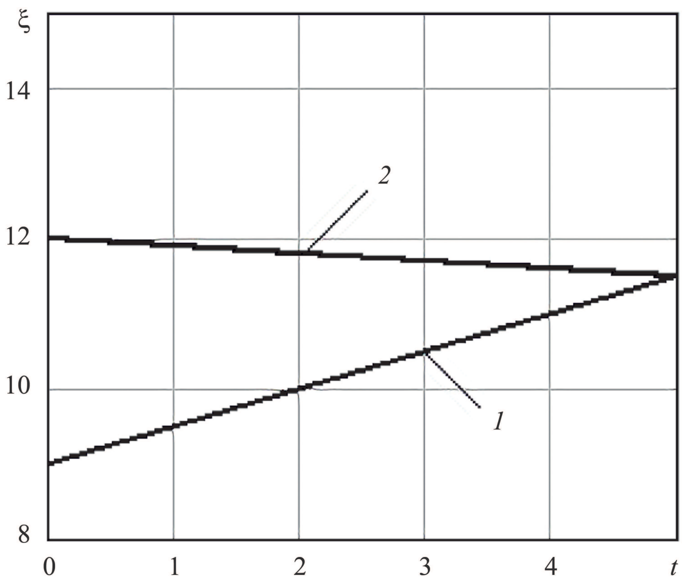

Рис. 4

Необходимо отметить, что характер полученных зависимостей согласуется с характером вариации интенсивностей появления ОН из потока (рис. 1) в соответствующих каналах ПС.

Относительный выигрыш от оптимизации применительно к вероятностному показателю составил $\delta = \frac{p_{\Sigma 0}(\bar{t}) - p_{\Sigma \text{ОП}}(\bar{t})}{p_{\Sigma 0}(\bar{t})} \simeq 0{,}42$, где $p_{\Sigma 0}(\bar{t})$ – вероятность выхода состояний хотя бы одного из двух поисковых каналов ПС из мно-

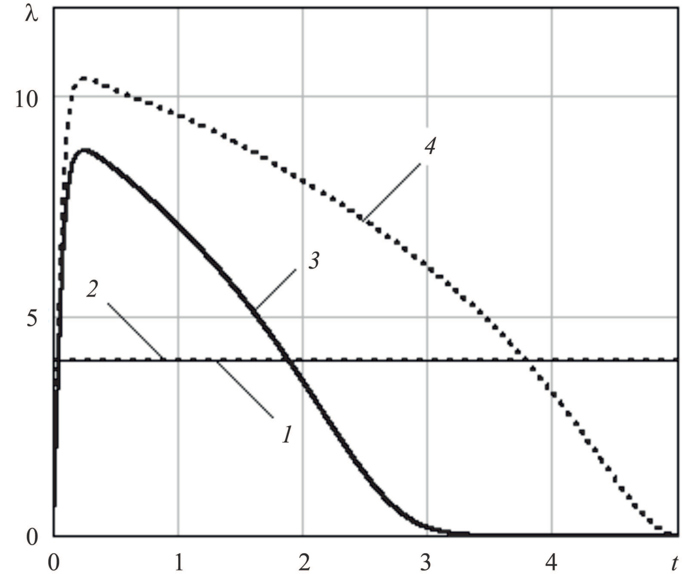

Рис. 5

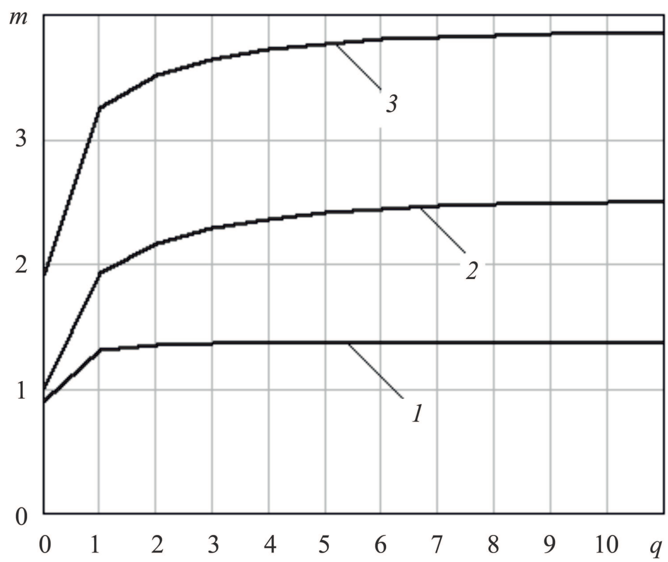

Рис. 6

жеств (6.4) при λ_1^0, λ_2^0, $p_{\Sigma \text{ОП}}(\bar{t})$ – аналогичный показатель при $\lambda_i^Q(t) \simeq \simeq \lambda_{i\text{ОП}}(t)$, $i = 1, 2$.

Пример 2. Рассмотрим задачу синтеза управления распределениями интенсивностей поисковых усилий для рассмотренной в первом примере двухканальной поисковой системы на основе временного критерия качества (3.3)

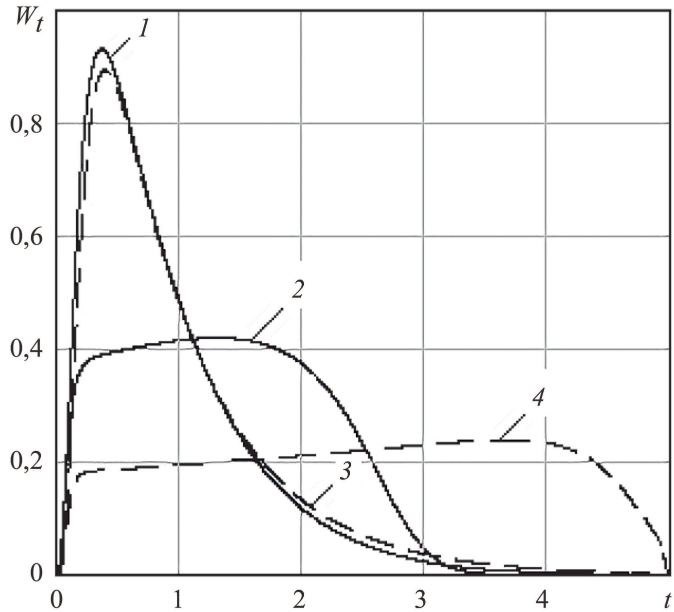

Рис. 7

в форме (5.3). Его конкретизация для рассматриваемого случая имеет вид

$$\Upsilon_2 = \int\limits_0^{\bar{t}} \left[\eta(\lambda_1^2(t) + \lambda_2^2(t)) + \bar{P}_{14}(t) + \bar{P}_{25}(t)\right] dt \to \min_{\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda}. \tag{6.5}$$

Прямые системы уравнений остаются неизменными и определяются формой (4.2). Системы уравнения для сопряженных переменных соответствуют (5.5) с матрицами (6.2), векторами $U_1 \in R^5$, $U_2 \in R^6$ и нулевыми конечными условиями $\psi_i(\bar{t}) = 0$, $i = 1, 2$.

Интенсивности появления ОН в X_1, X_2 полагались линейными функциями времени: $\xi_1(t) = 9 + 0{,}5t$, $\xi_2(t) = 12 - 0{,}1t$ (прямые соответственно *1*, *2* на рис. 4).

Начальные распределения интенсивностей поисковых усилий λ_1^0, λ_2^0 полагались равномерными на интервале наблюдения (прямые *1*, *2* на рис. 5).

Графики зависимостей математических ожиданий m_1 (кривая *1*) и m_2 (кривая *2*) времен нахождения каналов ПС во множествах (6.4) и их суммы (кривая *3*) от номера итерации q в процедуре последовательных приближений Крылова–Черноусько представлены на рис. 6. Изменения временных характеристик стали незначительными при $q \geq Q = 9$.

Меньший рост m_1 по сравнению с m_2 связан с меньшим количеством состояний во множестве S_1 по сравнению со множеством S_2.

Зависимости оптимальных законов управления распределением интенсивностей поисковых усилий представлены на рис. 5 соответственно для первого (кривая *3*) и второго (кривая *4*) каналов ПС. Меньшая интенсивность поиска в первом канале обусловлена меньшей интенсивностью появления в нем ОН (рис. 4).

Структура плотностей распределения вероятностей времени пребывания каналов ПС во множествах (6.4) представлены на рис. 7: для $t = 0$ кривая *1* и кривая *3* соответственно для первого и второго каналов и аналогично для $t = 5$ кривая *2* и кривая *4*.

В результате оптимизации в условиях примера суммарное математическое ожидание нахождения каналов ПС во множествах (6.4), исключающих появление очередей на обработку, возросло более чем в 2 раза.

С учетом структуры рассмотренных математических моделей несложно показать, что формируемые в результате решения оптимизационных задач интенсивности поисковых усилий как для критерия (3.2), так и для критерия (3.3) при выполнении условий утверждения 1 всегда относятся к классу неотрицательных непрерывных и ограниченных функций.

7. Заключение

Рассмотренный подход к формированию законов управления поиском ОН из пространственно-временного пуассоновского потока в многоканальной ПС ориентирован на ряд практически важных случаев, когда количество линий обработки в каналах поисковой системы конечно. Для них применение методов, связанных со сверткой бесконечной системы уравнений Колмогорова, например, в терминах математического ожидания количества необнаруженных ОН, рассмотренных, в частности, в [10], не представляется возможным.

В основе предлагаемого подхода лежит переход от бесконечномерных систем дифференциальных уравнений, описывающих вероятностные характеристики состояний каналов ПС, к конечномерным вспомогательным системам. Их размерность определяется количеством линий обработки каждого канала.

Параметрами вспомогательных систем уравнений являются вероятностные характеристика пребывания линий обработки каналов ПС во множествах состояний, не приводящих к появлению очередей на обработку. Они дают возможность подойти к решению задачи синтеза управления распределением поисковых усилий как с точки зрения минимизации вероятности выхода из рассмотренных множеств состояний хотя бы одного канала ПС, так и с точки зрения максимизации математических ожиданий времени пребывания каналов в этих множествах.

Решение оптимизационной задачи первого типа для вероятностного критерия качества (3.2) является более сложным в силу структуры терминальной составляющей этого критерия. Ее размерность характеризуется суммарной размерностью всех вспомогательных систем уравнений (4.2) и определяется соотношением $\sum_{i=1}^{I} a_i + 2I$.

Во втором случае возможна поканальная декомпозиция общей процедуры формирования законов управления интенсивностями поиска.

В силу достаточно высокого уровня сложности возникающих оптимизационных задач их решение целесообразно проводить с использование метода последовательных приближений Крылова–Черноусько с применением принципа частичного обновления управления. Приведенные примеры показали возможность эффективного их решения с помощью рассмотренного подхода и проиллюстрировали выигрыш, получаемый от оптимизации.

Необходимо отметить, что рассмотренный подход может быть обобщен на случай, когда интенсивности поиска ОН в различных каналах ПС не являются независимыми и удовлетворяют ограничению $\sum_{i=1}^{I} \lambda_i(t) = \lambda_\Sigma = \text{const}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1

Поставим в соответствие системе уравнений (2.4) граф состояний [38], представленный на рис. 8.

Граф отражает последовательность вариации состояний i-го канала с ограниченным числом линий обработки. Выделим на нем состояния, соответствующие множеству

$$(\text{П}.1) \qquad S_i = \left\{ s_{i0},\ s_{i1},\ \ldots,\ s_{ik}\big|_{k=a_i} \right\} \to \left\{ \bar{s}_{i0},\ \bar{s}_{i1}, b\ \ldots,\ \bar{s}_{ik}\big|_{k=a_i} \right\} = \bar{S}_i.$$

Для (П.1) построим вспомогательный граф состояний (рис. 9) как фрагмент исходного графа (рис. 8) с добавлением одного только поглощающего состояния $\bar{s}_{ia_i+1}$.

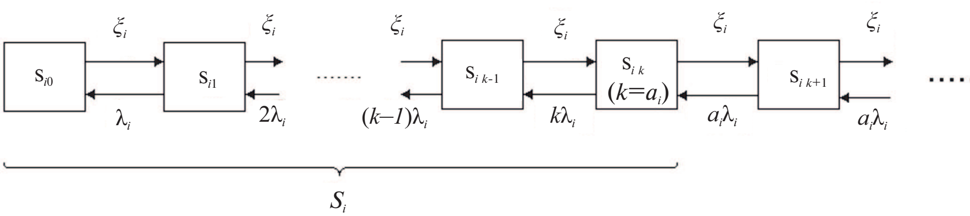

Рис. 8

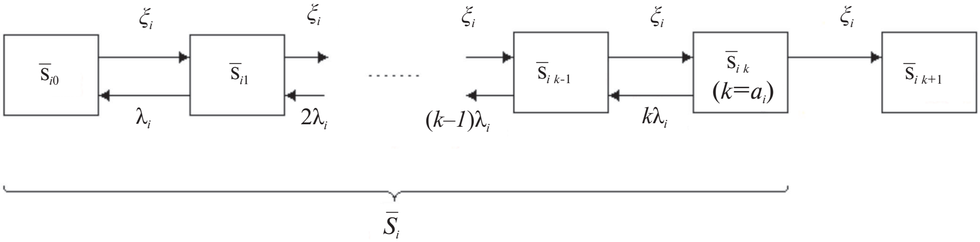

Рис. 9

Можно показать [38], что вариация во времени вероятностных характеристик $\bar{P}_{i0}(t), \bar{P}_{i1}(t), \ldots, \bar{P}_{ia_i}(t), \bar{P}_{ia_i+1}(t)$ состояний $\left\{\bar{s}_{i0}, \bar{s}_{i1}, \ldots, \bar{s}_{ik}\big|_{k=a_i}, \bar{s}_{ia_i+1}\right\}$, соответствующих графу, изображенному на рис. 9, описывается системой дифференциальных уравнений (4.2). Для начальных условий (4.3) вероятность события, связанного с однократным выходом из множества $\bar{S}_i$ (соответственно и из множества S_i), определяется вероятностью перехода из состояния $\bar{s}_{ik}\big|_{k=a_i}$ в $\bar{s}_{i\,a_i+1}$, т.е. соответствует составляющей решения системы (4.2), определяемой вероятностью $\bar{P}_{i\,a_i+1}(t)$.

Утверждение доказано.

Структура матриц B_{i1}, $B_{i2} \in R^{(a_i+2)\times(a_i+2)}$

(П.2)
$$B_{i1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{i2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -a_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Доказательство утверждения 2

Запишем последнее уравнение вспомогательной системы уравнений (4.2), соответствующей i-му каналу

$$\dot{\bar{P}}_{ia_i+1}(t) = \xi_i(t)\bar{P}_{ia_i}(t), \quad \bar{P}_{ia_i+1}(0) = 0. \tag{П.3}$$

Поскольку параметр $\bar{P}_{ia_i+1}(t)$ имеет смысл вероятности события, связанного с выходом i-го канала ПС из множества S_i (2.5), то его производная (П.3) определяет плотность распределения $w_i(t)$ случайной длительности τ_i пребывания этого канала в S_i. Иными словами, [38]

$$w_i(t) = \xi_i(t)\bar{P}_{ia_i}(t). \tag{П.4}$$

Домножим теперь левую и правую части (П.3) на t и проинтегрируем на интервале наблюдения Ω. В результате с учетом (П.4) получим

$$\int\limits_0^{\bar{t}} t\dot{\bar{P}}_{ia_i+1}(t)dt = \int\limits_0^{\bar{t}} t\xi_i(t)\bar{P}_{ia_i}(t)dt = \int\limits_0^{\bar{t}} tw_i(t)dt. \tag{П.5}$$

Из (П.5) следует

$$\int_0^{\bar{t}} t\dot{\bar{P}}_{ia_i+1}(t)dt = m_i, \tag{П.6}$$

где $m_i = \int_0^{\bar{t}} tw_i(t)dt$ – математическое ожидание случайной длительности τ_i.

Интегрируя по частям левую часть (П.6), получим

$$t\bar{P}_{ia_i+1}(t)\Big|_0^{\bar{t}} - \int_0^{\bar{t}} \bar{P}_{ia_i+1}(t)dt = m_i. \tag{П.7}$$

Или с учетом условия (5.1)

$$\int_0^{\bar{t}} (1 - \bar{P}_{ia_i+1}(t))dt = m_i. \tag{П.8}$$

Утверждение доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хеллман О.* Введение в теорию оптимального поиска. М.: Наука, 1985.
2. *Альведе Р., Вегснер И.* Задачи поиска. М.: Мир, 1985.
3. *Абчук В.А., Суздаль В.Г.* Поиск объектов. М.: Сов. радио, 1977.
4. *Аркин В.И.* Задача оптимального распределения поисковых усилий // Теория вероятностей и ее применения. 1964. Т. 9. № 1. С. 179–180.
5. *Болдырихин Н.В., Хуторцев В.В.* Управление наблюдениями за потоками случайных процессов // АиТ. 2006. № 12. С. 43–55.
   Boldyrikhin N.V., Khutortsev V.V. Control of Observations Over Random Processes Fluxes // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. No. 12. P. 1900–1912.
6. *Хуторцев В.В., Баранов И.В.* Оптимизация управления наблюдениями в задаче дискретного поиска для пуассоновской модели потока объектов наблюдения // Радиотехника. 2010. № 3. С. 20–24.
7. *Баранов И.В., Хуторцев В.В.* Текущая оптимизация поиска объектов для модели распределенного пуассоновского потока их появления // Изв. РАН. ТиСУ. 2011. № 6. С. 3–13.
8. *Хуторцев В.В.* Оптимизация последовательно-параллельного поиска объектов для модели распределенного пуассоновского потока их появления // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 1. С. 31–41.
9. *Хуторцев В.В.* Управление поиском объектов из пространственно-временного пуассоновского потока при неоднородной области обзора информационно-измерительной системы // АиТ. 2021. № 9. С. 133–149.
   Khutortsev V.V. Controlled Search for Targets Arriving According to a Spatio-Temporal Poisson Point Process by an Information Measurement System with Inhomogeneous Scope // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 9. P. 1568–1580.

10. *Хуторцев В.В.* Управление поиском объектов наблюдения из пространственно-временного пуассоновского потока в многоканальной поисковой системе // АиТ. 2023. № 1. С. 84–97.
Khutortsev V.V. Control of the Search for Observation Objects from a Spatio-Temporal Poisson Flow in a Multi-Channel Search System // Autom. Remote Control. 2023. V. 84. No. 2. P. 143–152.

11. *Попович В.В., Кожемяка В.Н., Гребцов Г.Н.* Теория обнаружения и поиска подвижных объектов. СПб.: Наука, 2016.

12. *Snayd A., Stevenson M.* Modelling stopping criteria for search results using Poisson processes // arXiv:1909.06239v1 [cs.IR] 13 sep 2019.

13. *Филимонов А.Б., Филимонов Н.Б., Тихонов В.Ю.* Планирование операций в задачах пространственного поиска объектов // Изв. ЮФУ. Технические науки. 2017. № 1–2. С. 185–197.

14. *Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б.* Оптимальное управление при случайных возмущениях. М.: Наука, 1980.

15. *Малышев В.В., Красильщиков М.Н., Карлов В.И.* Оптимизация наблюдения и управления летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1989.

16. *Григорьев Ф.Н., Кузнецов Н.А., Серебровский А.П.* Управление наблюдениями в автоматических системах. М.: Наука, 1986.

17. *Миллер Б.М.* Обобщенная оптимизация в задачах управления наблюдениями // АиТ. 1991. № 10. С. 83–92.
Miller B.M. Generalized optimization in observation control problems // Autom. Remote Control. 1991. V. 52. No. 10. P. 1397–1404.

18. *Асланов В.С., Пироженко А.В., Волшенюк О.Л., Кислов А.В., Ящук А.В.* Определение времени выживания космической тросовой системы // Изв. Самар. Науч. центра РАН. 2010. Т. 12. № 4. С. 138–143.

19. *Мясников Д.В., Семенихин К.В.* Управление параметрами одноканальной системы массового обслуживания при наличии ограничений // Изв. РАН. ТиСУ. 2016. № 1. С. 66–85.

20. *Куракин С.З., Онуфрей А.Ю., Разумов А.В.* Исследование вариантов построения информационно управляющих систем на основе сетевых моделей систем массового обслуживания // Информация и автоматизация. 2024. Т. 6. Вып. 23. С. 1609–1642.

21. *Лихтциндер Б.Я., Моисеев В.И.* Групповые пуассоновские и гиперпуассоновские модели пакетного трафика // i-Methods. 2022. Т. 14. № 3. С. 1–14.

22. *Лихтциндер Б.Я., Привалов А.Ю.* Обобщение формул для моментов очереди при неординарном пуассоновском потоке для очередей пакетов в системах телекоммуникаций // Проблемы передачи информации. 2023. Т. 59. Вып. 4. С. 32–37.

23. *Бутов А.А., Галимов Л.А.* Оптимальное управление интенсивностью входящего потока многоканальной СМО с роутером при эпизодически наблюдаемой длине очереди на приборах // Современные проблемы науки и образования. 2015. № 2. С. 758–759.

24. *Сатрутдинова А.М.* Оптимизация работы электросетевого предприятия на основе систем массового обслуживания // Вестник науки. 2024. Т. 1. № 2(71). С. 97–99.

25. *Васильев А.П., Бандурин И.И.* Математические модели оптимальной структуры оперативного обслуживания электрических сетей // Вестник ИГЭУ. 2010. Вып. 2. С. 1–7.

26. *Миллер Б.М., Миллер Г.Б., Семенихин К.В.* Методы синтеза оптимального управления марковским процессом с конечным множеством состояний при наличии ограничений // АиТ. 2011. № 2. С. 111–130.
Miller B.M., Miller G.B., Semenikhin K.V. Methods to Design Optimal Control of Markov Process with Finite State Set in the Presence of Constraints // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 2. P. 571–582.

27. *Кингман Дж.* Пуассоновские процессы. М.: МЦНМО, 2007, 136 с.

28. *Daley D.J., Vere-Jones D.* An Introduction to the Theory of Point Processes. New York: Springer, 2013. 702 p.

29. *Last G.* Stochastic Analysis for Poisson Processes / Peccati G. and Reitzner M. (eds)

30. *Хуторцев В.В.* Плотность интенсивности пространственно-временного пуассоновского потока с нулевой вероятностью наступления событий на стохастических подмножествах его пространственной области определения // Математика и математическое моделирование. 2020. № 3. С. 15–28.

31. *Хинчин А.Я.* Математические методы теории массового обслуживания // Тр. МИАН СССР. 1955. Т. 49. С. 3–122.

32. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1984.

33. *Колмогоров А.Н.* Проблема ожидания / Теория вероятностей и математическая статистика: Сб. статей. М.: Наука, 1986. С. 106–111.

34. *Orsingher T., Cesari R., Mosco V.* An introduction to Poisson Processes and their generalizations. IVASS. Instituto Per la Vigilanza Sulle Assicurazioni, 2022.

35. *Rang G., Shen Z., Zuo H.* Hitting probabilities of weighten Poisson processes with different intensities and their subordinations // Acta Math. Sci. 2021. V. 41. No. B(1). P. 67–84.

36. *Feller W.* On Boundaries and Lateral Conditions for the Kolmogorov Differential Equations // Ann. Math. 1957. V. 65. No. 3. P. 527–570.

37. *Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985.

38. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. М.: Наука, 1991.

39. *Крылов И.А., Черноусько Ф.Л.* О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления // ЖВМ и МФ. 1962. Т. 2. № 6. С. 142–153.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 28.11.2023

После доработки 08.02.2025

Принята к публикации 24.02.2025