



*Российская Академия Наук*

# **А АВТОМАТИКА И МЕЛЕМЕХАНИКА**

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

**6**

**И Ю Н Ъ**

**Москва**

**2025**

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,  
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),  
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

**Главный редактор:**

Галяев А.А.

**Заместители главного редактора:**

Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

**Ответственный секретарь:**

Самохин А.С.

**Редакционный совет:**

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кузнецов О.П., Кулешов А.П.,  
Куржанский А.Б., Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Попков Ю.С.,  
Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

**Редакционная коллегия:**

Алескеров Ф.Т., Арутюнов А.В., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В.,  
Вишневский В.М., Воронцов К.В., Граничин О.Н., Жилиякова Н.Ю.,  
Каравай М.Ф., Кибзун А.И., Краснова С.А., Крищенко А.П., Кузнецов Н.В.,  
Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И., Маликов А.И., Матасов А.И.,  
Меерков С.М. (США), Мещеряков Р.В., Миллер Б.М., Михальский А.И.,  
Моржин О.В., Мунасыпов Р.А., Назин А.В., Немировский А.С. (США),  
Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е.,  
Поляков А.Е. (Франция), Протасов В.Ю., Рапопорт Л.Б., Родионов И.В.,  
Сельвесюк Н.И., Соболевский А.Н., Степанов О.А., Филимонюк Л.Ю.,  
Фрадков А.Л., Хоров Е.М., Цыбаков А.Б. (Франция), Чеботарев П.Ю.,  
Чхартишвили А.Г., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: 8 (495) 198-17-20, доб. 1443

Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

ФГБУ «Издательство «Наука»

© 2025 г. И.Б. ФУРТАТ, д-р техн. наук (cainenash@mail.ru)  
(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург;  
Санкт-Петербургский государственный университет)

## ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О КРУГАХ ГЕРШГОРИНА С ПРИМЕНЕНИЕМ К АНАЛИЗУ И СИНТЕЗУ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ<sup>1</sup>

Рассмотрено применение теоремы о кругах Гершгорина и некоторых производных от нее результатов для оценки собственных значений матриц. Развиваются полученные результаты для создания области локализации собственных значений матриц с интервально неопределенными постоянными и нестационарными элементами. Вводится понятие *ε-кругов* для получения более точных оценок данных областей, чем при использовании кругов Гершгорина. Полученные результаты применены к анализу устойчивости сетевых систем, где показано, что предложенные методы позволяют анализировать сеть с гораздо большим числом агентов, чем при использовании методов решения линейных матричных неравенств в CVX и Yalmip/SeDuMi, а также алгоритмов eig (для вычисления собственных чисел матрицы) и luqr (для решения уравнения Ляпунова) в MatLab. Показано, что если разработанные методы применять не к самой системе, а к результату, полученному с помощью метода функций Ляпунова, то можно исследовать системы с матрицами без диагонального преобладания. Это позволило рассмотреть модификацию условия Демидовича на системы с нестационарными параметрами и синтез закона управления для нестационарных систем с матрицами без диагонального преобладания. Все полученные результаты иллюстрируются численным моделированием.

*Ключевые слова:* теорема о кругах Гершгорина, область локализации собственных значений матрицы, устойчивость, управление.

**DOI:** 10.31857/S0005231025060012, **EDN:** IJPPBD

### 1. Введение

При анализе свойств динамических систем и синтезе закона управления одним из ключевых вопросов является устойчива ли система. В настоящее время для определения устойчивости применяются различные методы и подходы: вычисление собственных значений матрицы [1], различные алгебраические и частотные критерии устойчивости [1], метод функций Ляпунова [1], дивергентные методы исследования устойчивости [2] и т.д.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена в ИПМаш РАН при поддержке госзадания № FFNF-2024-0008 (№ 124041100006-1 в ЕГИСУ НИОКТР).

Данная статья сконцентрирована на построении области локализации собственных значений матриц с применением полученного результата к анализу и синтезу систем управления. Для построения области локализации собственных значений будет рассмотрена теорема о кругах Гершгорина [3–5] (далее просто теорема Гершгорина) и некоторые следствия из нее, а также будут получены новые результаты по обобщению данной теоремы на случай параметрически неопределенных матриц и матриц с нестационарными параметрами.

Теорема Гершгорина и различные ее модификации неоднократно рассматривались в литературе. Интерес к данной теореме связан с простым способом определения области локализации собственных значений. Зачастую теорема Гершгорина приводит к изучению систем, содержащих матрицы с диагональным преобладанием. В частности, такие системы изучались в [6–8] и были названы *сверхустойчивыми* (если все круги Гершгорина целиком находятся в левой полуплоскости комплексной плоскости). Показано, что анализ и синтез систем управления приводит к задачам линейного программирования. В [9–13] получены уточняющие области локализации в виде усредненных оценок, использовании  $l_1$  векторных норм и т.д., а в [14, 15] предложен синтез статических линейных законов управления с использованием теоремы Гершгорина. В [16–18] рассмотрено применение теоремы Гершгорина к исследованию устойчивости моделей в химической промышленности, моделей электрических сетей с трехфазными генераторами и биологических моделей эпидемии.

Анализ литературы показал, что при построении области локализации собственных значений матриц теорема Гершгорина имеет преимущества в простоте ее применения, выпуклой процедуре поиска области локализации и небольших вычислительных затратах. Однако ограничения в применении данной теоремы связаны с завышенными оценками области локализации и рассмотрением матриц с диагональным преобладанием (или приводимым к ним с использованием диагональной матрицы для преобразования базиса). Требование диагонального преобладания является существенно ограничительным и при синтезе закона управления.

В данной статье будет рассмотрено решение следующих задач:

- 1) будут рассмотрены оценки и области локализации собственных значений постоянной матрицы;
- 2) будут получены области локализации собственных значений матрицы с интервальной параметрической неопределенностью;
- 3) в качестве примеров применения полученных результатов будут рассмотрены:
  - а) задача синхронизации сетевых систем с большим числом скалярных агентов, где будет показано, что предложенные результаты могут быть применимы для анализа устойчивости гораздо большего числа агентов, чем при использовании методов решения линейных матрич-

ных неравенств в CVX и Yalmip/SeDuMi, а также алгоритмов eig (для вычисления собственных чисел матрицы) и lyap (для решения уравнения Ляпунова) в MatLab;

- б) модификация условия Демидовича (об устойчивости линейных систем с нестационарными параметрами [19, теорема 6.1; 23]) на системы с интервально неопределенными нестационарными параметрами и с матрицей исходной системы без диагонального преобладания;
- в) задача поиска матрицы в линейном законе управления с использованием линейных матричных неравенств для объектов с матрицей без диагонального преобладания.

В статье используются следующие *обозначения*:  $\mathbb{C}$  – множество комплексных чисел,  $\mathbb{R}^n$  –  $n$ -мерное евклидово пространство с векторной нормой  $|\cdot|$ ,  $\mathbb{R}^{n \times m}$  – множество всех действительных матриц размерности  $n \times m$  с индуцированной матричной нормой  $\|Q\|$ ,  $\lambda_i\{Q\}$  –  $i$ -е собственное число квадратной матрицы  $Q$ ,  $\Re\{\lambda_i\{Q\}\}$  – действительная часть  $i$ -го собственного числа квадратной матрицы  $Q$ ,  $\Im\{\lambda_i\{Q\}\}$  – мнимая часть  $i$ -го собственного числа квадратной матрицы  $Q$ ,  $I$  – единичная матрица соответствующего порядка, матрица  $Q \in \mathbb{R}^{n \times m}$  также будет обозначаться в виде  $(q_{ij})$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

## 2. Оценки области локализации собственных чисел

### 2.1. Постоянные матрицы

В данном разделе будут получены оценки области локализации собственных чисел матрицы  $Q = (q_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  с постоянными элементами. Для уточнения данных оценок будут дополнительно рассмотрены диагональные матрицы  $D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_n\}$  и  $H = \text{diag}\{h_1, \dots, h_n\}$ . Введем обозначения сумм по строкам и столбцам абсолютных значений элементов матриц  $Q$ ,  $D^{-1}QD$  и  $H^{-1}QH$  без диагональных элементов в виде

$$\begin{aligned}
 R_i(Q) &= \sum_{j=1, j \neq i}^n |q_{ij}|, & C_j(Q) &= \sum_{i=1, i \neq j}^n |q_{ij}|, \\
 R_i^D(Q) &= \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{d_j}{d_i} |q_{ij}|, & C_j^D(Q) &= \sum_{i=1, i \neq j}^n \frac{d_i}{d_j} |q_{ij}|, \\
 R_i^H(Q) &= \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{h_j}{h_i} |q_{ij}|, & C_j^H(Q) &= \sum_{i=1, i \neq j}^n \frac{h_i}{h_j} |q_{ij}|.
 \end{aligned}$$

Ниже представлены две леммы, которые позволяют получить оценки снизу и сверху на действительные части собственных чисел матрицы  $Q$ .

*Лемма 1.* Рассмотрим матрицу  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Существуют  $d_i > 0$ ,  $h_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  такие, что справедливы следующие оценки:

$$(1) \quad \begin{aligned} \max_i \{\Re\{\lambda_i\{Q\}\}\} &\leq \sigma_{\max}^D\{Q\} \leq \sigma_{\max}\{Q\}, \\ \min_i \{\Re\{\lambda_i\{Q\}\}\} &\geq \sigma_{\min}^H\{Q\} \geq \sigma_{\min}\{Q\}, \end{aligned}$$

где

$$(2) \quad \begin{aligned} \sigma_{\max}(Q) &= \min \left\{ \max_i \{q_{ii} + R_i(Q)\}, \max_j \{q_{jj} + C_j(Q)\} \right\}, \\ \sigma_{\min}(Q) &= \max \left\{ \min_i \{q_{ii} - R_i(Q)\}, \min_j \{q_{jj} - C_j(Q)\} \right\}, \\ \sigma_{\max}^D(Q) &= \min_D \left\{ \max_i \{q_{ii} + R_i^D(Q)\}, \max_j \{q_{jj} + C_j^D(Q)\} \right\}, \\ \sigma_{\min}^H(Q) &= \max_H \left\{ \min_i \{q_{ii} - R_i^H(Q)\}, \min_j \{q_{jj} - C_j^H(Q)\} \right\}. \end{aligned}$$

*Доказательство.* Согласно теореме Гершгорина [4] все собственные значения матрицы  $Q$  заключены в объединении  $n$  кругов  $\cup_{i=1}^n \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - q_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |q_{ij}| \right\}$ . Поскольку матрица  $Q^T$  имеет те же собственные значения, что и матрица  $Q$ , то все собственные значения  $Q$  также заключены в объединении  $n$  кругов  $\cup_{i=1}^n \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - q_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |q_{ji}| \right\}$ . Следовательно,  $\sigma_{\min}\{Q\} \leq \min_i \{\Re\{\lambda_i\{Q\}\}\}$  и  $\sigma_{\max}\{Q\} \geq \max_i \{\Re\{\lambda_i\{Q\}\}\}$ .

Теперь рассмотрим диагональную матрицу  $D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_n\}$ . Известно, что собственные значения матриц  $D^{-1}QD$  и  $Q$  не меняются. Однако за счет варьирования коэффициентов  $d_i$  могут быть изменены радиусы кругов Гершгорина для матрицы  $Q$  в виде  $\cup_{i=1}^n \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - q_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{d_j}{d_i} |q_{ij}| \right\}$  и для матрицы  $Q^T$  в виде  $\cup_{i=1}^n \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - q_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{d_i}{d_j} |q_{ji}| \right\}$ . Следовательно, существуют  $d_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  такие, что  $\sigma_{\max}^D\{Q\} \leq \sigma_{\max}\{Q\}$ . Однако невозможно одновременно уменьшить радиусы всех кругов варьированием  $d_i$ , т.е. при уменьшении радиусов одних кругов увеличиваются радиусы других. Поэтому для получения оценки  $\sigma_{\min}^H\{Q\} \geq \sigma_{\min}\{Q\}$  используется матрица  $H$  вместо  $D$ .

*Лемма 2.* Рассмотрим матрицу  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Существуют  $d_i > 0$ ,  $h_i > 0$   $i = 1, \dots, n$  и  $\alpha, \beta \in [0, 1]$  такие, что справедливы следующие оценки:

$$(3) \quad \begin{aligned} \max_i \{\Re\{\lambda_i\{Q\}\}\} &\leq \sigma_{\max}^{D,\alpha}\{Q\} \leq \sigma_{\max}^\alpha\{Q\}, \\ \min_i \{\Re\{\lambda_i\{Q\}\}\} &\geq \sigma_{\min}^{H,\beta}\{Q\} \geq \sigma_{\min}^\beta\{Q\}, \end{aligned}$$

где

$$(4) \quad \begin{aligned} \sigma_{\max}^{\alpha}(Q) &= \min_{\alpha} \left\{ \max_i \{q_{ii} + [R_i(Q)]^{\alpha} [C_i(Q)]^{1-\alpha}\} \right\}, \\ \sigma_{\min}^{\beta}(Q) &= \max_{\beta} \left\{ \min_i \{q_{ii} - [R_i(Q)]^{\beta} [C_i(Q)]^{1-\beta}\} \right\}, \\ \sigma_{\max}^{D,\alpha}(Q) &= \min_{D,\alpha} \left\{ \max_i \{q_{ii} + [R_i^D(Q)]^{\alpha} [C_i^D(Q)]^{1-\alpha}\} \right\}, \\ \sigma_{\min}^{H,\beta}(Q) &= \max_{H,\beta} \left\{ \min_i \{q_{ii} - [R_i^H(Q)]^{\beta} [C_i^H(Q)]^{1-\beta}\} \right\}. \end{aligned}$$

*Доказательство.* Согласно теореме Островского [4] все собственные числа матрицы  $Q$  заключены в объединении  $n$  кругов  $\cup_{i=1}^n \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - q_{ii}| \leq \left[ \sum_{j=1, j \neq i}^n |q_{ij}| \right]^{\alpha} \left[ \sum_{j=1, j \neq i}^n |q_{ji}| \right]^{1-\alpha} \right\}$ . Следовательно, существует  $\alpha$  такое, что  $\sigma_{\max}^{\alpha}\{Q\} \geq \max_i \{\Re\{\lambda_i\{Q\}\}\}$ . Аналогично рассуждая получим, что существует  $\beta$  такое, что  $\sigma_{\min}^{\beta}\{Q\} \leq \min_i \{\Re\{\lambda_i\{Q\}\}\}$ .

За счет варьирования коэффициентов  $d_i$  могут быть изменены радиусы кругов  $\cup_{i=1}^n \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - q_{ii}| \leq \left[ \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{d_j}{d_i} |q_{ij}| \right]^{\alpha} \left[ \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{d_j}{d_i} |q_{ji}| \right]^{1-\alpha} \right\}$ . Следовательно, существуют  $d_i, i = 1, \dots, n$  и  $\alpha$  такие, что  $\sigma_{\max}^{D,\alpha}\{Q\} \leq \sigma_{\max}^{\alpha}\{Q\}$ . Из аналогичных рассуждений следует, что существуют  $h_i, i = 1, \dots, n$  и  $\beta$  такие, что  $\sigma_{\min}^{H,\beta}\{Q\} \leq \sigma_{\min}^{\beta}\{Q\}$ .

*Следствие 1.* Если любая оценка сверху в леммах 1 и 2 принимает отрицательное значение, то она является оценкой степени устойчивости, понятие которой было введено Я.З. Цыпкинским и П.В. Бромбергом в [20].

*Следствие 2.* Из доказательств лемм 1 и 2 также следует, что пересечением соответствующих кругов можно найти область локализации собственных значений матрицы  $Q$ , откуда можно найти не только оценки сверху и снизу на действительные части собственных значений, но и оценку сверху на мнимую часть, которую обозначим как  $\hat{\mathfrak{S}}\{Q\} \geq \max_i \{\Im\{\lambda_i\{Q\}\}\}$ . Значение  $\hat{\mathfrak{S}}\{Q\}$  определяется как максимальное значение пересечения кругов вдоль мнимой оси. Если оценка сверху действительной части собственного числа матрицы  $Q$  имеет отрицательное значение, то можно получить оценку колебательности  $\mu$  в виде  $\mu \leq \hat{\mu} := \frac{\hat{\mathfrak{S}}\{Q\}}{|\max_i \{\Re\{\lambda_i\{Q\}\}\}|}$ . Хорошо известно [1], что колебательность используется для оценки перерегулирования  $\Pi$  в виде  $\Pi \leq e^{\pi/\mu}$ . Тогда новая оценка степени перерегулирования определяется как  $\Pi \leq e^{\pi/\hat{\mu}}$ .

Зная оценку степени устойчивости, оценку колебательности и оценку снизу на действительную часть собственного числа можно построить ма-

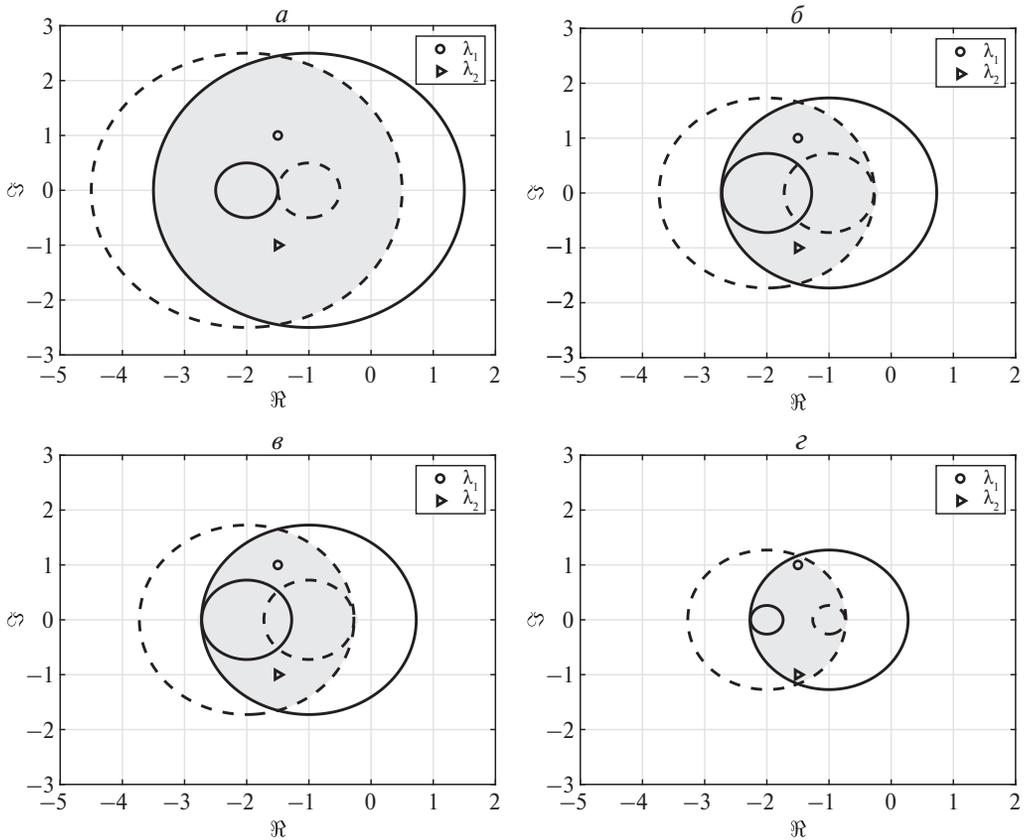


Рис. 1. Области локализации (серая область) собственных значений матрицы  $Q$  при использовании оценок (1) и (3).

жоранту и миноранту для переходного процесса линейной системы при единичном ступенчатом воздействии, что является развитием результатов С.А. Чаплыгина, Н.Н. Лузина, А.А. Фельдбаума и А.М. Рубинчика [21, 22].

Сказанное в следствиях 1 и 2 будет справедливо и в дальнейших обобщениях полученных результатов на возмущенные матрицы. Продемонстрируем сказанное в леммах и следствиях на следующем примере.

*Пример 1.* Рассмотрим матрицу  $Q = \begin{bmatrix} -1 & -2,5 \\ -0,5 & -2 \end{bmatrix}$ , собственные значения которой равны  $-1,5 \pm i$ . На рис. 1 изображены области локализации (выделены серым цветом) при использовании:

- теоремы о кругах Гершгорина (рис. 1,а);
- леммы 1 с  $H = \text{diag}\{1; 0,48\}$  и  $D = \text{diag}\{1; 2,08\}$  (рис. 1,б);
- леммы 2 с  $\alpha = \beta = 0,23$  и  $D = H = I$  (рис. 1,в);
- леммы 2 с  $\alpha = \beta = 0,01$ ,  $H = \text{diag}\{1; 0,51\}$  и  $D = \text{diag}\{1; 1,96\}$  (рис. 1,г);

Сплошные круги соответствуют кругам, радиусы которых вычислены по строкам матрицы, штриховые круги – по столбцам матрицы.

В табл. 1 приведены оценки сверху и снизу действительной части собственного числа матрицы  $Q$ . Точность вычисляется как относительная погрешность между соответствующей оценкой и  $\Re\{\lambda\{Q\}\} = -1,5$  (например,  $\frac{|-3,5+1,5|}{1,5}100\% = 133,3\%$ ).

**Таблица 1.** Оценки действительной части собственных значений матрицы  $Q$ , полученные при использовании (1) и (3)

Рисунок	Оценка $\Re\{\lambda\{Q\}\}$	Точность, %
Рис. 1,а	$\sigma_{\min}(Q) = -3,5; \sigma_{\max}(Q) = 0,5$	133,3
Рис. 1,б	$\sigma_{\min}^H(Q) = -2,72; \sigma_{\max}^D(Q) = -0,27$	82
Рис. 1,в	$\sigma_{\min}^\beta(Q) = -2,72; \sigma_{\max}^\alpha(Q) = -0,27$	82
Рис. 1,г	$\sigma_{\min}^{H,\beta}(Q) = -2,26; \sigma_{\max}^{D,\alpha}(Q) = -0,73$	51,3

Из рис. 1 можно найти оценки мнимой части, которые отражены в табл. 2. Точность вычисляется как относительная погрешность между соответствующей оценкой и  $\Im\{\lambda\{Q\}\} = 1$ .

**Таблица 2.** Оценки мнимой части собственных значений, полученные при использовании лемм 1 и 2

Рисунок	Оценка $\Im\{\lambda\{Q\}\}$	Точность, %
Рис. 1,а	2,3	130
Рис. 1,б	1,8	80
Рис. 1,в	1,7	70
Рис. 1,г	1,2	20

Наилучшие оценки действительной и мнимой частей гарантирует результат из леммы 2, где одновременно используются варьируемые параметры  $D$ ,  $H$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ .

## 2.2. Возмущенные матрицы

В данном разделе рассмотрим поиск областей локализации собственных чисел для матриц с интервально неопределенными параметрами:

$$\begin{aligned}
 (5) \quad Q(t) &= Q_0 + \Delta Q(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \\
 Q_0 &= (q_{ij}^0), \quad \Delta Q(t) = (\Delta q_{ij}(t)), \\
 \Delta \underline{q}_{ii} &\leq \Delta q_{ii}(t) \leq \Delta \bar{q}_{ii}, \quad |\Delta q_{ij}(t)| \leq m_{ij} \text{ при } i \neq j.
 \end{aligned}$$

Поскольку элементы матрицы могут принимать любые значения из допустимых интервалов, то вместо кругов локализации собственных чисел, рассмотренных в доказательствах лемм 1 и 2, введем в рассмотрение следующую фигуру.

**Определение 1.** Фигуру, образованную объединением кругов  $\mathcal{EC} = \cup_{q \in [\underline{q}, \bar{q}]} \{z \in \mathbb{C} : |z - q| \leq R\}$ , назовем  $e$ -кругом.

Введем обозначения для оценок сверху сумм по строкам и столбцам абсолютных значений элементов матриц  $Q(t)$ ,  $D^{-1}Q(t)D$  и  $H^{-1}Q(t)H$ , исключая диагональные элементы, в виде

$$\begin{aligned}\hat{R}_i(Q) &= \sum_{j=1, j \neq i}^n (|q_{ij}^0| + m_{ij}), & \hat{C}_j(Q) &= \sum_{i=1, i \neq j}^n (|q_{ij}^0| + m_{ij}), \\ \hat{R}_i^D(Q) &= \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{d_j}{d_i} (|q_{ij}^0| + m_{ij}), & \hat{C}_j^D(Q) &= \sum_{i=1, i \neq j}^n \frac{d_i}{d_j} (|q_{ij}^0| + m_{ij}), \\ \hat{R}_i^H(Q) &= \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{h_j}{h_i} (|q_{ij}^0| + m_{ij}), & \hat{C}_j^H(Q) &= \sum_{i=1, i \neq j}^n \frac{h_i}{h_j} (|q_{ij}^0| + m_{ij}).\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим обобщение лемм 1 и 2 на случай матриц с интервально неопределенными элементами. Ниже в формулировках лемм опустим зависимость матриц и параметров от  $t$  ради упрощения записи выражений.

*Лемма 3. Собственные значения матрицы  $Q$  из (5) находятся в области пересечения  $\varepsilon$ -кругов*

$$(6) \quad \mathcal{EC}_{\text{row}} \cap \mathcal{EC}_{\text{col}},$$

где

$$(7) \quad \begin{aligned}\mathcal{EC}_{\text{row}} &= \cup_{i=1}^n \mathcal{EC}_{\text{row}, i}, \\ \mathcal{EC}_{\text{row}, i} &= \cup_{\Delta q_{ii} \in [\Delta \underline{q}_{ii}; \Delta \bar{q}_{ii}]} \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - q_{ii}^0 - \Delta q_{ii}| \leq \hat{R}_i(Q) \right\},\end{aligned}$$

$$(8) \quad \begin{aligned}\mathcal{EC}_{\text{col}} &= \cup_{j=1}^n \mathcal{EC}_{\text{col}, j}, \\ \mathcal{EC}_{\text{col}, j} &= \cup_{\Delta q_{jj} \in [\Delta \underline{q}_{jj}; \Delta \bar{q}_{jj}]} \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - q_{jj}^0 - \Delta q_{jj}| \leq \hat{C}_j(Q) \right\}.\end{aligned}$$

*Доказательство.* Пусть  $\lambda(t)$  – собственное значение матрицы  $Q(t)$  и  $s(t) = \text{col}\{s_1(t), \dots, s_n(t)\}$  – собственный вектор, соответствующий данному собственному значению. Выберем  $i$ -ю компоненту вектора  $s(t)$  так, что  $\sup\{s_i(t)\} \geq \max\{\sup\{s_1(t)\}, \dots, \sup\{s_{i-1}(t)\}, \sup\{s_{i+1}(t)\}, \dots, \sup\{s_n(t)\}\}$ . Обозначим:  $\bar{s}_i = \sup\{s_i(t)\}$ . Из соотношения  $\lambda(t)s(t) = Q(t)s(t)$  выпишем выражение для  $i$ -й координаты в виде  $\lambda(t)s_i(t) = \sum_{j=1}^n q_{ij}(t)s_j(t)$  или  $(\lambda(t) -$

$-q_{ii}(t))s_i(t) = \sum_{j=1, j \neq i}^n q_{ij}(t)s_j(t)$ . Воспользовавшись неравенством треугольника, рассмотрим оценку

$$(9) \quad \begin{aligned}|\lambda(t) - q_{ii}(t)||s_i(t)| &= \left| \sum_{j=1, j \neq i}^n q_{ij}(t)s_j(t) \right| \leq \\ &\leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |q_{ij}(t)s_j(t)| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |q_{ij}(t)||s_j(t)| \leq \bar{s}_i \sum_{j=1, j \neq i}^n |q_{ij}(t)|.\end{aligned}$$

Перепишем выражение (9) как  $|\lambda(t) - q_{ii}(t)||s_i(t) - \bar{s}_i| \sum_{j=1, j \neq i}^n |q_{ij}(t)| \leq 0$  или в виде

$$(10) \quad \bar{s}_i \left( |\lambda(t) - q_{ii}(t)| \frac{|s_i(t)|}{\bar{s}_i} - \sum_{j=1, j \neq i}^n |q_{ij}(t)| \right) \leq 0.$$

Так как  $\frac{|s_i(t)|}{\bar{s}_i} \leq 1$ , то выражение (10) будет выполнено, если будет выполнено неравенство

$$(11) \quad |\lambda(t) - q_{ii}(t)| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |q_{ij}(t)|.$$

Так как  $\Delta q_{ii} \leq \Delta q_{ii}(t) \leq \Delta \bar{q}_{ii}$  и  $|\Delta q_{ij}(t)| \leq m_{ij}$  при  $i \neq j$ , то перепишем неравенство (11) в виде  $\epsilon$ -круга  $\mathcal{EC}_{\text{row}, i}$  из (7).

Соотношение (7) выполнено для некоторого  $i$ . Поскольку неизвестно, какое  $i$  соответствует данному  $\lambda(t)$ , то можно лишь сказать, что  $\lambda(t)$  принадлежит объединению  $\epsilon$ -кругов  $\mathcal{EC}_{\text{row}} = \cup_{i=1}^n \mathcal{EC}_{\text{row}, i}$ . Значит, все собственные числа матрицы  $Q(t)$  находятся в объединении  $\epsilon$ -кругов  $\mathcal{EC}_{\text{row}}$ .

Поскольку матрица  $Q^T(t)$  имеет те же собственные значения, что и матрица  $Q(t)$ , то все собственные значения матрицы  $Q(t)$  заключены в объединении  $\epsilon$ -кругов  $\mathcal{EC}_{\text{col}} = \cup_{j=1}^n \mathcal{EC}_{\text{col}, j}$ , см. (8). Дальнейшие рассуждения для матрицы  $Q^T(t)$  аналогичны рассуждениям для матрицы  $Q(t)$ . Так как собственные значения матрицы  $Q(t)$  находятся одновременно в  $\mathcal{EC}_{\text{row}}$  и  $\mathcal{EC}_{\text{col}}$ , значит, они находятся в области (6).

*Лемма 4. Пусть заданы  $d_i > 0$ ,  $h_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Собственные значения матрицы  $Q$  из (5) находятся в области пересечения  $\epsilon$ -кругов*

$$\mathcal{EC}_{\text{row}}^D \cap \mathcal{EC}_{\text{col}}^H,$$

где

$$\mathcal{EC}_{\text{row}}^D = \cup_{i=1}^n \mathcal{EC}_{\text{row}, i}^D,$$

$$\mathcal{EC}_{\text{row}, i}^D = \cup_{\Delta q_{ii} \in [\Delta \underline{q}_{ii}; \Delta \bar{q}_{ii}]} \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - q_{ii}^0 - \Delta q_{ii}| \leq \hat{R}_i^D(Q) \right\},$$

$$\mathcal{EC}_{\text{col}}^H = \cup_{j=1}^n \mathcal{EC}_{\text{col}, j}^H,$$

$$\mathcal{EC}_{\text{col}, j}^H = \cup_{\Delta q_{jj} \in [\Delta \underline{q}_{jj}; \Delta \bar{q}_{jj}]} \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - q_{jj}^0 - \Delta q_{jj}| \leq \hat{C}_j^H(Q) \right\}.$$

*Доказательство.* Результаты леммы 4 следуют из леммы 3 и того факта, что собственные значения матриц  $D^{-1}Q(t)D$ ,  $H^{-1}Q(t)H$  и  $Q(t)$  одни и те же.

Лемма 5. Пусть заданы  $d_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  и  $\alpha \in [0; 1]$ . Собственные значения матрицы  $Q$  из (5) находятся в области пересечения  $\varepsilon$ -кругов

$$\mathcal{EC}^{D,\alpha} = \cup_{i=1}^n \mathcal{EC}_i^{D,\alpha},$$

где

$$\mathcal{EC}_i^{D,\alpha} = \cup_{\Delta q_{ii} \in [\Delta \underline{q}_{ii}; \Delta \bar{q}_{ii}]} \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - q_{ii} - \Delta q_{ii}| \leq [\hat{R}_i^D(Q)]^\alpha [\hat{C}_i^D(Q)]^{1-\alpha} \right\}.$$

*Доказательство.* Доказательство леммы 5 следует из доказательств лемм 2 и 3 и того факта, что собственные значения матриц  $D^{-1}Q(t)D$  и  $Q(t)$  одинаковые.

*Следствие 3.* Аналогично леммам 1 и 2 можно выписать оценки на максимальные и минимальные значения собственных значений матрицы  $Q$  с использованием результатов лемм 3–5, т.е. существуют числа  $\hat{d}_i > 0$ ,  $\hat{h}_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  и  $\alpha, \beta \in [0; 1]$  такие, что справедливы следующие оценки:

$$(12) \quad \begin{aligned} \max_i \left\{ \sup_t \{ \Re \{ \lambda_i \{ Q(t) \} \} \} \right\} &\leq \sigma_{\max}^D \{ Q(t) \} \leq \sigma_{\max} \{ Q(t) \}, \\ \min_i \left\{ \sup_t \{ \Re \{ \lambda_i \{ Q(t) \} \} \} \right\} &\geq \sigma_{\min}^H \{ Q(t) \} \geq \sigma_{\min} \{ Q(t) \}, \\ \max_i \left\{ \sup_t \{ \Re \{ \lambda_i \{ Q(t) \} \} \} \right\} &\leq \sigma_{\max}^{D,\alpha} \{ Q(t) \} \leq \sigma_{\max}^\alpha \{ Q(t) \}, \\ \min_i \left\{ \sup_t \{ \Re \{ \lambda_i \{ Q(t) \} \} \} \right\} &\geq \sigma_{\min}^{H,\beta} \{ Q(t) \} \geq \sigma_{\min}^\beta \{ Q(t) \}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}(Q(t)) &= \min \left\{ \max_i \{ q_{ii}^0 + \Delta \bar{q}_{ii} + \hat{R}_i(Q) \}, \max_j \{ q_{jj}^0 + \Delta \bar{q}_{jj} + \hat{C}_j(Q) \} \right\}, \\ \sigma_{\min}(Q(t)) &= \max \left\{ \min_i \{ q_{ii}^0 - \Delta \bar{q}_{ii} - \hat{R}_i(Q) \}, \min_j \{ q_{jj}^0 - \Delta \bar{q}_{jj} - \hat{C}_j(Q) \} \right\}, \\ \sigma_{\max}^D(Q(t)) &= \min_D \left\{ \max_i \{ q_{ii}^0 + \Delta \bar{q}_{ii} + \hat{R}_i^D(Q) \}, \max_j \{ q_{jj}^0 + \Delta \bar{q}_{jj} + \hat{C}_j^D(Q) \} \right\}, \\ \sigma_{\min}^H(Q(t)) &= \max_H \left\{ \min_i \{ q_{ii}^0 - \Delta \bar{q}_{ii} - \hat{R}_i^H(Q) \}, \min_j \{ q_{jj}^0 - \Delta \bar{q}_{jj} - \hat{C}_j^H(Q) \} \right\}, \\ \sigma_{\max}^\alpha(Q(t)) &= \min_\alpha \left\{ \max_i \{ q_{ii}^0 + \Delta \bar{q}_{ii} + [\hat{R}_i(Q)]^\alpha [\hat{C}_i(Q)]^{1-\alpha} \} \right\}, \\ \sigma_{\min}^\beta(Q(t)) &= \max_\beta \left\{ \min_i \{ q_{ii}^0 - \Delta \bar{q}_{ii} - [\hat{R}_i(Q)]^\beta [\hat{C}_i(Q)]^{1-\beta} \} \right\}, \\ \sigma_{\max}^{D,\alpha}(Q(t)) &= \min_{D,\alpha} \left\{ \max_i \{ q_{ii}^0 + \Delta \bar{q}_{ii} + [\hat{R}_i^D(Q)]^\alpha [\hat{C}_i^D(Q)]^{1-\alpha} \} \right\}, \\ \sigma_{\min}^{H,\beta}(Q(t)) &= \max_{H,\beta} \left\{ \min_i \{ q_{ii}^0 - \Delta \bar{q}_{ii} - [\hat{R}_i^H(Q)]^\beta [\hat{C}_i^H(Q)]^{1-\beta} \} \right\}. \end{aligned}$$

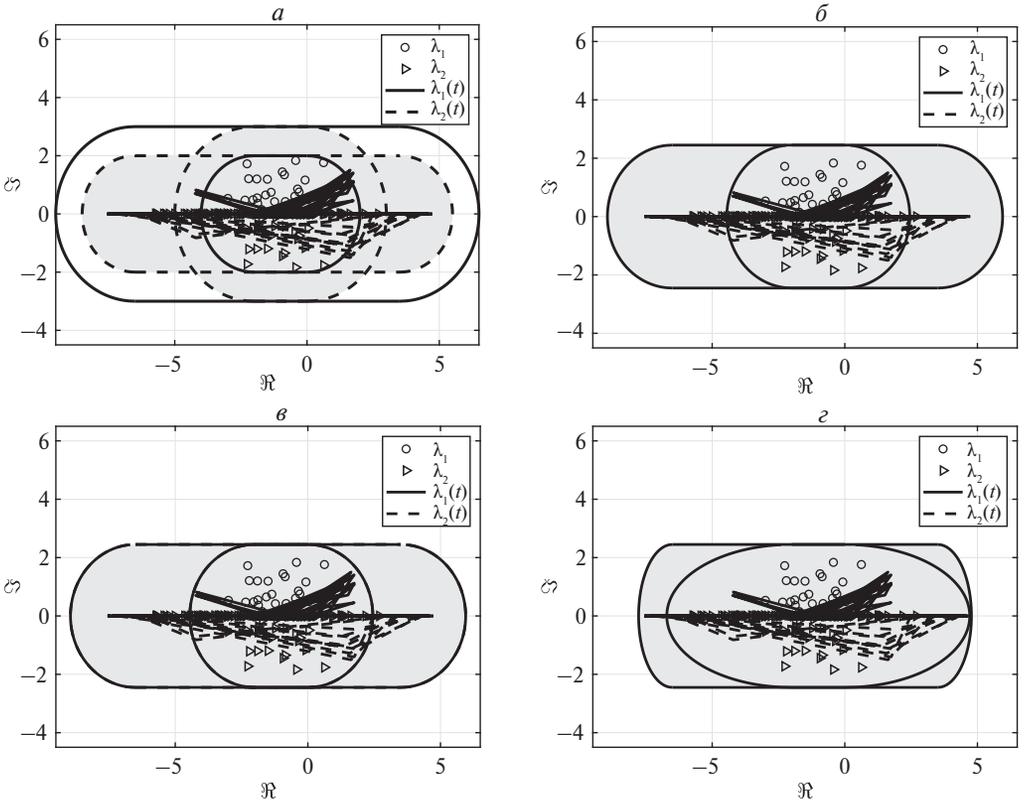


Рис. 2. Области локализации (серая область) собственных значений возмущенных матриц  $Q$  и  $Q(t)$ .

*Пример 2.* Рассмотрим две параметрически неопределенные матрицы  $Q$  с постоянными и переменными параметрами в виде

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1,5 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} r_{11} & 2r_{12} \\ 3r_{21} & 4r_{22} \end{bmatrix}}_{\Delta Q},$$

$$Q(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1,5 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \sin(t) & 2 \cos(1,5t) \\ 3 \operatorname{sign}(\sin(2t)) & 4 \operatorname{sign}(\cos(1,7t)) \end{bmatrix}}_{\Delta Q(t)},$$

где  $r_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$  – псевдослучайные числа, равномерно распределенные на интервале  $(-1; 1)$ . Рассмотрим 100 реализаций для каждого  $r_{ij}$ . Матрицы  $\Delta Q$  и  $\Delta Q(t)$  имеют одинаковые  $m_{ij}$ , поэтому и оценки области локализации будут одинаковыми.

На рис. 2 представлена область локализации собственных значений  $Q$  и  $Q(t)$  с использованием результатов лемм 3–5 (серые области), где малыми кругами и треугольниками изображены собственные значения матрицы  $Q$  с постоянными параметрами, а непрерывными и штриховыми линиями (внут-

ри серых областей) – собственные значения матрицы  $Q$  с нестационарными параметрами. На трех рисунках из четырех пары  $e$ -кругов совпали за счет варьирования  $d_i$ ,  $h_i$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ , поэтому на трех рисунках указаны только два  $e$ -круга. Соответствующие рисунки получены при использовании:

- леммы 3 (рис. 2,а);
- леммы 4 с  $D = \text{diag}\{1; 1,23\}$  и  $H = \text{diag}\{1; 0,81\}$  (рис. 2,б);
- леммы 5 с  $\alpha = \beta = 0,5$  и  $D = H = I$  (рис. 2,в);
- леммы 5 с  $\alpha = 0,5$  и  $D = \text{diag}\{1; 0,52\}$  (рис. 2,г).

Сплошная граница  $e$ -кругов соответствует фигурам, составленным по строкам матрицы, с пунктирной границей – по столбцам матрицы.

### 3. Анализ устойчивости систем управления

В данном разделе рассмотрим несколько применений результатов предыдущего раздела для анализа и синтеза систем управления.

#### 3.1. Синхронизация сетевых систем

Рассмотрим сетевую систему, состоящую из  $n$  взаимосвязанных агентов вида

$$(13) \quad \dot{x}_i = \sum_{j=1}^n q_{ij}x_j + u_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $u_i \in \mathbb{R}$  – сигнал управления,  $|q_{ij}| \leq m_{ij}$ . Требуется обеспечить выполнение условия  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0$  для всех  $x_i$  за счет соответствующего выбора  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Зададим закон управления

$$(14) \quad u_i = -qx_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где  $q > 0$ .

Введем обозначения:  $x = \text{col}\{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $Q_0 = -qI$ ,  $\Delta Q = (q_{ij})$  и  $Q = Q_0 + \Delta Q$ . Тогда (13) и (14) можно переписать в виде

$$(15) \quad \dot{x} = Qx.$$

В результате проверка условия  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0$  сводится к проверке устойчивости матрицы  $Q_0 + \Delta Q$ , которая может быть обеспечена за счет соответствующего выбора  $q$  в (14).

Пусть  $q = -10^3$  и  $q_{ij}$  – псевдослучайные числа, равномерно распределенные на интервале  $(-1; 1)$ . Для анализа устойчивости матрицы  $Q_0 + \Delta Q$  воспользуемся:

- функциями `eig` (вычисление собственных чисел матрицы) и `lyap` (решение уравнения Ляпунова) в `MatLab`, считая  $q_{ij}$  известными;

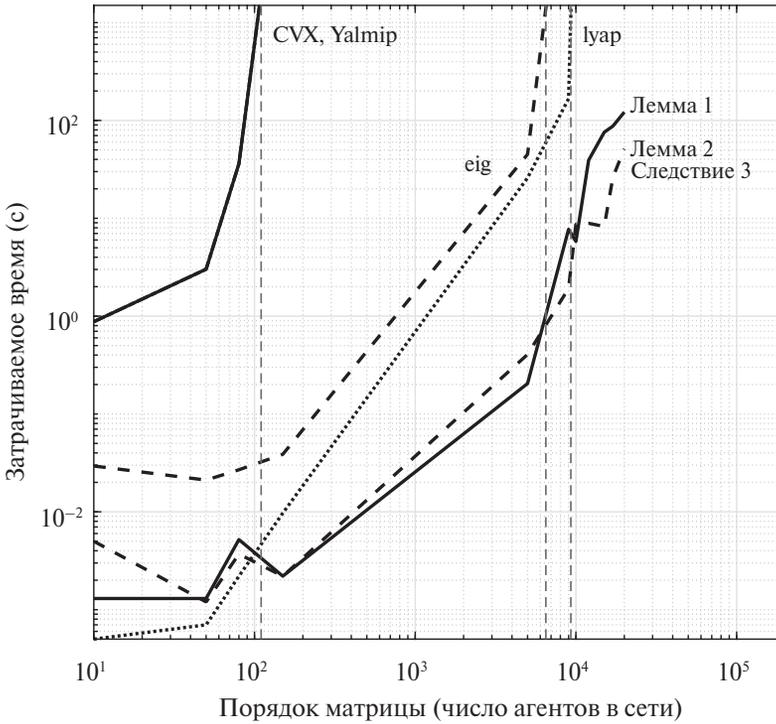


Рис. 3. Зависимость затрачиваемого времени на выяснения устойчивости системы (матрицы  $Q$ ) от числа агентов в сети ( $n$ ).

- приложениями для решения линейных матричных неравенств CVX и Yalmip/SeDuMi, считая  $q_{ij}$  известными;
- леммой 1 (считая  $\sigma_{\max}\{Q\}$ ) и леммой 2 (считая  $\sigma_{\max}^{\alpha}\{Q\}$  с перебором  $\alpha$  от 0 до 1 с шагом 0,1), считая  $q_{ij}$  известными;
- следствием 3 (считая  $\sigma_{\max}^{\alpha}\{Q\}$  с перебором  $\alpha$  от 0 до 1 с шагом 0,1), считая  $q_{ij}$  неизвестными, но с известными  $m_{ij}$ .

На рис. 3 представлены графики затрачиваемого времени на выполнение операции по определению устойчивости  $Q_0 + \Delta Q$  в зависимости от размерности данной матрицы (числа агентов в сети) и при использовании соответствующего метода. Независимо от того, указывал ли соответствующий метод на то, что матрица  $Q$  устойчивая или неустойчивая, фиксировалось соответствующее время на выяснение данного вопроса. Расчеты проводились в Matlab R2021b на ПК с процессором AMD Ryzen 5 PRO 4650U with Radeon Graphics 2.10 GHz и ОЗУ 8 GB. Результаты для CVX и Yalmip/SeDuMi, а также для леммы 2 и следствия 3 были получены почти одинаковые, поэтому их графики на рис. 3 попарно совпали. Также отметим, что при анализе предложенных результатов не было достигнуто предельное значение времени расчета из-за того, что Matlab R2021b не формировал матрицу размерности больше, чем 25000.

Выводы:

- алгоритмы eig, luar, CVX и Yalmip/SeDuMi обеспечивают более точный результат при определении устойчивости (обеспечивают меньшую ошибку отклонения полученного решения от истинного значения) по сравнению с предложенными оценками;
- затрачиваемое время на выяснение вопроса устойчивости при использовании CVX и Yalmip/SeDuMi существенно возрастает (в меньшей степени при использовании eig и luar) при росте числа агентов в сети, в то время как предложенные результаты наименее затратны по времени расчета.

Замкнутая система (15) содержит матрицу с диагональным преобладанием. В [6–18], где также использовались матрицы с диагональным преобладанием, отмечалось, что это достаточно узкий класс исследуемых объектов. В следующих разделах покажем, что предложенные результаты можно применять к системам с матрицами без диагонального преобладания. Диагональное преобладание будет предъясняться к выражениям, полученным с использованием аппарата функций Ляпунова.

### 3.2. Анализ устойчивости линейных нестационарных систем с интервально неопределенными параметрами и матрицами без диагонального преобладания

В данном разделе рассмотрим модификацию теоремы Демидовича [19, теорема 6.1; 23] (в литературе также используется термин «условие Демидовича») об исследовании устойчивости линейных систем с известными нестационарными параметрами на случай интервальной неопределенности и наличия внешних возмущений. Пусть исследуемый объект представлен уравнением

$$(16) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + F(t)f(t),$$

где  $t \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния,  $f \in \mathbb{R}^l$  – внешний сигнал такой, что  $\sup\{|f(t)|\} \leq \bar{f}$ ,  $F(t) \in \mathbb{R}^{n \times l}$  и  $A(t) = (a_{ij}(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  такие, что  $\sup\{\|F(t)\|\} \leq \bar{F}$ ,  $A(t) = A_0 + \Delta A(t)$ ,  $A_0 = (a_{ij}^0)$ ,  $\Delta A(t) = (\Delta a_{ij}(t))$ ,  $\Delta a_{ii} \leq \Delta a_{ii}(t) \leq \Delta \bar{a}_{ii}$  и  $|\Delta a_{ij}(t)| \leq m_{ij}$  при  $i \neq j$  и для всех  $t$ .

Введем матрицу  $\bar{A}(t)$ , где

$$(17) \quad \begin{aligned} \bar{A}(t) &= A(t) + A^T(t) = \bar{A}_0 + \Delta \bar{A}(t), \\ \bar{A}_0 &= (\bar{a}_{ij}^0) = (a_{ij}^0 + a_{ji}^0), \\ \Delta \bar{A}(t) &= (\Delta \bar{a}_{ij}(t)) = (\Delta a_{ij}(t) + \Delta a_{ji}(t)), \\ 2\Delta \underline{a}_{ii} &\leq \Delta \bar{a}_{ii}(t) \leq 2\Delta \bar{a}_{ii}, \\ |\Delta \bar{a}_{ij}(t)| &\leq m_{ij} + m_{ji} \quad \text{при } i \neq j. \end{aligned}$$

Отметим, что система (16) содержит матрицу  $A(t)$  без диагонального преобладания. Как будет показано в теореме ниже, диагональное преобладание понадобится в матрице  $\bar{A}(t)$ .

Согласно теореме Демидовича [19, теорема 6.1; 23], система (16) асимптотически устойчива при  $f(t) \equiv 0$  и с известной матрицей  $A(t)$ , если собственные значения матрицы  $A(t) + A^T(t)$  принимают отрицательные значения для всех  $t$ . Далее рассмотрим обобщение данной теоремы на интервально неопределенные матрицы с учетом следствия 3.

*Теорема 1.* Обозначим через  $\sigma$  любую из оценок сверху, вычисленную с помощью (12) для собственных значений матрицы  $\bar{A}(t)$  в (17). Если  $\sigma < 0$ , то справедлива следующая оценка:

$$(18) \quad |x(t)| \leq -\frac{2\|\bar{F}\|\bar{f}}{\sigma} + Ce^{0,5\sigma t},$$

где  $C = \max \left\{ 0, |x(0)| + \frac{2\|\bar{F}\|\bar{f}}{\sigma} \right\}$ .

*Доказательство.* Выберем функцию Ляпунова

$$(19) \quad V = x^T x$$

и найдем производную от нее вдоль решений (16) в виде

$$\dot{V} = x^T \bar{A}(t)x + 2x^T F(t)f.$$

Найдем оценку сверху:

$$(20) \quad \dot{V} \leq \sigma x^T x + 2|x||F(t)||f| \leq \sigma V + 2\sqrt{V}\|\bar{F}\|\bar{f}.$$

Решим неравенство (20) в виде

$$(21) \quad \sqrt{V} \leq -\frac{2\|\bar{F}\|\bar{f}}{\sigma} + \left( \sqrt{V(0)} + \frac{2\|\bar{F}\|\bar{f}}{\sigma} \right) e^{0,5\sigma t}.$$

Учитывая (19), получим

$$(22) \quad |x(t)| \leq -\frac{2\|\bar{F}\|\bar{f}}{\sigma} + \left( |x(0)| + \frac{2\|\bar{F}\|\bar{f}}{\sigma} \right) e^{0,5\sigma t}.$$

Из выражения (22) следуют результат (18).

*Пример 3.* Система с постоянными параметрами с матрицей без диагонального преобладания. Рассмотрим систему (16) с параметрами  $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2,5 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $B = [0 \ 0,05]^T$  и  $u = \sin(t)$ . Матрица  $A$  не является сверхустойчивой [6–8] или с диагональным преобладанием [4, 9–18] ни по строкам, ни по столбцам. Также не существуют  $d_1 > 0$  и  $d_2 > 0$ , чтобы были выполнены условия (2), так как неравенства  $d_1 - 3d_2 > 0$  и  $-2,5d_1 + 2d_2 > 0$ , составленные для матрицы  $A$ , и неравенства  $d_1 - 2,5d_2 > 0$  и  $-3d_1 + 2d_2 > 0$ , составленные для матрицы  $A^T$ , не имеют решения.

Рассмотрим матрицу  $\bar{A} = A + A^T = \begin{bmatrix} -2 & 0,5 \\ 0,5 & -4 \end{bmatrix}$ . Условие (2) будет выполнено для  $\bar{A}$ , где  $\sigma = \sigma_{\max}(\bar{A}) = -1,5$ . Наибольшее собственное число матрицы  $A + A^T$  равно  $-1,88$ . Если воспользоваться другим условием в (2) с  $d_1 = 1$  и  $d_2 = 0,711$ , то оценку собственного числа можно улучшить до  $\sigma = \sigma_{\max}^D(\bar{A}) = -1,6445$ .

*Пример 4. Система с нестационарными параметрами с матрицей без диагонального преобладания.* Рассмотрим систему (16) с параметрами с  $A(t) = A_0 + \Delta A(t)$ , где  $A_0 = A$  из предыдущего примера,  $\Delta A(t) = 0,1 \begin{bmatrix} \sin(t) & \cos(t) \\ \sin(2t) & \sin(4t) \end{bmatrix}$ . Оценки сверху (17) дают отрицательные значения, следовательно, система (16) устойчива.

### 3.3. Синтез закона управления для линейных систем с матрицами без диагонального преобладания

Рассмотрим систему

$$(23) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + F(t)f(t),$$

где  $u \in \mathbb{R}^m$  – сигнал управления,  $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $B(t) = b(t)B_0$ ,  $\underline{b} \leq b(t) \leq \bar{b} \in \mathbb{R}$ ,  $B_0$  – известная матрица, пара  $(A(t), B(t))$  управляема для всех  $t$ . Остальные обозначения как в (16). Предположим, что неизвестны параметры  $\Delta A(t)$ ,  $b(t)$ ,  $F(t)$  и  $f(t)$ .

Введем закон управления

$$(24) \quad u = Kx,$$

где  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Ниже сформулированы теоремы, позволяющие рассчитать матрицу  $K$ , которая обеспечивает устойчивость замкнутой системы

$$(25) \quad \dot{x}(t) = (A(t) + B(t)K)x(t) + F(t)f(t).$$

Отметим, что ни в матрице  $A(t)$ , ни в матрице  $A(t) + B(t)K$  не требуется выполнение свойства диагонального преобладания.

*Теорема 2. Пусть матрицы  $A$ ,  $B$  и  $F$  в (23) известны и постоянны, а также пусть для заданного  $\alpha > 0$  существует матрица  $Q = Q^T$  и коэффициент  $\beta > 0$  такие, что выполнены следующие условия:*

$$(26) \quad \begin{aligned} \Psi_{ii} &< 0, \\ \Psi_{ij} &\geq 0 \text{ при } i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n, \\ \sigma(Q) &> 0, \end{aligned}$$

где

$$(27) \quad \Psi = (\Psi_{ij}) := QA^T + AQ + Y^T B^T + BY + \alpha Q + \beta F^T F,$$

$\sigma(Q)$  – одна из оценок снизу на собственные значения матрицы  $Q$ , полученная с помощью (2), а также  $K = YQ^{-1}$  и  $P = Q^{-1}$ . Тогда для решений системы (25) будет справедлива оценка

$$(28) \quad |x(t)| \leq \left[ \frac{1}{\lambda_{\min}(P)} \left( \frac{\bar{f}^2}{\alpha\beta} + \mathcal{K}e^{-\alpha t} \right) \right]^{0,5},$$

где  $\mathcal{K} = \max \left\{ 0, x(0)^T P x(0) - \frac{\bar{f}^2}{\alpha\beta} \right\}$ .

*Доказательство.* Выберем функцию Ляпунова

$$(29) \quad V = x^T P x,$$

где  $P = Q^{-1}$ , и найдем от нее производную по времени вдоль решений (25):

$$(30) \quad \dot{V} = x^T \left[ (A + BK)^T P + P(A + BK) \right] x + 2x^T F f.$$

Обозначив  $z = \text{col}\{x, f\}$  и подставив (29) и (30) в условие экспоненциальной устойчивости  $\dot{V} + \alpha V + \gamma f^T f < 0$ ,  $\gamma = 1/\beta$ , получим

$$(31) \quad z^T \begin{bmatrix} (A + BK)^T P + P(A + BK) + \alpha P & PF \\ \star & -\gamma I \end{bmatrix} z < 0.$$

Согласно [24] неравенство (31) будет выполнено, если будет выполнено следующее условие:

$$(32) \quad \begin{bmatrix} (A + BK)^T P + P(A + BK) + \alpha P & PF \\ \star & -\gamma I \end{bmatrix} < 0.$$

Воспользовавшись леммой Шура [24] и тем, что  $\gamma = 1/\beta$ , перепишем (32) в виде

$$(33) \quad (A + BK)^T P + P(A + BK) + \alpha P + \beta P F^T F P < 0.$$

Умножив слева и справа (33) на  $Q^{-1}$  и заменив  $Y = KQ$ , получим

$$(34) \quad \Psi := Q A^T + A Q + Y^T B^T + B Y + \alpha Q + \beta F^T F < 0.$$

Согласно леммам 1 и 2 собственные значения симметричных матриц  $\Psi$  и  $Q$  будут отрицательны и положительны соответственно, если будут выполнены неравенства (26). С другой стороны, согласно [4] (теорема 7.2.1) эрмитова матрица положительно (отрицательно) определена в том и только в том случае, если все ее собственные значения положительны (отрицательны). Значит, условия  $\Psi < 0$  и  $Q > 0$  будут выполнены, если будут выполнены неравенства (26). Оценка (28) следует из решения неравенства  $\dot{V} + \alpha V + \gamma f^T f < 0$  с учетом (29) и оценки  $\lambda_{\min}\{P\}|x|^2 \leq x^T P x$ .

С использованием результатов теоремы 2 сформулируем следующую теорему для систем с неизвестными нестационарными параметрами.

*Теорема 3. Рассмотрим систему (23) с нестационарными параметрами. Пусть существует матрица  $Q = Q^T$  и коэффициент  $\beta > 0$  такие, что выполнены условия*

$$(35) \quad \begin{aligned} \Phi_{ii} &< 0, \\ \Phi_{ij} &\geq 0 \text{ при } i \neq j, \\ \sigma(Q) &> 0, \end{aligned}$$

в вершинах  $|\Delta a_{ij}(t)| \leq m_{ij}$  и  $\underline{b} \leq b(t) \leq \bar{b}$ , где

$$\begin{aligned} \Phi = (\Phi_{ij}) := & QA_0^T + A_0Q + Q\Delta A^T(t) + \Delta A(t)Q + \\ & + b(t)Y^T B_0^T + b(t)B_0Y + \alpha Q + \beta \bar{F}^2 I, \end{aligned}$$

$\sigma(\Psi)$  – одна из оценок сверху матрицы  $\Psi$ , полученная с помощью (12), а также  $K = YQ^{-1}$  и  $P = Q^{-1}$ . Тогда для решений системы (25) будет справедлива оценка (28).

*Доказательство.* Воспользуемся результатами (29)–(34) из доказательства теоремы 2 с учетом нестационарных параметров. Поскольку  $A(t) = A_0 + \Delta A(t)$ ,  $B(t) = b(t)B_0$  и  $\|F(t)\| \leq \bar{F}$ , то перепишем (34) в виде

$$\begin{aligned} \Phi := & QA_0^T + A_0Q + Q\Delta A^T(t) + \Delta A(t)Q + b(t)Y^T B_0^T + \\ & + b(t)B_0Y + \alpha Q + \beta \bar{F}^2 I < 0. \end{aligned}$$

Если выполнены условия (35) в вершинах  $|\Delta a_{ij}(t)| \leq m_{ij}$  и  $\underline{b} \leq b(t) \leq \bar{b}$ , то согласно [24] условие (35) будет выполнено для любых  $\Delta A(t)$  и  $b(t)$  внутри политопа с вершинами  $|\Delta a_{ij}(t)| \leq m_{ij}$  и  $\underline{b} \leq b(t) \leq \bar{b}$ . Оценка (28) получается аналогично, как в доказательстве теоремы 2.

*Пример 5.* Рассмотрим систему (23) с параметрами  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $B = \text{col}\{0; 0; 1\}$ ,  $F = \text{col}\{0, 1; 0, 5; 1\}$  и  $f(t) = \sin(t)$ .

Очевидно, что матрица  $A$  без диагонального преобладания, а структура матрицы  $B$  не позволяет законом управления  $u = Kx$  с  $K \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$  привести к замкнутой системе с матрицей с диагональным преобладанием. Поэтому воспользуемся теоремой 2 для анализа области локализации собственных значений матрицы  $\Phi$ , полученной в результате применения метода функций Ляпунова. Воспользовавшись теоремой 2, получим  $K = \text{col}\{-1, 3671; -2, 3619; -2, 5724\}$  и  $\text{trace}(P) = 25, 5858$  при  $\alpha = 1$ . Воспользовавшись [25], получим  $K = \text{col}\{-2, 8862; -4, 9244; -3, 2136\}$  и  $\text{trace}(P) = 40, 631$  при  $\alpha = 1$ . В обоих случаях ставилась цель  $\text{trace}(P) \rightarrow \min$  для расчета  $K$ .

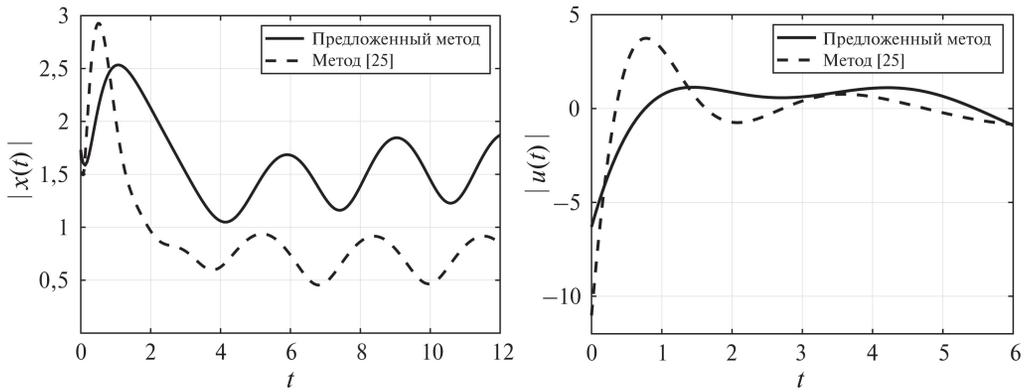


Рис. 4. Переходные процессы по  $|x(t)|$  и  $u(t)$  для предложенного алгоритма (сплошные кривые) и алгоритма [25] (пунктирные кривые).

Из рис. 4 видно, что в установившемся режиме значение  $|x(t)|$  предложенного алгоритма больше. Однако меньше всплеск  $|x(t)|$  и амплитуда сигнала управления  $u(t)$  в начальный момент времени, а также меньше значение  $\text{trace}(P)$ .

#### 4. Заключение

В статье рассмотрено применение теоремы о кругах Гершгорина и производных от нее теорем для оценки области локализации собственных значений матрицы с постоянными и известными параметрами. Данные результаты обобщаются на оценку области локализации для матриц с параметрической интервальной неопределенностью. Предложено понятие  $\epsilon$ -круга, позволяющее получить более точные оценки области локализации, чем прямое применение теоремы Гершгорина. Полученные результаты применены к управлению сетевыми системами, где показано, что для задач большой размерности предложенные результаты наименее затратны по времени выполнения операции по сравнению с процедурами `eig` и `luar` (команды в `MatLab` для нахождения собственных значений матрицы и решения уравнения Ляпунова), а также `CVX` и `Yalmip/SeDuMi` для решения линейных матричных неравенств. Предложено обобщение условия Демидовича для выяснения устойчивости нестационарной матрицы. Разработан подход по расчету матрицы в линейном законе управления при управлении линейными системами, где не выполнено свойство диагонального преобладания для матриц в замкнутой системе.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теория автоматического управления. Часть 1. Под ред. А.А. Воронова. М.: Высш. шк., 1986.
2. Фуртат И.Б., Гуцин П.А. Методы анализа и синтеза линейных и нелинейных систем управления при наличии возмущений и запаздывания. Ижевск: Изд-во «ИКИ», 2021.

3. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969.
4. *Хорн Р.А., Джонсон С.Р.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
5. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
6. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Сверхустойчивые линейные системы управления. I. Анализ // *АиТ.* 2002. № 8. С. 37–53.
7. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Сверхустойчивые линейные системы управления. II. Синтез // *АиТ.* 2002. № 11. С. 56–75.
8. *Поляк Б.Т.* Обобщенная сверхустойчивость в теории управления // *АиТ.* 2004. № 4. С. 70–80.
9. *Uronen P., Jutila E.A.A.* Stability via the theorem of Gershgorin // *Int. J. Control.* 1972. V. 16. No. 6. P. 1057–1061.
10. *Соловьев В.Н.* Обобщение теоремы Гершгорина // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1983. № 47. Т. 6. С. 1285–1302.
11. *Curran P.F.* On a variation of the Gershgorin circle theorem with applications to stability theory // *IET Irish Signals and Systems Conference (ISSC 2009), Dublin,* 2009. P. 1–5.
12. *Vijay Hote, Amar Nath Jha.* New approach of Gerschgorin theorem in model order reduction // *Int. J. Model. Simulat.* 2015. V. 35. P. 143–149.
13. *Li C.-K., Zhang F.* Eigenvalue continuity and Gershgorin's theorem // *Electron. J. Linear Algebra.* 2019. V. 35. P. 619–625.
14. *Kazakova-Frehse N., Frick K.* The estimation of a robust domain of attraction using Gershgorin theorem // *Int. J. Robust and Nonlinear Control.* 1998. V. 8. P. 295–303.
15. *Vijay Hote, Amar Nath Jha.* Reduced order state feedback controller design // *2014 Int. Conference on Advances in Engineering & Technology Research (ICAETR – 2014),* 2014. P. 1–6.
16. *Pachauri N., Rani A.* Gerschgorin theorem based stability analysis of chemical process // *2014 Int. Conference on Advances in Engineering & Technology Research (ICAETR – 2014),* 2014. P. 1–5.
17. *Xie L., Huang J., Tan E., He F., Liu Z.* The Stability Criterion and Stability Analysis of Three-Phase Grid-Connected Rectifier System Based on Gerschgorin Circle Theorem // *Electronics.* 2022. V. 11. No. 20, 3270.
18. *Adom-Konaduy A., Albert Lanor Sackiteyz, Anokyex M.* Local Stability Analysis Of Epidemic Models Using A Corollary Of Gershgorin's Circle Theorem // *Applied Mathematics E-Notes.* 2023. V. 23. P. 159–174.
19. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 2003.
20. *Цыпкин Я.З., Бромберг П.В.* О степени устойчивости линейных систем // *Известия АН СССР, ОТН.* 1945. № 12.
21. *Рубинчик А.М.* Приближенный метод оценки качества регулирования в линейных системах / *Устройства и элементы теории автоматики и телемеханики.* М.: Машгиз, 1952.
22. *Фельдбаум А.А.* О распределении корней характеристического уравнения систем автоматического регулирования // *АиТ.* 1948. Т. 9. № 4. С. 253–279.
23. *Халил Х.К.* Нелинейные системы. М.:-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009.

24. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear matrix inequalities in system and control theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
25. *Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // *АиТ.* 2007. № 3. С. 106–125.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.*

Поступила в редакцию 03.10.2024

После доработки 28.02.2025

Принята к публикации 14.03.2025

© 2025 г. В.Е. ХАРТОВСКИЙ, д-р физ.-мат. наук (hartovskij@grsu.by)  
(Гродненский государственный университет им. Я. Купалы),  
А.В. МЕТЕЛЬСКИЙ, д-р физ.-мат. наук (ametelskii@gmail.com)  
(Минск),  
В.В. КАРПУК, канд. физ.-мат. наук (vasvaskarpuk@gmail.com)  
(Белорусский национальный технический университет, Минск)

## ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ПО НЕПОЛНЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ И АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА<sup>1</sup>

Для линейной автономной дифференциально-разностной системы нейтрального типа с сосредоточенными запаздываниями получены критерии существования регуляторов с обратной связью по измерениям наблюдаемого выхода, обеспечивающих заданный спектр или экспоненциальную стабилизацию. Доказаны критерии существования наблюдателей, формирующих асимптотические оценки и имеющих ошибки, описываемые линейными однородными системами с наперед заданным характеристическим квазиполиномом или обладающими свойством экспоненциальной устойчивости. Все рассуждения работы являются конструктивными и содержат метод построения соответствующего регулятора или наблюдателя.

*Ключевые слова:* дифференциально-разностная система, нейтральный тип, запаздывание, экспоненциальная стабилизация, модальная управляемость, регулятор, наблюдатель.

DOI: 10.31857/S0005231025060026, EDN: IJXPQL

### 1. Введение

Эффект запаздывания присущ практически всем процессам управления. Поэтому его необходимо учитывать при построении целого ряда технических, экономических и других моделей [1–4]. Исследованию общей теории систем с запаздыванием, а также использованию таких систем в прикладных областях посвящено достаточно много работ (см. например, введение в [3, 4]). В настоящей статье изучается проблема стабилизации для систем с запаздыванием нейтрального типа. Такие системы описывают поведение объектов и процессов, скорость эволюции которых зависит как от их предшествующих состояний, так и от их скоростей, например [2] движения маятника с вязким наполнителем, модель врезного шлифования, объекты, динамика которых

---

<sup>1</sup> Работа выполнена в рамках гранта Президента Республики Беларусь (распоряжение № 15рп от 27 января 2025 г.)

описывается системами с распределенными запаздываниями (в частности телеграфными уравнениями). Приведем еще конкретные примеры задач стабилизации для линейных систем нейтрального типа. При исследовании колебаний токоприемника движущегося локомотива вдали от опоры (она находится сзади токоприемника) необходимо учитывать эффект воздействия отраженных волн контактного провода от струн, поддерживающих этот провод, и от опоры, находящейся перед движущимся токоприемником. В этом случае возникает проблема стабилизации такой механической системы [5]. Другой пример [6, с. 235] – задача стабилизации системы, возникающей в случае поступательного и прямолинейного движения некоторой массы под действием линейной восстанавливающей силы, пропорциональной координате, и некоторой неконсервативной силы. Учитывая, что для срабатывания чувствительных элементов системы, регистрирующих перемещение, скорость и ускорение массы, а также реле и сервомотора нужно некоторое время, получается [6, с. 235] модель в виде линейной автономной системы нейтрального типа.

Исследование задачи стабилизации систем с запаздыванием было инициировано в [7, 8], а затем подхвачено многими исследователями [9–16] (см. также библиографию в этих работах). Однако, невзирая на достаточно большой поток публикаций в этом направлении, проблема стабилизации на сегодняшний день до конца не изучена.

Спектр линейных систем с последствием в общем случае бесконечен, поэтому анализ и последующее исключение неустойчивых собственных значений из спектра требует определенных вычислительных усилий [15]. В связи с этим более универсальным подходом для стабилизации системы является решение задачи назначения конечного спектра, как правило состоящего из чисел с отрицательными действительными частями [17–19]. К существенному недостатку использования такого подхода для стабилизации системы следует отнести условия разрешимости соответствующей задачи, которые являются более жесткими по сравнению с условиями стабилизации.

Более общей по сравнению с задачей назначения конечного спектра является проблема модальной управляемости, заключающаяся в управлении коэффициентами характеристического квазиполинома системы [20–22].

Эффективными методами анализа устойчивости систем с запаздыванием являются методы Ляпунова–Красовского и Ляпунова–Разумихина, позволяющие сформулировать условия разрешимости задачи управления в терминах матричных неравенств [23] (см. главы 3–7). Такой подход к анализу и проектированию регулятора дает возможность получить конструктивные конечномерные условия его существования и допускает распространение на другие задачи. Например, в [24] построено управление, ограничивающее влияние возмущений и шумов измерений, а условия устойчивости входных данных описываются в терминах матричных неравенств.

В отличие от описанного выше метода, основанного в большей степени на дифференциальных свойствах системы управления, предлагаемый в ста-

тве подход носит сугубо алгебраический характер. Полином  $\det W(p, \lambda)$ , где  $W(p, e^{-ph})$  – характеристическая матрица замкнутой системы (в случае динамического регулятора), рассматривается как элемент идеала  $\mathfrak{J}$ , порожденного системой полиномов – алгебраических дополнений к элементам последней строки матрицы  $W(p, \lambda)$ . Поэтому класс возможных характеристических квазиполиномов  $\det W(p, e^{-ph})$  может быть описан через вычисление базиса Грёбнера идеала  $\mathfrak{J}$ . Это обстоятельство сводит все вычисления, связанные с построением регулятора (или наблюдателя), к операциям в кольце полиномов. С использованием этой идеи в [19, 25, 26] решена задача построения регулятора с обратной связью, обеспечивающего равенство нулю через ограниченное время всех компонент исходной разомкнутой системы, т.е. обеспечивающего финитную стабилизацию [27] (другими словами, решение задачи полного успокоения регулятором с обратной связью). Решение такой задачи достигается за счет построения обратной связи так, чтобы замкнутая система стала системой с конечным спектром, точно вырожденной в направлениях, соответствующих компонентам вектора-решения исходной системы [19, 25]. Развитие этих идей на системы нейтрального типа получено в [26], а их систематизация – в монографии [4]. Следующим шагом в исследовании задачи финитной стабилизации стало создание регуляторов с обратной связью по измерениям, представляющим собой сигнал наблюдаемого выхода. Для систем запаздывающего типа со скалярными входом и выходом такая задача изучена в [27], а для многовыходных систем нейтрального типа – в [28, 29].

В настоящем исследовании на базе разработанных в [15] методов управления спектром систем нейтрального типа, а также структурных схем обратной связи по неполным измерениям, полученных в [28, 29], доказываются критерии существования регуляторов с обратной связью по измерениям наблюдаемого выхода, обеспечивающих решение задач модальной управляемости и стабилизации. Попутно в статье предложены методы построения двух типов асимптотических наблюдателей и найдены критерии их существования.

## 2. Основные обозначения

Рассмотрим линейную автономную дифференциальную систему нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями

$$(1) \quad \dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{j=1}^m (A_j x(t - jh) + D_j \dot{x}(t - jh)) + \sum_{j=0}^m b_j u(t - jh), \quad t > 0,$$

$$(2) \quad y(t) = \sum_{j=0}^m c'_j x(t - jh), \quad t \geq 0,$$

$$(3) \quad x(t) = \eta(t), \quad t \in [-mh, 0].$$

Здесь  $x \in \mathbb{R}^n$  – вектор-столбец решения системы (1) ( $n \geq 2$ );  $0 < h$  – постоянное запаздывание;  $A_0, A_j, D_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b_j \in \mathbb{R}^n$ ,  $c'_j \in \mathbb{R}^n$  (символ «'» (штрих) обозначает операцию транспонирования);  $u$  – скалярное кусочно-непрерывное

управление,  $y$  – скалярный наблюдаемый выходной сигнал (выход). Начальная функция  $\eta$  предполагается непрерывной функцией, имеющей кусочно-непрерывную производную. В этом случае существует единственное непрерывное решение, имеющее кусочно-непрерывную производную. Далее всюду в статье предполагается, что начальная функция  $\eta$  неизвестна.

Цель исследования: на базе обратной связи, представляющей собой измерения выхода (2), построить регуляторы, обеспечивающие замкнутой системе заданный характеристический квазиполином или ее экспоненциальную стабилизацию. Исследование имеет следующую структуру. Вначале (см. раздел 3), на основе методов построения регуляторов, полученных в [15], будут построены два типа асимптотических наблюдателей. Далее в разделе 4 для получения регуляторов с обратной связью, формируемой на основании измерений наблюдаемого выхода, в конструкции регуляторов статьи [15] будут добавлены дополнительные контуры в виде полученных асимптотических наблюдателей по принципу, разработанному в [28, 29]. В завершающем разделе 5 будет приведен иллюстративный пример.

Пусть  $p, \lambda \in \mathbb{C}$  ( $\mathbb{C}$  – множество комплексных чисел). Обозначим:

$$(4) \quad A(p, \lambda) = A_0 + \sum_{j=1}^m (A_j + pD_j)\lambda^j,$$

$W(p, e^{-ph}) = pI_n - A(p, e^{-ph})$  – характеристическая матрица ( $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  – единичная матрица),  $w(p, e^{-ph}) = |W(p, e^{-ph})|$  – характеристический квазиполином однородной ( $u = 0$ ) системы (1). Здесь и далее  $|W|$  – определитель произвольной квадратной матрицы  $W$ .

Пусть  $\phi \in \mathbb{N}$  – произвольное число. Квазиполином  $d(p, e^{-ph})$ , где

$$d(p, \lambda) = \sum_{i=0}^{\phi} \theta_i(\lambda)p^i,$$

$\theta_i(\lambda)$  – некоторые полиномы, причем  $\theta_\phi(0) = 1$ , будем называть квазиполиномом нейтрального типа. Если  $\theta_\phi(\lambda) = 1$ , то, как частный случай, имеем квазиполином  $d(p, e^{-ph})$  запаздывающего типа. Характеристический квазиполином  $w(p, e^{-ph})$  однородной системы (1) является в общем случае квазиполиномом нейтрального типа и  $\deg_p w(p, \lambda) = n$ .

Пусть  $\mathbb{R}^{r \times m}[\lambda]$ ,  $\mathbb{C}^{r \times m}[\lambda]$  – множество матриц размера  $r \times m$ , элементы которых суть полиномы переменной  $\lambda$  с действительными и комплексными коэффициентами соответственно (если  $r = m = 1$ , то верхний индекс не пишем),  $\lambda_h$  – оператор сдвига,  $p_D$  – оператор дифференцирования, т.е.  $p_D^i \lambda_h^j f(t) = f^{(i)}(t - jh)$  ( $f$  – функция,  $i, j \geq 0$  – целые числа).

Для дальнейшего использования компактной записи уравнений регуляторов и наблюдателей введем множество  $\mathfrak{Q}^{r \times m}$  ( $\mathfrak{Q}^{1 \times 1} = \mathfrak{Q}$ ), состоящее из отображений  $\mathcal{Q} : f \mapsto \mathcal{Q}[f]$ , где  $f(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , – произвольная скалярная или  $m$ -векторная непрерывная функция, имеющая кусочно-непрерывную производную

(квадратные скобки используются для различия в написании отображений и функций). Каждое отображение  $\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}^{r \times m}$  задается следующими элементами: 1)  $q_i(\lambda) \in \mathbb{R}^{r \times m}[\lambda]$ ,  $i = 0, 1$ ; 2)  $P = \{\alpha_k \pm \mathbf{i}\beta_k, \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}, k = \overline{1, n_1}\}$  – набор действительных и комплексно-сопряженных чисел ( $\mathbf{i}$  – мнимая единица); 3)  $\widehat{q}_{ki}(\lambda) \in \mathbb{C}^{r \times m}[\lambda]$ ,  $k = \overline{1, n_1}$ ,  $i = \overline{1, n_2}$ , ( $n_1 \geq 1$ ,  $n_2 \geq 0$  – целые числа) и действует по следующему правилу (ниже  $p_k \in P$ )

$$(5) \quad \begin{aligned} \mathcal{Q}[f(t)] &= q_0(\lambda_h)f(t) + q_1(\lambda_h)\dot{f}(t-h) + \\ &+ \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{i=0}^{n_2} \int_0^h \widehat{q}_{ki}(\lambda_h)f(t-s)e^{p_k s} \frac{s^i}{i!} ds, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Матрицы  $\widehat{q}_{ki}(\lambda)$  в выражении (5) и множество  $P$  обладают следующим свойством: после применения формулы Эйлера ( $e^{\mathbf{i}\varphi} = \cos \varphi + \mathbf{i} \sin \varphi$ ) выражение (5) приводится к виду

$$(6) \quad \mathcal{Q}[f(t)] = q_0(\lambda_h)f(t) + q_1(\lambda_h)\dot{f}(t-h) + \sum_{j=0}^{\widehat{n}_1} \int_0^h r_j(s)f(t-jh-s) ds,$$

где  $\widehat{n}_1 = \max_{k,i} \{ \deg_{\lambda} \widehat{q}_{ki}(\lambda) \}$ ,  $r_j(s) = \sum_{k=1}^{n_1} e^{\alpha_k s} (\cos(\beta_k s) \nu_{jk}(s) + \sin(\beta_k s) \mu_{jk}(s))$ ,  $(\alpha_k + \mathbf{i}\beta_k) \in P$ ,  $\nu_{jk}(s), \mu_{jk}(s) \in \mathbb{R}^{r \times m}[s]$  ( $\deg_s \nu_{kj} \leq n_2$ ,  $\deg_s \mu_{kj} \leq n_2$ ). Таким образом, все выражения в соотношении (6) представляют собой действительные величины.

При замыкании исходной системы регуляторами, содержащими слагаемые вида (5) (вида (6), что то же самое), в замкнутой системе могут появиться распределенные запаздывания, описываемые интегральными слагаемыми в (6). В этом случае членам с распределенным запаздыванием (см. выражение (5)) в характеристической матрице замкнутой системы будут соответствовать выражения  $\widehat{q}_{ki}(e^{-ph}) \int_0^h e^{-(p-p_k)s} s^i / i! ds$ . Вычисляя интегралы из этих выражений и затем полагая  $\lambda = e^{-ph}$ , получаем целые дробно-рациональные функции [19]

$$(7) \quad \int_0^h e^{-(p-p_k)s} s^i / i! ds \Big|_{e^{-ph}=\lambda} = \frac{(-1)^{i+1}}{i!} \frac{d^i}{dp^i} \left( \frac{\lambda - e^{-p_k h}}{e^{-p_k h}(p - p_k)} \right), \quad i = 0, 1, \dots$$

Соответственно выражению (5) (или (6)) в характеристической матрице замкнутой системы будет соответствовать матрица

$$\mathcal{Q}[e^{pt}]e^{-pt} \Big|_{e^{-ph}=\lambda} = Q(p, \lambda),$$

где

$$(8) \quad Q(p, \lambda) = q_0(\lambda) + p\lambda q_1(\lambda) + q(p, \lambda),$$

$q(p, \lambda) = \frac{q_1(p, \lambda)}{q_2(p)}$  – дробно-рациональная функция, правильная по переменной  $p$  ( $q_1(p, \lambda), q_2(p)$  – полиномы с комплексными коэффициентами,  $\deg_p q_1(p, \lambda) < \deg_p q_2(p)$ ). Условимся, что в дальнейшем, если  $\widehat{W}(p, e^{-ph})$  – характеристическая матрица системы нейтрального типа, содержащей распределенное запаздывание, определяемое выражением вида (6), то матрица  $\widehat{W}(p, \lambda)$  получается так: сначала вычисляются интегралы вида (7), после чего в полученном выражении полагается  $e^{-ph} = \lambda$ .

Пусть задано отображение  $\mathcal{Q}$ , определяемое (5). Тогда под транспонированным отображением  $\mathcal{Q}'$  понимаем отображение, которое получается из (5) при замене  $q_0(\lambda), q_1(\lambda), \widehat{q}_{ki}(\lambda)$  на  $q'_0(\lambda), q'_1(\lambda), \widehat{q}'_{ki}(\lambda)$  соответственно.

### 3. Асимптотическая оценка решения

В данном разделе построим наблюдатели, позволяющие по измерениям (2) формировать асимптотические оценки решения исходной системы (1) с ошибками, стремящимися к нулю с заданной или экспоненциальной скоростью, которая определяется корнями характеристического квазиполинома. Далее эти результаты понадобятся для построения стабилизирующего регулятора с обратной связью, формируемой по результатам наблюдений выходного сигнала.

Определим следующую линейную систему нейтрального типа:

$$(9) \quad \begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= A(p_D, \lambda_h)z_1(t) + \mathcal{L}_1[z_2(t)] + b(\lambda_h)u(t), \\ \dot{z}_2(t) &= \beta_0(p_D)c'(\lambda_h)z_1(t) + \mathcal{L}_2[z_2(t)] - \beta_0(p_D)y(t), \quad t > 0, \end{aligned}$$

где матрица  $A(p, \lambda)$  определяется формулой (4),  $\mathcal{L}_1 \in \mathfrak{Q}^{n \times 1}$ ,  $\mathcal{L}_2 \in \mathfrak{Q}^{1 \times 1}$ ,  $\beta_0(p) \in \mathbb{R}_0[p]$ ,  $\mathbb{R}_0[p] = \{1, p + \widehat{\alpha} : \widehat{\alpha} \in \mathbb{R}\}$  – множество полиномов, имеющих вид  $p + \widehat{\alpha}$  или равных единице. Для системы (9) берем любое начальное состояние вида

$$(10) \quad z(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h_0, 0],$$

где  $\varphi$  – непрерывная функция, имеющая кусочно-непрерывную производную,  $h_0$  – длина отрезка последействия системы (9).

Компоненту  $z_1$  вектора-решения  $z = \text{col}[z_1, z_2]$  системы (9) берем в качестве оценки решения  $x$  системы (1), (2) (при заданном управлении  $u$ ). Обозначим:  $\zeta = z_1 - x$  – ошибка оценки  $z_1$  решения  $x$ . Легко видеть, что функция  $\zeta$  есть компонента решения однородной системы

$$(11) \quad \begin{aligned} \dot{\zeta}(t) &= A(p_D, \lambda_h)\zeta(t) + \mathcal{L}_1[z_2(t)], \\ \dot{z}_2(t) &= \beta_0(p_D)c'(\lambda_h)\zeta(t) + \mathcal{L}_2[z_2(t)], \quad t > 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим характеристическую матрицу  $W_z(p, \lambda)$  системы (11) (однородной ( $u = 0$ ) системы (9))

$$(12) \quad W_z(p, \lambda) = \begin{bmatrix} pI_n - A(p, \lambda) & -L_1(p, \lambda) \\ -\beta_0(p)c'(\lambda) & p - L_2(p, \lambda) \end{bmatrix},$$

где  $L_i(p, \lambda) = \mathcal{L}_i[e^{pt}]e^{-pt}$ . Введем в рассмотрение полином

$$(13) \quad g(p, \lambda) = \sum_{i=0}^{n+1} p^i g_i(\lambda), \quad g_i(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda], \quad g_{n+1}(0) = 1.$$

Очевидно, что квазиполином  $d(p, e^{-ph})$  в общем случае может быть квазиполиномом нейтрального типа.

*Определение 1.* Будем говорить, что для системы (1), (2) существует наблюдатель (9) с заданным характеристическим квазиполиномом, если для любого полинома (13) найдутся такие  $\mathcal{L}_1 \in \mathfrak{Q}^{n \times 1}$ ,  $\mathcal{L}_2 \in \mathfrak{Q}^{1 \times 1}$ ,  $\beta_0(p) \in \mathbb{R}_0[\lambda]$ , что выполняется равенство

$$(14) \quad |W_z(p, \lambda)| = g(p, \lambda).$$

*Замечание 1.* Поскольку основная цель проектирования наблюдателей состоит в получении оценки решения исходной системы, то квазиполином (13) при конструировании наблюдателя с заданным характеристическим квазиполиномом следует выбирать так, чтобы система (11) была асимптотически или экспоненциально устойчивой. Наиболее удобным с точки зрения сложности вычислений при нахождении решения системы (9) будет выбор полинома (13), не зависящего от переменной  $\lambda$ , корни которого имеют отрицательные действительные части.

*Определение 2.* Будем говорить, что для системы (1), (2) существует экспоненциально устойчивый наблюдатель (9), если найдутся такие  $\mathcal{L}_1 \in \mathfrak{Q}^{n \times 1}$ ,  $\mathcal{L}_2 \in \mathfrak{Q}^{1 \times 1}$ ,  $\beta_0(p) \in \mathbb{R}_0[p]$ , что система (11) является экспоненциально устойчивой.

*Замечание 2.* Для экспоненциальной устойчивости линейной однородной автономной системы нейтрального типа необходимо и достаточно [14], чтобы ее характеристический квазиполином был экспоненциально устойчивым (корни  $p_i$  характеристического уравнения удовлетворяют неравенству  $\operatorname{Re} p_i < \varepsilon \exists \varepsilon < 0$ ). В этом случае будет [14] экспоненциально устойчивым разностное уравнение, описывающее поведение скачков первых производных решения. Поясним сказанное на примере системы

$$(15) \quad \dot{x}(t) = \mathcal{Q}[x(t)],$$

где отображение  $\mathcal{Q}$  определено в (6) (считаем, что все матрицы в (6) имеют размер  $n \times n$ ). Пусть  $W_0(p, e^{-ph})$  – характеристическая матрица системы (15),  $W_0(p, \lambda) = p(I_n - \lambda q_1(\lambda)) - q_0(\lambda) - q(p, \lambda)$  (см. (8)). Введем множества

$$(16) \quad \Delta_0 = \left\{ p \in \mathbb{C} : |W_0(p, e^{-ph})| = 0 \right\}, \quad \Delta_1 = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |I_n - \lambda q_1(\lambda)| = 0 \right\}.$$

Для экспоненциальной устойчивости системы (15) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$(17) \quad \operatorname{Re} p < -\varepsilon \quad \exists \varepsilon > 0, \quad p \in \Delta_0.$$

В этом случае из экспоненциальной устойчивости разностного уравнения будет следовать, что

$$(18) \quad |\lambda| > 1, \quad \lambda \in \Delta_1.$$

Рассмотрим систему (1). Обозначим:  $D(\lambda) = \sum_{j=1}^m \lambda^j D_j$ . Сформулируем критерии существования наблюдателя с заданным характеристическим квазиполиномом.

*Теорема 1. Для того чтобы для системы (1), (2) существовал наблюдатель (9) с заданным характеристическим квазиполиномом, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$(19) \quad \text{rank} \begin{bmatrix} W(p, e^{-ph}) \\ c'(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n \quad \forall p \in \mathbb{C}, \quad \text{rank} \begin{bmatrix} I_n - D(\lambda) \\ c'(\lambda) \end{bmatrix} = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Доказательство см. в Приложении.

Следующее утверждение является критерием существования экспоненциально устойчивого наблюдателя.

*Теорема 2. Для того чтобы для системы (1), (2) существовал экспоненциально устойчивый наблюдатель (9), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$(20) \quad \text{rank} \begin{bmatrix} W(p, e^{-ph}) \\ c'(e^{-ph}) \end{bmatrix} = n \quad \forall p \in \mathbb{C}, \quad \text{Re } p \geq \varepsilon_1, \quad \exists \varepsilon_1 < 0;$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} I_n - D(\lambda) \\ c'(\lambda) \end{bmatrix} = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad |\lambda| \leq 1.$$

Доказательство см. в Приложении.

#### 4. Модальная управляемость и экспоненциальная стабилизация

Определим динамический регулятор с обратной связью, в качестве которой используем результаты измерений наблюдаемого выходного сигнала

$$(21) \quad \begin{aligned} u(t) &= \alpha_0(p_D)x_1(t), \\ \dot{x}_1(t) &= \mathcal{Q}_{11}[x_1(t)] + \mathcal{Q}_{12}[x_2(t)], \\ \dot{x}_2(t) &= b(\lambda_h)\alpha_0(p_D)x_1(t) + A(p_D, \lambda_h)x_2(t) + \mathcal{Q}_{23}[x_3(t)], \\ \dot{x}_3(t) &= \alpha_1(p_D)c'(\lambda_h)x_2(t) + \mathcal{Q}_{33}[x_3(t)] - \alpha_1(p_D)y(t), \quad t > 0. \end{aligned}$$

Здесь  $x_1, x_3 \in \mathbb{R}$ ,  $x_2 \in \mathbb{R}^n$  – вспомогательные переменные;  $\mathcal{Q}_{11} \in \mathfrak{Q}$ ,  $\mathcal{Q}_{12} \in \mathfrak{Q}^{1 \times n}$ ,  $\mathcal{Q}_{23} \in \mathfrak{Q}^{n \times 1}$ ,  $\mathcal{Q}_{33} \in \mathfrak{Q}$ ;  $\alpha_i(p) \in \mathbb{R}_0[p]$ ,  $i = 0, 1$ .

Замкнем систему (1), (2) регулятором (21). Легко видеть, что система (1), (2), (21) является линейной неоднородной автономной системой нейтрального типа с соизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями, неоднородная часть которой зависит от выхода  $y(t)$ . Заменяя в неоднородной части функцию  $y(t)$  согласно (2) на  $c'(\lambda_h)x(t)$ , получим однородную систему. Запишем характеристическую матрицу  $\overline{W}(p, \lambda)$  этой однородной системы

$$(22) \quad \overline{W}(p, \lambda) = \begin{bmatrix} pI_n - A(p, \lambda) & -\alpha_0(p)b(\lambda) & 0_{n \times n} & 0_{n \times 1} \\ 0_{1 \times n} & p - Q_{11}(p, \lambda) & -Q_{12}(p, \lambda) & 0 \\ 0_{n \times n} & -\alpha_0(p)b(\lambda) & pI_n - A(p, \lambda) & -Q_{23}(p, \lambda) \\ \alpha_1(p)c'(\lambda) & 0 & -\alpha_1(p)c'(\lambda) & p - Q_{33}(p, \lambda) \end{bmatrix},$$

где  $Q_{ij}(p, \lambda) = Q_{ij}[e^{pt}]e^{-pt}$ ,  $0_{i \times j} \in \mathbb{R}^{i \times j}$  ( $i, j > 1$ ) – нулевая матрица.

*Определение 3.* Систему (1), (2) назовем модально управляемой по выходу, если для любого полинома

$$(23) \quad \chi(p, \lambda) = \chi_1(p, \lambda)\chi_2(p, \lambda),$$

где  $\chi_k(p, \lambda) = \sum_{i=0}^{n+1} p^i \chi_{ki}(\lambda)$ ,  $\chi_{ki} \in \mathbb{R}[\lambda]$ ,  $k = 1, 2$ , причем  $\chi_{kn+1}(0) = 1$ , существует регулятор вида (21) такой, что для характеристической матрицы замкнутой системы (1), (2), (21) выполняется равенство

$$(24) \quad \left| \overline{W}(p, \lambda) \right| = \chi(p, \lambda).$$

Заметим, что квазиполином  $\chi(p, e^{-ph})$  в общем случае может иметь нейтральный тип.

*Определение 4.* Систему (1), (2) назовем экспоненциально стабилизируемой по выходу, если существует регулятор вида (21) такой, что замкнутая система (1), (2), (21) является экспоненциально устойчивой.

Следующие теоремы являются критериями модальной управляемости и экспоненциальной стабилизируемости системы (1), (2) в классе регуляторов (21).

*Теорема 3.* Система (1), (2) модально управляема в классе регуляторов (21) тогда и только тогда, когда

$$(25) \quad \begin{aligned} \text{rank}[W(p, e^{-ph}), b(e^{-ph})] &= n \quad \forall p \in \mathbb{C}, \\ \text{rank}[I_n - D(\lambda), b(\lambda)] &= n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

и выполняются условия (19).

Доказательство см. в Приложении.

*Теорема 4. Система (1), (2) экспоненциально стабилизируема в классе регуляторов (21) тогда и только тогда, когда*

$$(26) \quad \begin{aligned} \operatorname{rank}[W(p, e^{-ph}), b(e^{-ph})] &= n \quad \forall p \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re} p \geq \varepsilon_0, \quad \exists \varepsilon_0 < 0; \\ \operatorname{rank}[I_n - D(\lambda), b(\lambda)] &= n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad |\lambda| \leq 1, \end{aligned}$$

*и выполняются условия (20).*

Доказательство см. в Приложении.

## 5. Пример

Пусть система (1), (2) имеет второй порядок, задана следующими матрицами и запаздыванием:

$$(27) \quad \begin{aligned} A(p, \lambda) &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}p\lambda & -3 + \lambda \\ -\frac{1}{3} & -\frac{5}{12}\lambda \end{bmatrix}, \quad b(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\lambda - \lambda^2 \end{bmatrix}, \\ c(\lambda) &= [0, -1], \quad h = \ln 2. \end{aligned}$$

Исходная система с матрицами (27) имеет бесконечный спектр, ее характеристический квазиполином ( $\lambda = e^{-ph}$ ):

$$w(p, \lambda) = \frac{1}{2}p^2(\lambda + 2) + \frac{5}{24}p\lambda(\lambda + 2) + \frac{\lambda}{3} - 1.$$

Легко видеть, что квазиполином  $w(p, e^{-ph})$  имеет положительный корень, поскольку ( $w(0, 1) = -\frac{2}{3} < 0$ ;  $\lim_{p \rightarrow +\infty} w(p, e^{-ph}) = +\infty$ ). Таким образом, невозмущенная система не является экспоненциально устойчивой.

Легко видеть, что первое условие в соотношениях (25) нарушается при  $p = -1$ , а второе – при  $\lambda = -1$ . Это говорит о том, что условия (26) выполнено. Первое условие в (19) также выполнено, но нарушается второе условие при  $\lambda = -2$ . Значит, имеют место условия (20). Таким образом, результаты [28], предлагающие конструкции регулятора по неполным измерениям, который обеспечивает полную стабилизацию (одновременно финитную и асимптотическую стабилизацию и назначения конечного спектра) или только финитную стабилизацию [29], в данном случае не применимы. Однако выполнены условия теоремы 4, поэтому можем построить регулятор по неполным измерениям, обеспечивающий экспоненциальную стабилизацию замкнутой системы. Забегая вперед, сразу же отметим, что множество корней характеристического квазиполинома полученной замкнутой системы будет содержать точки  $p = -1$  и корни уравнения  $e^{-ph} = \lambda$ , где  $\lambda = -2$ , в которых нарушаются условия (19), (25).

Перейдем к построению регулятора (21).

1. Следуя [15], строим регулятор (П.5). После необходимых расчетов [15] получим

$$\begin{aligned}
 u(t) &= x_1(t), \\
 \dot{x}_1(t) &= \left[ \frac{5}{6} - \frac{1}{6}\lambda_h \right] \dot{x}_1(t-h) + \left[ -6 + \frac{65}{12}\lambda_h - \frac{29}{24}\lambda_h^2 \right] x_1(t) + \\
 (28) \quad &+ \int_0^h (-12 + 6\lambda_h)x_1(t-s)e^s ds + \left[ \frac{-5}{72}, \frac{5}{72} \right] \dot{x}(t-h) + \\
 &+ \left[ \frac{-223}{72} - 2\lambda_h, \frac{25}{3} + \frac{185}{288}\lambda_h \right] x(t) + \int_0^h \left[ 1, -\frac{9}{2} \right] e^s x(t-s) ds.
 \end{aligned}$$

Матрица (П.6) в данном случае имеет вид

$$(29) \quad W_x(p, \lambda) = \begin{bmatrix} p + \frac{p\lambda}{2} & 3 - \lambda & 0 \\ \frac{1}{3} & p + \frac{5}{12}\lambda & (2 - \lambda)\lambda \\ \nu_1(p, \lambda) & \nu_2(p, \lambda) & \nu_3(p, \lambda) \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
 \nu_1(p, \lambda) &= \frac{5p\lambda}{72} - \frac{1 - 2\lambda}{p - 1} + \frac{223}{72} + 2\lambda, \\
 \nu_2(p, \lambda) &= -\frac{5p\lambda}{72} + \frac{9(1 - 2\lambda)}{2(p - 1)} - \frac{25}{3} - \frac{185\lambda}{288}, \\
 \nu_3(p, \lambda) &= p - \frac{5p\lambda}{6} + \frac{p\lambda^2}{6} + 6\frac{(1 - 2\lambda)(2 - \lambda)}{p - 1} + 6 - \frac{65\lambda}{12} + \frac{29\lambda^2}{24}.
 \end{aligned}$$

Прямыми вычислениями получаем, что  $|W_x(p, \lambda)| = (1 - \frac{\lambda}{3})(1 - \frac{\lambda}{2})(1 + \frac{\lambda}{2}) \times (p + 1)(p + 2)(p + 3)$ .

2. Строим экспоненциально устойчивый наблюдатель (9). Для этого, следуя доказательству теоремы 4, для системы (П.1) строим регулятор (П.2), обеспечивающий экспоненциальную устойчивость замкнутой системы (9), (П.2). После этого, согласно (П.3), получаем экспоненциально устойчивый наблюдатель (9), где

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_1[z_2] &= \begin{bmatrix} \frac{-79}{4}\lambda_h - \frac{31}{24}\lambda_h^2 - \frac{5}{24}\lambda_h^3 - 36 \\ \frac{25}{288}\lambda_h^3 - \frac{155}{144}\lambda_h^2 + \frac{8}{3}\lambda_h + 12 \end{bmatrix} z_2(t), \\
 \mathcal{L}_2[z_2] &= \frac{-1}{2}\dot{z}_2(t-h) + \left( \frac{5}{24}\lambda_h^2 - \frac{31}{12}\lambda_h - 6 \right) z_2(t).
 \end{aligned}$$

Характеристическая матрица (12) имеет вид

$$(30) \quad W_z(p, \lambda) = \begin{bmatrix} \frac{p(2+\lambda)}{2} & 3-\lambda & \frac{79}{4}\lambda + \frac{31}{24}\lambda^2 + \frac{5}{24}\lambda^3 + 36 \\ \frac{1}{3} & \frac{5\lambda}{12} + p & -\frac{25}{288}\lambda^3 + \frac{155}{144}\lambda^2 - \frac{8}{3}\lambda - 12 \\ 0 & 1 & p + \frac{1}{2}p\lambda - \frac{5}{24}\lambda^2 + \frac{31}{12}\lambda + 6 \end{bmatrix}$$

и  $|W_z(p, \lambda)| = (1 + \frac{1}{2}\lambda)^2 (p+3)(p+2)(p+1)$ .

3. Используя параметры построенных регулятора и наблюдателя, строим регулятор (21):

$$(31) \quad \begin{aligned} u(t) &= x_1(t), \\ \dot{x}_1(t) &= \left[ \frac{5}{6} - \frac{1}{6}\lambda_h \right] \dot{x}_1(t-h) + \left[ -6 + \frac{65}{12}\lambda_h - \frac{29}{24}\lambda_h^2 \right] x_1(t) + \\ &\quad + \int_0^h (-12 + 6\lambda_h)x_1(t-s)e^s ds + \left[ \frac{-5}{72}, \frac{5}{72} \right] \dot{x}_2(t-h) + \\ &\quad + \left[ \frac{-223}{72} - 2\lambda_h, \frac{25}{3} + \frac{185}{288}\lambda_h \right] x_2(t) + \int_0^h \left[ 1, -\frac{9}{2} \right] e^s x(t-s) ds, \\ \dot{x}_2(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 2\lambda_h - 2\lambda_h^2 \end{bmatrix} x_1(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}_2(t-h) + \begin{bmatrix} 0 & -3 + \lambda_h \\ -\frac{1}{3} & -\frac{5}{12}\lambda_h \end{bmatrix} x_2(t) + \\ &\quad + \begin{bmatrix} \frac{-79}{4}\lambda_h - \frac{31}{24}\lambda_h^2 - \frac{5}{24}\lambda_h^3 - 36 \\ \frac{25}{288}\lambda_h^3 - \frac{155}{144}\lambda_h^2 + \frac{8}{3}\lambda_h + 12 \end{bmatrix} x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) &= \frac{-1}{2}\dot{x}_3(t-h) + \left( \frac{5}{24}\lambda_h^2 - \frac{31}{12}\lambda_h - 6 \right) x_3(t) + ([0, 1]x_2(t) - y(t)). \end{aligned}$$

Матрица замкнутой системы (22) имеет вид

$$\overline{W}(p, \lambda) = \begin{bmatrix} \frac{p(2+\lambda)}{2} & 3-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{5\lambda}{12} + p & (2-\lambda)\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_3(p, \lambda) & \nu_1(p, \lambda) & \nu_2(p, \lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{p(2+\lambda)}{2} & 3-\lambda & \frac{79}{4}\lambda + \frac{31}{24}\lambda^2 + \frac{5}{24}\lambda^3 + 36 \\ 0 & 0 & (2-\lambda)\lambda & \frac{1}{3} & \frac{5\lambda}{12} + p & -\frac{25}{288}\lambda^3 + \frac{155}{144}\lambda^2 - \frac{8}{3}\lambda - 12 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & p + \frac{1}{2}p\lambda - \frac{5}{24}\lambda^2 + \frac{31}{12}\lambda + 6 \end{bmatrix}.$$

Непосредственными вычислениями находим

$$|\overline{W}(p, \lambda)| = \left(1 - \frac{1}{2}\lambda\right) \left(1 - \frac{1}{3}\lambda\right) \left(1 + \frac{1}{2}\lambda\right)^3 (p+3)^2 (p+2)^2 (p+1)^2.$$

## 6. Заключение

Для линейных автономных дифференциально-разностных систем нейтрального типа со скалярным управлением и наблюдаемым выходом получены критерии модальной управляемости и экспоненциальной стабилизируемости в классе регуляторов с обратной связью, которая является функцией наблюдаемого выхода. Свойство модальной управляемости предоставляет более широкие возможности при проектировании системы в сравнении со свойством стабилизации. В частности, можно за счет выбора коэффициентов характеристического квазиполинома задать «скорость сходимости к нулю» решения системы. Или можно обеспечить конечный спектр, что сделает систему более простой с точки зрения последующего управления. Однако требования на параметры системы, которые предъявляет критерий модальной управляемости, являются более жесткими в сравнении с условиями экспоненциальной стабилизируемости.

Разработаны два типа асимптотических наблюдателей: наблюдатель с заданным характеристическим квазиполиномом и экспоненциально устойчивый наблюдатель. Поведение ошибок оценивания наблюдателей описывается линейной однородной автономной системой нейтрального типа. Причем в случае первого типа наблюдателя можно до его проектирования задать желаемый характеристический квазиполином системы, описывающей ошибку, т.е. заранее задать скорость сходимости оценки, определяемой наблюдателем, к решению исходной системы. В случае второго типа наблюдателя система, описывающая ошибку оценки решения, получается экспоненциально устойчивой. При этом управлять коэффициентами характеристического уравнения в общем случае невозможно. Однако экспоненциальная устойчивость системы, описывающей ошибку оценивания, гарантирует сходимость оценки к решению с «экспоненциальной скоростью».

Методы построения регуляторов и наблюдателей, разработанные в представленном исследовании, основаны на стандартных операциях с полиномами и полиномиальными матрицами и легко реализуются в современных пакетах компьютерной алгебры.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### *Доказательство теоремы 1.*

Введем систему нейтрального типа

$$(П.1) \quad \dot{x}(t) = A'(p_D, \lambda_h)x(t) + c'(\lambda_h)u(t), \quad t > 0.$$

Определим регулятор

$$(П.2) \quad u(t) = \beta_1(p_D)x_1(t), \quad \dot{x}_1(t) = \mathcal{K}_1[x(t)] + \mathcal{K}_2[x_1(t)], \quad t > 0,$$

где  $x_1 \in \mathbb{R}$  – вспомогательная переменная,  $\mathcal{K}_1 \in \Omega^{1 \times n}$ ,  $\mathcal{K}_2 \in \Omega$ ,  $\beta_1(p) \in \mathbb{R}_0[p]$ .

Для того чтобы для любого заданного квазиполинома (13) существовал регулятор (П.2) такой, что  $|W_1(p, \lambda)| = g(p, \lambda)$ , необходимо и достаточно [15] условий (19). Здесь  $W_1(p, e^{-ph})$  – характеристическая матрица замкнутой системы (П.1), (П.2),

$$W_1(p, \lambda) = \begin{bmatrix} pI_n - A'(p, \lambda) & -\beta_1(p)c'(\lambda) \\ -K_1(p, \lambda) & p - K_2(p, \lambda) \end{bmatrix},$$

где  $K_i(p, \lambda) = \mathcal{K}_i[e^{pt}]e^{-pt} \Big|_{e^{-ph}}$ . Положим в уравнениях (9)

$$(П.3) \quad \beta_0(p) = \beta_1(p), \quad \mathcal{L}_1 = \mathcal{K}'_1, \quad \mathcal{L}_2 = \mathcal{K}_2.$$

Тогда получим, что  $(W_1(p, \lambda))' = W_z(p, \lambda)$ . Поэтому  $|W_z(p, \lambda)| = g(p, \lambda)$ . Отсюда следует существование наблюдателя (9) с заданным характеристическим квазиполиномом.

### Доказательство теоремы 2.

Для того чтобы для системы (П.1) существовал регулятор (П.2) такой, что замкнутая система является экспоненциально устойчивой, необходимо и достаточно условий (20) [15]. Поэтому, повторив с необходимыми изменениями рассуждения доказательства теоремы 1, придем к существованию экспоненциально устойчивого наблюдателя (9). Теорема доказана.

### Доказательство теоремы 3.

**Необходимость.** Условия (25) являются [15] необходимыми и достаточными для модальной управляемости в классе регуляторов с обратной связью, формируемой на основании измерений вектора состояния  $x$ . Поэтому условия (25) необходимы для модальной управляемости в классе регуляторов с обратной связью по измерениям наблюдаемого выхода (2).

Докажем необходимость условий (19). Предположим, что система (1), (2) модально управляема в классе регуляторов (21). Считаем, что для некоторого заданного полинома (23) регулятор (21) обеспечивает равенство (24). Рассмотрим систему (П.1). Определим регулятор вида

$$(П.4) \quad \begin{aligned} u(t) &= -\alpha_1(p_D)x_1(t), \\ \dot{x}_1(t) &= \mathcal{Q}'_{33}[x_1(t)] + \mathcal{Q}'_{23}[x_2(t)], \\ \dot{x}_2(t) &= \alpha_1(p_D)c'(\lambda_h)x_1(t) + A'(p_D, \lambda_h)x_2(t) + \mathcal{Q}'_{12}[x_3(t)], \\ \dot{x}_3(t) &= \alpha_0(p_D)b'(\lambda_h)(x(t) + x_2(t)) + \mathcal{Q}'_{11}[x_3(t)], \quad t > 0. \end{aligned}$$

Пусть  $\widehat{W}(p, e^{-ph})$  – характеристическая матрица системы (П.1), (П.4). Легко видеть, что матрица  $(\overline{W}(p, \lambda))'$  получается из матрицы  $\widehat{W}(p, \lambda)$  при перестановке в ней местами строк и столбцов блоков с номерами 2 и 4. Поэтому

можем записать  $E_{24}\widehat{W}(p, \lambda)E_{24}^{-1} = (\overline{W}(p, \lambda))'$ , где матрица  $E_{24}$  меняет местами строки блоков подходящего размера с номерами 2 и 4 при умножении на любую матрицу слева. Следовательно,  $|\widehat{W}(p, \lambda)| = \chi(p, \lambda)$ . Это значит, что система (П.1) является модально управляемой в смысле работы [15] (т.е. регулятором с обратной связью в виде функции состояния  $x$ ), а условия (19) есть критерий модальной управляемости системы (П.1). Необходимость условий (19), (25) доказана.

**Достаточность.** Пусть задан полином (23). Доказательство достаточности представим в виде схемы построения регулятора (21), обеспечивающего равенство (24).

1. Определим регулятор с обратной связью по состоянию вида

$$(П.5) \quad u(t) = \alpha_0(p_D)x_1(t), \quad \dot{x}_1(t) = Q_{12}[x(t)] + Q_{11}[x_1(t)], \quad t > 0.$$

В регуляторе (П.5) обозначения те же, что и в (21). В силу условий (25) для любого полинома  $\chi_1(p, \lambda)$  из (23) существует [9] регулятор (П.5) такой, что для характеристической матрицы  $W_x(p, e^{-ph})$  замкнутой системы (1), (П.5),

$$(П.6) \quad W_x(p, \lambda) = \begin{bmatrix} pI_n - A(p, \lambda) & -b(\lambda)\alpha_0(p) \\ -Q_{12}(p, \lambda) & p - Q_{11}(p, \lambda) \end{bmatrix},$$

выполняется равенство

$$(П.7) \quad |W_x(p, \lambda)| = \chi_1(p, \lambda).$$

Далее считаем, что регулятор (П.5) построен.

2. Согласно теореме 1 из условия (19) следует, что для любого заданного полинома  $\chi_2(p, \lambda)$  из (23) существует наблюдатель (9) с заданным характеристическим квазиполиномом такой, что для характеристической матрицы (12) имеет место соотношение

$$(П.8) \quad |W_z(p, \lambda)| = \chi_2(p, \lambda).$$

Далее считаем, что наблюдатель (9) построен.

3. Используя параметры регулятора (П.5) и наблюдателя (9), выписываем регулятор (21), дополнительно положив в (21)

$$(П.9) \quad Q_{23} = \mathcal{L}_1, \quad Q_{33} = \mathcal{L}_2.$$

Покажем, что для характеристической матрицы  $\overline{W}(p, e^{-ph})$  замкнутой системы (1), (2), (21) выполняется равенство (24). Для этого введем матрицу

$$(П.10) \quad \Gamma = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times 1} & 0_{n \times n} & 0_{n \times 1} \\ 0_{1 \times n} & 1 & 0_{1 \times n} & 0 \\ -I_n & 0_{n \times 1} & I_n & 0_{n \times 1} \\ 0_{1 \times n} & 0 & 0_{1 \times n} & 1 \end{bmatrix}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$(II.11) \quad \Gamma \overline{W}(p, \lambda) \Gamma^{-1} = \widetilde{W}(p, \lambda),$$

$$\widetilde{W}(p, \lambda) = \begin{bmatrix} pI_n - A(p, \lambda) & -b(\lambda)\alpha_0(p) & 0_{n \times n} & 0_{n \times 1} \\ -Q_{12}(p, \lambda) & p - Q_{11}(p, \lambda) & -Q_{12}(p, \lambda) & 0_{1 \times 1} \\ 0_{n \times 1} & 0 & pI_n - A(p, \lambda) & -Q_{23}(p, \lambda) \\ 0_{n \times 1} & 0 & -\alpha_1(p)c'(\lambda) & p - Q_{33}(p, \lambda) \end{bmatrix}.$$

Из равенств (II.6), (II.7), (II.8), (II.11) и (12) следует, что  $\overline{W}(p, \lambda) = \Gamma \overline{W}(p, \lambda) \Gamma^{-1} = \chi(p, \lambda)$ . Теорема доказана.

*Доказательство теоремы 4.*

Идея доказательства теорем 4 достаточно сильно похожа на идею доказательства теоремы 3, поэтому ограничимся краткой схемой доказательства.

**Необходимость.** 1. Предположим, что система (1), (2), замкнутая регулятором (21), является экспоненциально устойчивой. Сформируем множества  $\Delta_0, \Delta_1$  из замечания 2 (см. (16)). Если нарушается первое условие в формулах (26), то для любого  $\varepsilon_0 < 0$  найдется  $p_0 \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re} p_0 \geq \varepsilon_0$  такое, что  $\operatorname{rank}[W(p_0, e^{-p_0 h}), b(e^{-p_0 h})] < n$ . В этом случае при любом регуляторе вида (21) число  $p_0$  останется в спектре замкнутой системы (1), (2), (21), т.е.  $p_0 \in \Delta_0$ . Поэтому (17) не будет выполняться. Следовательно, система (1), (2), (21) не может быть экспоненциально устойчивой.

Если нарушается второе условие в соотношениях (26), то найдется  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ ,  $|\lambda_0| \leq 1$ , такое, что  $\operatorname{rank}[D(\lambda_0)] < n$ . Очевидно, что при любом регуляторе вида (21) для замкнутой системы (1), (2), (21) справедливо  $\lambda_0 \in \Delta_1$ , а значит, будет нарушаться условие (18). Необходимость условий (26) доказана.

2. Докажем необходимость условий (20). Рассмотрим систему (II.1), замкнутую регулятором (II.4). По очереди предполагая, что нарушаются первое или второе условия в (20), аналогично п. 1) показываем, что замкнутая система (II.1), (II.4) не может быть экспоненциально устойчивой.

**Достаточность.** Приведем схему построения регулятора (21), а затем обоснуем экспоненциальную устойчивость замкнутой системы.

1. Строим [9] регулятор (II.5), обеспечивающий экспоненциальную устойчивость замкнутой системы (1), (II.5). Возможность построения такого регулятора обеспечивают условия (26). При этом характеристическая матрица замкнутой системы (1), (II.5) будет иметь вид (II.6).

2. Строим экспоненциально устойчивый наблюдатель (9). Возможность построения такого регулятора обеспечивают условия (20). При этом характеристическая матрица однородной системы (9) будет иметь вид (12).

3. Используя параметры построенных регулятора (II.5) и наблюдателя (9), выписываем регулятор (21), при этом следует дополнительно определить матрицы согласно (II.9).

Покажем, что система (1), (21) является экспоненциально устойчивой. Для этого сделаем невырожденное преобразование переменных

$$\text{col}[x, x_1, x_2, x_3] = \Gamma^{-1} \text{col}[\tilde{x}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3],$$

где матрица  $\Gamma$  определена формулой (П.10). Получим новую систему с характеристической матрицей  $\widetilde{W}(p, e^{-ph})$ , где матрица  $\widetilde{W}(p, \lambda)$  определена в формулах (П.11). Полученную систему назовем  $\widetilde{\Sigma}$ .

Из вида матрицы  $\widetilde{W}(p, \lambda)$  следует, что компоненты  $\tilde{x}_2, \tilde{x}_3$  определяются отдельной системой (являющейся подсистемой системы  $\widetilde{\Sigma}$ ), характеристическая матрица которой совпадает с характеристической матрицей (12). Поэтому система, определяющая компоненты  $\tilde{x}_2, \tilde{x}_3$ , является экспоненциально устойчивой. То есть найдутся положительные постоянные  $\gamma_1, \gamma_2$  такие, что

$$(П.12) \quad \|\tilde{x}_i(t)\| \leq \gamma_1 e^{-\gamma_2 t}, \quad t > 0, \quad i = 2, 3.$$

Рассмотрим систему, соответствующую первым двум строкам блоков матрицы  $\widetilde{W}(p, \lambda)$ . Поскольку компоненты  $\tilde{x}_2, \tilde{x}_3$  определяются отдельно, в рассматриваемой системе их можно считать неоднородной частью. Тогда компоненты  $\tilde{x}, \tilde{x}_1$  удовлетворяют неоднородной системе, для которой характеристическая матрица соответствующей однородной системы совпадает с матрицей (П.6). Значит, указанная однородная система является экспоненциально устойчивой. Поэтому и с учетом (П.12) найдутся положительные постоянные  $\gamma_3, \gamma_4$  такие, что

$$(П.13) \quad \|\tilde{x}(t)\| \leq \gamma_3 e^{-\gamma_4 t}, \quad \|\tilde{x}_i(t)\| \leq \gamma_3 e^{-\gamma_4 t}, \quad t > 0, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Отсюда следует экспоненциальная устойчивость системы  $\widetilde{\Sigma}$ , а значит, и системы (1), (21). Теорема доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Долгий Ю.Ф., Сурков П.Г. Математические модели динамических систем с запаздыванием. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2012. 122 с.  
[https://elar.urfu.ru/bitstream/10995/45629/1/978-5-7996-0772-2\\_2012.pdf](https://elar.urfu.ru/bitstream/10995/45629/1/978-5-7996-0772-2_2012.pdf) (дата обращения: 17.03.2025)
2. Колмановский В.Б., Носов В.Р. Системы с последействием нейтрального типа // АиТ. 1984. №1. С. 5–35.
3. Полосков И.Е. Методы анализа систем с запаздыванием [Электронный ресурс]: монография: Пермский государственный национальный исследовательский университет. Электронные данные. Пермь. 2020. – 19 Мб; 900 с. Режим доступа: <http://www.psu.ru/files/docs/science/books/mono/poloskov-metody-analiza-sistem.pdf>
4. Хартовский В.Е. Управление линейными системами нейтрального типа: качественный анализ и реализация обратных связей. Гродно: ГрГУ, 2022. 500 с.

5. *Гребенщиков Б.К.* Асимптотические свойства и стабилизация одной системы нейтрального типа с постоянным запаздыванием // Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. Вып. 1. С. 81–96. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.108>
6. *Булгаков Б.В.* Колебания. М.: Из-во технико-теоретической лит-ры. 1954. 891 с.
7. *Красовский Н.Н., Осипов Ю.С.* О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1963. № 6. С. 3–15.
8. *Осипов Ю.С.* О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. № 5. С. 606–618.
9. *Pandolfi L.* Stabilization of neutral functional-differential equations // J. Optim. Theory Appl. 1976. V. 20. No. 2. P. 191–204. <https://doi.org/10.1007/BF01767451>
10. *Lu W.S., Lee E., Zak S.* On the stabilization of linear neutral delay-difference systems // IEEE Transact. Autom. Control. 1986. V. 31. No. 1. P. 65–67. <https://doi.org/10.1109/TAC.1986.1104115>
11. *Rabah R., Sklyar G.M., Barkhayev P.Y.* Stability and stabilizability of mixed retarded-neutral type systems // ESAIM Control, Optimization and Calculus of Variations. 2012. V. 18. No. 3. P. 656–692. <https://doi.org/10.1051/cocv/2011166>
12. *Долгий Ю.Ф., Сесекин А.Н.* Исследование регуляризации вырожденной задачи импульсной стабилизации системы с последействием // Тр. ин-та мат. и механики УрО РАН. 2024. Т. 30. № 1. С. 80–99. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2022-28-1-74-95>
13. *Hu G.D., Hu R.* A frequency-domain method for stabilization of linear neutral delay systems // Syst. Control. Lett. November 2023. V. 181. Art. 105650. <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2023.105650>
14. *Hale J.K., Verduyn Lunel S.M.* Strong stabilization of neutral functional differential equations // IMA J. Math. Control Inf. 2002. V. 19. No. 1–2. P. 5–23. [https://doi.org/10.1093/imamci/19.1\\_and\\_2.5](https://doi.org/10.1093/imamci/19.1_and_2.5)
15. *Метельский А.В.* Управление спектром системы нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60. № 1. С. 99–125. <https://doi.org/10.31857/S0374064124010097>
16. *Миняев С.И., Фурсов А.С.* Топологический подход к одновременной стабилизации объектов с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 11. С. 1453–1461. <https://doi.org/10.1134/S0374064113110095>
17. *Watanabe K.* Finite spectrum assignment and observer for multivariable systems with commensurate delays // IEEE Trans. Autom. Control. 1986. V. AC–31. No. 6. P. 543–550. <https://doi.org/10.1109/TAC.1986.1104336>
18. *Wang Q.G., Lee T.H., Tan K.K.* Finite Spectrum Assignment Controllers for Time Delay Systems. Springer-Verlag, 1999. 129 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-84628-531-8>
19. *Метельский А.В.* Спектральное приведение, полное успокоение и стабилизация системы с запаздыванием одним регулятором // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 11. С. 1436–1452. <https://doi.org/10.1134/S0374064113110083>
20. *Марченко В.М.* Управление системами с последействием в шкалах линейных регуляторов по типу обратной связи // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 7. С. 1003–1017. <https://doi.org/10.1134/S0012266111070111>

21. *Метельский А.В., Хартовский В.Е.* Критерии модальной управляемости линейных систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 11. С. 1506–1521. <https://doi.org/10.1134/S0374064116110078>
22. *Хартовский В.Е.* Модальная управляемость линейных систем нейтрального типа в классах дифференциально-разностных регуляторов // АиТ. 2017. № 11. С. 3–19. <https://doi.org/10.1134/S0005117917110017>
23. *Fridman E.* Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control. Birhauser. Systems and Control: Foundations and Applications. 2014, 362 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-09393-2>
24. *Furtat I., Fridman E.* Delayed Disturbance Attenuation via Measurement Noise Estimation // IEEE Transaction on Automatic Control. 2021. V. 66. No. 11. P. 5546–5553. <https://doi.org/10.1109/TAC.2021.3054238>
25. *Карпук В.В., Метельский А.В.* Полное успокоение и стабилизация линейных автономных систем с запаздыванием // Изв. РАН. ТиСУ. 2009. № 6. С. 19–28. <https://doi.org/10.1134/S1064230709060033>
26. *Метельский А.В., Хартовский В.Е., Урбан О.И.* Регуляторы успокоения решения линейных систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 3. С. 391–403. <https://doi.org/10.1134/S0374064116030122>
27. *Метельский А.В.* Полная и финитная стабилизация дифференциальной системы с запаздыванием обратной связью по неполному выходу // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1665–1682. <https://doi.org/10.1134/S0374064119120082>
28. *Хартовский В.Е.* Финитная стабилизация и назначение конечного спектра единым регулятором по неполным измерениям для линейных систем нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60. № 5. С. 686–706. <https://doi.org/10.31857/S0374064124050093>
29. *Хартовский В.Е., Урбан О.И.* Финитная стабилизация по неполным измерениям систем нейтрального типа в классе регуляторов с сосредоточенными соизмеримыми запаздываниям // АиТ. 2025. № 1. С. 3–26. <https://doi.org/10.31857/S000523102501>

*Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.*

Поступила в редакцию 28.01.2025

После доработки 24.03.2025

Принята к публикации 28.03.2025

© 2025 г. В.Н. ТХАЙ, д-р физ.-мат. наук (tkhai@ipu.ru)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## СТАБИЛИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ В АВТОНОМНОЙ СКОРРЕКТИРОВАННОЙ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЕ ПУТЕМ КОНСТРУИРОВАНИЯ ПРИТЯГИВАЮЩЕГО ЦИКЛА

Рассматривается консервативная система, допускающая семейство одночастотных колебаний с областью  $\Omega$ . Для нее строится управляемая автономная система с малым коэффициентом усиления регулятора; стабилизация выделенного колебания из  $\Omega$  проводится построением цикла, который притягивает все траектории из области  $\Omega$  и окрестности  $\Omega$ . Находится универсальное управление, обладающее свойством адаптивности и действующее как нелинейная сила, линейная по скорости, отслеживающая текущее значение потенциальной энергии на движении. Цикл строится для любого колебания системы. В результате на базе консервативной системы конструируется новый класс автономных управляемых систем, рабочими режимами которого являются стабилизированные (в большом) циклы с любой желаемой энергией. Приводятся примеры.

*Ключевые слова:* консервативная система, одночастотное колебание, универсальное адаптивное управление, обратная связь, отслеживание потенциальной энергии, притягивающий цикл, стабилизация.

**DOI:** 10.31857/S0005231025060038, **EDN:** IKBIZK

### 1. Введение

Рассматриваются одночастотные колебания (периодические движения) консервативной системы. Они образуют семейства по параметру – постоянной энергии  $h$ . Семейства делятся на невырожденные и вырожденные. На невырожденном семействе период  $T(h)$  монотонно меняется с постоянной  $h$ , примером является семейство колебаний маятника. На вырожденном семействе колебания являются изохронными.

Невырожденные колебания всегда продолжаются [1, 2] на глобальное семейство колебаний. В консервативной системе глобальное семейство описывается редуцированной консервативной системой с одной степенью свободы. Такой же результат справедлив для семейства вырожденных колебаний консервативной системы, но этот вопрос в статье отдельно не рассматривается. В любом случае сначала встает задача исследования консервативной системы с одной степенью свободы.

Идея управления колебанием посредством построения предельного цикла восходит к Л.С. Понтрягину, который в [3] нашел необходимые и достаточные условия для выделения предельного цикла из семейства периодических решений гамильтоновой системы: применялись негамильтоновы возмуще-

ния. Ван дер Полю [4] исследовал релаксационные режимы (при отсутствии вынуждающей силы) регеративного приемника. А.А. Андронов (1929) обнаружил, что физическим воплощением кривых Пуанкаре являются построенные им и независимо Ван дер Полем устойчивые автоколебания. А. Пуанкаре [5, гл. VI] (1881) ввел понятие предельного цикла для системы на плоскости. Теория автоколебаний развита в школе А.А. Андропова [6].

А. Пуанкаре выделил изолированный случай, когда периодические решения сохраняются качественно с изменением параметра. В неизолрированных случаях происходит бифуркация; здесь результаты Н.Н. Боголюбова [7], И.Г. Малкина [8], В.К. Мельникова [9] стали основными. Они нашли продолжение во многих направлениях, включая, например, негладкую динамику (см. обзор [10]).

В автономной  $\varepsilon$ -возмущенной системе в результате бифуркации рождается цикл. При этом жорданова клетка из нулевых характеристических показателей (ХП) распадается: один нулевой ХП сохраняется, а другой ХП равен  $-\varepsilon\alpha$ . В случае  $\alpha > 0$  справедлива теорема Андропова–Витта [11] об устойчивости периодического движения автономной системы. Понятие цикла стало применяться и в многомерной системе [12]. Для нее также справедлива теорема Андропова–Витта. Формула для вычисления числа  $\alpha$  дается в [13].

В линейной периодической системе ХП является корнем характеристического уравнения приведенной по Ляпунову системы с постоянными коэффициентами.

В автономной системе решение определяется с точностью до сдвига начальной точки на траектории. Поэтому в теореме Андропова–Витта при переходе в окрестность периодического движения для системы  $n$ -го порядка ставится задача об асимптотической устойчивости по Румянцеву [14] по  $n - 1$  переменным – отклонениям от указанного движения. Решение получается для ХП с отрицательными действительными частями; для системы на плоскости вычисляется одно число  $-\varepsilon\alpha$ . В случае теоремы Андропова–Витта полученное свойство называется орбитальной асимптотической устойчивостью периодического движения или притяжением [15] с уточнением области притяжения траекторий: в малом (локально), в большом (глобально).

Циклом называется изолированное периодическое решение автономной системы [12]. Притягивающий цикл является орбитально асимптотически устойчивым одночастотным колебанием. В управляемой автономной системе построением притягивающего цикла решается задача стабилизации колебания.

В [13] показано, что в окрестности цикла диссипация типа Ван дер Поля, в смысле независимости от рассматриваемой системы с колебаниями, обладает универсальностью. Для математического маятника из [13] следует стабилизация (в малом) любого колебания, если применяется адаптивная схема стабилизации [2]. В схеме применяется управление, параметр в котором выбирается в зависимости от значения параметра для стабилизируемого колебания:

управление обладает свойством адаптивности. Схема может применяться самостоятельно или в составе более общей адаптивной системы управления.

Для достижения цикла и притягивающего цикла применяется обратная связь, в которой информация о траектории поступает в отслеживающий координату регулятор типа Ван дер Поля, формирующий без задержки диссипацию в текущей точке траектории. Таким образом, решается задача стабилизации в окрестности рассматриваемого колебания. Для глобальной стабилизации обратная связь строится на отслеживании потенциальной энергии и описывается в данной статье.

Другие исследования по стабилизации желаемого режима колебания отличаются применением управлений, явно зависящих от времени. Приведем некоторые из них. Обзор на примере перевернутого маятника дается в [16]. В [17, 18] предлагается раскачивающее управление (swinging control). В [19] решается задача об орбитальной стабилизации периодических решений малоприводных нелинейных систем. Синтезированный нелинейный закон управления с обратной связью зависит от времени. Стабилизация желаемых уровней механической энергии посредством импульсного управления проводится в [20], робастное стабилизирующее управление колебаниями ищется неявным методом Ляпунова в [21], стабилизация электродинамическим управлением происходит в [22].

В данной статье строится  $\varepsilon$ -скорректированная консервативная система, обладающая притягивающим циклом. Область его притяжения включает область колебаний  $\Omega$  консервативной системы и  $\varepsilon$ -окрестность  $\Omega$ . Решается глобальная задача стабилизации. Локальная задача решалась в [2] для редуцированной консервативной системы с одной степенью свободы.

## 2. Консервативная система с одной степенью свободы. Синтез управления

Рассматривается гладкая консервативная система с одной степенью свободы, допускающая семейство  $\Sigma$  одночастотных колебаний по параметру  $h$ , где  $h$  – значение постоянной энергии. Согласно [1] такое семейство всегда продолжается до глобального, поэтому рассматривается глобальное семейство  $\Sigma$ . Оно занимает область колебаний  $\Omega$ . Период на семействе может возрастать (математический маятник), быть постоянным (гармонический осциллятор) или убывать (уравнение  $\ddot{x} + x^3 = 0$ ). При действии  $\varepsilon$ -малой силы (управления с малым коэффициентом усиления регулятора  $\varepsilon$ ) получается автономная скорректированная (управляемая) консервативная система

$$(1) \quad \ddot{x} + f(x) = \varepsilon u(x, \dot{x}).$$

При  $\varepsilon = 0$  уравнение (1) допускает интеграл энергии

$$(2) \quad \dot{x}^2 = 2(h - \Pi(x)), \quad \Pi = \int f(x) dx.$$

В области  $\Omega$  имеем  $0 < \Pi(x) \leq h$ . На семействе  $\Sigma$  координата описывается формулой  $x = \varphi(h, t)$ , а период  $T = T(h)$  является функцией от постоянной энергии  $h$ .

Выбирается гладкая функция  $u$ , не зависящая явно от времени (автономное управление). В задаче стабилизации управление должно обеспечивать локальное притяжение к циклу, поэтому функция  $u(x, \dot{x})$  согласно [13] будет иметь вид:  $u = a(x, \dot{x})\dot{x}$ . Сама функция  $a = 1 - Kx^2$  найдена в [13]; она гарантирует существование цикла. Выбором в ней постоянной  $K = K(h^*)$  в [13] достигается орбитальная асимптотическая устойчивость цикла, рождающегося из колебания консервативной системы с энергией  $h^*$ . Локальный результат становится глобальным для изохронного семейства колебаний. Это демонстрируется в уравнении Ван дер Поля. Однако для невырожденного семейства колебаний локальный результат не распространяется на всю область колебаний  $\Omega$ .

При решении локальной задачи в [13] предлагается для невырожденного семейства колебаний учитывать зависимость  $K(h)$  от значения энергии  $h$ . Тем самым в скорректированной системе строится цикл, близкий к колебанию консервативной системы, обладающей желаемой энергией  $h = h^*$ . Для этого выбирается  $K = K(h^*)$ .

В данной статье применяется управление, отслеживающее в цепи обратной связи текущую потенциальную энергию на движении. В управляемой консервативной системе

$$(3) \quad \ddot{x} + f(x) = \varepsilon[1 - K(h^*)\Pi(x)]\dot{x}$$

ставится задача существования цикла, близкого к колебанию самой консервативной системы с энергией  $h = h^* > 0$ . Синтез закона управления проводится в исследовании.

Записывается амплитудное (бифуркационное) уравнение

$$(4) \quad I(h) \equiv \int_0^{T^*} [1 - K(h^*)\Pi(x)]\dot{x}^2 dt = 0,$$

в котором потенциальная  $\Pi(x)$  и кинетическая  $\tilde{T} = \dot{x}^2/2$  энергии вычисляются на решении  $x = \varphi(h, t)$ . Смысл равенства (4) заключается в выполнении необходимых и достаточных условий существования  $T^*$ -периодического решения в первом по  $\varepsilon$  приближении. В (4) учитывается, что в консервативной системе сопряженное решение  $\psi = -\dot{\varphi}$ . Оказалось, что условие  $dI(h^*)/dh \neq 0$  является достаточным для существования периодического решения возмущенного уравнения (3) (см. [7–9]). Этот общий результат для автономной системы (3) означает рождение цикла. При отрицательном значении производной цикл устойчив: формула для ХП приводится в [13].

Тождество

$$(5) \quad \int_0^T [1 - K(h)\Pi(\varphi(h, t))] \dot{\varphi}(h, t)^2 dt \equiv 0$$

означает выполнение условий существования периодического решения в первом приближении по  $\varepsilon$  для всех значений  $h$ . Из него находится функция

$$(6) \quad K(h) = \frac{\int_0^T (h - \Pi(\varphi(h, t))) dt}{\int_0^T \Pi(\varphi(h, t))(h - \Pi(\varphi(h, t))) dt}.$$

В (6) знаменатель в области колебаний  $\Omega$  отличен от нуля. Функция  $K(h)$  определяется единственным образом через потенциальную энергию  $\Pi$ , которая меняется с временем  $t$  на траектории. Каждому значению  $h$  консервативной системы отвечает только одна траектория и одно значение  $K(h)$ .

С другой стороны, из формулы (5) при верхнем пределе интегрирования  $T = T^*$  и числе  $K(h) = K(h^*)$  получается амплитудное уравнение (4) для нахождения значения  $h$ , отвечающего циклу. Явный вид функции  $K(h)$  находится далее в разделе 3.

Уравнение (3) задает отображение фазовой плоскости на себя:  $t : 0 \rightarrow T$ . При этом кривая  $\Gamma(h, 0) = \{x(h, 0), \dot{x}(0)\}$  отображается на кривую  $\Gamma(h, T) = \{x(h, T), \dot{x}(T)\}$ . Существование единственного корня  $h = h^*$  уравнения (4) означает, что при  $h = h^*$  точка  $\Gamma(h^*, 0)$  совпадает с точкой  $\Gamma(h^*, T)$ . И это обнаруживается для построенных кривых уже по первому приближению по  $\varepsilon$ : необходимые и достаточные условия в первом приближении становятся достаточными для существования неподвижной точки отображения по первому  $\varepsilon$ -приближению. Для единственного корня неподвижная точка отображения будет изолированной, что соответствует изолированному периодическому решению периода  $T$ . С учетом того, что  $T(h^*) = T^*$ , получается цикл периода  $T^*$ . Условие  $dI(h^*)/dh < 0$  выполняется для сжимающего отображения: цикл становится орбитально асимптотически устойчивым.

### 3. Притяжение в малом

Интеграл (4) берется на отрезке  $t \in [0, T^*]$ . В нем функция  $\Pi(x)$  зависит только от  $x$  и вычисляется через решение  $x = \varphi(h, t)$ . При замене  $\tau = (T(h)/T^*)t$  – переменной, по которой берется интеграл (4) координата  $x$  уже напрямую зависит только от  $\tau$ . Функция  $x(h, \tau)$  становится  $T^*$ -периодической для всех значений параметра  $h$ . Для колебания с нулевой начальной скоростью получается:

$$(7) \quad x(h, \tau) = x(h, 0)e(\tau), \quad e(\tau) = e(\tau + T^*).$$

Функция  $e(\tau)$  меняется на отрезке  $[0, 1]$ . То же самое справедливо для функции  $\Pi(x(h, \tau))$ . При  $\tau = 0$  имеем  $\Pi(x(h, 0)) = h$ . Поэтому с учетом выражения (7) получается равенство  $\Pi(x(h, \tau)) = hz(\tau)$ , в котором для заданной потенциальной энергии конкретная функция  $z(\tau)$  вычисляется. Более общий анализ применения переменной  $\tau$  приводится в Приложении, в котором теорема 4

является по сути дополнением к основным результатам и представляет самостоятельный интерес.

С учетом нового выражения для потенциальной энергии  $\Pi$  преобразуется амплитудное уравнение (4):

$$(8) \quad I(h) = 0, \quad I(h) \equiv h \int_0^{T^*} (1 - K(h^*)hz)(1 - z)d\tau.$$

Функция  $I(h)$  представляется в виде

$$(9) \quad I(h) = h(\alpha - \beta h), \quad \alpha = \int_0^{T^*} (1 - z)d\tau, \quad \beta = -K(h^*) \int_0^{T^*} z(1 - z)d\tau.$$

Становится ясным, что уравнение (8) допускает единственный, отличный от нуля, корень  $h^* = \alpha/\beta$ .

Тождество (5) принимает вид

$$h \int_0^{T^*} (1 - K(h)hz)(1 - z)d\tau \equiv 0.$$

Поэтому для точки  $h = h^*$  получается

$$\frac{d}{dh} \left( h \int_0^{T^*} (1 - K(h^*)hz)(1 - z)d\tau \right)_{h=h^*} - \frac{dK(h^*)}{dh} (h^*)^2 \int_0^{T^*} z(1 - z)d\tau \equiv 0.$$

Производная в точке, соответствующей циклу, вычисляется по формуле

$$(10) \quad \frac{dI(h^*)}{dh} = \frac{dK(h^*)}{dh} (h^*)^2 \int_0^{T^*} z(1 - z)d\tau.$$

Функция (6) дается выражением

$$(11) \quad K(h) = \frac{\int_0^{T^*} (1 - z(\tau))d\tau}{h \int_0^{T^*} z(\tau)(1 - z(\tau))d\tau} = \frac{b}{h}, \quad b = \text{const} > 0.$$

Интегралы в (11) не зависят от постоянной энергии  $h$  и принимают положительные значения как суммы интегралов на четвертях периода. Поэтому  $K(h) = b/h$ , где постоянная  $b > 0$ .

Формула (11) справедлива для любого типа семейства колебаний: с возрастающим (убывающим) периодом на семействе, изохронного семейства. Зависимость (11) является важной характеристикой семейства колебаний.

Доказывается следующее утверждение о локальной стабилизируемости цикла.

*Теорема 1.* В  $\varepsilon$ -скорректированной консервативной системе (3) всегда реализуется орбитально асимптотически устойчивый (в малом) цикл, близкий к колебанию консервативной системы с энергией  $h = h^*$ . Цикл притягивает траектории из своей  $O(\varepsilon)$ -окрестности.

*Доказательство.* Согласно амплитудному уравнению (8) скорректированная консервативная система (3) имеет цикл, близкий к колебанию консервативной системы с энергией  $h^* = \alpha/\beta$ . В этой точке вычисляется производная (10), знак которой совпадает со знаком числа

$$\frac{dK(h^*)}{dh} = -\frac{b}{(h^*)^2} < 0.$$

Поэтому по формуле (10) производная  $dI(h^*)/dh < 0$ , и отображение  $t : 0 \rightarrow T^*$  является сжимающим: все траектории из окрестности цикла притягиваются к циклу.

*Замечание 1.* Применение производной  $dK(h^*)/dh$  стало обычным для доказательства локальных результатов о цикле. Однако неравенство  $dI(h^*)/dh = -h^*\beta < 0$  можно вывести непосредственно из выражения (9).

#### 4. Притяжение цикла в большом

Для системы (1) определяется полная механическая энергия – функция

$$(12) \quad E \equiv \frac{\dot{x}^2}{2} + \Pi(x).$$

Она принимает постоянное значение  $h$  на решениях консервативной системы. Для скорректированной консервативной системы справедливо равенство

$$(13) \quad \frac{dE}{dt} = \varepsilon[1 - K(h^*)\Pi(x)]\dot{x}^2,$$

где

$$\dot{x}^2 = 2(E - \Pi(x)).$$

При  $\varepsilon = 0$  имеем:  $E = h(\text{const}) > 0$ .

Вычисление приращения  $\Delta E$  энергии (12) на периоде  $T(h)$  проводится для колебания с энергией  $h$ . Поэтому для  $\varepsilon > 0$  записывается

$$(14) \quad \Pi(x) = \Pi(\varphi) + h\varepsilon\rho(\varepsilon, x), \quad E - \Pi(x) = h - \Pi(\varphi) + h\varepsilon\sigma(\varepsilon, x)$$

с функциями  $\rho$  и  $\sigma$  порядка единицы. Интегрирование проводится по переменной  $\tau$  на отрезке  $[0, T^*]$ . В результате получается формула

$$(15) \quad \Delta E(\varepsilon, h) = \varepsilon \frac{2T(h)}{T^*} [I(h) + \varepsilon h F(\varepsilon, h)],$$

в которой  $\varepsilon h F(\varepsilon, h)$  вычисляется подстановкой выражений (14) в равенство (13) и отвечает слагаемым  $h\varepsilon\rho$  и  $h\varepsilon\sigma$ . Она справедлива во всей рассматриваемой области колебаний  $\Omega$  консервативной системы.

Функция  $E(\varepsilon, h^*, \tau)$ , вычисленная на цикле, будет  $T^*$ -периодической, поэтому  $\Delta E(\varepsilon, h^*) = 0$ . Для цикла выполняется амплитудное уравнение  $I(h^*) = 0$ . Как следствие для цикла справедливо равенство  $F(\varepsilon, h^*) = 0$ .

*Лемма 1.* Существует не зависящее от  $h^*$  число  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что при  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  уравнение

$$(16) \quad I(h) + \varepsilon h F(\varepsilon, h) = 0$$

имеет единственный корень.

*Доказательство.* С представлением (9) уравнение (16) упрощается:

$$V \equiv G(h) + \varepsilon F(\varepsilon, h) = 0, \quad G \equiv \alpha - \beta h.$$

Уравнение  $G(h) = 0$  имеет корень  $h^* = \alpha/\beta$ , отвечающий циклу. Согласно теореме 1 цикл локально притягивает. Значит, функция  $G(h)$  для  $h \neq h^*$  при малых  $\varepsilon$  принимает значения одного знака. Функции  $F(\varepsilon, h)$  в точке  $h = h^*$  обращается в ноль. Поэтому функция  $V$  преобразуется к виду

$$(17) \quad V = (\alpha - \beta h)(1 + \varepsilon W(\varepsilon, h)).$$

При малых  $\varepsilon$  знак  $V$  совпадает со знаком  $G$ . Однако с ростом  $\varepsilon$  второй множитель в (17) может обратиться в ноль. Соответствующее значение  $\varepsilon(h)$  зависит от  $h$ . Для цикла с  $h = h^*$  выбирается наименьшее значение числа  $\varepsilon(h(h^*))$ . Нижняя грань множества  $\{\varepsilon(h^*)\}$  обозначается через  $\varepsilon_0$ . Тогда для  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  уравнение (16) имеет единственный корень, не зависящий от конкретного значения  $h^*$ . При этом согласно (9) и (17) существование корня в уравнении (16) определяется слагаемым  $G(h)$ , которое имеет единственный корень.

Лемма 1 доказана.

Далее скорректированная система (3) исследуется при  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ . Рассматривается область колебаний  $\Omega$  консервативной системы; в рассматриваемой консервативной системе может быть не единственная область колебаний.

*Теорема 2.* Существует число  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что при  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  скорректированная консервативная система (3) всегда обладает единственным циклом, который притягивает все траектории области колебаний  $\Omega$  консервативной системы.

*Доказательство.* В области колебаний  $\Omega$  скорректированная консервативная система (3) допускает (лемма 1) единственный цикл: соответствующее значение энергии консервативной системы при этом  $h = h^*$ . На цикле  $\Delta E(\varepsilon, h^*) = 0$ . Вне цикла знак функции  $\Delta E(\varepsilon, h)$  совпадает со знаком линейной функции  $G(h)$ ,  $G(h^*) = 0$ . Скорость изменения функции  $dG(h)/dh = -\beta < 0$ . Следовательно, функция  $G(h) \rightarrow 0$ , и траектории скорректированной системы (3) стремятся к циклу. Это происходит с любой траекторией из области колебаний  $\Omega$  консервативной системы.

Теорема 2 доказана.

## 5. Многомерная система

По теореме о глобальном семействе [1, теорема 1] в многомерной системе происходит разделение переменных. Переменная  $x$  описывает семейство колебаний  $\Sigma$  на многообразии  $\Omega$ , инвариантном относительно фазового потока консервативной системы. Вне многообразия  $\Omega$  динамика консервативной системы дается вектором  $y$  размерности  $n - 1$ . В области  $\Omega$  вектор  $y \equiv 0$ . Поэтому вне  $\Omega$  изучается движение консервативной системы в окрестности нулевого решения  $y = 0$ .

Согласно Пуанкаре характеристическое уравнение консервативной системы является возвратным: корни уравнения делятся на пары, содержащие числа с противоположными знаками. Поэтому в случае действительного корня при действии  $\varepsilon$ -малого управления уходящие решения останутся уходящими. Следовательно, необходимым условием притяжения решений к  $\Omega$  является отсутствие корней с действительными частями.

Вместе с выделением интегрального многообразия  $\Omega$  строится  $\varepsilon$ -скорректированная система (3) по переменной  $x$ . Для переменной  $y$  в окрестности точки  $y = 0$  применяются главные координаты. Далее рассматривается управляемая консервативная система

$$(18) \quad \begin{aligned} \ddot{y}_i + k_i y_i + Y_i(y) &= \varepsilon[(1 - K(h^*)\Pi(x))\dot{y}_i, \\ k_i &= \text{const}, k_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n - 1. \end{aligned}$$

Энергия  $E_y$  консервативной системы по переменной  $y$  согласно (18) меняется по закону

$$(19) \quad \frac{dE_y}{dt} = \varepsilon[1 - K(h^*)\Pi(x)]\dot{y}^2, \quad \dot{y}^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \dot{y}_i^2,$$

подобному закону (13) для переменной  $x$ . При этом  $E_y = h_y = \text{const}$  при  $\varepsilon = 0$ .

Закону изменения энергии всей консервативной системы

$$\frac{d(E_x + E_y)}{dt} = \varepsilon[1 - K(h^*)\Pi(x)](\dot{x}^2 + \dot{y}^2),$$

записанной в переменных  $x$  и  $y$ , соответствует амплитудное уравнение

$$(20) \quad \tilde{I}(\tilde{h}) \equiv - \int_0^{T^*} [1 - K(h^*)\Pi(x)](\dot{x}^2 + \dot{y}^2)dt = 0, \quad \tilde{h} = h + h_y.$$

Функция  $\tilde{I}(\tilde{h})$  допускает простой корень  $\tilde{h} = h^*$ ,  $h_y^* = 0$ , что следует из наличия простого корня в уравнении (4). Простому корню уравнения (20) отвечает цикл управляемой системы (21) (см. [8, гл. VI, §8, с. 413, §9, с. 417]). Функция  $\tilde{I}(\tilde{h})$  непрерывна, и цикл всей системы совпадает с циклом на  $\Omega$ .

Из законов (13) и (19) выводится равенство

$$\dot{y}^2 dE = \dot{x}^2 dE_y,$$

откуда следует, что энергия в системе по переменной  $y$  меняется на периоде (возрастает и убывает) точно так же, как в системе по переменной  $x$ . При этом по переменной  $x$  согласно теореме 2 приращение  $\Delta E(\varepsilon, h)$  за период стремится к нулевому значению, а траектория на многообразии  $\Omega$  – к единственному циклу. Тогда по переменной  $y$  приращение  $\Delta E_y(\varepsilon, h)$  за период стремится к нулевому значению, а траектория – к единственному равновесию  $y = 0$ , отвечающему циклу на  $\Omega$ .

Таким образом, все траектории области  $\Omega$  и  $\varepsilon$ -окрестности  $\Omega$  притягиваются к циклу. Результат справедлив независимо от того, в каких координатах задается консервативная система.

Далее рассматривается управляемая система

$$(21) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = \varepsilon [1 - K(h^*)\Pi(x)] \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_s}, \quad s = 1, \dots, n,$$

заданная уравнениями Лагранжа второго рода. Здесь  $\tilde{T}$  – кинетическая энергия,  $\Pi$  – потенциальная энергия. Предполагается, что при  $\varepsilon = 0$  система (21) допускает семейство  $\Sigma$  одночастотных колебаний; оно занимает двумерную область  $\Omega$ . На  $\Omega$  система описывается переменной  $x$ ; в управлении отслеживается потенциальная энергия на решении. Выбирается  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , где  $\varepsilon_0$  – конечное число для семейства колебаний  $\Omega$ ;  $h^*$  – значение энергии, отвечающее циклу в  $\Omega$ , а на  $\Omega$  равновесию соответствует значение энергии  $h = 0$ .

В системе, описываемой уравнениями Ланранжа второго рода, глобальное семейство периодических движений строится в [1] продолжением локального ляпуновского семейства. Последнее рождается из равновесия. Согласно теореме Ляпунова о центре [23] для существования семейства невырожденных локальных нелинейных периодических решений, кроме наличия чисто мнимых корней, в системе (18) требуется нерезонансность частот  $\sqrt{k_j} \neq p\sqrt{k_s}$ ,  $p \in \mathbb{N}$ . При этом ляпуновское семейство для наибольшей частоты по теореме Ляпунова о центре [23] всегда существует. В анализе системы (18) указанные условия не налагались. Они возникают в лагранжевой системе. Имея это в виду, перейдем к управляемой системе (21).

Если не выделять главные координаты для системы по  $y$ , то в правых частях системы (18) будут линейные комбинации скоростей  $\dot{y}_i$ ; они являются частными производными от кинетической энергии системы  $\tilde{T}$  по  $\dot{y}_s$ . Восстановление системы (21) завершается возвратом к началу построения редуцированной системы с одной степенью свободы, проведенному в [1]. На этом этапе к линейной комбинации скоростей  $\dot{y}_i$  добавляется скорость  $\dot{x}$  с постоянным множителем.

При формулировке теоремы 3 предполагается, что условия теоремы Ляпунова о центре, прилегающем к области колебаний  $\Omega$ , выполнены.

*Теорема 3* (о скорректированной консервативной системе). Пусть консервативная система описывается уравнением Лагранжа второго рода и допускает семейство колебаний с областью  $\Omega$ . Тогда найдется число  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что скорректированная система (21) при  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  всегда имеет в  $\Omega$  единственный цикл, который  $\varepsilon$ -близок к колебанию консервативной системы с энергией  $h = h^*$ . Цикл притягивает траектории из области колебаний  $\Omega$  и  $\varepsilon$ -близкие к  $\Omega$  траектории. Закон изменения энергии  $E = \tilde{T} + \Pi$  консервативной системы на решениях скорректированной системы дается равенством

$$\frac{dE}{dt} = \varepsilon[1 - K(h^*)\Pi(x)]\tilde{T}.$$

*Замечание 2.* Теорема о скорректированной консервативной системе формулируется для лагранжевой системы. Применение теоремы 3 для консервативной системы, записанной в других переменных, демонстрируется в примерах.

## 6. Некоторые примеры

Сначала проанализируем скорость приближения к циклу по энергии. Закон изменения энергии на траекториях скорректированной консервативной системы (3) дается формулой (13). Приращение энергии на периоде вычисляется по формуле (15). При данном  $\varepsilon < \varepsilon_0$  оно равно  $2T(h)hV$ . С другой стороны, на уровне энергии  $h$  приближение к циклу происходит со скоростью  $V$ , почти линейной по  $h$ . При  $h > h^*$  притяжение к циклу происходит с ростом скорости  $V$ , которая на указанном интервале отрицательна. Для траекторий с начальной положительной энергией в процессе приближения к циклу скорость  $V$  все время положительна. Скорость  $V$  в точке  $h^* = \alpha/\beta$  меняет знак, начиная с плюса на минус. Рассмотрим некоторые примеры.

*Пример 1.* Уравнение Ван дер Поля в адаптивной схеме стабилизации описывается уравнением

$$(22) \quad \ddot{x} + x = \varepsilon(1 - K(h^*)x^2)\dot{x}, \quad K(h^*) = \text{const} > 0.$$

В уравнении Ван дер Поля  $K(h^*) = 1$ .

При  $\varepsilon = 0$  имеем гармонический осциллятор с потенциальной энергией:  $\Pi = x^2/2$ . Порождающее колебание дается формулой  $x = A \cos t$ , где  $A$  – амплитуда. Энергия  $h = A^2/2$ . Поэтому  $\tau = 2t$ ,  $\Pi = hz(\tau)$ ,  $z = 1 + \cos 2t$ . Вычисление по формуле (11) дает число  $b = 2$ . Амплитуда для цикла  $A^* = 2/\sqrt{K(h^*)}$ .

Уравнение (22) удовлетворяет всем условиям теоремы 2. Поэтому скорректированный линейный осциллятор обладает глобально притягивающим циклом, проходящим, в зависимости от  $K(h^*)$ , через любую заданную точку фазовой плоскости. В уравнении (22) область колебаний  $\Omega$  совпадает со всей фазовой плоскостью, исключая выколотый нуль. Скорость приближения к циклу вдалеке от него, а также около нуля пропорциональна  $\varepsilon h^2$ . Вблизи цикла с энергией  $h^*$  указанная скорость равна  $\varepsilon h |\Delta h|$ ,  $|\Delta h| = h - h^*$ .

Построение цикла в уравнении (22) при  $K = 1$  проводилось Ван дер Полем [4] и, независимо от него, А.А. Андроновым [11].

Отметим, что в осцилляторе Ван дер Поля применяется удвоенная потенциальная энергия. В локальной по  $\varepsilon$  теории число  $\varepsilon^*$  не оценивается; цикл остается притягивающим при увеличении  $\varepsilon$ ; чем дальше  $\varepsilon$  от нуля, тем колебания осциллятора менее похожи на гармонические.

*Пример 2.* Скорректированный математический маятник

$$\ddot{x} + \sin x = \varepsilon(1 - 2K(h^*) \sin^2(x/2))\dot{x}.$$

В нелинейной системе вычисление функции  $z(\tau)$  затрудняется незнанием функции, описывающей колебания. Для математического маятника  $\Pi = 2 \sin^2(x/2)$ . Зависимость (11) численно построена в [24].

Особенностью математического маятника является ограниченность по  $h$  сверху области колебаний. Близ точки  $h = 0$  (малые колебания) скорость приближения к циклу пропорциональна  $\varepsilon h^2$ .

Математический маятник исследуется в задаче об относительном движении спутника в плоскости круговой орбиты [25]. Адаптивная схема стабилизации (в малом) колебания спутника

$$(23) \quad \ddot{x} + |\mu| \sin x = \varepsilon \sigma (1 - 2K(h^*)x^2)\dot{x}$$

предлагается в [2]; решается локальная задача притяжения траекторий из окрестности стабилизируемого колебания.

Для спутника принимаются обозначения [25]:  $\mu$  – инерциальный параметр ( $|\mu| \leq 3$ ),  $\alpha$  – угол между радиусом-вектором центра масс и главной центральной осью инерции спутника в плоскости орбиты,  $v$  – истинная аномалия, выбранная в качестве независимой переменной. В уравнении (23) принято:  $x = 2\alpha$ ,  $\mu > 0$  или  $x = 2\alpha + \pi$ ,  $\mu < 0$ ;  $\sigma = 1$ .

Заменой в уравнении (23) члена  $2K(h^*)x^2$  на  $2K(h^*)|\mu| \sin^2(x/2)$  по теореме 2 достигается цикл, притягивающий все траектории из области колебаний. Тем самым обеспечивается глобальное притяжение траекторий.

Для малых  $\mu$  (“сплюснутый” спутник) вместо равновесия может быть интересно использовать стабилизированное (в большом) долго-периодическое колебание спутника близ равновесия.

*Пример 3.* Задача двух тел

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\gamma x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\gamma y}{x^2 + y^2}, \quad \gamma > 0$$

имеет интеграл площадей

$$(24) \quad x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = c, \quad c = \text{const.}$$

На интегральном многообразии (24) динамика описывается консервативной системой

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{c^2}{r^3} - \frac{\gamma}{r^2}, \quad r^2 = x^2 + y^2,$$

которая при фиксированной значении  $c = c_*$  обладает семейством эллиптических орбит (постоянному решению этого уравнения отвечают круговые орбиты).

Согласно теореме 2 в скорректированной системе

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{c_*^2}{r^3} + \frac{\gamma}{r^2} = \varepsilon((1 - K(h^*))\Pi(r))\frac{dr}{dt}, \quad \Pi = \frac{2c_*^2}{r^2} - \frac{\gamma}{r}$$

стабилизируется (в большом) любая орбита задачи двух тел, близкая к эллиптической орбите с энергией  $h^*$ . Притягивание других орбит к плоскости  $c_*$  обеспечивается уравнением  $\dot{\Delta}c = -\Delta c$ ,  $\Delta c = c - c_*$ .

*Пример 4.* Динамика тяжелого твердого тела с неподвижной точкой описывается классическими уравнениями Эйлера–Пуассона

$$(25) \quad \begin{aligned} A\dot{p} &= (B - C)qr + P(z_0\gamma_2 - y_0\gamma_3), & \dot{\gamma}_1 &= \gamma_2r - \gamma_3q, \\ B\dot{q} &= (C - A)rp + P(x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1), & \dot{\gamma}_2 &= \gamma_3p - \gamma_1r, \\ C\dot{r} &= (A - B)pq + P(y_0\gamma_1 - x_0\gamma_2), & \dot{\gamma}_3 &= \gamma_1q - \gamma_2p, \end{aligned}$$

записанными в квазикоординатах:  $A, B, C$  – главные моменты инерции тела,  $P$  – вес тела,  $x_0, y_0, z_0$  – координаты центра тяжести,  $\Omega = (p, q, r)$  – угловая скорость,  $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  – единичный вектор вертикали, направленный вверх.

При  $y_0 = 0$  система (25) допускает интегральное многообразие:

$$(26) \quad p = 0, \quad r = 0, \quad \gamma_2 = 0.$$

На нем реализуются движения Млодзиевского [26], которые описываются системой

$$(27) \quad B\dot{q} = P(x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1), \quad \dot{\gamma}_1 = \gamma_2r - \gamma_3q, \quad \dot{\gamma}_3 = \gamma_1q - \gamma_2p.$$

С учетом геометрического соотношения  $\gamma_1^2 + \gamma_3^2 = 1$  и замены  $\gamma_1 = \cos \delta$ ,  $\gamma_2 = \sin \delta$  система (27) приводится к уравнению математического маятника

$$B\ddot{\delta} + P\sqrt{x_0^2 + z_0^2} \sin(\delta - \nu) = 0, \quad \nu = \tan(z_0/x_0).$$

Таким образом, при любом выбранном значении энергии для колебания Млодзиевского строится притягивающий (в большом) цикл. Притяжение к многообразию (26) обеспечивается, как в примере 3, линейной диссипацией по переменным  $p, r, \gamma_2$ .

Вместе с плоскими колебаниями Млодзиевского исследуемое тело допускает [27] второе семейство маятниковых колебаний. Оно – пространственное. Семейство описывается редуцированной консервативной системой с одной степенью свободы и выделяется шаг за шагом из системы (25) при  $y_0 = 0$  в процессе построения редуцированной системы. Стабилизация колебаний (в большом) проводится согласно теории разделов 2–4.

*Замечание 3.* В примерах даются новые результаты для приведенных задач.

## 7. Заключительные замечания

В консервативной системе колебания образуют семейства. Поэтому стабилизация колебания возможна только в рамках управляемой системы. Обычно применяются управления, явно зависящие от времени.

Для консервативной системы, допускающей семейство колебаний, всегда строится  $\varepsilon$ -скорректированная система, обладающая притягивающим (в большом) циклом. Применяется автономное управление с малым коэффициентом усиления регулятора. Оно дается нелинейной диссипацией, действующей без задержки в текущей точке траектории и отслеживающей потенциальную энергию системы. Область притяжения циклом включает область колебаний  $\Omega$  консервативной системы и  $\varepsilon$ -окрестность  $\Omega$ . Цикл строится для колебания с любой желаемой энергией консервативной системы. Стабилизация происходит по адаптивной схеме.

Основные результаты по заявленной цели исследования формулируются в трех теоремах. В теореме 1 показывается существование цикла и решается задача стабилизации в малом (в окрестности рассматриваемого колебания). Далее (теорема 2) устанавливается притяжение к циклу траекторий, начинающихся в любой точке области колебаний консервативной системы. В теореме 3 результаты теорем 1 и 2 для системы с одной степенью свободы переносятся на многомерную систему; приводится соответствующая скорректированная лагранжевая система. В примерах анонсируются новые результаты в классических задачах.

В статье решается ряд вопросов нелинейной механики, теории колебаний, бифуркации и теории управления. В классической механике рассматривается

только линейная диссипация. В данном исследовании дается пример универсальной нелинейной диссипации, определяющейся потенциальной энергией. Она может объяснять и наблюдаемые в природе явления.

Для изучения семейства нелинейных колебаний консервативной системы в статье предлагается применять теорию для линейных систем. Соответствующая теорема 4 выведена в Приложение и стала результатом усилий автора для понятного изложения основного материала статьи. Идея введения *нового времени* приводит систему нелинейных колебаний к изохронному семейству.

Выводы по притяжению в большом стали качественно новыми в теории бифуркации: малое параметрическое возмущение системы приводит к глобальной перестройке фазового портрета.

Что касается теории управления, то здесь проводится идея использовать природу незамкнутой системы. Предложенное управление является только корректирующим. В примерах 3 и 4 схема стабилизации демонстрируется на классических задачах. Другие приложения находятся в задачах орбитальной стабилизации космических аппаратов в дальних миссиях. Здесь основным ограничением является энергетический ресурс. Маневры с применением гравитационного притяжения (потенциальной энергии) востребованы.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### *Преобразование семейства невырожденных (нелинейных) колебаний в изохронное семейство*

Рассматривается консервативная система

$$\ddot{x} + f(x) = 0, \quad \frac{\dot{x}^2}{2} + \int f(x)dt = h(\text{const}),$$

допускающая семейство  $\Sigma$  невырожденных одночастотных колебаний. На невырожденном семействе по определению период  $T(h)$  монотонно меняется с  $h$ .

*Теорема 4. Невырожденное семейство колебаний  $\Sigma = \{x(h, t)\}$  консервативной системы всегда преобразуется в изохронное семейство с временем  $\tau = (T(h)/T^*)t$ , которое выбирается вместе с периодом  $T^*$  колебания семейства, потенциальной энергией  $\tilde{\Pi}(x) = \Pi(x)(T^*/T(h))^2$  и полной энергией  $\tilde{h} = h(T^*/T(h))^2$ . На семействе  $\Sigma$  справедлив закон*

$$x^2 \left( h \left( \frac{T^*}{T(h)} \right)^2, 0 \right) = h \left( \frac{T^*}{T(h)} \right)^2,$$

*связывающий амплитуду и энергию колебаний.*

*Доказательство.* Потенциальная энергия  $\Pi(x)$  является функцией одной переменной  $x$ . Она зависит от  $h$  через решение  $x = \varphi(h, t)$ . При переходе к новой независимой переменной  $\tau = (T(h)/T^*)t$  период на колебании становится равным  $T^*$ , поэтому  $x$  является  $T^*$ -периодической функцией переменной  $\tau$ .

Это происходит на всех колебаниях семейства, которое тем самым преобразуется в изохронное семейство с периодом  $T^*$ . Для колебания с нулевой начальной скоростью имеем  $\Pi(x(h, 0)) = h$ . Начальное значение  $h$  сохраняется в функции  $x(h, \tau)$ , поэтому записывается

$$\Pi = hz(\tau), \quad 0 \leq z(\tau) \leq 1, \quad z(\tau) = z(\tau + T^*).$$

Интеграл энергии на семействе колебаний с учетом введения новой независимой переменной  $\tau$  принимает вид

$$(II.1) \quad \left(\frac{T(h)}{T^*}\right)^2 \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 = 2(h - \Pi).$$

В более привычной форме получается

$$(II.2) \quad \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 = 2(\tilde{h} - \tilde{\Pi}), \quad \tilde{h} = h \left(\frac{T^*}{T(h)}\right)^2, \quad \tilde{\Pi} = \Pi(x) \left(\frac{T^*}{T(h)}\right)^2.$$

Колебания с начальной нулевой скоростью в преобразованной системе описываются формулой

$$x(\tau) = x(\tilde{h}, 0)e(\tau), \quad 0 \leq e(\tau) \leq 1, \quad e(\tau) = e(\tau + T^*).$$

На них выполняется равенство

$$(II.3) \quad x^2(\tilde{h}, 0) = \tilde{h}$$

– закон зависимости амплитуды изохронных колебаний от энергии системы  $\tilde{h}$ . Поэтому справедлив закон

$$(II.4) \quad x^2 \left( h \left(\frac{T^*}{T(h)}\right)^2, 0 \right) = h \left(\frac{T^*}{T(h)}\right)^2$$

зависимости амплитуды нелинейных колебаний на семействе  $\Sigma$  от энергии  $h$ .

*Замечание 4.* В случае линейного осциллятора в (II.3) функция  $T(h)$  сводится к постоянной и зависимость (II.3) известна.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебаний управляемой автономной системы // *АиТ.* 2023. № 5. С. 29–44. <https://doi.org/10.31857/S0005231023050033>  
*Tkhai V.N.* Stabilization of oscillations of a controlled autonomous system // *Autom. Remote Control.* 2023. V. 84. No. 5. P. 476–485. <https://doi.org/10.1134/S0005117923050089>
2. *Тхай В.Н.* Адаптивная схема стабилизации колебаний автономной системы // *АиТ.* 2024. № 9. С. 77–92. <https://doi.org/10.31857/S0005231024090046>  
*Tkhai V.N.* An adaptive stabilization scheme for autonomous system oscillations // *Autom. Remote Control.* 2024. V. 85. No. 9. P. 795–804. <https://doi.org/10.1134/S000511792470019X>

3. *Понтрягин Л.С.* О динамических системах, близких к гамильтоновым // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1934. Т. 4. Вып. 9. С. 883–885.
4. *Van der Pol.* On relaxation-oscillations in the circuit with non-linear resistance // Philos. Mag. 1927. Ser. 7. V. 3. No. 13. P. 65–80.
5. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.: ГИТТЛ, 1947. Пер. с фр. <https://search.rsl.ru/ru/record/01006011393>
6. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Гос. изд-во физ. мат. лит., 1959. Переработка и доп. Н.А. Железцова. 2-е изд. <https://search.rsl.ru/ru/record/01005974002>
7. *Боголюбов Н.Н.* О некоторых статистических методах в математической физике. Изд-во АН УССР, 1945.
8. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: ГИТТЛ, 1956. <https://search.rsl.ru/ru/record/01005891422>
9. *Мельников В.К.* Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях, Труды ММО. 1963. Т. 12. С. 3–52. <https://www.mathnet.ru/rus/mmo137>
10. *Макаренков О., Lamb J.S.W.* Dynamics and bifurcations of nonsmooth systems: a survey // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2012. V. 241. Iss. 22. P. 1826–1844. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2012.08.002>
11. *Андронов А.А., Витт А.А.* Об устойчивости по Ляпунову // Журн. эксп. теор. физики. 1933. Вып. 5. С. 373–374.
12. *Тхай В.Н.* Колебания в автономной модели, содержащей связанные подсистемы // АиТ. 2015. № 1. С. 81–90. <https://www.mathnet.ru/rus/at14174>  
*Tkhai V.N.* Oscillations in the autonomous model containing coupled subsystems // Autom. Remote Control. 2019. V. 76. No. 1. P. 64–71. <https://doi.org/10.1134/S0005117915010051>
13. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебания управляемой механической системы // АиТ. 2019. № 11. С. 83–92. <https://www.mathnet.ru/rus/at15356>  
*Tkhai V.N.* Stabilizing the oscillations of a controlled mechanical system // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 11. P. 1996–2004. <https://doi.org/10.1134/S0005117919110043>
14. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения по отношению части переменных // Вест. МГУ. Серия Математика, механика, астрономия, физика, химия. 1957. № 4. С. 9–16.
15. *Руш Н., Абетс П., Лалла М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. Пер.с англ. М.: Мир, 1980.
16. *Boubaker O.* The inverted pendulum benchmark in nonlinear control theory: a survey // Int. J. Adv. Robot. Syst. 2013. V. 10. No. 5. <https://doi.org/10.5772/55058>
17. *Fradkov A.L* Swinging control of nonlinear oscillations // Int. J. Control. 1996. V. 64. Iss. 6. P. 1189–1202. <https://doi.org/10.1080/00207179608921682>
18. *Åström K.J., Furuta K.* Swinging up a pendulum by energy control // Automatica. 2000. V. 36. Iss. 2. P. 287–295. [https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(99\)00140-5](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(99)00140-5)

19. *Shiriaev A., Perram J.W., Canudas-de-Wit C.* Constructive tool for orbital stabilization of underactuated nonlinear systems: virtual constraints approach // IEEE Trans. Automat. Contr. 2005. V. 50. No. 8. P. 1164–1176. <https://doi.org/10.1109/TAC.2005.852568>
20. *Kant K., Mukherjee R., Khalil H.* Stabilization of energy level sets of underactuated mechanical systems exploiting impulsive braking // Nonlinear Dynam. 2021. V. 106. P. 279–293. <https://doi.org/10.1007/s11071-021-06831-3>
21. *Guo Yu., Hou B., Xu Sh., et al.* Robust stabilizing control for oscillatory base manipulators by implicit Lyapunov method // Nonlinear Dynam. 2022. V. 108. P. 2245–2262. <https://doi.org/10.1007/s11071-022-07321-w>
22. *Александров А.Ю., Тихонов А.А.* Электродинамическое управление с распределенным запаздыванием для стабилизации ИСЗ на экваториальной орбите // Космические исследования. 2022. Т. 60. № 5. С. 404–412. <https://doi.org/10.31857/S002342062204001X>
23. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения / Собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 7–263. <https://search.rsl.ru/ru/record/01005581860>
24. *Tkhai V.N.* On stabilization of pendulum type oscillations of a rigid body // Proc. 2018 14th Int. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy’s Conference) (STAB). IEEE Xplore: <https://doi.org/10.1109/STAB.2018.8408408>
25. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника Земли относительно центра масс / Искусственные спутники Земли. 1958. № 1. С. 25–43. М.: Изд-во АН СССР, 1958.
26. *Млодзиевский Б.К.* О перманентных осях в движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Тр. отд. физ. наук об-ва любит. естеств., антропол. и этнограф. 1894. Т. 7. Вып. 1. С. 46–48.
27. *Tkhai V.N.* Spatial oscillations of a physical pendulum // Proc. 2022 16th Int. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy’s Conference), IEEE Xplore: <https://doi.org/10.1109/STAB54858.2022.9807507>

*Статья представлена к публикации членом редколлегии О.В. Моржиньым.*

Поступила в редакцию 27.11.2024

После доработки 25.02.2025

Принята к публикации 21.04.2025

# Стохастические системы

© 2025 г. А.В. БОРИСОВ, д-р физ.-мат. наук (A.Borisov@frcsc.ru)  
(Федеральный исследовательский центр  
“Информатика и управление” РАН, Москва)

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ ПАССИВНОГО МОНИТОРИНГА ДОСТУПНОЙ ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ СЕТЕВОГО КАНАЛА<sup>1</sup>

Статья посвящена разработке математического обеспечения решения прикладной задачи оценивания доступной пропускной способности сетевого канала передачи данных по косвенным наблюдениям одного из передаваемых потоков. Задача сведена к фильтрации состояний некоторого марковского скачкообразного процесса по косвенным бесшумовым и считающим наблюдениям. Искомые оценки представимы в виде решения связанных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и рекуррентных соотношений. Качество предложенных оценок проиллюстрировано некоторым численным примером.

*Ключевые слова:* доступная пропускная способность канала, марковский скачкообразный процесс, наблюдения без шума, мартингалное представление, уравнения оптимальной фильтрации.

DOI: 10.31857/S0005231025060048, EDN: ИКСВКС

### 1. Введение

Задача оперативного оценивания доступной пропускной способности (Available BandWidth, ABW) различных телекоммуникационных каналов [1–4] весьма востребована для последующего использования ее результатов

- в системах управления компьютерными сетями для контроля эффективности использования сетевых ресурсов,
- в алгоритмах управления перегрузкой транспортных протоколов,
- в системах потоковой передачи мультимедийной информации,
- в алгоритмах распределения ресурсов программно определяемых сетей и пр.

Понимание самого термина ABW и связанных с ним числовых показателей варьируется в различных публикациях и может подразумевать

- максимальную остаточную емкость данного канала при текущей загрузке внешними потоками,

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект 075-15-2024-544). Работа выполнена с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования “Высокопроизводительные вычисления и большие данные” (ЦКП “Информатика”) ФИЦ ИУ РАН (г. Москва).

- максимальную скорость передачи данных (throughput) по каналу, обеспечиваемую с использованием некоторого фиксированного протокола (UDP, TCP и пр.) при текущей загрузке внешними потоками,
- максимальную скорость передачи полезных данных (goodput) по каналу при текущей загрузке, обеспечиваемую с использованием выбранного протокола при наличии дополнительных требований к качеству передачи (Quality of Service, QoS): максимальной допустимой задержке, джиттеру, доле потерянных пакетов и пр.

В настоящее время существует целая палитра аппаратно-программных средств решения этой задачи. С точки зрения используемой статистической информации они делятся на активные и пассивные. В активных используется дополнительный служебный трафик, представляющий собой последовательность малых пакетов, возможно переменного размера. Разница между отправленными и полученными пакетами, включая промежутки между ними, служит основой расчета текущего значения AWB. В пассивных средствах это значение вычисляется на основе информации о реальном текущем трафике в данном канале, собираемой с помощью средств операционных систем (например с помощью утилиты *tcpdump*). Отдельно следует упомянуть инструментарий оценивания AWB, базирующийся на моделях каналов, построенных в основном на системах массового обслуживания. Он использует не реальную статистическую информацию, а имитационное моделирование.

Обработка реальных данных для оценивания AWB основывается на использовании относительно простых вероятностных моделей, в частности линейных стохастических систем наблюдения. Именно они позволяют применять классический фильтр Калмана [5–7]. В настоящее время теория оценивания состояний стохастических динамических систем достаточно развита, в ее рамках возможно подобрать модель, более похожую на функционирование сетевого канала, и построить для нее численно эффективный алгоритм оценивания состояния системы по имеющимся данным.

Предлагаемая работа посвящена использованию математического аппарата марковских скачкообразных процессов (МСП) для построения математических моделей функционирования каналов пакетной передачи данных. Они предназначены для решения задачи оценивания в реальном масштабе времени характеристик каналов, отвечающих за AWB, по разнородной статистической информации. Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 представлен класс исследуемых сетевых каналов и потоков передаваемых данных, а также структура доступных наблюдений. В разделе приведены аргументы в пользу использования математического аппарата МСП для описания эволюции характеристик канала.

Раздел 3 содержит теоретическую основу решения поставленной прикладной задачи мониторинга AWB. Подраздел 3.1 представляет исследуемую систему наблюдения. Ее скрытым состоянием, подлежащим оцениванию, служит однородный МСП с конечным множеством состояний. Часть компонент наблюдений представляют собой функции МСП, регистрируемые без

шума, часть – процессы Кокса, интенсивность которых зависит от состояния. В качестве теоретической основы, позволяющей в итоге решить прикладную проблему мониторинга, предлагается рассматривать задачу фильтрации состояния МСП по имеющимся наблюдениям. Ее решению посвящен раздел 3.2. Искомая оценка фильтрации описывается системой связанных обыкновенных дифференциальных уравнений и рекуррентных соотношений.

Следует отметить, что предложенная задача оптимальной фильтрации, решаемая в работе, отличается от задач, исследованных в классических монографиях [8–10]. В упомянутых работах структура наблюдений такова, что путем подходящей замены вероятностной меры их можно преобразовать к совокупности винеровских и пуассоновских процессов. При этом полученные уравнения в той или иной мере можно трактовать как различные версии формулы Каллианпура–Стрибеля [11]. Данный переход возможен при выполнении условия невырожденности мартигалов в наблюдениях. В предлагаемой же стохастической системе часть наблюдений вовсе не содержит шумов, что делает невозможным применение гирсановской замены меры. В то же время полученные в статье уравнения, описывающие искомую оценку оптимальной фильтрации, можно рассматривать как частный случай абстрактной формулы оптимальной фильтрации семимартинала по наблюдениям семимартинала [12].

Раздел 4 содержит иллюстративный пример решения задачи мониторинга АВВ канала. Канал обрабатывает два независимых потока пакетов. Первый описывается пуассоновским процессом с известной интенсивностью. Вторым, скрытым, поток описывается процессом Кокса, интенсивность которого меняется в соответствии с некоторым МСП. В качестве наблюдений выступает число пакетов первого потока, находящихся в канале, и поток потерь первого потока, вызванный переполнением канала. Собственно канал представляет собой простой экспоненциальный элемент обслуживания с известной интенсивностью, объединенный с пулом пакетов известной емкости. Пакеты из пула выбираются для передачи случайным образом. Текущая АВВ зависит от степени его заполненности и интенсивности поступления пакетов из второго потока, поэтому именно эти характеристики предлагается оценивать. Так как для получения статистической информации не используются какие-либо служебные потоки пакетов, то предложенный алгоритм мониторинга отнесен к классу пассивных. Численный эксперимент, представленный в разделе, иллюстрирует высокое качество предложенных оценок.

Раздел 5 представляет анализ полученных результатов и направления дальнейших исследований.

## **2. Постановка прикладной задачи мониторинга доступной пропускной способности**

Опишем функционирование сетевого канала пакетной передачи данных в форме некоторой управляемой стохастической системы наблюдения. Канал

обеспечивает передачи данных нескольких информационных потоков, описываемых индивидуальными показателями:

- интенсивностью поступления пакетов из потока,
- размером отдельных пакетов,
- общим объемом передаваемых данных,
- протоколом управления передачей данных и пр.

Собственно канал представляет собой совокупность телекоммуникационного оборудования и линий передачи, имеющих следующие характеристики:

- число отрезков линий передачи и их показатели,
- характеристики отдельных сетевых устройств (производительность, объем буферов, характеристики внутреннего программного обеспечения) и пр.

В идеале состояние канала представляет собой “мгновенный снимок” расположения и движения различных целевых и сервисных пакетов во всех частях, составляющих данный канал, а также всех входных и выходных потоков пакетов, включая потоки потерь.

Задача оценивания ABW канала заключается в определении максимального потока пакетных данных, который мог бы передаваться через канал при наличии текущей нагрузки. В такой постановке задача вряд ли имеет исчерпывающее решение из-за следующих фактов.

1. Определение максимального потока данных, который дополнительно может быть передан через канал в его текущем состоянии, зависит от ряда дополнительных характеристик, таких как тип дополнительных данных (тип протокола), надежность передачи данных и пр. Дело в том, что дополнительная пропускная способность должна вычисляться с учетом всех “накладных расходов”, включая передачу сервисных пакетов, повторную передачу потерянных данных и пр. Например, пропускная способность для последующего использования UDP трафиком будет выше, чем для TCP, так как последний предполагает повторную отправку пакетов, не принятых получателем, а также задействует дополнительный сервисный поток подтверждений.
2. Упомянутое выше состояние канала должно обладать колоссальной размерностью, препятствующей его использованию при решении каких-либо практических задач оценивания.
3. Характеристики канала содержат неопределенность разной природы:
  - обычно параметры отдельных линий передачи, составляющих канал, неизвестны,
  - характеристики сетевого оборудования (производительность, объем буферов/накопителей) неизвестны частично или полностью,
  - программное обеспечение сетевого оборудования является проприетарным с неизвестной производительностью и реализованными алгоритмами,

- сетевое каналообразующее оборудование может одновременно использоваться несколькими каналами, что влечет за собой дополнительную неопределенность его производительности.

4. Потоки данных, передаваемые каналом, также обладают свойствами, отрицательно сказывающимися на качестве и самой возможности решения задачи мониторинга АВW: они нестационарны, содержат априорную неопределенность в характеристиках и являются частично или полностью ненаблюдаемыми из-за требований информационной безопасности и разделения доступа.

Помимо этого, громоздкая модель является избыточной для решения упомянутой практической задачи. Для этого достаточно рассматривать лишь “бутылочное горло” канала – участок с наименьшей производительностью. При этом для описания его функционирования можно использовать относительно простые системы массового обслуживания, состоящие из элементов обслуживания, очередей или буферов временного хранения пакетов.

Потоки пакетов можно описывать обобщенными процессами восстановления [13]: последние не только представляют случайные потоки событий, но могут содержать некоторую дополнительную информацию заголовков пакетов, важную для последующего оценивания характеристик канала. Вообще говоря, к статистической информации, доступной для пассивного мониторинга АВW, можно отнести

- часть входных информационных потоков,
- часть потоков потерь пакетов, возникающих по различным причинам,
- часть служебных потоков, например потоки подтверждений,
- характеристики заполненности буферов пакетами наблюдаемых потоков,
- дополнительные числовые характеристики отдельных пакетов наблюдаемых потоков (индивидуальные номера, время отправки/получения пакетов и пр.).

Состояние канала связи как управляемой динамической системы наблюдения должно описывать пару “состояние бутылочного горла – состояние общей нагрузки на канал”. Доступные наблюдения по своей математической сущности можно также разделить на две различные категории: считающие процессы, интенсивность которых зависит от состояния системы, и некоторые функции состояния системы, наблюдаемые без дополнительного шума.

Как уже было сказано выше, АВW реального канала зависит от типа дополнительной нагрузки, но в любом случае она будет описываться некоторой функцией от состояния системы: текущей общей интенсивности потоков пакетов, поступающих в канал, и степени его заполнения. Именно их и предлагается оценивать по имеющейся статистической информации и затем пересчитывать в АВW добавленного потока того или иного вида.

Дополнительное предположение о марковском свойстве исследуемой системы наблюдений безусловно является некоторым ограничением. Тем не ме-

нее оно не представляется чрезмерным. Во-первых, с помощью подходящего расширения вектора состояния к таким системам сводятся полумарковские системы (марковские процессы восстановления) [14–16]. Во-вторых, с помощью марковских систем можно аппроксимировать весьма широкий класс немарковских систем [17]. В-третьих, математический аппарат марковских процессов, подкрепленный теорией мартингалов, позволяет решить широкий класс задач оптимального оценивания состояний и параметров. Все эти выводы объясняют последующий выбор класса стохастических дифференциальных систем наблюдения для описания состояния канала и фильтрации его состояния.

### 3. Задача оптимальной фильтрации состояния марковского скачкообразного процесса по совокупности бесшумовых и считающих наблюдений

Далее в работе используются следующие обозначения:

- $\mathbf{I}_{\mathcal{A}}(x)$  – индикаторная функция множества  $\mathcal{A}$ ,
- $\mathbb{S}^N = \{e_1, \dots, e_N\}$  – множество координатных ортов в  $\mathbb{R}^N$ ,
- $\text{col}(a^1, \dots, a^N)$  – вектор-столбец, составленный из компонент  $a^n$ ,  $n = \overline{1, N}$ ,
- $\text{diag}(a)$  – диагональная матрица, порожденная вектором  $a$ ,
- $a \wedge b \triangleq \min(a, b)$ .

#### 3.1. Постановка задачи фильтрации

На полном вероятностном пространстве с фильтрацией  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$  рассматривается система наблюдения

$$(1) \quad \theta_t = \theta_0 + \int_0^t A^\top \theta_s ds + M_t^\theta, \quad \theta_0 \sim \pi_0,$$

$$(2) \quad \xi_t = C\theta_t,$$

$$(3) \quad \eta_t = \int_0^t G\theta_s ds + M_t^\eta,$$

где

- $\theta_t = \text{col}(\theta_t^1, \dots, \theta_t^N) \in \mathbb{S}^N$  – ненаблюдаемое состояние системы, представляющее собой  $\mathcal{F}_t$ -согласованный однородный МСП со значениями в  $\mathbb{S}^N$ , матрицей интенсивностей переходов (МИП)  $A$  и начальным распределением  $\pi_0$ ;  $M_t^\theta = \text{col}(M_t^{\theta,1}, \dots, M_t^{\theta,N})$  –  $\mathcal{F}_t$ -согласованный мартингал,
- $\xi_t = \text{col}(\xi_t^1, \dots, \xi_t^M) \in \mathbb{R}^M$  – процесс наблюдений, не содержащий шума;  $C \in \mathbb{R}^{M \times N}$  – матрица плана наблюдений со столбцами  $c^n$ ,  $n = \overline{1, N}$ ;
- $\eta_t = \text{col}(\eta_t^1, \dots, \eta_t^K) \in \mathbb{R}^K$  – наблюдаемый процесс со считающими компонентами: матрица  $G \in \mathbb{R}^{K \times N}$  определяет условные интенсивности

скачков отдельных компонент  $\eta$  в зависимости от текущего состояния  $\theta$  ( $G$  состоит из строк  $g^k$ ,  $k = \overline{1, K}$ );  $M_t^\eta = \text{col}(M_t^{\eta,1}, \dots, M_t^{\eta,K})$  –  $\mathcal{F}_t$ -согласованный мартингал.

Пусть  $\mathcal{O}_t \triangleq \sigma\{\xi_s, \eta_s : 0 \leq s \leq t\}$  – естественный поток  $\sigma$ -алгебр, порожденный наблюдаемыми процессами. Задача оптимальной фильтрации состояния  $\theta_t$  заключается в вычислении условного математического ожидания (УМО)  $\hat{\theta}_t \triangleq \mathbb{E}\{\theta_t | \mathcal{O}_t\}$ ,  $t \in [0, T]$ ;  $T < \infty$  – некоторый конечный детерминированный момент.

Будем предполагать, что исследуемые базис с фильтрацией и система наблюдения удовлетворяют следующим условиям.

А)  $\mathcal{F}_t \equiv \sigma\{\theta_s, \eta_s : 0 \leq s \leq t\}$  для  $\forall t \in [0, T]$ .

Б) Мартингалы  $M_t^{\eta,k}$  компонент считающих наблюдений  $\eta_t^k$  сильно ортогональны между собой, а также ортогональны мартингалу  $M_t^\theta$  в МСП  $\theta_t$ :

$$\langle \eta, \eta \rangle_t = \int_0^t \text{diag}(G\theta_s) ds, \quad \langle \eta, \theta \rangle_t \equiv 0.$$

В) Пусть  $\{\tau_j\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$  – моменты скачков блочного процесса  $(\theta_t, \eta_t)$ , а  $\{\zeta_j\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$  – моменты скачков наблюдений  $(\xi_t, \eta_t)$ ,  $\tau_0 = \zeta_0 \triangleq 0$ . Предполагается, что

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \tau_j = \lim_{j \rightarrow +\infty} \zeta_j = +\infty \quad \text{Р-п. н.}$$

Тогда марковские моменты  $\tau'_j \triangleq \tau_j \wedge T$  и  $\zeta'_j \triangleq \zeta_j \wedge T$  будут ограничены константой  $T$ . В дальнейшем изложении для простоты штрихи в обозначениях марковских моментов опущены.

Матрица  $G$  интенсивностей считающих наблюдений может быть произвольной матрицей подходящей размерности, состоящей из неотрицательных элементов. Относительно матрицы точных наблюдений  $C$  таких ограничений нет: у нее должна быть лишь подходящая размерность. Тем не менее на практике матрица  $C$  состоит из 0 и 1. Часто в качестве бесшумовых наблюдений  $\xi_t$  выступает информация о том, что в текущий момент времени  $\theta_t$  находится в некотором множестве  $\mathbb{S}' \subset \mathbb{S}^N$ . В этом случае соответствующая строка  $C$  будет состоять из индикаторов  $\mathbb{I}_{\mathbb{S}'}(e_n)$ ,  $n = \overline{1, N}$ .

### 3.2. Решение задачи фильтрации

Пусть  $\mathcal{C}$  – множество различных столбцов матрицы  $C$ . Построим отображение  $\Xi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times N}$  следующим образом:

$$\Xi(c) \triangleq \sum_{n: Ce_n=c} e_n^\top.$$

$\Xi(\cdot)$  характеризует полный прообраз отображения  $e \rightarrow Ce$  в следующем смысле:

$$\text{diag}(\Xi(c))e = \begin{cases} e, & \text{если } Ce = c, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Обозначим:  $\bar{\theta}_\ell \triangleq \theta_{\zeta_\ell}$ ,  $\bar{\xi}_\ell \triangleq \xi_{\zeta_\ell}$ ,  $\bar{\eta}_\ell \triangleq \eta_{\zeta_\ell}$ . Рассмотрим неубывающую последовательность  $\sigma$ -алгебр  $\mathfrak{D}_j \triangleq \sigma\{\zeta_\ell, \bar{\xi}_\ell, \bar{\eta}_\ell : 0 \leq \ell \leq j\}$ . Известно [18], что  $\mathfrak{D}_j \equiv \mathcal{O}_{\zeta_j}$  для всех  $j \in \mathbb{Z}_+$ .

Построим также семейства  $\sigma$ -алгебр

$$\mathbf{O}_{j,t} \triangleq \sigma\{A \in \mathfrak{D}_j, \{\omega : t \in [\zeta_j(\omega), \zeta_{j+1}(\omega))\}\}.$$

Очевидно, что  $\sigma$ -алгебры  $\mathbf{O}_{j,t}$  богаче, чем  $\mathfrak{D}_j$ , так как дополнены случайными событиями вида  $\{\omega \in \Omega : \zeta_j(\omega) \leq t < \zeta_{j+1}(\omega)\}$ , которые несут следующий смысл: к моменту времени  $t$  произошло ровно  $j$  скачков наблюдений.

Для вывода уравнений оптимальной фильтрации необходимы следующие вспомогательные утверждения.

*Лемма 1.* Пусть  $\hat{\pi}_j \triangleq \mathbf{E}\{\theta_{\zeta_j} | \mathfrak{D}_j\}$ . Тогда P-п.н. верны следующие равенства

$$(4) \quad \mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t) \mathbf{E}\left\{\theta_t \mathbf{I}_{[\zeta_j, \zeta_{j+1})}(t) | \mathfrak{D}_j\right\} = \mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t) m_t,$$

$$(5) \quad \mathbf{I}_{[\zeta_j, \zeta_{j+1})}(t) \mathbf{E}\{\theta_t | \mathbf{O}_{j,t}\} = \mathbf{I}_{[\zeta_j, \zeta_{j+1})}(t) \mu_t,$$

где функции  $m_t$  и

$$(6) \quad \mu_t = (\mathbf{1} m_t)^{-1} m_t$$

являются решениями следующих систем обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(7) \quad \begin{cases} \dot{m}_t = \left[ \text{diag}(\Xi(\bar{\xi}_j)) A^\top - \sum_{k=1}^K \text{diag}(g^k) \right] m_t, & t > \zeta_j, \\ m_{\zeta_j} = \hat{\pi}_j, \end{cases}$$

$$(8) \quad \begin{cases} \dot{\mu}_t = \left[ \text{diag}(\Xi(\bar{\xi}_j)) A^\top - \sum_{k=1}^K \text{diag}(g^k) \right] \mu_t - \mu_t \left[ \Xi(\bar{\xi}_j) A^\top - \sum_{k=1}^K g^k \right] \mu_t, \\ \mu_{\zeta_j} = \hat{\pi}_j. \end{cases} \quad t > \zeta_j,$$

Доказательство леммы 1 приведено в Приложении.

*Лемма 2.* Оценка  $\hat{\pi}_{j+1} \triangleq \mathbf{E}\{\theta_{\zeta_{j+1}} | \mathfrak{D}_{j+1}\}$  определяется формулой

$$(9) \quad \begin{aligned} \hat{\pi}_{j+1} = & \sum_{k=1}^K \left( g^k \mu_{\zeta_{j+1}} \right)^{-1} \text{diag}(g^k) \mu_{\zeta_{j+1}} (\bar{\eta}_{j+1}^k - \bar{\eta}_j^k) + \\ & + \left( \Xi(\bar{\xi}_{j+1}) A^\top \mu_{\zeta_{j+1}} \right)^{-1} \text{diag}(\Xi(\bar{\xi}_{j+1})) (I - \text{diag}(\Xi(\bar{\xi}_j))) A^\top \mu_{\zeta_{j+1}}, \end{aligned}$$

где вектор  $\mu_{\zeta_{j+1}}$  – решение (8), взятое в момент времени  $\zeta_{j+1}$ .

Доказательство леммы 2 приведено в Приложении.

Леммы 1 и 2 позволяют доказать основное утверждение работы.

*Теорема 1. Оценка оптимальной фильтрации  $\widehat{\theta}_t$  представима в виде*

$$(10) \quad \widehat{\theta}_t = \mathbb{E} \{ \theta_t | \mathcal{O}_t \} = \sum_{j \geq 0} \mathbf{I}_{[\zeta_j, \zeta_{j+1})}(t) \mu_t,$$

где функции  $\mu_t$  на интервалах  $[\zeta_j, \zeta_{j+1})$  определяются решением (8). В моменты  $\zeta_{j+1}$  скачков наблюдений  $(\xi_t, \eta_t)$  оценка  $\widehat{\theta}_{j+1} = \widehat{\pi}_{j+1}$  вычисляется с помощью рекуррентного соотношения (9); оценка фильтрации в начальный момент равна

$$(11) \quad \widehat{\theta}_0 = (\Xi(\xi_0)\pi_0)^{-1} \text{diag} (\Xi(\xi_0)) \pi_0.$$

Оценка  $\widehat{\theta}_t$  является решением стохастической системы

$$(12) \quad \begin{aligned} \widehat{\theta}_t &= (\Xi(\xi_0)\pi_0)^{-1} \text{diag} (\Xi(\xi_0)) \pi_0 + \\ &+ \int_{\zeta_j}^t \left[ \left( \text{diag} (\Xi(\xi_s)) A^\top - \sum_{k=1}^K \text{diag} (g^k) \right) \widehat{\theta}_s - \widehat{\theta}_s \left( \Xi(\xi_s) A^\top - \sum_{k=1}^K g^k \right) \widehat{\theta}_s \right] ds + \\ &+ \sum_{\zeta_j: \zeta_j \leq t} \left[ \sum_{k=1}^K \left( g^k \widehat{\theta}_{\zeta_j-} \right)^{-1} \text{diag} (g^k) \widehat{\theta}_{\zeta_j-} \Delta \eta_{\zeta_j}^k + \right. \\ &\left. + \left( \Xi(\xi_{\zeta_j}) A^\top \widehat{\theta}_{\zeta_j-} \right)^{-1} \text{diag} (\Xi(\xi_{\zeta_j})) (I - \text{diag} (\Xi(\xi_{\zeta_j-}))) A^\top \widehat{\theta}_{\zeta_j-} - \widehat{\theta}_{\zeta_j-} \right]. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении.

*Замечание 1.* Хотя интегральная часть итогового уравнения (12) является нелинейной и соответствует (8), линейная система (7) также играет важную роль в численной реализации алгоритма фильтрации. Заметим, что (8) представляет собой систему дифференциальных уравнений Риккати, численное решение которой может быть затруднено при некоторых наборах параметров. Дело в том, что точное решение  $\mu$  удовлетворяет условиям неотрицательности и нормировки, и этим же условиям должно удовлетворять приближенное решение. В противном случае оно теряет вероятностный смысл условного распределения, а сама аппроксимация “разваливается”. Для нейтрализации этого недостатка можно использовать более сложные алгоритмы численного решения или уменьшать временной шаг. В отличие от непосредственного численного решения (8),  $\mu_t$  может быть вычислена с помощью (7) точно для любого значения временного шага  $h$ . Для этого достаточно однократно вычислить экспоненциал  $Q = \exp \left[ h \left( \text{diag} (\Xi(\bar{\xi}_j)) A^\top - \sum_{k=1}^K \text{diag} (g^k) \right) \right]$  и сумму его строк  $q = \mathbf{1}Q$ . Тогда точные значения условного распределения  $\mu_{\zeta_j+ih}$  на

равномерной временной сетке с шагом  $h$ , начинающейся в  $\zeta_j$ , могут быть вычислены с помощью простейшей рекурсии

$$\mu_{\zeta_j+(i+1)h} = \frac{1}{q\mu_{\zeta_j+ih}} Q\mu_{\zeta_j+ih}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

#### 4. Численный пример оценивания доступной пропускной способности

Представим более подробно устройство канала и структуру передаваемой через него информации. Схема функционирования канала приведена на рис. 1.

Данные в виде пакетов поступают в канал из двух независимых потоков. Первый поток – простейший с интенсивностью  $\mu$  – частично доступен наблюдению. Второй, полностью ненаблюдаемый, описывается процессом Кокса, интенсивность  $\varkappa_t$  которого может принимать значения из множества  $\{\varkappa^s\}_{s=1, \overline{S}}$ , и изменяется в соответствии со скрытым однородным МСП с известной матрицей интенсивностей переходов  $\Lambda = \|\Lambda^{ij}\|_{i,j=1, \overline{S}}$ . По сути второй поток представляет собой внешнюю интегральную нестационарную нагрузку.

Канал передачи представляет собой элемент обслуживания, внутри которого одновременно может находиться не более  $N^p$  передаваемых пакетов. При этом пакеты, поступающие в полностью заполненный канал, теряются. В случае, когда канал пуст, он передает пакет, тратя на это случайное время, имеющее экспоненциальное распределение с постоянным параметром  $\nu$ .

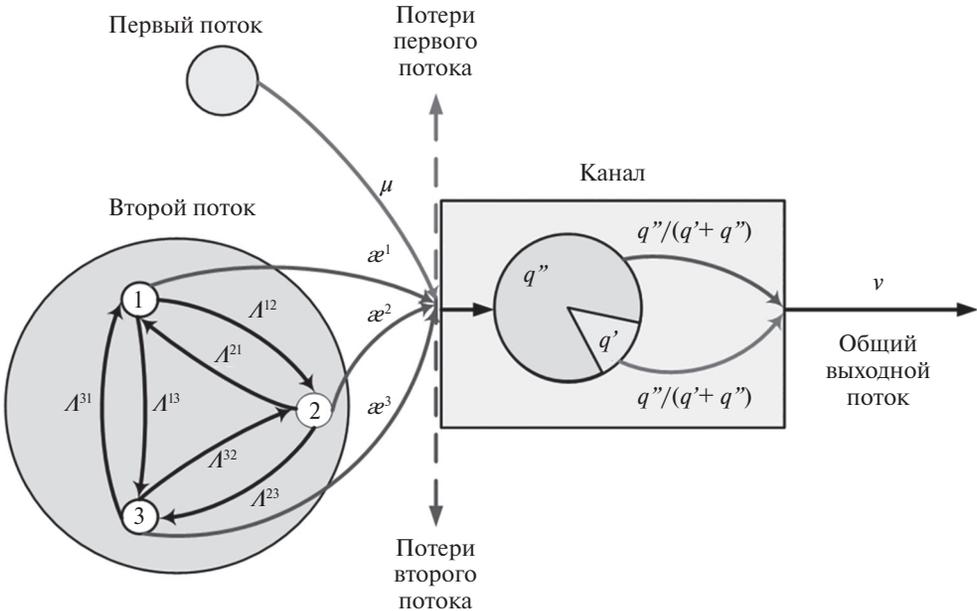


Рис. 1. Схема функционирования сетевого канала.

Передаваемый пакет выбирается случайным образом из пакетов обоих потоков: если в настоящий момент времени в канале находятся  $q'$  пакетов первого потока и  $q''$  второго, то вероятности того, что будет передан пакет из первого или второго потоков равны соответственно  $\frac{q'}{q'+q''}$  и  $\frac{q''}{q'+q''}$ . Таким образом, в исследуемой модели реализован механизм *Active Queueing Management* [19], обеспечивающий разным потокам справедливый доступ к ресурсам пропорционально числу пакетов каждого потока, находящихся в канале.

Очевидно, что текущая пропускная способность канала определяется двумя величинами, скрытыми от непосредственного наблюдения: общим текущим количеством пакетов в сервере  $q_t^\Sigma \triangleq q'_t + q''_t$  и общей интенсивностью поступления пакетов из двух потоков  $\varkappa_t^\Sigma \triangleq \mu + \varkappa_t$ . Именно эти два процесса являются объектами мониторинга.

Процессы поступления пакетов обоих потоков в канал и их обработка описываются единым МСП с конечным множеством состояний  $\theta_t = (s_t, q'_t, q''_t)$ , где  $s_t$  – текущее состояние второго потока ( $s = \overline{1, S}$ ),  $q'_t$  – число пакетов первого потока в сервере,  $q''_t$  – число пакетов второго потока в сервере ( $0 \leq q', q'' : q'_t + q''_t \leq N^p$ ). Легко проверить, что общее число возможных состояний МСП равно  $N = \frac{S(N^p+1)(N^p+2)}{2}$ .

Матрица  $A$  интенсивностей перехода МСП  $X_t$  определяется поэлементно следующим образом:

- $(i, q', q'') \xrightarrow{\Lambda^{ij}} (j, q', q'')$ , ( $i, j = \overline{1, S}$ ,  $i \neq j$ ,  $q', q'' \geq 0 : q' + q'' \leq N^p$ ) – смена интенсивности второго потока с  $\varkappa^i$  на  $\varkappa^j$ ;
- $(s, q', q'') \xrightarrow{\mu} (s, q' + 1, q'')$ , ( $s = \overline{1, S}$ ,  $q', q'' \geq 0 : q' + q'' \leq N^p - 1$ ) – поступление в канал нового пакета первого потока;
- $(s, q', q'') \xrightarrow{\varkappa^s} (s, q', q'' + 1)$ , ( $s = \overline{1, S}$ ,  $q', q'' \geq 0 : q' + q'' \leq N^p - 1$ ) – поступление в канал нового пакета второго потока;
- $(s, q', q'') \xrightarrow{\frac{q'}{q'+q''}\nu} (s, q' - 1, q'')$ , ( $s = \overline{1, S}$ ,  $q' > 0$ ,  $q'' \geq 0 : q' + q'' \leq N^p$ ) – передача по каналу пакета первого потока;
- $(s, q', q'') \xrightarrow{\frac{q''}{q'+q''}\nu} (s, q', q'' - 1)$ , ( $s = \overline{1, S}$ ,  $q' \geq 0$ ,  $q'' > 0 : q' + q'' \leq N^p$ ) – передача по каналу пакета второго потока.

Для оценивания характеристик  $q_t^\Sigma$  и  $\varkappa_t^\Sigma$  доступна следующая статистическая информация:

- непрерывные наблюдения числа пакетов первого потока, в настоящее время находящихся в канале:  $\xi_t = q'_t$ ,
- процесс, считающий потери пакетов первого потока, вызванные переполнением канала:  $\eta_t = \int_0^t \mathbf{I}_{\{N^p\}}(q_u^\Sigma) \mu du + M_t^\eta$ .

Численные эксперименты были проведены для следующих значений параметров:  $N^p = 32$ ,  $S = 3$ ,  $N = 1683$ ,  $\mu = 1$ ,  $\nu = 13$ ,  $T = 2000$ ,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -0,002 & 0,001 & 0,001 \\ 0,001 & -0,002 & 0,001 \\ 0,001 & 0,001 & -0,002 \end{bmatrix}, \quad \varkappa = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

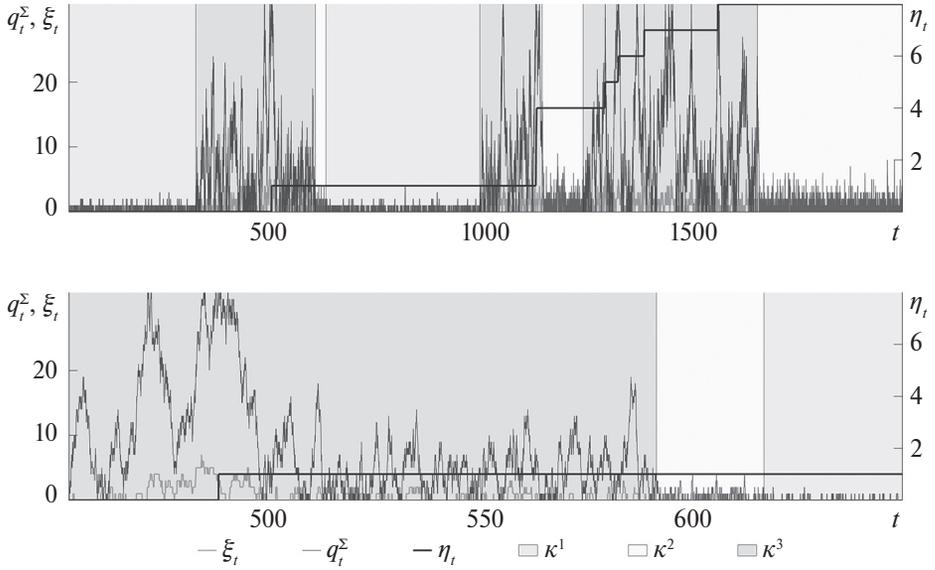


Рис. 2. Показатели загрузки канала и доступные наблюдения.

Начальное распределение МСП, описывающего передачу пакетов, совпадает со стационарным. Моделирование всех процессов и численное решение задачи оптимальной фильтрации выполнялось с шагом по времени  $h = 0,01$ .

На рис. 2 дана информация о скрытом состоянии канала и доступных наблюдениях:

- скрытое состояние интенсивности второго потока  $\varkappa_t$  (отображается фоном),
- скрытая загрузка канала  $q_t^\Sigma$ ,
- наблюдаемое количество пакетов первого потока  $\xi_t$ , находящихся в канале,
- наблюдаемый считающий процесс потерь пакетов первого потока  $\eta_t$  (значения отображаются на правой оси ординат).

На верхнем графике представлены траектории на всем интервале оценивания  $[0; 2000]$ , на нижнем более подробно изображен интервал  $[450; 650]$ , на котором интенсивность второго потока побывала во всех возможных состояниях, а также наблюдалась одна потеря пакета первого потока.

Полученная решением (12) оценка фильтрации  $\hat{\theta}_t$  состояния МСП представляет собой вектор, компонентами которого являются условные вероятности  $P\{s_t = S, q'_t = Q', q''_t = Q'' | \mathcal{O}_t\}$ . По вектору  $\hat{\theta}_t$  можно вычислить оценки текущей общей загрузки канала  $\hat{q}_t^\Sigma$ :

$$(13) \quad \hat{q}_t^\Sigma = \sum_{s, q', q''} (q' + q'') P\{s_t = s, q'_t = q', q''_t = q'' | \mathcal{O}_t\},$$

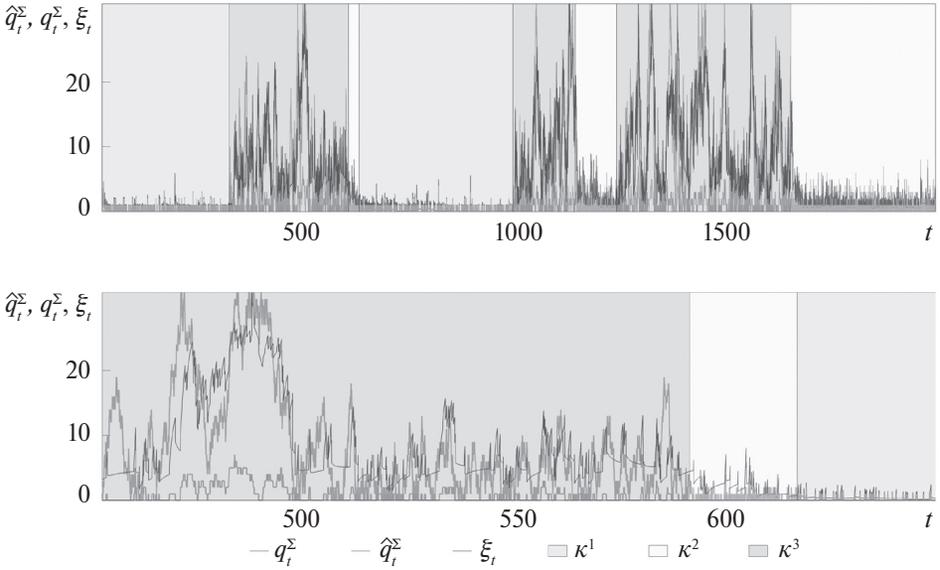


Рис. 3. Среднее число  $E(\varkappa)$  пакетов в канале и вероятность  $P(\varkappa)$  потери пакета.

а также оценки  $\hat{\varkappa}_t^\Sigma$  текущей суммарной интенсивности пакетов, поступающих в канал:

$$(14) \quad \hat{\varkappa}_t^\Sigma = \sum_{s, q', q''} \varkappa^s \mathbf{P} \{s_t = s, q'_t = q', q''_t = q'' | \mathcal{O}_t\}.$$

Эти характеристики, в свою очередь, позволяют оценивать ABW в реальном масштабе времени при различных условиях QoS. Рассмотрим функционирование канала в предположении, что второй поток также является простейшим с постоянной интенсивностью  $\varkappa$ . В зависимости от этого параметра в стационарном режиме вычислим среднее число пакетов в канале  $\mathbf{E}\{q^\Sigma\} = E(\varkappa)$  и вероятность  $\mathbf{P}\{q^\Sigma = N^p\} = P_\ell(\varkappa)$  потери пакета. На рис. 3 представлены зависимости  $E(\varkappa)$  и  $P_\ell(\varkappa)$  (на вспомогательной оси ординат).

Пусть зафиксировано требование QoS в виде ограничения сверху на вероятность потери пакета  $\bar{P}_\ell$ . Будем считать, что максимальная пропускная способность данного канала  $\bar{B}$  равна суммарной интенсивности обоих потоков при условии, что вероятность потери пакета не превосходит  $\bar{P}_\ell$ :  $\bar{B} \triangleq P^{-1}(\bar{P}_\ell) + \mu$ . Например, при выборе  $\bar{P} = 0,05$  соответствующая максимальная пропускная способность равна  $\bar{B} = 12,45$ . Тогда в качестве ABW в момент  $t$  предлагается принять разность  $B_t^a \triangleq \bar{B} - \varkappa_t^\Sigma$ , т.е. такую максимальную добавку к текущей интенсивности второго потока, которая не нарушит ограничение на вероятность потери пакета. Однако величина  $\varkappa_t^\Sigma$  недоступна прямому наблюдению, и в качестве оценки ABW предлагается использовать величину  $\hat{B}_t^a \triangleq \max(\bar{B} - \hat{\varkappa}_t^\Sigma, 0)$  – функцию от полученной оценки  $\hat{\varkappa}_t^\Sigma$ .

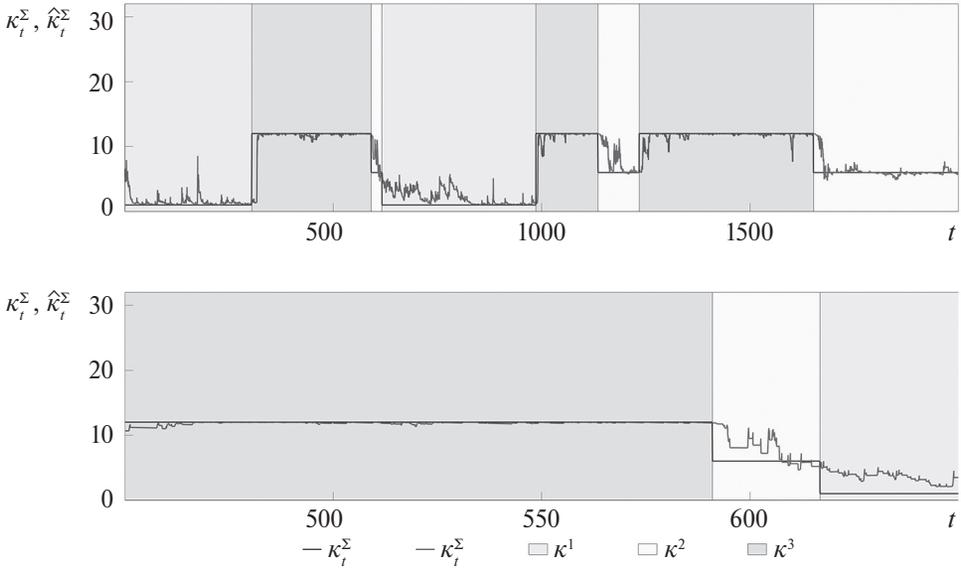


Рис. 4. Загрузка канала и ее оценка.

Рассмотрим другой вид требования QoS в виде ограничения сверху  $\bar{T}$  на среднее время передачи пакета. Если пакет находится в настоящее время на сервере с текущим общим числом пакетов  $q_t^\Sigma$  и канал находится в стационарном режиме, то среднее время передачи может быть characterized величиной  $\frac{q_t^\Sigma}{\nu}$ . Таким образом, для выполнения данного требования QoS максимально допустимое число пакетов, находящихся одновременно на сервере, не должно превышать  $\bar{Q} = \bar{T}\nu$ . Например, при выборе  $\bar{T} = 1$  верхнее значение  $\bar{Q} = 13$  и соответствующая максимальная пропускная способность равна  $\bar{B} = E^{-1}(13) = 11,55$ . В качестве оценки ABW предлагается использовать величину  $\hat{B}_t^a \triangleq \max(\bar{B} - E^{-1}(\hat{q}_t^\Sigma), 0)$  – функцию от полученной оценки  $\hat{q}_t^\Sigma$ .

На рис. 4 представлена эволюция загрузки канала и ее оценки:

- скрытое состояние интенсивности второго потока  $\varkappa_t$  (отображается фоном),
- общая скрытая загрузка канала  $q_t^\Sigma$ ,
- оценка общей загрузки канала  $\hat{q}_t^\Sigma$ ,
- наблюдаемое количество пакетов первого потока  $\xi_t$ , находящихся в канале.

На верхнем графике представлены траектории на всем интервале оценивания  $[0; 2000]$ , на нижнем – интервал  $[450; 650]$ . Заметим, что на более детальном графике виден кусочно-непрерывный характер оценки: непрерывная траектория на интервалах отсутствия скачков в наблюдениях и ее скачкообразное изменение, соответствующее скачку наблюдений. Регистрация потери пакета первого потока однозначным образом сигнализирует, что в данный

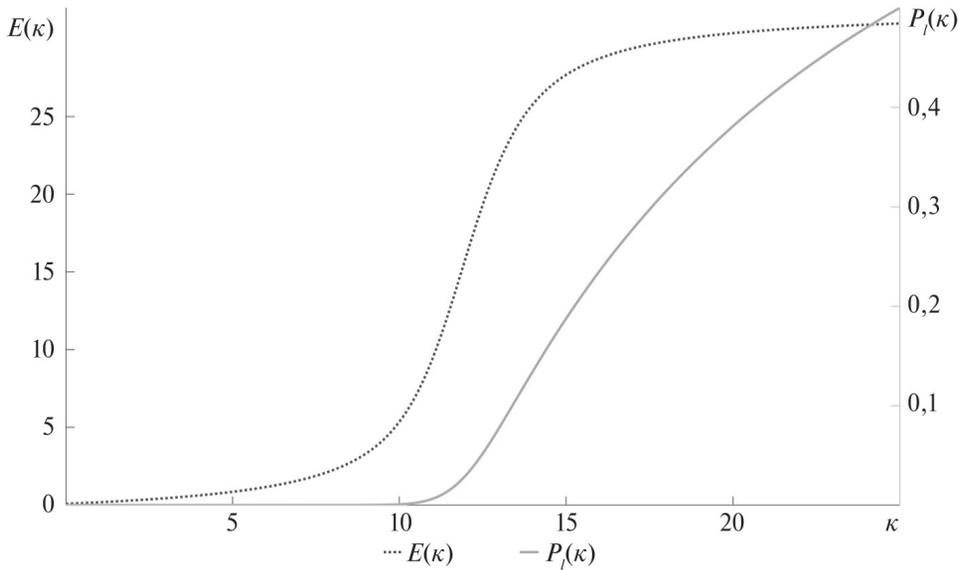


Рис. 5. Общая интенсивность поступления пакетов и ее оценка.

момент канал полон, т.е.  $q_t^\Sigma = N^P$ . Представленная оценка фильтрации ведет себя в полном соответствии с этим выводом: в момент времени  $t = 485,91$  наблюдается потеря пакета, и в этот момент оценка  $\hat{q}_t^\Sigma$  совпадает с истинной загрузкой канала  $q_t^\Sigma$ , которая равна  $N^P$ .

Вернемся к обзору результатов численных экспериментов. На рис. 5 представлена эволюция суммарной интенсивности поступления пакетов в канал и ее оценка:

- скрытое состояние интенсивности второго потока  $\varkappa_t$  (отображается фоном),
- интенсивность поступления пакетов  $\varkappa_t^\Sigma$ ,
- оценка интенсивности  $\hat{\varkappa}_t^\Sigma$ .

На верхнем графике представлены траектории на всем интервале оценивания  $[0; 2000]$ , на нижнем – интервал  $[450; 650]$ . Заметим, что на более детальном графике также наблюдается кусочно-непрерывный характер оценки.

Анализируя графики, можно сделать вывод, что предложенные оценки текущих характеристик пропускной способности канала обладают высокой точностью. Сравним ее с точностью тривиальной оценки – безусловного математического ожидания процессов  $q_t^\Sigma$  и  $\varkappa_t^\Sigma$ , вычисленных для стационарного распределения МСП  $X$ . Точность тривиальных оценок  $E\{q^\Sigma\}$  и  $E\{\varkappa^\Sigma\}$  характеризуется дисперсиями  $D\{q^\Sigma\}$  и  $D\{\varkappa^\Sigma\}$ . В качестве показателей точности предложенных в статье оценок используем значения

$$\varepsilon^q = 1 - \frac{\int_0^T E\{(\hat{q}_t^\Sigma - q_t^\Sigma)^2 dt\}}{TD\{q^\Sigma\}} \quad \text{и} \quad \varepsilon^\varkappa = 1 - \frac{\int_0^T E\{(\hat{\varkappa}_t^\Sigma - \varkappa_t^\Sigma)^2 dt\}}{TD\{\varkappa^\Sigma\}},$$

которые можно рассматривать как аналоги коэффициентов детерминации, принятых в математической статистике [20]. В данном примере числители обоих показателей получены методом Монте-Карло по пучку траекторий  $N^{MC} = 10\,000$ :  $\varepsilon^q = 0,76$  и  $\varepsilon^z = 0,94$ .

## 5. Заключение

В статье исследована прикладная задача оценивания в реальном масштабе времени ABW канала пакетной передачи по наблюдениям одного из обслуживаемых потоков данных. Доступные наблюдения включают информацию о числе пакетов потока, находящихся в нем в настоящее время, а также процесс, считающий пакеты потока, потерянные в результате переполнения канала. Так как предложенная процедура оценивания не нуждается в генерации дополнительных служебных потоков через канал, отбирающих его ресурсы, то предложенный алгоритм мониторинга относится к классу пассивных.

Основной идеей, позволившей построить эффективный численный алгоритм оценивания, является описание функционирования канала и входящих потоков с помощью некоторого частично наблюдаемого МСП. В качестве статистической информации выступает совокупность некоторых функций состояния, наблюдаемых без шума, а также считающих процессов, чья интенсивность зависит от оцениваемого состояния. Искомая оценка фильтрации задается последовательностью рекуррентно связанных обыкновенных дифференциальных уравнений, вычисляемых в промежутках между скачками наблюдений, и дискретных преобразований, обновляющих оценки в моменты изменений наблюдений. В работе представлены результаты численного эксперимента, иллюстрирующие высокое качество представленных оценок.

Исследования в области построения эффективных алгоритмов оценивания ABW каналов могут быть продолжены в следующих направлениях. Во-первых, практический интерес представляет решение задачи оценивания ABW для экспоненциального элемента с ограниченной очередью для случая описанного в статье нестационарного потока поступающих пакетов.

Во-вторых, важным для телекоммуникационных приложений является усложнение модели функционирования канала и поступающих потоков за счет перехода от марковских к полумарковским процессам.

В-третьих, задача оценивания ABW была решена в условиях полной априорной информации о канале и передаваемых через него потоках. Построение процедур адаптивного оценивания вероятностных параметров пары “канал – потоки” и робастной модернизации предложенного алгоритма мониторинга также представляется перспективным.

В-четвертых, в реальных сетях передачи данных доступная статистическая информация гораздо богаче, чем использованная в статье. Например, существуют данные, связывающие потоки пакетов на входе и выходе канала, имеется информация об индивидуальном времени передачи каждого пакета и пр. Вся эта информация, включенная в систему наблюдения, может

привести к тому, что расширенная стохастическая система наблюдения перестанет быть марковской, что радикально усложнит алгоритмы оценивания АВВ. Поэтому перспективным представляется такое расширение класса систем наблюдения, которое, с одной стороны, сохраняет марковское свойство расширенного подходящим образом состояния системы и, с другой, позволяет использовать часть дополнительной статистической информации подобно [21, 22].

В-пятых, использование МСП с конечным множеством состояний для решения прикладных задач сопряжено с очень серьезной сложностью. Она заключается в стремительном росте размерности МСП. Действительно, даже в рассмотренном численном примере при емкости канала  $N^p = 32$  и трех возможных вариантах внешней нагрузки общее число состояний МСП равно  $N = 1683$ . При этом следует также учитывать, что различные состояния описываются не скалярными значениями, а векторами размерности  $N$ , что ведет к дополнительному росту объема оперативной памяти, необходимой для реализации алгоритма фильтрации. Данные обстоятельства делают актуальной разработку специального программного обеспечения, экономично реализующего алгоритмы оценивания в стохастических системах наблюдения с МСП.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Доказательство леммы 1.

Для вывода систем (7) и (8) воспользуемся методом моментов: построим замкнутые линейные стохастические дифференциальные системы, описывающие эволюцию состояния до следующего скачка наблюдений, и осредним их.

Если  $\{\zeta_\ell^{\eta,k}\}_{\ell \in \mathbb{Z}_+, k = \overline{1, K}}$  – моменты скачков компонент считающих наблюдений  $\eta$ , а  $\{\zeta_\ell^\xi\}_{\ell \in \mathbb{Z}_+}$  – моменты скачков бесшумовых наблюдений  $\xi$ , то момент  $\zeta_{j+1}$ , следующий за  $\zeta_j$ , определяется с помощью очевидной рекурсии

$$\zeta_{j+1} = \min_{\zeta_\ell^{\eta,k} > \zeta_j, \zeta_{\ell'}^\xi > \zeta_j} (\zeta_\ell^{\eta,k}, \zeta_{\ell'}^\xi).$$

На интервале  $[\zeta_j, +\infty)$  исследуем процесс

$$U_t \triangleq \mathbf{I}_{[\zeta_j, \zeta_{j+1})}(t) = \underbrace{\mathbf{I}_{[\zeta_j, \zeta_{\ell'}^\xi)}(t)}_{\triangleq V_t} \prod_{k=1}^K \underbrace{\mathbf{I}_{[\zeta_j, \zeta_\ell^{\eta,k})}(t)}_{\triangleq W_t^k}.$$

По построению на любом интервале  $[\zeta_j, t)$  процессы  $V_t$  и  $W_t^k$  терпят не более одного скачка, и также верны соотношения

$$\text{diag}(\Xi(\bar{\xi}_j))\theta_t \equiv \theta_{\zeta_j} \text{ для } \forall t \in [\zeta_j, \zeta_{\ell'}^\xi), \quad \text{diag}(\Xi(\bar{\xi}_j))\theta_{\zeta_{\ell'}^\xi} = 0.$$

По формуле Долеан [23] процессы  $V_t$  и  $W_t^k$  представимы в виде решений уравнений

$$(П.1) \quad V_t = \mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t) \left( 1 + \int_{\zeta_j}^t V_{s-} \Xi(\bar{\xi}_j) d\theta_s \right),$$

$$(П.2) \quad W_t^k = \mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t) \left( 1 - \int_{\zeta_j}^t W_{s-}^k d\eta_s^k \right).$$

Действительно, процесс  $\int_{\zeta_j}^t \Xi(\bar{\xi}_j) d\theta_s$  является чисто разрывным семимартингалом, и решение уравнения (П.1) по формуле Долеан имеет вид

$$(П.3) \quad V_t = \mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t) \exp \left[ \Xi(\bar{\xi}_j)(\theta_t - \theta_{\zeta_j}) \right] \prod_{s: \zeta_j < s \leq t} (1 + \Xi(\bar{\xi}_j) \Delta\theta_s).$$

Если до момента времени  $t$  процесс  $\theta$  не совершал скачков, то  $V_t = V_{\zeta_j} = 1$ . Если в момент времени  $s > \zeta_j$  впервые произошел скачок  $\theta$ , не приведший к скачку наблюдений  $\xi$ , т.е.  $\Delta\xi_s = 0$ , то

$$\Xi(\bar{\xi}_j)(\theta_s - \theta_{s-}) = \Xi(\bar{\xi}_j)(\theta_s - \theta_{\zeta_j}) = 0,$$

и согласно (П.3)  $V_s = 1$ . То же значение процесс  $V$  будет сохранять и при последующих скачках  $\theta$ , не приводящих к скачкам наблюдений  $\xi$ . Если в момент времени  $s > \zeta_j$  впервые произошел скачок  $\theta$ , приведший к скачку наблюдений  $\xi$ , т.е.  $\xi_s \neq \xi_{s-} = \bar{\xi}_j$  и  $s = \min_{\zeta_{\ell'}^{\xi} > \zeta_j} \zeta_{\ell'}^{\xi}$ , то

$$\Xi(\bar{\xi}_j)(\theta_s - \theta_{s-}) = \Xi(\bar{\xi}_j)\theta_s - \Xi(\bar{\xi}_j)\theta_{s-} = 0 - 1 = -1,$$

и согласно (П.3)  $V_s = 0$ . Это же значение процесс  $V_t$  сохраняет в последующем. Таким образом, показано, что решение уравнения (П.1) – процесс (П.3) – совпадает с процессом  $\mathbf{I}_{[\zeta_j, \zeta_{\ell'}^{\xi})}(t)$  на луче  $[\zeta_j, +\infty)$ . Доказательство представления процессов  $W_t^k = \mathbf{I}_{[\zeta_j, \zeta_{\ell'}^{\eta, k})}(t)$  в виде решения уравнений (П.2) выполняется аналогично.

Далее, из (1)–(3) следует, что  $V_t$  и  $W_t^k$  допускают следующие разложения:

$$(П.4) \quad V_t = \mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t) \left( 1 + \int_{\zeta_j}^t \Xi(\bar{\xi}_j) A^\top \underbrace{\theta_s V_s}_{\triangleq v_s} ds + M_t^1 \right),$$

$$(П.5) \quad W_t^k = \mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t) \left( 1 - \int_{\zeta_j}^t g^k \underbrace{\theta_s W_s^k}_{\triangleq w_s^k} ds + M_t^{2,k} \right),$$

где  $\mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t)M_t^1$  и  $\mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t)M_t^{2,k}$  – некоторые мартингалы. Заметим, что (П.4) и (П.5) можно интерпретировать как линейные стохастические дифференциальные уравнения с мартингалами в правой части. Тем не менее данные уравнения являются незамкнутыми: в правой части уравнения для  $V_t$  присутствует процесс  $v_t$ , а правая часть  $W_t^k$  включает в себя  $w_t^k$ . Получим из (П.4) и (П.5) замкнутую систему линейных стохастических дифференциальных уравнений для векторного процесса  $u_t \triangleq \theta_t U_t$ .

В силу правила Ито и условия Б процесс  $U_t$  допускает разложение

$$\begin{aligned} U_t &= \mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t) \left[ 1 + \int_{\zeta_j}^t \left( dV_s \prod_{k=1}^K W_{s-}^k + V_{s-} \sum_{k=1}^K \prod_{i: i \neq k} W_{s-}^i dW_s^k \right) \right] = \\ &= \mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t) \left[ 1 + \int_{\zeta_j}^t \left( \Xi(\bar{\xi}_j) A^\top - \sum_{k=1}^K g^k \right) u_s ds + M_t^3 \right], \end{aligned}$$

где  $\mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t)M_t^3$  – некоторый мартингал. Из определения процессов  $\theta$  и  $U$  следует, что

$$\begin{aligned} &\sum_{\zeta: \zeta_j < \zeta \leq t} \Delta \theta_\zeta \Delta U_\zeta = \\ &= -\mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t) \int_{\zeta_j}^t \left[ \theta_{s-} dV_s \prod_{k=1}^K W_{s-}^k - (I - \text{diag}(\Xi(\bar{\xi}_j))) d\theta_s V_{s-} \prod_{k=1}^K W_{s-}^k \right], \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} (II.6) \quad u_t &= \mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t) \left[ \theta_{\zeta_j} + \int_{\zeta_j}^t (d\theta_s U_{s-} + \theta_{s-} dU_s) + \sum_{\zeta: \zeta_j < \zeta \leq t} \Delta \theta_\zeta \Delta U_\zeta \right] = \\ &= \mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t) \left[ \theta_{\zeta_j} + \int_{\zeta_j}^t \left( \text{diag}(\Xi(\bar{\xi}_j)) A^\top - \sum_{k=1}^K \text{diag}(g^k) \right) u_s ds + M_t^4 \right], \end{aligned}$$

где  $\mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t)M_t^4$  – некоторый мартингал. Вычисляя УМО обеих частей (П.6) относительно  $\mathfrak{D}_j$  и используя тот факт, что

$$\mathbb{E} \left\{ \mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t)M_t^4 | \mathfrak{D}_j \right\} = \mathbb{E} \left\{ \mathbb{E} \left\{ \mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t)M_t^4 | \mathcal{F}_{\zeta_j} \right\} | \mathfrak{D}_j \right\} = 0,$$

получаем систему уравнений, эквивалентную (7):

$$m_t = \hat{\pi}_j + \int_{\zeta_j}^t \left( \text{diag}(\Xi(\bar{\xi}_j)) A^\top - \sum_{k=1}^K \text{diag}(g^k) \right) m_s ds.$$

Возможность представления функции  $\mu_t$  в виде решения (8) следует из правила дифференцирования сложной функции (6) и системы (7).

Пусть  $\mathcal{A} \in \mathfrak{D}_j$  – произвольное множество и  $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cap \{\omega : \zeta_{j+1} > t\}$ . Из свойств УМО следует истинность следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left\{ \mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t) (\theta_t \mathbf{I}_{\mathcal{A}'}(\omega) - \mu_t \mathbf{I}_{\mathcal{A}'}(\omega)) \right\} = \\
& = \mathbb{E} \left\{ \theta_t \mathbf{I}_{[\zeta_j, \zeta_{j+1})}(t) \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\omega) - \mu_t \mathbf{I}_{[\zeta_j, \zeta_{j+1})}(t) \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\omega) \right\} = \\
& = \mathbb{E} \left\{ \mathbb{E} \left\{ \theta_t \mathbf{I}_{[\zeta_j, \zeta_{j+1})}(t) \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\omega) - \mu_t \mathbf{I}_{[\zeta_j, \zeta_{j+1})}(t) \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\omega) \right\} \middle| \mathfrak{D}_j \right\} = \\
& = \mathbb{E} \left\{ \left( \mathbb{E} \left\{ \theta_t \mathbf{I}_{[\zeta_j, \zeta_{j+1})}(t) \middle| \mathfrak{D}_j \right\} - \mu_t \mathbb{E} \left\{ \mathbf{I}_{[\zeta_j, \zeta_{j+1})}(t) \middle| \mathfrak{D}_j \right\} \right) \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\omega) \right\} = \\
& = \mathbb{E} \{ (m_t - \mathbf{1} m_t \mu_t) \mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\omega) \} = 0,
\end{aligned}$$

а также истинность равенства (5). Лемма 1 доказана.

*Доказательство леммы 2.*

Последовательность  $\{(\zeta_j, \bar{\theta}_j, \bar{\xi}_j, \bar{\eta}_j)\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$  является марковской. Построим элементы ее переходного ядра.

Процессы  $\theta_t(\eta_t^k - \bar{\eta}_j^k) \mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t)$  допускают разложение

$$\theta_t(\eta_t^k - \bar{\eta}_j^k) \mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t) = \mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t) \left[ \int_{\zeta_j}^t \left( A^\top \theta_s(\eta_s^k - \bar{\eta}_j^k) + \text{diag}(g^k) \theta_s \right) ds + M_t^5 \right],$$

где  $\mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t) M_t^5$  – некоторый мартингал. С другой стороны,

$$\theta_t(\eta_t^k - \bar{\eta}_j^k) \mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t) = \underbrace{\theta_t(\eta_t^k - \bar{\eta}_j^k) \mathbf{I}_{[\zeta_j, \zeta_{j+1})}(t)}_{=0} + \theta_t(\eta_t^k - \bar{\eta}_j^k) \mathbf{I}_{[\zeta_{j+1}, +\infty)}(t).$$

Из двух последних равенств следует, что

$$\begin{aligned}
& \theta_{t \wedge \zeta_{j+1}}(\eta_{t \wedge \zeta_{j+1}}^k - \bar{\eta}_j^k) \mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t \wedge \zeta_{j+1}) = \\
& = \theta_{t \wedge \zeta_{j+1}}(\eta_{t \wedge \zeta_{j+1}}^k - \bar{\eta}_j^k) \mathbf{I}_{[\zeta_{j+1}, +\infty)}(t \wedge \zeta_{j+1}) = \\
& = \bar{\theta}_{j+1}(\bar{\eta}_{j+1}^k - \bar{\eta}_j^k) \mathbf{I}_{[\zeta_{j+1}, +\infty)}(t) = \\
& = \mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t) \left[ \int_{\zeta_j}^t \left( A^\top \underbrace{u_s(\eta_s^k - \bar{\eta}_j^k)}_{=0} + \text{diag}(g^k) u_s \right) ds + M_{t \wedge \zeta_{j+1}}^5 \right].
\end{aligned}$$

Вычисляя УМО относительно  $\mathfrak{D}_j$  от левой и правой частей последнего равенства и используя теорему об опциональной остановке непрерывного справа

мартингала, получаем, что

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left\{ \bar{\theta}_{j+1} (\bar{\eta}_{j+1}^k - \bar{\eta}_j^k) \mathbf{I}_{[\zeta_{j+1}, +\infty)}(t) \mid \mathcal{D}_j \right\} = \\
& = \mathbb{E} \left\{ \bar{\theta}_{j+1} \mathbf{I}_{\{1\}} (\bar{\eta}_{j+1}^k - \bar{\eta}_j^k) \mathbf{I}_{[\zeta_{j+1}, +\infty)}(t) \mid \mathcal{D}_j \right\} = \\
& = \mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t) \int_{\zeta_j}^t \text{diag}(g^k) m_s ds = \mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t) \int_{\zeta_j}^t \text{diag}(g^k) \mu_s(\mathbf{1} m_s) ds.
\end{aligned}$$

Рассмотренный переход соответствует случаю скачка компоненты  $\eta^k$ , т.е.  $\zeta_{j+1} = \zeta_\ell^{\eta, k}$ . Теперь рассмотрим случай, когда переход порожден скачком наблюдений  $\xi$ , т.е. когда  $\bar{\xi}_{j+1} \neq \bar{\xi}_j$  и  $\zeta_{j+1} = \zeta_\ell^\xi$ . Пусть  $c \in \mathcal{C}$  (одно из возможных значений наблюдения  $\xi$ ) – некоторый столбец матрицы  $C$ . Заметим, что

$$\text{diag}(c) (I - \text{diag}(\Xi(\bar{\xi}_j))) \bar{\theta}_{j+1} = \begin{cases} 0, & \text{если } \bar{\xi}_{j+1} = \bar{\xi}_j, \\ \bar{\theta}_{j+1}, & \text{если } \bar{\xi}_{j+1} \neq \bar{\xi}_j. \end{cases}$$

Процесс  $\text{diag}(c) (I - \text{diag}(\Xi(\bar{\xi}_j))) \theta_t \mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t)$  допускает разложение

$$\begin{aligned}
& \text{diag}(c) (I - \text{diag}(\Xi(\bar{\xi}_j))) \theta_t \mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t) = \\
& = \text{diag}(c) (I - \text{diag}(\Xi(\bar{\xi}_j))) \left[ \int_{\zeta_j}^t A^\top \theta_s ds + M_t^6 \right] \mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t),
\end{aligned}$$

где  $\mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t) M_t^6$  – некоторый мартингал. С другой стороны,

$$\begin{aligned}
& \text{diag}(c) (I - \text{diag}(\Xi(\bar{\xi}_j))) \theta_t \mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t) = \\
& = \underbrace{\text{diag}(c) (I - \text{diag}(\Xi(\bar{\xi}_j))) \theta_t \mathbf{I}_{[\zeta_j, \zeta_{j+1})}(t)}_{=0} + \\
& + \text{diag}(c) (I - \text{diag}(\Xi(\bar{\xi}_j))) \theta_t \mathbf{I}_{[\zeta_{j+1}, +\infty)}(t).
\end{aligned}$$

Из двух последних равенств следует, что

$$\begin{aligned}
& \text{diag}(c) (I - \text{diag}(\Xi(\bar{\xi}_j))) \theta_{t \wedge \zeta_{j+1}} \mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t \wedge \zeta_{j+1}) = \\
& = \text{diag}(c) (I - \text{diag}(\Xi(\bar{\xi}_j))) \theta_{t \wedge \zeta_{j+1}} \mathbf{I}_{[\zeta_{j+1}, +\infty)}(t \wedge \zeta_{j+1}) = \\
& = \text{diag}(c) (I - \text{diag}(\Xi(\bar{\xi}_j))) \bar{\theta}_{j+1} \mathbf{I}_{[\zeta_{j+1}, +\infty)}(t) = \\
& = \text{diag}(c) (I - \text{diag}(\Xi(\bar{\xi}_j))) \left[ \int_{\zeta_j}^t A^\top u_s ds + M_{t \wedge \zeta_{j+1}}^6 \right] \mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t).
\end{aligned}$$

Вновь вычисляя УМО относительно  $\mathfrak{D}_j$  от левой и правой частей равенства и используя теорему об опциональной остановке мартингала, получаем, что

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left\{ \text{diag}(c) (I - \text{diag}(\Xi(\bar{\xi}_j))) \bar{\theta}_{j+1} \mathbf{I}_{[\zeta_{j+1}, +\infty)}(t) | \mathfrak{D}_j \right\} = \\
& = \mathbb{E} \left\{ \bar{\theta}_{j+1} \mathbf{I}_{\{c\}}(\bar{\xi}_{j+1}) \left( 1 - \mathbf{I}_{\{\bar{\xi}_j\}}(\bar{\xi}_{j+1}) \right) \mathbf{I}_{[\zeta_{j+1}, +\infty)}(t) | \mathfrak{D}_j \right\} = \\
& = \mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t) \int_{\zeta_j}^t \text{diag}(c) (I - \text{diag}(\Xi(\bar{\xi}_j))) A^\top m_s ds = \\
& = \mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t) \int_{\zeta_j}^t \text{diag}(c) (I - \text{diag}(\Xi(\bar{\xi}_j))) A^\top \mu_s(\mathbf{1}m_s) ds.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
(\text{II.7}) \quad & \mathbb{P} \left\{ \bar{\theta}_{j+1} = e_i, \bar{\xi}_{j+1} = c, \bar{\xi}_{j+1} \neq \bar{\xi}_j, \zeta_{j+1} \in [t, t + dt) | \mathfrak{D}_j \right\} = \\
& = e_i^\top \text{diag}(c) (I - \text{diag}(\Xi(\bar{\xi}_j))) A^\top \mu_t(\mathbf{1}m_t) dt
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
(\text{II.8}) \quad & \mathbb{P} \left\{ \bar{\theta}_{j+1} = e_i, \bar{\xi}_{j+1} = \bar{\xi}_j, \bar{\eta}_{j+1}^k - \bar{\eta}_j^k = 1, \zeta_{j+1} \in [t, t + dt) | \mathfrak{D}_j \right\} = \\
& = e_i^\top \text{diag}(g^k) \mu_t(\mathbf{1}m_t) dt.
\end{aligned}$$

Далее, воспользуемся приемом, стандартным для вывода уравнений оптимальной фильтрации состояний марковских систем наблюдения с дискретным временем [24, 25]. Пусть  $(\alpha, \beta, \gamma)$  – блочный случайный вектор,  $P(\mathcal{A}, \mathcal{B} | \gamma)$  – условное распределение пары  $(\alpha, \beta)$  относительно  $\gamma$ , т.е.

$$\mathbb{P} \{ \alpha \in \mathcal{A}, \beta \in \mathcal{B} | \gamma \} = P(\mathcal{A}, \mathcal{B} | \gamma) \quad \mathbb{P} - \text{п.н.}$$

Пусть также существует такая мера  $\chi(a, b | \gamma)$ , что  $P \ll \chi$  и  $\rho(a, b | \gamma) = \frac{dP}{d\chi}(a, b | \gamma)$  – соответствующая производная Радона-Никодима. Тогда УМО  $\mathbb{E} \{ \alpha | \beta, \gamma \}$  может быть вычислено с помощью следующего варианта формулы Байеса:

$$(\text{II.9}) \quad \mathbb{E} \{ \alpha | \beta, \gamma \} = \left( \int \rho(a', \beta | \gamma) d\chi(a', \beta | \gamma) \right)^{-1} \int a \rho(a, \beta | \gamma) d\chi(a, \beta | \gamma).$$

Формула (9) представляет собой частный случай (II.9), полученный подстановкой в нее (II.7) и (II.8). Лемма 2 доказана.

*Доказательство теоремы 1.*

Непосредственной подстановкой можно проверить, что оценка  $\hat{\theta}_t$ , “склеенная” из решений систем (8) со скачками, описываемыми (9) и начальным условием (11), является решением (12). Поэтому для доказательства теоремы достаточно проверить истинность равенства (10).

Наблюдаемый процесс  $(\xi_t, \eta_t)$  представляет собой мультивариантный точечный процесс (МТП) с пространством состояний  $\mathbf{B} \triangleq \mathcal{C} \times \mathbb{Z}_+^K$ , который может быть представлен в эквивалентной форме стохастической меры  $\phi$  [18], определенной на измеримом пространстве  $([0, T] \times \mathbf{B}, \mathcal{B}([0, T]) \times 2^{\mathbf{B}})$ :

$$\phi(\omega, dt, dy_1, dy_2) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \delta_{(\zeta_j(\omega), \bar{\xi}_j(\omega), \bar{\eta}_j(\omega))} (dt, dy_1, dy_2).$$

В [18] доказано, что естественный поток  $\sigma$ -алгебр, порожденный наблюдениями, совпадает с потоком, порожденным стохастической мерой, т.е.

$$\sigma \{ \phi([a, b] \times \{c\} \times \{\mathbf{z}\}) : [a, b] \in \mathcal{B}([0, T]), c \in \mathcal{C}, \mathbf{z} \in \mathbb{Z}_+^K \} \equiv \mathcal{O}_t, \quad t \in [0, T].$$

Базу  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{B}([0, T]) \times 2^{\mathbf{B}}$  составляют множества вида  $[a, b] \times \{c\} \times \{\mathbf{z}\}$ , поэтому в силу теоремы о монотонных классах [23] для доказательства истинности равенства (10) достаточно проверить выполнение равенства

$$\mathbb{E} \left\{ \left( \sum_{j \geq 0} \mathbf{I}_{[\zeta_j, \zeta_{j+1})}(t) \mu_t - \theta_t \right) \phi([a, b] \times \{c\} \times \{\mathbf{z}\}) \right\} \equiv 0$$

для всех множеств  $[a, b] \times \{c\} \times \{\mathbf{z}\}$  базы.

Из свойств УМО и (4)–(6) следует цепочка равенств

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\{ \left( \sum_{j \geq 0} \mathbf{I}_{[\zeta_j, \zeta_{j+1})}(t) \mu_t - \theta_t \right) \phi([a, b] \times \{c\} \times \{\mathbf{z}\}) \right\} = \\ & = \mathbb{E} \left\{ \sum_{j \geq 0} \mathbf{I}_{[\zeta_j, \zeta_{j+1})}(t) (\mu_t - \theta_t) \mathbf{I}_{[a, b)}(t) \sum_{\ell \geq 0} \mathbf{I}_{[\zeta_\ell, \zeta_{\ell+1})}(t) \mathbf{I}_{\{c\}}(\bar{\xi}_\ell) \mathbf{I}_{\{\mathbf{z}\}}(\bar{\eta}_\ell) \right\} = \\ & = \mathbf{I}_{[a, b)}(t) \sum_{j \geq 0} \mathbb{E} \left\{ \mathbf{I}_{[\zeta_j, \zeta_{j+1})}(t) (\mu_t - \theta_t) \mathbf{I}_{\{c\}}(\bar{\xi}_j) \mathbf{I}_{\{\mathbf{z}\}}(\bar{\eta}_j) \right\} = \\ & = \mathbf{I}_{[a, b)}(t) \sum_{j \geq 0} \mathbb{E} \left\{ \mathbb{E} \left\{ \mathbf{I}_{[\zeta_j, \zeta_{j+1})}(t) (\mu_t - \theta_t) \mathbf{I}_{\{c\}}(\bar{\xi}_j) \mathbf{I}_{\{\mathbf{z}\}}(\bar{\eta}_j) \mid \mathfrak{D}_j \right\} \right\} = \\ & = \mathbf{I}_{[a, b)}(t) \sum_{j \geq 0} \mathbb{E} \left\{ \left( \underbrace{\mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t) \mathbb{E} \left\{ \mathbf{I}_{[\zeta_j, \zeta_{j+1})}(t) \mid \mathfrak{D}_j \right\}}_{= \mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t) m_t} \mu_t - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \underbrace{\mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t) \mathbb{E} \left\{ \theta_t \mathbf{I}_{[\zeta_j, \zeta_{j+1})}(t) \mid \mathfrak{D}_j \right\}}_{= \mathbf{I}_{[\zeta_j, +\infty)}(t) m_t} \right) \mathbf{I}_{\{c\}}(\bar{\xi}_j) \mathbf{I}_{\{\mathbf{z}\}}(\bar{\eta}_j) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Guerrero C.* Available Bandwidth Estimation: A Hidden Markov Model Approach. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2010.
2. *Chaudhari S., Biradar R.* Survey of Bandwidth Estimation Techniques in Communication Networks // *Wireless Pers. Commun.* 2015. Vol. 83. P. 1425–1476.
3. *Airon M., Gupta N.* Bandwidth Estimation Tools and Techniques: A Review // *International Journal of Research.* 2017. V. 4. P. 1250–1265.
4. *Salcedo D., Cesar D., Guerrero C., Martinez R.* Available Bandwidth Estimation Tools: Metrics, Approach and Performance // *Int. J. Commun. Networks Inform. Security.* 2018. V. 10. No. 3. P. 580–587.
5. *Kalman R.* A new approach to linear filtering and prediction problems // *J. Basic Engineer.* 1960. V. 82. No. 1. P. 35–45.
6. *Bergfeldt E., Ekelin S., Karlsson J.* Real-time available-bandwidth estimation using filtering and change detection // *Computer Networks.* 2009. V. 53. No. 15. P. 2617–2645.
7. *Bozakov Z., Bredel M.* Online Estimation of Available Bandwidth and Fair Share Using Kalman Filtering // *Proc. of 8th International IFIP-TC 6 Networking Conference, 2009.* LNCS. V. 5550. P. 548–561. Springer, Berlin, Heidelberg.
8. *Лунцер П., Ширяев А.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
9. *Wong E., Hajek B.* Stochastic Processes in Engineering Systems. New York: Springer, 1984.
10. *Elliott R., Aggoun L., Moore J.* Hidden Markov Models: Estimation and Control. N.Y.: Springer, 2008.
11. *Kallianpur G., Striebel C.* Stochastic differential equations occurring in the estimation of continuous parameter stochastic processes // *ТВИ.* 1969. Т. 14. Вып. 4. С. 597–622.
12. *Лунцер П., Ширяев А.* Теория мартингалов. М.: Физматлит, 1986.
13. *Brémaud P.* Point Process Calculus in Time and Space. N.Y.: Springer, 2021.
14. *Limnios N., Oprisan G.* Semi-Markov Processes and Reliability. N.Y.: Springer-Science+Business Media, LLC, 2001.
15. *Grabski F.* Semi-Markov Processes: Applications in System Reliability and Maintenance. Amsterdam: Elsevier, 2015.
16. *Cocozza-Thivent C.* Markov Renewal and Piecewise Deterministic Processes. Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2021.
17. *Калашиников В., Рачев С.* Математические методы построения стохастических моделей обслуживания. М.: Наука, 1988.
18. *Jacod J.* Multivariate point processes: predictable projection, Radon-Nikodym derivatives, representation of martingales // *Z. Wahrsch. Verw. Geb.* 1975. V. 31. P. 235–253.
19. *Floyd S., Jacobson V.* Random early detection gateways for congestion avoidance // *IEEE/ACM Trans Netw.* 1993. V. 1. No. 4. P. 397–413.
20. *Дрейнер Н., Смит Г.* Прикладной регрессионный анализ. М.: Финансы и статистика, 1986.

21. *Борисов А., Куринов Ю., Смелянский Р.* Вероятностный анализ класса марковских скачкообразных процессов // Информ. и ее примен. 2024. Т. 18. Вып. 3. С. 30–37.
22. *Борисов А.* Фильтрация состояний и параметров специальных марковских скачкообразных процессов по косвенным наблюдениям без шума // Информ. и ее примен. 2025. Т. 19. Вып. 1 (в печати).
23. *Эллиотт Р.* Стохастический анализ и его приложения. М.: Мир, 1986.
24. *Sørensen H., Stubberud A.* Non-linear filtering by approximation of the a posteriori density // Int. J. Contr. 1968. V. 8. No. 1. P. 33–51.
25. *Бертсекас Д., Шрив С.* Стохастическое оптимальное управление: случай дискретного времени. М.: Наука, 1985.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Ляховым.*

Поступила в редакцию 23.02.2025

После доработки 13.04.2025

Принята к публикации 15.04.2025

## Управление в технических системах

© 2025 г. А.С. АРХИПОВА (alsearkhipova@sberbank.ru)

(Центр робототехники, ПАО Сбербанк, Москва),

В.С. ВЯЗЬМИН, канд. физ.-мат. наук (vadim.vyazmin@math.msu.ru)  
(Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова)

### ФИЛЬТР КАЛМАНА В ЗАДАЧЕ БЕСКАРДАННОЙ АЭРОГРАВИМЕТРИИ С УЧЕТОМ УТОЧНЕННОЙ МОДЕЛИ ПОГРЕШНОСТЕЙ СПУТНИКОВЫХ ДАННЫХ

Рассматривается задача определения аномалии силы тяжести на траектории летательного аппарата по измерениям бескарданного аэрогравиметра, включающим измерения инерциальных датчиков и приемников глобальной навигационной спутниковой системы (ГНСС). Задача сводится к оптимальному стохастическому оцениванию при заданных априорных моделях аномалии силы тяжести, погрешностей измерений датчиков и данных ГНСС (ускорений летательного аппарата, вычисленных по первичным фазовым измерениям приемников). Алгоритмом решения задачи является фильтр Калмана. Показано, что для повышения точности оценивания аномалии необходимо использовать уточненную модель погрешности ускорений ГНСС, задаваемую во времени в виде второй разности дискретного белого шума, вместо традиционно применяемой в аэрогравиметрии модели погрешности ускорений в виде белого шума.

*Ключевые слова:* аэрогравиметрия, бескарданный гравиметр, погрешности ГНСС, оптимальное оценивание, фильтр Калмана.

**DOI:** 10.31857/S0005231025060055, **EDN:** IKCSKT

#### 1. Введение

Рассматривается задача аэрогравиметрии, состоящая в определении гравитационной аномалии (аномалии силы тяжести) по измерениям бескарданного аэрогравиметра на траектории летательного аппарата (самолета, вертолета, беспилотного аппарата). Под аномалией понимают разность проекций на географическую вертикаль векторов реальной силы тяжести и нормальной силы тяжести, рассчитываемой для модели Земли в виде эллипсоида вращения [1].

Приборную основу бескарданного аэрогравиметра составляют бескарданная инерциальная навигационная система (БИНС), включающая блок высокоточных инерциальных датчиков (три акселерометра, три датчика угловой скорости – гироскопа), и приемники сигналов глобальной навигационной спутниковой системы (ГНСС) – бортовой и наземные базовые. Дополняют

аэрогравиметр комплекс алгоритмов постобработки измерений инерциальных датчиков и приемников ГНСС, которые включают решение следующих задач [2] (см. также, например, [3–5]):

- 1) задача спутниковой навигации (определение координат, скорости, ускорений летательного аппарата по первичным измерениям приемников ГНСС);
- 2) задача интегрированной инерциально-спутниковой навигации (определение оценок углов ориентации корпуса БИНС, инструментальных погрешностей инерциальных датчиков – смещений нулей акселерометров и дрейфов гироскопов и пр.);
- 3) гравиметрическая задача (определение аномалии силы тяжести).

Особенностью первого этапа постобработки является построение спутниковых навигационных решений по первичным – кодовым, доплеровским, фазовым – измерениям многочастотных приемников одной или нескольких систем (GPS, ГЛОНАСС, BeiDou, GALILEO и др.) [4, 5]. При решении данной задачи используется дифференциальный режим обработки для уменьшения уровня погрешностей, вызванных влиянием ионосферы, тропосферы. Иногда вместо дифференциального режима применяется технология обработки Precise point positioning (PPP), не требующая привлечения базовых станций [6]. Наибольшее внимание при решении задачи спутниковой навигации уделяется вычислению скорости и/или ускорений носителя, для чего используются фазовые измерения и, реже, доплеровские (см., например, [5, 7]). В некоторых алгоритмах ГНСС используются оба типа измерений, при этом доплеровские измерения служат в качестве вспомогательных, привлекаемых при сбоях в фазовых измерениях [4].

На втором этапе постобработки (задача интеграции БИНС-ГНСС) уточняется ориентация корпуса БИНС аэрогравиметра на основе первичных измерений инерциальных датчиков (акселерометров, гироскопов) и построенных спутниковых решений. Математическую основу задачи составляют уравнения ошибок БИНС, записываемые в проекциях на оси опорной (географической) системы координат (см., например, раздел 5.2 в [1]). При этом из уравнений исключают вертикальный канал, что приводит к исключению аномалии силы тяжести (как неизвестной величины) из состава фазового вектора. Влиянием аномалии на горизонтальные каналы, выражающимся в виде ее произведения на угловые ошибки определения вертикали, пренебрегают как величиной второго порядка малости. Далее ставится и решается задача оптимального стохастического оценивания (алгоритм решения – фильтр Калмана), в результате чего определяется оценка фазового вектора на траектории полета летательного аппарата. А именно, определяются оценки угловых ошибок ориентации БИНС, инструментальных погрешностей инерциальных датчиков и др. (подробнее см. в [2]).

В работе рассматривается последний (третий) этап постобработки – решение гравиметрической задачи (определение аномалии), для чего используется рассогласование измерений в вертикальном канале БИНС с данными

ГНСС. Задача формулируется как задача оптимального стохастического оценивания при заданной априорной стохастической модели аномалии и моделях погрешностей измерений инерциальных датчиков и погрешностей данных ГНСС (ускорений летательного аппарата). Решение задачи сводится к фильтру Калмана. Для погрешностей ускорений ГНСС при этом традиционно вводится модель во времени в виде белого шума [8, 9]. Однако в действительности погрешности имеют более сложную структуру и, в частности, коррелированы во времени.

В настоящей работе при постановке задачи оценивания аномалии вводится (насколько известно, впервые) уточненная модель погрешности ускорений ГНСС, учитывающая специфику метода вычисления ускорений по первичным фазовым измерениям (доплеровские измерения в работе не рассматриваются). А именно, предполагается, что ускорения вычислены на основе двойных разностей фазовых измерений ГНСС (по трем последовательным эпохам) [10]. Уточненная модель погрешности ускорений задается в работе формирующим уравнением во времени в виде второй центральной разности дискретного белого шума. Задача аэрогравиметрии сведена к стандартной линейной задаче оптимального стохастического оценивания и фильтру Калмана. Приведены результаты проверки предложенного подхода на данных реальной аэрогравиметрической съемки, демонстрирующие более высокую точность определения аномалии по сравнению с традиционным подходом на основе упрощенной модели погрешности ускорений ГНСС.

## 2. Математическая модель

### 2.1. Опорные уравнения

Введем необходимые обозначения:

- $M$  – приведенная чувствительная масса блока акселерометров БИНС аэрогравиметра;
- $Mx$  – географическая система координат с центром в точке  $M$  и направлениями осей на восток, север и вверх по нормали к общеземному эллипсоиду (соответствующие обозначения –  $E, N, Up$ ) [1];
- $Mz$  – приборная система координат, жестко связанная с БИНС; оси  $z_1, z_2, z_3$  взаимно перпендикулярны и в данной работе предполагаются сонаправленными с осями чувствительности акселерометров БИНС.

Математическую основу задачи бескарданной аэрогравиметрии составляет уравнение движения точки  $M$ , записываемое в проекциях на оси географического трехгранника  $Mx$  (формы записи для других вариантов опорного трехгранника обсуждаются, например, в [1]):

$$(1) \quad \mathbf{a}_x = -(\boldsymbol{\Omega}_x + 2\mathbf{u}_x) \times \mathbf{v}_x + \mathbf{g}_x^0 + \Delta\mathbf{g}_x + L_{zx}^T \mathbf{f}_z,$$

где  $\mathbf{v}_x, \mathbf{a}_x$  – векторы скорости и ускорения (относительно Земли) точки  $M$  в проекциях на оси  $Mx$ ;  $\boldsymbol{\Omega}_x, \mathbf{u}_x$  – векторы угловой скорости  $Mx$  относительно

Земли и угловой скорости Земли относительно инерциального пространства соответственно;  $\mathbf{g}_x^0 = (0, 0, -g_0)^T$  – вектор нормальной силы тяжести в точке  $M$  [11],  $\Delta\mathbf{g}_x$  – вектор возмущения силы тяжести [1],  $\mathbf{f}_z$  – вектор удельной силы реакции, действующей на точку  $M$  со стороны корпуса БИНС, в проекциях на оси  $Mz$ ;  $L_{zx}$  – ортогональная матрица ориентации приборного трехгранника  $Mz$  относительно  $Mx$ .

Перейдем от векторного уравнения (1) к скалярному – его проекции на географическую вертикаль (основное уравнение скалярной аэрогравиметрии):

$$(2) \quad a_{up} = g_{etv} - g_0 - \Delta g + L_3^T \mathbf{f}_z,$$

где  $a_{up}$  – относительное вертикальное ускорение точки  $M$ ,  $g_{etv}$  – поправка Этвеша (вертикальная проекция удельных сил инерции),  $g_0$  – абсолютное значение нормальной силы тяжести в точке  $M$ ,  $\Delta g$  – отрицательная вертикальная проекция вектора  $\Delta\mathbf{g}_x$  (аномалия силы тяжести),  $L_3$  – третий столбец матрицы ориентации  $L_{zx}$ .

Гравиметрическая задача, как было отмечено выше, решается на последнем этапе постобработки данных аэрогравиметра и состоит в определении аномалии  $\Delta g$  на траектории полета из (2) по измерениям акселерометров БИНС, спутниковым решениям (координатам, скоростям, ускорениям летательного аппарата) и инерциально-спутниковым решениям (оценкам углов ориентации корпуса БИНС аэрогравиметра).

## 2.2. Модели измерений

Среди переменных, входящих в (2), напрямую измеряются только проекции удельной силы реакции  $\mathbf{f}_z$  (при помощи акселерометров БИНС). Введем модель их измерений в виде

$$(3) \quad \mathbf{f}'_z = \mathbf{f}_z + \mathbf{q}_f,$$

где  $\mathbf{f}'_z$  – вектор, составленный из измерений трех акселерометров,  $\mathbf{q}_f$  – вектор погрешностей измерений.

Вертикальное ускорение летательного аппарата определяется по первичным (в данной работе – фазовым) измерениям ГНСС и может быть представлено в виде

$$(4) \quad a_{up}^{gps} = a_{up} + e_a,$$

где  $a_{up}^{gps}$  – вертикальное ускорение, вычисленное по ГНСС,  $e_a$  – погрешность.

Поправка Этвеша  $g_{etv}$  определяется на основе известного соотношения по координатам и восточной и северной проекциям относительной скорости точки  $M$  [1]. Абсолютное значение нормальной силы тяжести  $g_0$  определяется на основе той или иной теоретической модели (формула Гельмерта, формула Сомильяны или др.) и координатам точки  $M$  [11]. При вычислении поправки Этвеша и абсолютного значения нормальной силы тяжести в аэрогравиметрии используются данные ГНСС (погрешностями данных пренебрегают) [4].

Также предполагается известной оценка  $\tilde{L}_3$  вектор-столбца  $L_3$ , вычисляемая по оценкам углов ориентации (курс, крен, тангаж) корпуса БИНС [12].

Обозначим через  $a'_{up}$  модельное вертикальное ускорение, определяемое по указанным данным в виде

$$(5) \quad a'_{up} = g_{etv} - g_0 + \tilde{L}_3^T \mathbf{f}'_z.$$

### 2.3. Основное уравнение аэрогравиметрии в измерениях

Введем отклонение модельного вертикального ускорения от истинного:  $\Delta a_{up} = a_{up} - a'_{up}$ , для которого верно представление, получаемое из (2) и (5):

$$(6) \quad \Delta a_{up} = -\Delta g + L_3^T \mathbf{f}_z - \tilde{L}_3^T \mathbf{f}'_z.$$

Введем обозначение  $\tilde{L}_{zx}$  для оценки матрицы ориентации БИНС, определяемой из решения задачи инерциально-спутниковой навигации (второй этап постобработки). Напомним, что на указанном этапе оцениваются угловые ошибки ориентации, которые далее используются для поправки (уточнения) расчетных значений углов курса, крена, тангажа БИНС, полученных по инерциальным данным. Таким образом, введенная матрица  $\tilde{L}_{zx}$  предполагается вычисленной по уточненным оценкам углов ориентации БИНС и является ортогональной.

Будем считать, что истинная матрица ориентации  $L_{zx}$  и матрица  $\tilde{L}_{zx}$  связаны соотношением

$$L_{zx} = (I + \hat{\kappa}) \tilde{L}_{zx},$$

где  $\hat{\kappa}$  – кососимметрическая матрица, составленная из компонент вектора малого поворота  $\kappa = (k_E, k_N, k_{Up})^T$ . Вектор  $\kappa$  характеризует погрешности оценок угловых ошибок ориентации, полученных на этапе интеграции БИНС-ГНСС. Здесь  $k_E, k_N$  – погрешности оценок угловых ошибок определения вертикали в восточном и северном направлениях соответственно,  $k_{Up}$  – погрешность оценки азимутальной ошибки.

Тогда выражение в правой части (6) можно переписать, используя (3), в виде

$$(7) \quad L_3^T \mathbf{f}_z - \tilde{L}_3^T \mathbf{f}'_z = (L_3^T - \tilde{L}_3^T) \mathbf{f}'_z - \tilde{L}_3^T \mathbf{q}_f = -k_E f'_N + k_N f'_E - \tilde{L}_3^T \mathbf{q}_f,$$

где  $f'_E = \tilde{L}_1^T \mathbf{f}'_z$ ,  $f'_N = \tilde{L}_2^T \mathbf{f}'_z$  – проекции измеренной удельной силы реакции в восточном и северном направлениях соответственно,  $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2$  – первые два столбца матрицы ориентации  $\tilde{L}_{zx}$ .

С другой стороны, используя ускорение, вычисленное по данным ГНСС (4), можно сформировать измерение отклонения вертикального ускорения  $\Delta a_{up}$  в виде

$$(8) \quad y := a_{up}^{gps} - a'_{up} = \Delta a_{up} + e_a,$$

где  $e_a$  – погрешность ускорения, вычисленного по данным ГНСС.

Подставляя в (8) выражения (7) и (6), получим итоговую модель задачи аэрогравиметрии, включающую измерения и их погрешности:

$$(9) \quad y = -\Delta g - k_E f'_N + k_N f'_E - \tilde{L}_3^T \mathbf{q}_f + e_a.$$

Отметим, что в (9) могут быть включены также другие погрешности, а именно погрешность из-за смещения антенны бортового приемника ГНСС от БИНС и погрешности синхронизации данных БИНС и ГНСС [2]. В данной работе указанные погрешности для простоты изложения не учитываются.

Уравнение (9) будем рассматривать на интервале времени полета  $[t_0, t_n]$ . Будем предполагать, что все измерения  $y, f'_E, f'_N, \tilde{L}_3$  приведены к одной частоте (к частоте данных ГНСС). Пусть  $t_i$  – моменты времени, в которые заданы измерения ( $i = 0, \dots, n$ ),  $\Delta t$  – шаг между двумя соседними моментами (шаг времени данных ГНСС). Остальные переменные в (9) –  $\Delta g, k_E, k_N, \mathbf{q}_f, e_a$  – предполагаются неизвестными функциями времени, для которых ниже вводятся априорные модели.

### 3. Формулировка задачи оптимального оценивания

Сведем (9) к задаче оптимального стохастического оценивания. Введем априорные стохастические модели аномалии  $\Delta g$ , систематических погрешностей  $k_E, k_N$  и погрешностей ускорений ГНСС  $e_a$ . Погрешности измерений акселерометров  $\mathbf{q}_f$  будем считать векторным случайным процессом (в дискретном времени), компонентами которого являются белые шумы с нулевым средним и заданной дисперсией  $\sigma_f^2$  (все три акселерометра БИНС аэрогравиметра предполагаются равнозначными).

#### 3.1. Стохастические модели аномалии и систематических погрешностей

В аэрогравиметрии основной гипотезой об аномалии (как функции от времени полета) является ее низкочастотный характер [13]. В соответствии с этим выбирается и априорная стохастическая модель в предположении, что аномалия является стационарным случайным процессом во времени. Наиболее часто используемыми в алгоритмах аэрогравиметрии моделями аномалии являются марковские модели (чаще всего второго или третьего порядков) [14, 15], модели в виде интегралов от белого шума [3, 4, 13], модель Джордана [16]. Кроме того, иногда используются детерминированные пространственные модели [17, 18]. Сравнение перечисленных моделей аномалии весьма трудоемко и выходит за рамки данной статьи. Отдельные модели сравнивались, например, в [1] (раздел 5.2), а также в [14, 15, 17, 18]. В частности, в [15] отмечается, что применение в алгоритмах аэрогравиметрии марковских моделей разных порядков и моделей в виде интегралов от белого шума дает примерно одинаковые результаты.

В данной работе выбрана модель аномалии в виде второго интеграла от белого шума. Модель позволяет учесть априорную информацию о низкочастотном характере аномалии, хорошо соответствует реальным гравиметрическим данным во многих районах Земли [13], задается простым формирующим уравнением во времени:  $\Delta\ddot{g} = q_g$ . Спектральная плотность мощности (СПМ) модели имеет вид

$$(10) \quad S_g(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi\omega^4},$$

где  $\omega$  – частота,  $\sigma^2$  – интенсивность белого шума.

Запишем формирующие уравнения модели в дискретном времени, обозначая нижним индексом  $i$  значение в момент времени  $t_i$ :

$$(11) \quad \begin{cases} \Delta g_{i+1} = \Delta g_i + \Delta t p_i, \\ p_{i+1} = p_i + q_{g,i}, \end{cases}$$

где  $q_{g,i}$  – дискретный белый шум с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_g^2$ .

Введем стохастические модели систематических погрешностей  $k_E, k_N$ , представляющих собой остаточные угловые ошибки определения вертикали (более точно, погрешности оценок угловых ошибок определения вертикали). Напомним, что оценки угловых ошибок определяются на этапе интеграции БИНС-ГНСС. Оценки угловых ошибок вертикали содержат шулеровскую составляющую [12] и по абсолютной величине, как правило, не превосходят 0,5 угл. минут при измерениях с современными бескарданными аэрогравиметрами [2]. Остаточные угловые ошибки  $k_E, k_N$  по абсолютной величине обычно не превосходят 10 угл. секунд, не содержат шулеровскую составляющую и могут быть описаны как медленные функции времени полета [2, 4].

На основе сказанного введем модели  $k_E, k_N$  в виде интегралов от белого шума:  $\dot{k}_E = q_E, \dot{k}_N = q_N$ , или в дискретном времени:

$$(12) \quad \begin{cases} k_{E,i+1} = k_{E,i} + q_{E,i}, \\ k_{N,i+1} = k_{N,i} + q_{N,i}, \end{cases}$$

где  $q_{E,i}, q_{N,i}$  – дискретные белые шумы с нулевым средним и дисперсиями  $\sigma_E^2, \sigma_N^2$  соответственно.

### 3.2. Уточненная модель погрешностей ускорений ГНСС

Традиционно в алгоритмах аэрогравиметрии погрешность вертикального ускорения, вычисленного по данным ГНСС, предполагается белым шумом. В данной работе вводится уточненная стохастическая модель погрешности, учитывающая специфику метода вычисления ускорений. А именно, предполагается, что ускорения вычислены на основе численного дифференцирования фазовых измерений ГНСС (путем составления двойных разностей изме-

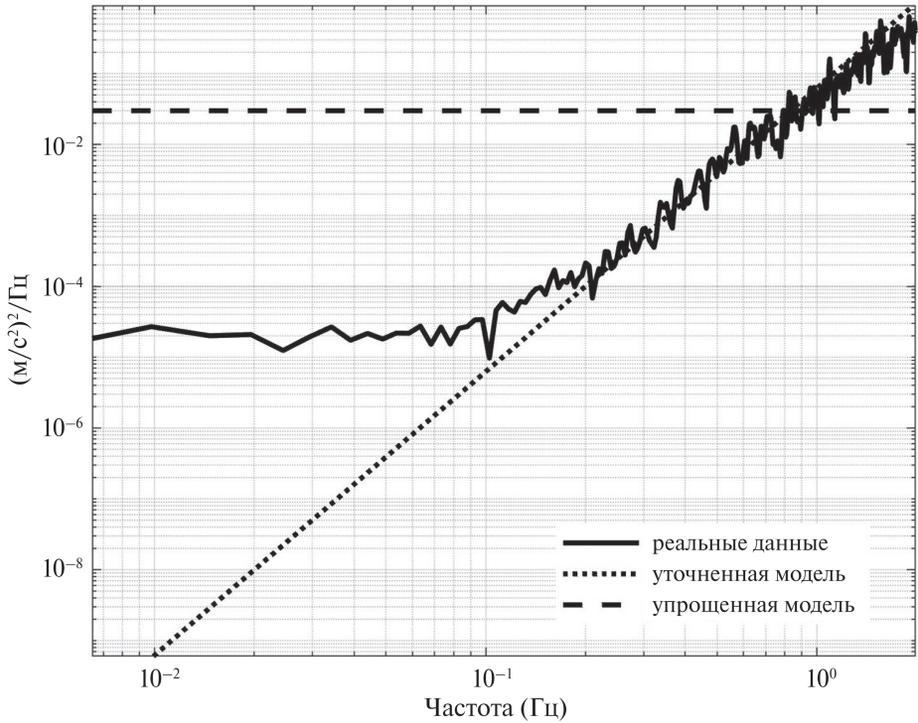


Рис. 1. Спектральная плотность мощности погрешностей ускорений, вычисленных по реальным данным ГНСС (сплошная линия), и ее теоретические модели – уточненная (линия из точек) и традиционная упрощенная (пунктирная линия),  $(\text{м}^2/\text{с}^4)/\text{Гц}$ .

рений по трем последовательным эпохам  $t_{i-1}, t_i, t_{i+1}$  [10]. С учетом сказанного введем уточненную модель погрешности ускорений ГНСС в виде

$$(13) \quad e_{a,i} = \frac{q_{a,i+1} - 2q_{a,i} + q_{a,i-1}}{\Delta t^2},$$

где  $q_{a,i}$  – дискретный белый шум с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_a^2$ .

Корреляционная функция процесса  $e_{a,i}$ , которую обозначим через  $K_e(m)$  ( $m$  – целое), принимает значения

$$K_e(0) = \frac{6\sigma_a^2}{\Delta t^4}, \quad K_e(\pm 1) = -\frac{4\sigma_a^2}{\Delta t^4}, \quad K_e(\pm 2) = \frac{\sigma_a^2}{\Delta t^4}$$

и ноль при других  $m$ .

СПМ процесса  $e_{a,i}$  определяется выражением (полагая для простоты  $\Delta t = 1$ ):

$$(14) \quad S_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} K_e(m) e^{-j\omega m} = \frac{2\sigma_a^2}{\pi} (1 - \cos \omega)^2,$$

где  $j$  – мнимая единица.

На рис. 1 представлены графики СПМ уточненной модели погрешности (13)–(14) и реальной погрешности ускорений, рассчитанной методом Уэлча по записи в статическом эксперименте (использовался приемник JAVAD с частотой регистрации 10 Гц и фазовые измерения GPS). Запись сделана на стоянке самолета в аэропорту базирования в ходе выполнения аэрогравиметрической съемки (подробнее в разделе 4). Обработка записи (вычисление ускорений) выполнена программным обеспечением МГУ им. М.В. Ломоносова [10]. Поскольку СПМ уточненной модели (14) пропорциональна  $\omega^4$  при малых значениях частоты, ее график в логарифмическом масштабе отображен на рис. 1 в виде прямой.

На рис. 1 также представлена СПМ упрощенной модели погрешности ускорений ГНСС, традиционно применяемой в алгоритмах аэрогравиметрии (белый шум). Из рис. 1 следует, что уточненная модель значительно лучше соответствует реальным данным как в области высоких частот, так и вблизи частоты среза гравиметрического фильтра [1] – в диапазоне 0,01–0,1 Гц (отличия значений – на два порядка, в то время как традиционная модель превышает СПМ реальных данных на пять–шесть порядков).

Для удобства работы с введенной моделью (13) в дальнейшем потребуется ее запись в пространстве состояний. Введем вспомогательные переменные  $\xi_i, \eta_i$ :

$$(15) \quad \begin{cases} \eta_{i+1} = \xi_i, \\ \xi_{i+1} = q_{\xi,i}, \end{cases}$$

где переобозначено  $q_{\xi,i} := q_{a,i+1}$ . Перепишем модель (13) в новых переменных:

$$(16) \quad e_{a,i} = \frac{\eta_i - 2\xi_i + q_{\xi,i}}{\Delta t^2}.$$

### 3.3. Постановка задачи оценивания и алгоритм решения

Объединим уравнение аэрогравиметрии (9) и введенные выше стохастические модели аномалии (11), остаточных угловых ошибок определения вертикали (12) и уточненной модели погрешности ускорений ГНСС (15)–(16) в одну систему в пространстве состояний:

$$(17) \quad \begin{cases} k_{E,i+1} = k_{E,i} + q_{E,i}, \\ k_{N,i+1} = k_{N,i} + q_{N,i}, \\ \Delta g_{i+1} = \Delta g_i + \Delta t p_i, \\ p_{i+1} = p_i + q_{g,i}, \\ \eta_{i+1} = \xi_i, \\ \xi_{i+1} = q_{\xi,i}, \\ y_i = -\Delta g_i - k_{E,i} f'_{N,i} + k_{N,i} f'_{E,i} + \frac{1}{\Delta t^2} (\eta_i - 2\xi_i + q_{\xi,i}) - \tilde{L}_{3,i}^T \mathbf{q}_{f,i}. \end{cases}$$

Данная система уравнений может быть записана в матричном виде:

$$(18) \quad \begin{cases} \mathbf{x}_{i+1} = A_i \mathbf{x}_i + B_i \mathbf{q}_i, \\ y_i = C_i \mathbf{x}_i + r_i, \end{cases}$$

где вектор неизвестных  $\mathbf{x}_i$  имеет вид

$$(19) \quad \mathbf{x}_i = (k_{E,i}, k_{N,i}, \Delta g_i, p_i, \eta_i, \xi_i)^T \in \mathbb{R}^6.$$

Через  $\mathbf{q}_i$  обозначен вектор шумов в уравнениях динамики

$$(20) \quad \mathbf{q}_i = (q_{E,i}, q_{N,i}, q_{g,i}, q_{\xi,i})^T \in \mathbb{R}^4,$$

через  $r_i$  – шум в измерениях:

$$(21) \quad r_i = \frac{1}{\Delta t^2} q_{\xi,i} - \tilde{L}_{3,i}^T \mathbf{q}_{f,i}.$$

Матрицы  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  в (18) состоят из коэффициентов при неизвестных и шумах в уравнениях динамики (17) и имеют размерности  $6 \times 6$ ,  $6 \times 4$  и  $1 \times 6$  соответственно.

Матрица ковариаций векторного процесса (20)  $E[\mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^T]$  имеет размерность  $4 \times 4$ , является диагональной и полностью определена дисперсиями компонент  $\mathbf{q}_i$  (белые шумы), введенными ранее. Дисперсия шума в измерениях  $r_i$  (белый шум) легко вычисляется по (21) и определяется выражением

$$E[r_i^2] = \frac{\sigma_\xi^2}{\Delta t^4} + \sigma_f^2,$$

где учтено, что  $\tilde{L}_{3,i}$  – столбец ортогональной матрицы.

Процессы  $r_i$  и  $\mathbf{q}_i$  коррелированы, матрица взаимной ковариации имеет вид

$$E[r_i \mathbf{q}_i^T] = \frac{1}{\Delta t^2} (0, 0, 0, \sigma_\xi^2).$$

При сделанных предположениях для системы (18) может быть поставлена задача нахождения оптимальной в среднеквадратическом смысле оценки вектора  $\mathbf{x}_i$  в каждый момент времени по всем доступным измерениям  $y_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ . В начальный момент времени оценку вектора  $\mathbf{x}_0$  считаем равной 0, а начальную матрицу ковариаций  $E[\mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0^T]$  заданной. Алгоритм решения – фильтр Калмана со сглаживанием [13].

### 3.4. Теоретический анализ точности оценивания аномалии

Определим точность оценивания аномалии в предложенном подходе. Найдем приближенное выражение передаточной функции линейного оптимального фильтра от измерений  $y$  (9) к оценке аномалии (так называемый гравиметрический фильтр). Для этого приведем уравнение (9) к стационарному виду, пренебрегая в нем систематическими погрешностями  $k_E$ ,  $k_N$  и шумами измерений акселерометров  $\mathbf{q}_f$ . Аномалия  $\Delta g$  и погрешность ускорений ГНСС  $e_a$

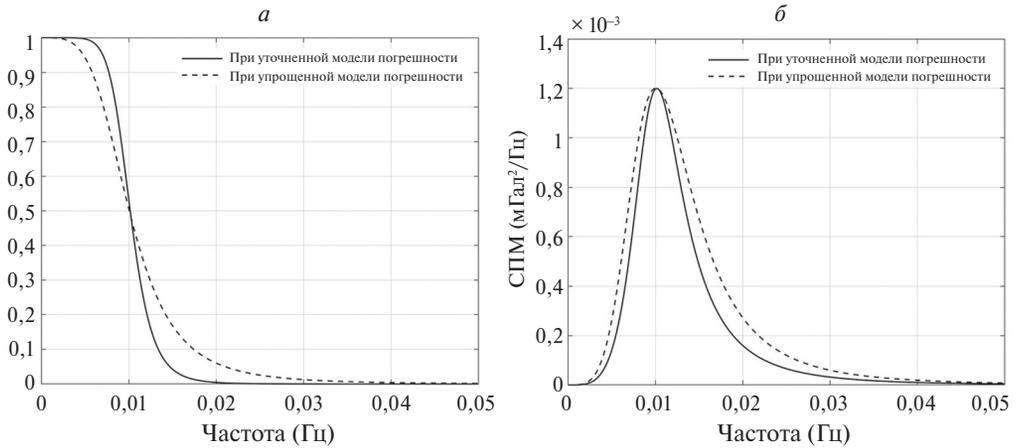


Рис. 2. *а* – Передаточные функции гравиметрических фильтров в новом подходе (с уточненной моделью погрешности ускорений ГНСС) и в стандартном подходе (с упрощенной моделью погрешности). *б* – Спектральные плотности мощности ошибок оценивания аномалии указанными фильтрами, мГал<sup>2</sup>/Гц (1 мГал = 10<sup>-5</sup> м/с<sup>2</sup>).

в данном разделе предполагаются стационарными процессами в непрерывном времени с заданными СПМ (10) и (14) соответственно. Тогда оптимальная в среднеквадратическом смысле линейная оценка аномалии определяется сглаживающим фильтром с передаточной функцией (фильтр Винера) [19]

$$(22) \quad W_1(\omega) = S_g(\omega) (S_g(\omega) + S_e(\omega))^{-1} = \left( 1 + \left( \frac{\sigma_a}{\sigma_g} \right)^2 \omega^8 \right)^{-1}.$$

При выводе (22) использовано приближение (14) в виде  $\frac{\sigma_a^2}{2\pi} \omega^4$  при малых  $\omega$ .

Таким образом, передаточная функция гравиметрического фильтра, основанного на уточненной модели погрешности ускорений ГНСС (14), приближенно соответствует сглаживателю Баттерворта 4-го порядка (рис. 2, *а*). Также на рис. 2, *а* изображена передаточная функция гравиметрического фильтра  $W_2(\omega)$ , построенного при использовании упрощенной модели погрешности ускорений ГНСС (белый шум с интенсивностью  $\sigma_q^2$ ) и тех же предположениях об аномалии:

$$(23) \quad W_2(\omega) = \left( 1 + \left( \frac{\sigma_q}{\sigma_g} \right)^2 \omega^4 \right)^{-1}.$$

Передаточная функция фильтра (23) соответствует сглаживателю Баттерворта 2-го порядка.

Определим точность оценивания аномалии построенными фильтрами как СПМ ошибки оценки при условии, что истинная СПМ аномалии совпадает с априорной моделью (10), а истинная СПМ погрешности ускорений ГНСС совпадает с моделью (14). Тогда СПМ ошибки оценки аномалии, полученной

при помощи гравиметрического фильтра  $W_1(\omega)$ , будет определяться выражением

$$(24) \quad S_{\delta g}(\omega) = S_g(\omega)S_e(\omega) (S_g(\omega) + S_e(\omega))^{-1} = \frac{\sigma_a^2\omega^4}{2\pi} \left( 1 + \left( \frac{\sigma_a}{\sigma_g} \right)^2 \omega^8 \right)^{-1}.$$

СПМ ошибки оценки аномалии, полученной при помощи гравиметрического фильтра  $W_2(\omega)$ , определяется следующим выражением:

$$(25) \quad \begin{aligned} S_{\delta g}(\omega) &= |1 - W_2(\omega)|^2 S_g(\omega) + |W_2(\omega)|^2 S_e(\omega) = \\ &= \frac{\sigma_a^2\omega^4}{2\pi} \left( 1 + \frac{\sigma_q^4}{\sigma_g^2\sigma_a^2} \right) \left( 1 + \left( \frac{\sigma_q}{\sigma_g} \right)^2 \omega^4 \right)^{-2}. \end{aligned}$$

Графики СПМ (24)–(25) изображены на рис. 2,б. Из рисунка видно, что при использовании фильтра на основе уточненной модели погрешности ускорений ГНСС СПМ ошибки оценки аномалии меньше, чем при использовании фильтра, основанного на упрощенной модели погрешности ускорений.

#### 4. Численные результаты

Для проверки разработанного алгоритма оценивания аномалии силы тяжести (раздел 3.3) были использованы данные бескарданного аэрогравиметра iCORUS производства iMAR, записанные 17.12.2022 г. в ходе полета аэрогравиметрической съемки по десяти повторным галсам. Направления галсов – запад-восток/восток-запад, длина каждого галса – около 110 км (рис. 3). Полет выполнен на самолете Cessna 208В на постоянной высоте 760 м над референц-эллипсоидом. Средняя скорость самолета на галсах – 70 м/с, длительность полета – 7 ч. Съемка проведена компанией ГНПП «Аэрогеофизика» (Москва) в Красноярском крае.

Первичные данные аэрогравиметра включали измерения инерциальных датчиков БИНС (на частоте 400 Гц) и измерения бортового и наземного

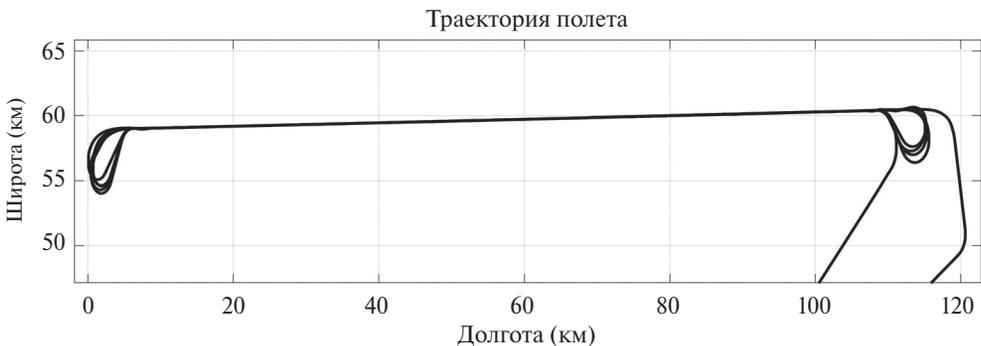


Рис. 3. Траектория самолета на плоскости долгота–широта (данные ГНСС).

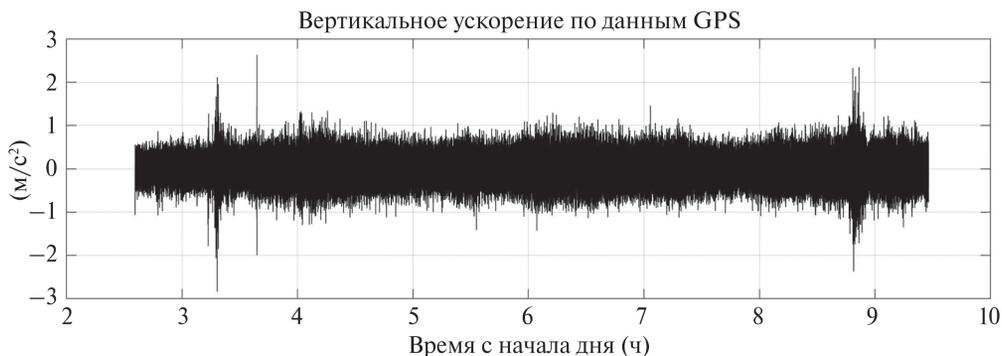


Рис. 4. Вертикальные ускорения от времени полета, вычисленные по фазовым измерениям ГНСС, м/с<sup>2</sup>.

приемников ГНСС (GPS) производства JAVAD (на частоте 10 Гц). Предварительные этапы постобработки первичных данных были выполнены при помощи алгоритмов методики, разработанной на Механико-математическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова [2] (программные пакеты *INS-GNSS* и *IMU-GRAV* [20, 21]). А именно, решены задачи спутниковой навигации (в фазо-дифференциальном режиме) и интегрированной инерциально-спутниковой навигации, в ходе решения которых вычислены:

- 1) широта, долгота, высота над референц-эллипсоидом бортового приемника;
- 2) восточная, северная и вертикальная проекции скорости бортового приемника;
- 3) восточная, северная и вертикальная проекции ускорения бортового приемника;
- 4) оценки углов ориентации (курс, крен, тангаж) БИНС аэрогравиметра;
- 5) оценки инструментальных погрешностей инерциальных датчиков.

График вертикальных ускорений ГНСС, вычисленных по фазовым измерениям приемников [10], представлен на рис. 4.

Оценка аномалии силы тяжести на траектории полета была посчитана при помощи предложенного в работе алгоритма на основе уточненной модели погрешности ускорений ГНСС. Точность оценивания аномалии определялась по сходимости на десяти повторных галсах и составила 0,706 мГал (СКО). Графики оценок аномалии на галсах представлены на рис. 5.

Оценка аномалии также была посчитана при помощи стандартного подхода, основанного на упрощенной модели погрешности ускорений ГНСС в виде белого шума. Для аномалии, остаточных угловых ошибок  $k_E$ ,  $k_N$  и шумов измерений акселерометров  $\mathbf{q}_f$  в (9) были приняты те же модели, как и при построении нового алгоритма. Алгоритм оценивания в стандартном подходе – фильтр Калмана со сглаживанием. Как было показано выше, передаточная функция гравиметрического фильтра в стандартном подходе приближенно соответствует сглаживателю Баттерворта 2-го порядка (рис. 2,а).

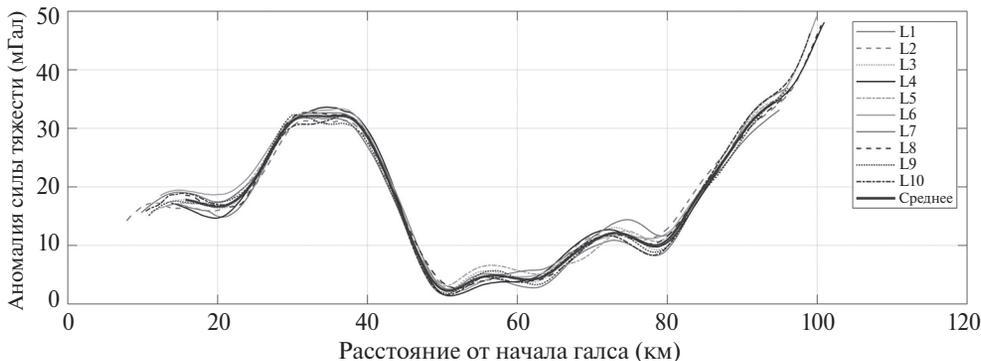


Рис. 5. Оценки аномалии силы тяжести на повторных галсах, полученные при помощи нового алгоритма на основе уточненной модели погрешности ускорений ГНСС, мГал.

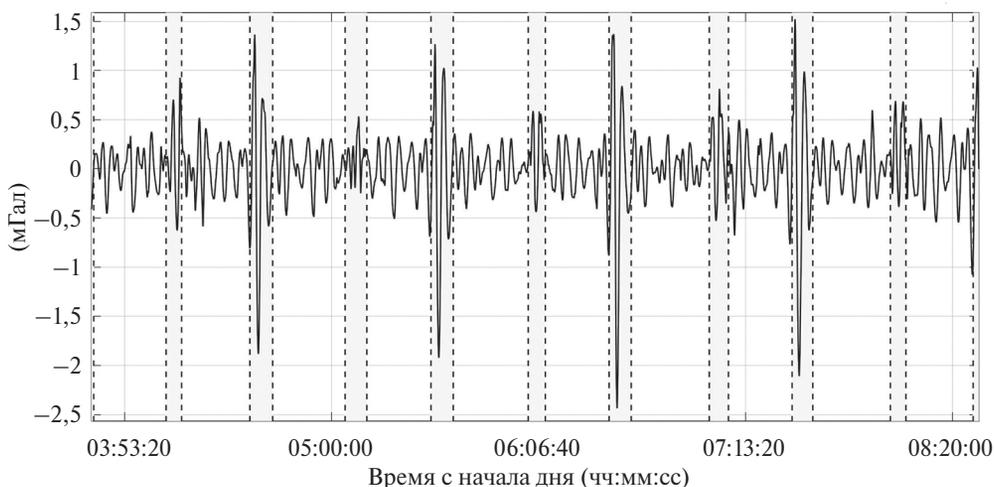


Рис. 6. Разность оценок аномалий на траектории полета, посчитанных при помощи алгоритмов в новом и стандартном подходах, мГал.

Сходимость оценок аномалии по десяти повторным галсам при обработке алгоритмом в стандартном подходе составила 0,749 мГал (СКО), что показывает худшую повторяемость оценок по сравнению с результатами обработки новым алгоритмом (на основе уточненной модели погрешности ускорений ГНСС).

На рис. 6 представлена разность оценок аномалий, посчитанных алгоритмами в новом и стандартном подходах. СКО разности – 0,764 мГал, что довольно существенно. Различия следует отнести к ошибкам оценивания алгоритмом в стандартном подходе, который показал худшую повторяемость оценок аномалии на повторных галсах.

По абсолютной величине разность оценок аномалий достигает 2,5 мГал, и ее максимумы приходятся на участки разворотов (длительностью от 5 до 8 мин) самолета при заходе с одного галса на другой (заметны в виде всплесков на рис. 6). Это может быть объяснено, возможно, тем, что на участках разворотов погрешности ускорений ГНСС имеют более широкий частотный диапазон и эффективнее подавляются новым гравиметрическим фильтром, имеющим более крутой наклон в районе частоты среза (рис. 2,а).

## 5. Заключение

Предложен алгоритм оценивания аномалии силы тяжести на основе уточненной модели погрешности ускорений летательного аппарата, вычисленных по первичным (фазовым) измерениям ГНСС. Уточненная модель учитывает специфику метода вычисления ускорений и задается формирующим уравнением во времени в виде второй центральной разности дискретного белого шума. Проведено сравнение предложенного алгоритма со стандартным, использующим упрощенную модель погрешности ускорений ГНСС (белый шум), путем обработки измерений аэрогравиметрической съемки. Показано, что новый алгоритм позволяет заметно повысить точность оценивания аномалии: по результатам обработки новым алгоритмом достигнута точность 0,71 мГал (СКО), стандартным алгоритмом – 0,75 мГал. Разность оценок аномалий двумя алгоритмами достигает 2,5 мГал и отнесена к ошибкам оценивания стандартным алгоритмом. Представляется, что разработанный алгоритм может быть востребован в программных комплексах постобработки измерений современных бескарданных аэрогравиметров.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Современные методы и средства* измерения параметров гравитационного поля Земли. Под ред. В.Г. Пешехонова, О.А. Степанова. СПб.: АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2017. 390 с.
2. Голован А.А., Вязьмин В.С. Методика проведения аэрогравиметрических съемок и обработки первичных данных бескарданного аэрогравиметра // Гироскопия и навигация. 2023. Т. 31. С. 58–75.
3. Ayres-Sampaio D., Deurloo R., Bos M., et al. A comparison between three IMUs for strapdown airborne gravimetry // Surv. Geophys. 2015. V. 36. P. 571–586.
4. Болотин Ю.В., Голован А.А. О методах инерциальной гравиметрии // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. 2013. Т. 5. С. 59–67.
5. Lu B., Barthelmes F., Petrovic S., et al. Airborne gravimetry of GEOHALO mission: data processing and gravity field modeling // J. Geoph. Res. 2017. V. 122. P. 586–604.
6. Li M., Xu T., Lu B., et al. Multi-GNSS precise orbit positioning for airborne gravimetry over Antarctica // GPS Solutions. 2019. V. 23. P. 1–14.
7. He K., Xu T., Forste C., et al. Integrated GNSS Doppler velocity determination for GEOHALO airborne gravimetry // GPS Solutions. 2021. V. 25. P. 1–12.

8. *Jekeli C., Garcia R.* GPS phase accelerations for moving-base vector gravimetry // *J. Geod.* 1997. V. 71. P. 630–639.
9. *Bruton A., Schwarz K., Ferguson S., et al.* Deriving acceleration from DGPS: toward higher resolution applications of airborne gravimetry // *GPS Solutions.* 2002. V. 5. P. 1–14.
10. *Вавилова Н.Б., Голован А.А.* Определение ускорения объекта при помощи первичных измерений спутниковой навигационной системы // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех.* 2003. Т. 5. С. 18–25.
11. *Торге В.* Гравиметрия. М.: Мир. 1999. 428 с.
12. *Вавилова Н.Б., Голован А.А., Парусников Н.А.* Математические основы инерциальных навигационных систем. М.: Изд-во МГУ, 2020. 164 с.
13. *Forsberg R.* A new covariance model for inertial gravimetry and gradiometry // *J. Geophys. Res.* 1987. V. 92. P. 1305–1310.
14. *Jekeli C.* Airborne vector gravimetry using precise, position-aided inertial measurement units // *Bulletin Geodesique.* 1994. V. 69. P. 1–11.
15. *Becker D.* Advanced calibration methods for strapdown airborne gravimetry // Ph.D. Thesis. Technische Universitat Darmstadt. Darmstadt, Germany. 2016.
16. *Степанов О.А., Кошаев Д.А., Моторин А.В.* Идентификация параметров модели аномалии в задаче авиационной гравиметрии методами нелинейной фильтрации // *Гироскопия и навигация.* 2015. Т. 90. С. 95–101.
17. *Vyazmin V.S.* New algorithm for gravity vector estimation from airborne data using spherical scaling functions // *International Association of Geodesy Symposia.* Heidelberg, Germany. Springer-Verlag. 2020. P. 1–7.
18. *Vyazmin V.S., Bolotin Y.V., Smirnov A.O.* Improving gravity estimation accuracy for the GT-2A airborne gravimeter using spline-based gravity models // *International Association of Geodesy Symposia.* Heidelberg, Germany. Springer-Verlag. 2020. P. 1–8.
19. *Kailath T., Sayed A. H., Hassibi B.* Linear estimation, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 2000.
20. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023668582 Российская Федерация. Программа расчёта интегрированного навигационного решения по данным бескарданной аэрогравиметрии. Заявка № 2023667701, регистрация 22.08.2023, опубл. 30.08.2023 / В.С. Вязьмин, А.А. Голован. 1 с.
21. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024680457 Российская Федерация. Программа для расчёта оценки гравитационной аномалии на основе инерциальных и спутниковых данных бескарданной (бесплатформенной) аэрогравиметрии. Заявка № 2024668583, регистрация 08.08.2024, опубл. 29.08.2024 / В.С. Вязьмин. 1 с.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галеевым.*

Поступила в редакцию 30.12.2024

После доработки 19.02.2025

Принята к публикации 28.03.2025

# Управление в социально-экономических системах

© 2025 г. М.И. ГЕРАСЬКИН, д-р экон. наук (innovation@ssau.ru)  
(Самарский национальный исследовательский университет  
имени академика С.П. Королева)

## ИНФОРМАЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ СТРАТЕГИЕЙ ИГРОКА В ИГРЕ ОЛИГОПОЛИИ $n$ ЛИЦ ПРИ РЕФЛЕКСИВНОМ ПОВЕДЕНИИ ИГРОКОВ

Рассматривается игра олигополии  $n$  лиц при объемной конкуренции для случая функций спроса и издержек общего вида. Игроки считаются рефлексивными, т.е. выдвигают предположения о стратегиях других игроков, в результате чего в игре образуются подмножества игроков с различными уровнями лидерства по Штакельбергу, т.е. рассматривается игра с многоуровневым лидерством. Рефлексия игроков формализована в виде предположительных вариаций, т.е. предположений игроков о влиянии их действий на действие контрагента. Исследуется проблема управления стратегией одного игрока (управляемого игрока) со стороны остальных  $n - 1$  игроков (Центра), в результате чего устанавливается равновесие Нэша, оптимальное по функциям полезности игроков Центра. Предложена модель взаимодействий игроков в виде иерархической игры, для которой найдена зависимость максимума функции полезности Центра от вектора сумм предположительных вариаций (СПВ) всех игроков, позволяющая вычислить значение СПВ управляемого игрока, оптимизирующее функцию полезности Центра. Разработан способ информационного управления действиями игрока, осуществляемого Центром путем управляющего воздействия, побуждающего игрока выбрать оптимальную для Центра функцию реакции.

*Ключевые слова:* олигополия, предположительная вариация, лидерство по Штакельбергу, иерархическая игра.

DOI: 10.31857/S0005231025060061, EDN: IKHLEQ

### 1. Введение

Игра олигополии – агрегативная игра [1], т.е. игра, в которой выигрыш каждого игрока зависит от суммы (агрегата) действий всех игроков. Решением этой игры является равновесие Курно–Нэша [2,3]. Г. Штакельберг впервые определил [4] на основе предположительной вариации стратегию лидера в игре в отличие от стратегии ведомого.

Предпосылкой появления в агрегативной игре понятия «предположительная вариация» послужило осознание того факта, что игроки при выборе сво-

их оптимальных действий неизбежно будут предполагать оптимальное поведение соперников, т.е. рефлексировать. Следовательно, предположительная вариация представляет собой математическую формализацию ментального процесса рефлексии [5], которая в данном случае трактуется как выполняемая некоторым игроком мыслительная операция вычисления оптимальной реакции (или наилучшего ответа) другого игрока на действие первого. Как правило, рассматривается объемная предположительная вариация, характеризующая предполагаемое игроком ответное изменение действия (объема предложения продукта) контрагента, оптимизирующее функцию полезности последнего при выбранном действии первого. В современных исследованиях предположительная вариация широко используется для анализа лидерства по Штакельбергу в рамках двух направлений: во-первых, увеличение числа рефлексизирующих игроков приводит к появлению в игре множества лидеров по Штакельбергу [6]; во-вторых, углубление рефлексии влечет возникновение лидеров более высоких уровней, т.е. формируется многоуровневое лидерство [7]. Второй аспект выражается в иерархии предположений игроков, приводящих к следующей иерархии их ментальных типов: 1) ведомый, не выдвигающий предположений о стратегиях окружения, вследствие чего его предположительная вариация равна нулю; 2) лидер по Штакельбергу (первого уровня), предполагающий, что его окружают ведомые; 3) лидер по Штакельбергу второго уровня (или более высоких уровней), предполагающий, что его окружают лидеры первого уровня (или иных низших уровней). Иерархия ментальных типов определяет ранг рефлексии игрока  $r$  как номер в описанной последовательности ментальных типов. Отметим, что описанная иерархия выстраивается только в представлениях игроков (в этом случае говорят об игре с фантомными игроками), а фактически имеет место неиерархическая игра с равноправными игроками, которая изучается в большинстве исследований проблемы олигополии. Как исключение, иерархическая агрегативная игра с управлением со стороны Центра исследовалась в [8] как задача стимулирования при условии, что игроки (университеты) институционально зависят от Центра (государства).

С учетом описанной стратификации лидеров в игре олигополии могут существовать игроки различных ментальных типов, зависящих от характера информированности каждого из них, причем игрок определенного ментального типа будет совершать предсказуемое действие в игре согласно его предположительной вариации. Поэтому появляется возможность целенаправленного изменения действия некоторого игрока посредством формирования для него определенного информационного поля, что приводит к известной концепции информационного управления. Идея информационного управления [9–11] базируется на формировании целенаправленной последовательности мнений в социальной группе в зависимости от мнений так называемых агентов влияния. Формально говоря, перед информационным управлением стоит задача целенаправленного индуцирования заданного органом управления образа мышления одного или нескольких игроков.

В контексте игры олигополии концепция информационного управления конструируется следующим образом. Пусть группа, состоящая из  $n - 1$  игроков, которую обозначим символом  $j$ , стремится добиться выгодного для себя действия не входящего в группу игрока  $i$ . Для этого группа совершает действия, из которых игрок  $i$  заключает, что группа имеет некоторый ранг рефлексии  $r$ . Поэтому для игрока  $i$  оптимальным является ранг рефлексии  $r + 1$ , которому соответствуют определенные значения его предположительных вариаций, что, в свою очередь, предопределяет желательное для группы действие этого игрока. Для конкретной реализации такого процесса управления необходимо найти сумму предположительных вариаций (СПВ) игрока  $i$ , которые оптимальны с позиций группы, а также определить зависимости равновесных действий всех игроков от параметров их ментального типа.

Далее в статье будут рассмотрены процедура вычисления оптимальной по критерию окружения величины СПВ некоторого игрока, способ оценки соответствующего этой СПВ ментального типа игрока или его функции реакции, а также алгоритм вычисления действий группы, индуцирующий требуемую реакцию игрока.

## 2. Базовая модель игры олигополии

Теоретико-игровая модель описывает взаимодействия  $n$  игроков, представляющих собой фирмы на рынке олигополии. Традиционно считается [6], что эти фирмы предлагают на рынок идентичный продукт с единой для всех убывающей обратной функцией спроса и в случае объемной конкуренции фирмы-игроки выбирают действия в виде объемов предложения. Игроки рациональны, т.е. максимизируют индивидуальные, вогнутые по действиям, функции полезности  $\pi_i(Q, Q_i) = P(Q)Q_i - C_i(Q_i)$ , информированы о функциях полезности окружения и выбирают действия одновременно, однократно и независимо. Тогда базовая модель выбора действия игрока представляется в следующем виде:

$$(1) \quad \max_{Q_i \geq 0} \pi_i(Q, Q_i) = \max_{Q_i \geq 0} [P(Q)Q_i - C_i(Q_i)], \quad i \in N = \{1, \dots, n\},$$

$$(2) \quad Q = \sum_{i \in N} Q_i,$$

где  $Q_i, \pi_i$  – действие и функция полезности  $i$ -го игрока;  $Q$  – агрегат действий;  $N$  – множество игроков;  $n$  – количество игроков;  $P(Q)$  – обратная функция спроса,  $P'_Q < 0$ ;  $C_i(Q_i)$  – функция издержек  $i$ -го игрока,  $C'_i > 0$ .

Равновесие Нэша в игре  $\Gamma = \langle N, \{Q_i, i \in N\}, \{\pi_i, i \in N\} \rangle$  при некотором известном векторе предположительных вариаций определяется путем решения системы уравнений реакций следующего типа:

$$(3) \quad \frac{\partial \pi_i(Q_i^*, \rho_{ij})}{\partial Q_i} = 0, \quad i, j \in N,$$

где  $\rho_{ij} = Q'_{jQ_i}$  – объемная предположительная вариация  $i$ -го игрока, т.е. предполагаемое им изменение выпуска  $j$ -го игрока в ответ на единичный прирост выпуска  $i$ -го игрока;  $Q_i^*$  – равновесное значение.

Оптимальная (в зарубежной литературе consistent – совместимая) предположительная вариация вычисляется из уравнения (3)  $j$ -го игрока, т.е. соответствует его наилучшему ответу. При этом система (3) для функции полезности (1) имеет следующий вид:

$$(4) \quad P(Q) + (1 + S_i^r)Q_i P'_Q - C'_{iQ_i} = 0, \quad i \in N, \quad S_i^r = \sum_{j \in N \setminus i} \rho_{ij}^r,$$

где  $S_i^r$  – сумма предположительных вариаций  $i$ -го игрока на  $r$ -м ранге рефлексии.

Рекуррентная формула СПВ на произвольном ранге рефлексии для независимых от действий игроков предположительных вариаций, т.е. при  $\rho'_{ijQ_i} = 0$ , имеет вид [6]:

$$(5) \quad S_i^r = \left( \frac{1}{\sum_{j \in N \setminus i} \frac{1}{u_j - S_j^{r-1} + 1}} - 1 \right)^{-1},$$

где  $u_i = -1 + \frac{P'_{Q_i} + (1 + S_i^{r-1})Q_i P''_{QQ_i} - C''_{iQ_i Q_i}}{|P'_Q|}$  – коэффициент нелинейности, выражающий влияние нелинейности функций спроса и издержек на унимодальность функции полезности  $i$ -го игрока.

Поскольку из (4) следует, что вектор равновесия Нэша  $\mathbf{Q}^* = \{Q_i^*, i \in N\}$  в игре олигополии  $n$  лиц зависит от вектора СПВ всех игроков  $\mathbf{S}^r = \{S_i^r, i \in N\}$ , то существует и обратная зависимость. А именно, при известном векторе действий  $\mathbf{Q}^* = \{Q_i^*, i \in N\}$  можно установить вектор  $\mathbf{S}^r = \{S_i^r, i \in N\}$ , порождающий эти действия игроков. На этой основе рассмотрим инструменты управления (манипулирования) поведением игрока со стороны окружения.

### 3. Модель оптимального управления поведением игрока

Рассмотрим следующую модификацию базовой модели игры олигополии в виде иерархической игры. Игрок  $i$  является объектом управления, а окружение этого игрока (т.е. остальные игроки) выступает субъектом управления или Центром. Поэтому рассматривается иерархическая игра типа «Центр-агент» (рис. 1). Окружение, которое для упрощения обозначим индексом  $j$  (т.е.  $j = \{N \setminus i\}$ ), имеет общую цель – побудить игрока  $i$  выбрать действие  $Q_i$ , оптимальное по функциям полезности окружения. Поэтому сформулируем



Рис. 1. Схема иерархической игры.

целевую функцию центра как вектор функций полезности игроков окружения, который, поскольку эти функции предполагаются идентичными, можно представить как одну функцию следующим образом:

$$\pi^{(i)} = \pi_j, \quad j \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\},$$

и для упрощения записи обозначим целевую функцию центра как

$$\pi = \pi^{(i)}.$$

Опишем основные предположения, принятые при анализе иерархической игры.

1) Предполагается идентичность функций полезности всех игроков окружения, т.е. эти игроки имеют однотипные функции издержек с одинаковыми значениями коэффициентов:

$$C_j(Q_j) = C_k(Q_k), \quad \pi_j(Q_j) = \pi_k(Q_k) \forall j, \quad k = \{N \setminus i\}.$$

2) Информированность игроков описывается следующими множествами информированности  $I_i, I_j$ :

– множество информированности управляемого игрока включает в себя множество игроков, действия и функции полезности всех игроков:

$$I_i = \{N, Q_k, \pi_k, k \in N\};$$

– множество информированности окружения охватывает множество игроков, действия и функции полезности всех игроков, СПВ игроков окружения и целевую функцию Центра:

$$I_j = \{N, Q_k, \pi_k, S_j, \pi, j \in N \setminus i, k \in N\},$$

где  $\pi = \pi_j$ ,  $j \in N \setminus i$  – целевая функция окружения (Центра), идентичная функциям полезности игроков окружения.

3) Предположительные вариации всех игроков вычисляются ими на основе множеств  $I_i, I_j$ , причем могут быть оптимальными (т.е. совместимыми с функциями полезности игроков), или могут быть определены игроками исходя из действий других игроков. Если действия игроков не совместимы с их функциями полезности, то игроки ориентируются на действия. В каждый момент игры либо СПВ управляемого игрока, либо СПВ окружения имеет постоянное значение:

$$S_i = \text{const} \vee S_j = \text{const},$$

поскольку для изменения СПВ игроки оценивают действия других игроков в предыдущий момент.

Управление поведением игрока  $i$  окружение осуществляет через его рефлексию в следующем порядке:

– окружение вычисляет оптимальное по своим функциям полезности целевое значение  $\bar{S}_i$  СПВ игрока  $i$ :

$$\bar{S}_i = \arg \max_{S_i} \pi_j(Q(S_i), Q_j(S_i)),$$

– окружение совершает действия  $\bar{Q}_j$ , которые приведут к выбору  $i$ -м игроком СПВ, равной  $\bar{S}_i$ , вследствие чего управляемый игрок выбирает оптимальное для окружения действие  $\bar{Q}_i$ .

Второй этап описанного порядка управления поведением игрока объясняет смысл предположения 3 в контексте двойственности подхода игроков к оценке предположительных вариаций. Поскольку окружение для управления совершает действия  $\bar{Q}_j$ , определенные не из максимума его функции полезности, а из условия побуждения игрока выбрать  $\bar{S}_i$ , то игрок, предсказав СПВ по функциям полезности окружения, придет к противоречию. Следовательно, игрок при этом противоречии отдаст предпочтение способу оценки СПВ по действиям окружения. Поэтому при оценке СПВ принимаются во внимание две альтернативы: если действия игроков согласуются с их функциями полезности, то другие игроки оценивают оптимальные СПВ; если же СПВ, найденные по действиям игроков, не совпадают с СПВ по функциям полезности, то приоритет отдается первому способу оценки как более реалистичному.

#### 4. Методы расчета оптимального управления

Управление поведением игрока  $i$  основано на зависимости функции полезности каждого игрока от СПВ всех игроков, предопределенной системой (4). Поэтому вначале выведем формулу максимума функции полезности окружения в зависимости от вектора СПВ игроков.

Утверждение 1. Максимальное значение функции полезности окружения вычисляется по формуле

$$(6) \quad \pi_j^*(\mathbf{S}^r) = P[Q^*(\mathbf{S}^r)] Q_j^*(\mathbf{S}^r) - \int_0^{Q_j^*(\mathbf{S}^r)} [P(Q^*) + (1 + S_j^r) Q_j^* P'_Q] dQ_j + C_j(0)$$

где  $\mathbf{S}^r = \{S_k^r, k \in N\}$  – вектор СПВ всех игроков.

Доказательство утверждения 1.

Выразим из уравнения (4), записанного для окружения, предельные издержки

$$C'_{jQ_j} = P(Q^*) + (1 + S_j^r) Q_j^* P'_Q,$$

проинтегрируем это выражение по  $Q_j$

$$C_j(Q_j^*) = \int_0^{Q_j^*} C'_{jQ_j} dQ_j + C_j(0) = \int_0^{Q_j^*} [P(Q^*) + (1 + S_j^r) Q_j^* P'_Q] dQ_j + C_j(0)$$

и подставим в функцию полезности окружения

$$\pi_j^* = P(Q^*) Q_j^* - C_j(Q_j^*) = P(Q^*) Q_j^* - \int_0^{Q_j^*} [P(Q^*) + (1 + S_j^r) Q_j^* P'_Q] dQ_j + C_j(0),$$

где  $C_j(0)$  – постоянные издержки. Заметим, что в этом выражении равновесное действие игрока  $Q_j^*$ , равновесная цена  $P(Q^*)$  и равновесное агрегированное действие  $Q^*$  являются функцией от вектора СПВ всех игроков  $\mathbf{S}^r = \{S_i^r, i \in N\}$ . Таким образом, максимальная полезность окружения также зависит от этого вектора, откуда следует (6). ■

Выведем выражение для СПВ игрока  $i$ , оптимальной по критерию полезности окружения:

$$\bar{S}_i = \arg \max_{S_i} \pi_j^*(\mathbf{S}^r).$$

Утверждение 2. Оптимальное по функции полезности окружения значение СПВ  $\bar{S}_i$  управляемого игрока вычисляется из уравнения

$$(7) \quad 2(1 + S_j^r) Q_j^* Q_{jS_i}^* P'_Q + \left( (1 + S_j^r) P''_{QS_i} + P'_Q \frac{\partial S_j^r}{\partial S_i} \right) Q_j^{*2} = 0$$

при условии

$$(7a) \quad 2 \frac{\partial S_j^r}{\partial S_i} Q_{jS_i}^* + (1 + S_j^r) Q_{jS_i}^* < 0,$$

в случае слабого влияния изменения СПВ на сдвиг равновесия и относительно малого значения второй производной СПВ окружения по СПВ игрока по сравнению с первой производной.

*Доказательство утверждения 2.*

Базируясь на формуле Лейбница для производной интеграла, пределы которого есть функции параметра  $S_i$ , запишем необходимое условие максимума первого порядка функции (6):

$$(76) \quad \pi_{jS_i}^{*'} = P'_{S_i} Q_j^* + P Q_{jS_i}^{*'} - \left\{ [P + (1 + S_j^r) Q_j^* P'_Q] Q_{jS_i}^{*'} + \int_0^{Q_j^*} [P(Q^*) + (1 + S_j^r) Q_j^* P'_Q]'_{S_i} dQ_j \right\} = 0.$$

Преобразуем в этом уравнении интеграл:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{Q_j^*} [P + (1 + S_j^r) Q_j^* P'_Q]'_{S_i} dQ_j = \\ &= \int_0^{Q_j^*} \left[ P'_{S_i} + (1 + S_j^r) (Q_{jS_i}^{*'} P'_Q + Q_j^* P''_{QS_i}) + Q_j^* P'_Q \frac{\partial S_j^r}{\partial S_i} \right] dQ_j. \end{aligned}$$

В подынтегральном выражении параметры  $Q_j^*, Q^*, Q_{jS_i}^{*'}, P'_{S_i}(Q^*), P'_Q(Q^*)$  являются характеристиками равновесия всех игроков, поэтому не зависят от действия игрока  $Q_j$ ; параметр  $S_j^r$  и, следовательно,  $\frac{\partial S_j^r}{\partial S_i}$  слабо зависят от действия  $Q_j$ , что было доказано ранее [6]. Поэтому считаем, что не зависят от  $Q_j$  следующие переменные:

$$Q_j^*, Q^*, P'_{S_i}, P'_Q, \frac{\partial S_j^r}{\partial S_i}, Q_{jS_i}^{*'}, S_j^r.$$

В этом случае интеграл преобразуется к виду:

$$I = (P'_{S_i} + (1 + S_j^r) Q_{jS_i}^{*'} P'_Q) Q_j^* + \left( (1 + S_j^r) P''_{QS_i} + P'_Q \frac{\partial S_j^r}{\partial S_i} \right) Q_j^{*2}.$$

При подстановке этого интеграла в (7а) получим выражение:

$$\begin{aligned} \pi_{jS_i}^{*'} &= P'_{S_i} Q_j^* + P Q_{jS_i}^{*'} - [P + (1 + S_j^r) Q_j^* P'_Q] Q_{jS_i}^{*'} - \\ &- (P'_{S_i} + (1 + S_j^r) Q_{jS_i}^{*'} P'_Q) Q_j^* - \left( (1 + S_j^r) P''_{QS_i} + P'_Q \frac{\partial S_j^r}{\partial S_i} \right) Q_j^{*2} = \\ &= -2(1 + S_j^r) Q_j^* Q_{jS_i}^{*'} P'_Q - \left( (1 + S_j^r) P''_{QS_i} + P'_Q \frac{\partial S_j^r}{\partial S_i} \right) Q_j^{*2}. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение (76), из которого вычисляется оптимальная для окружения СПВ игрока  $i$ , имеет вид (7).

Условие максимума второго порядка функции (6) имеет вид:

$$\begin{aligned} \pi_{jS_i S_i}^{*''} = & - \left\{ 2 \frac{\partial S_j^r}{\partial S_i} Q_j^* Q_{jS_i}^{*'} P'_Q + \right. \\ & + 2(1 + S_j^r) \left[ Q_j^* Q_{jS_i S_i}^{*''} P'_Q + Q_j^* (Q_{jS_i S_i}^{*''} P'_Q + Q_{jS_i}^{*'} P''_{QS_i}) \right] + \\ & + \frac{\partial S_j^r}{\partial S_i} P''_{QS_i} Q_j^{*2} + (1 + S_j^r) (P'''_{QS_i S_i} Q_j^{*2} + 2Q_j^* Q_{jS_i}^{*'} P''_{QS_i}) + \\ & \left. + P''_{QS_i} \frac{\partial S_j^r}{\partial S_i} Q_j^{*2} + P'_Q \left( \frac{\partial^2 S_j^r}{\partial S_i^2} Q_j^{*2} + 2Q_j^* Q_{jS_i}^{*'} \frac{\partial S_j^r}{\partial S_i} \right) \right\} < 0. \end{aligned}$$

Преобразование этого условия приводит к виду:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial S_j^r}{\partial S_i} Q_j^* (2P''_{QS_i} Q_j^* + 4Q_{jS_i}^{*'} P'_Q) + \\ & + (1 + S_j^r) \left( 2(Q_{jS_i}^{*'})^2 P'_Q + 2Q_j^* Q_{jS_i S_i}^{*''} P'_Q + P'''_{QS_i S_i} Q_j^{*2} + 4Q_j^* Q_{jS_i}^{*'} P''_{QS_i} \right) + \\ & + P'_Q \frac{\partial^2 S_j^r}{\partial S_i^2} Q_j^{*2} > 0. \end{aligned}$$

С учетом предположения о слабом влиянии изменения СПВ на сдвиг равновесия имеем:

$$P''_{QS_i} = 0, \quad P'''_{QS_i S_i} = 0, \quad Q_{jS_i S_i}^{*''} = 0.$$

С учетом предположения о малом значении второй производной СПВ окружения по СПВ игрока по сравнению с первой производной имеем:

$$\left| \frac{\partial^2 S_j^r}{\partial S_i^2} \right| \ll \left| \frac{\partial S_j^r}{\partial S_i} \right| \Rightarrow \frac{\partial^2 S_j^r}{\partial S_i^2} \approx 0.$$

При этих предположениях условие примет вид:

$$4 \frac{\partial S_j^r}{\partial S_i} Q_j^* Q_{jS_i}^{*'} P'_Q + 2(1 + S_j^r) (Q_{jS_i}^{*'})^2 P'_Q > 0.$$

Отсюда, учитывая, что  $P'_Q < 0$  в силу свойства обратной функции спроса и  $Q_{jS_i}^{*'} > 0$  из свойства лидерства по Штакельбергу, получим достаточное условие максимума для решения (7) в виде (7а). ■

Определим методику вычисления производных  $Q_{jS_i}^{*'}$ , входящих в уравнение (7).

Утверждение 3. Производные  $Q_{jS_i}^{*'}$  являются корнями следующей системы линейных уравнений:

$$(8) \quad \sum_{k \in N} a_{jk} Q_{kS_i}^{*'} = b_j, \quad j \in N,$$

$$\text{где } b_j = - \left( \frac{\partial S_j^r}{\partial S_i} Q_j^* P'_Q + (1 + S_j^r) Q_j^* P''_{QS_i} C''_{jQ_j S_i} \right),$$

$$a_{jk} = \begin{cases} \gamma_{jk} + P'_Q, & \text{при } j \neq k, \\ \gamma_{jk} + P'_Q + (1 + S_j^r) P'_Q, & \text{при } j = k, \end{cases}$$

$$\gamma_{jk} = P'_{Q_k}(Q^*) + (1 + S_j^r) \left\{ Q_j^* P''_{Q_k} + P'_Q Q'_{jQ_j Q_k} \right\} - C''_{jQ_j Q_k}.$$

Доказательство утверждения 3.

Полагая, что оптимальные действия всех игроков окружения, заданные системой (4), зависят от  $S_i$ , рассмотрим  $n$  неявно заданных функций:

$$F_j(Q^*, S_i) = P(Q^*) + (1 + S_j^r) Q_j^* P'_Q - C'_{jQ_j} = 0, \quad j \in N.$$

В этом случае производные  $Q_{jS_i}^{*'}$  для неявно заданных функций, зависящих от нескольких независимых переменных, вычисляются из следующей системы [12]:

$$(8a) \quad \sum_{k \in N} \frac{\partial F_j}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial S_i} + \frac{\partial F_j}{\partial S_i} = 0, \quad j \in N,$$

$$\text{где } \frac{\partial F_j}{\partial Q_k} = P'_Q(Q^*) + (1 + S_j^r) \left\{ Q_j^* P''_{Q_k} + P'_Q Q'_{jQ_j Q_k} \right\} - C''_{jQ_j Q_k} = \gamma_{jk},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_j}{\partial S_i} &= P'_Q(Q^*) Q_{S_i}^{*'} + \frac{\partial S_j^r}{\partial S_i} Q_j^* P'_Q + \\ &+ (1 + S_j^r) \left\{ Q_j^* P''_{QS_i} + P'_Q Q_{jS_i}^{*'} \right\} - C_{jQ_j S_i}, \quad Q_{S_i}^{*'} = \sum_{k \in N} Q_{S_i}^{*'}, \end{aligned}$$

обозначение  $\gamma_{jk}$  введено для компонента, явно не зависящего от искомых параметров  $Q_{jS_i}^{*'}$ , которые обозначим  $x_j = Q_{jS_i}^{*'}$ . В этом случае система (8a) имеет вид:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in N} \gamma_{jk} x_k + P'_Q \sum_{k \in N} x_k + (1 + S_j^r) P'_Q x_j + \frac{\partial S_j^r}{\partial S_i} Q_j^* P'_Q + \\ + (1 + S_j^r) Q_j^* P''_{QS_i} - C''_{jQ_j S_i} = 0. \end{aligned}$$

Обозначив  $b_j = - \left( \frac{\partial S_j^r}{\partial S_i} Q_j^* P'_Q + (1 + S_j^r) Q_j^* P''_{Q S_i} - C''_{j Q_j S_i} \right)$ ,

$$a_{jk} = \begin{cases} \gamma_{jk} + P'_Q, & \text{при } j \neq k, \\ \gamma_{jk} + P'_Q + (1 + S_j^r) P'_Q, & \text{при } j = k, \end{cases} \text{ можно записать}$$

следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $x_k : \sum_{k \in N} a_{jk} x_k = b_j, j \in N$ , что соответствует (9). ■

Система (9) позволяет определить производные  $Q_{j S_i}^*$  в виде функций от СПВ  $S_j^r$  всех игроков, в том числе от искомой величины  $\bar{S}_i$ . Таким образом, определен метод вычисления целевого значения СПВ управляемого игрока, состоящий в решении уравнения (7) с учетом выражений производных  $Q_{j S_i}^*$  через  $S_i$ , подставленных из решения системы (8).

### 5. Механизм расчета оптимального управления

Рассмотрим способ, который может использовать окружение для побуждения управляемого игрока к выбору целевого значения СПВ, равного  $\bar{S}_i$ . Для наглядной иллюстрации будем интерпретировать рассуждения на примере

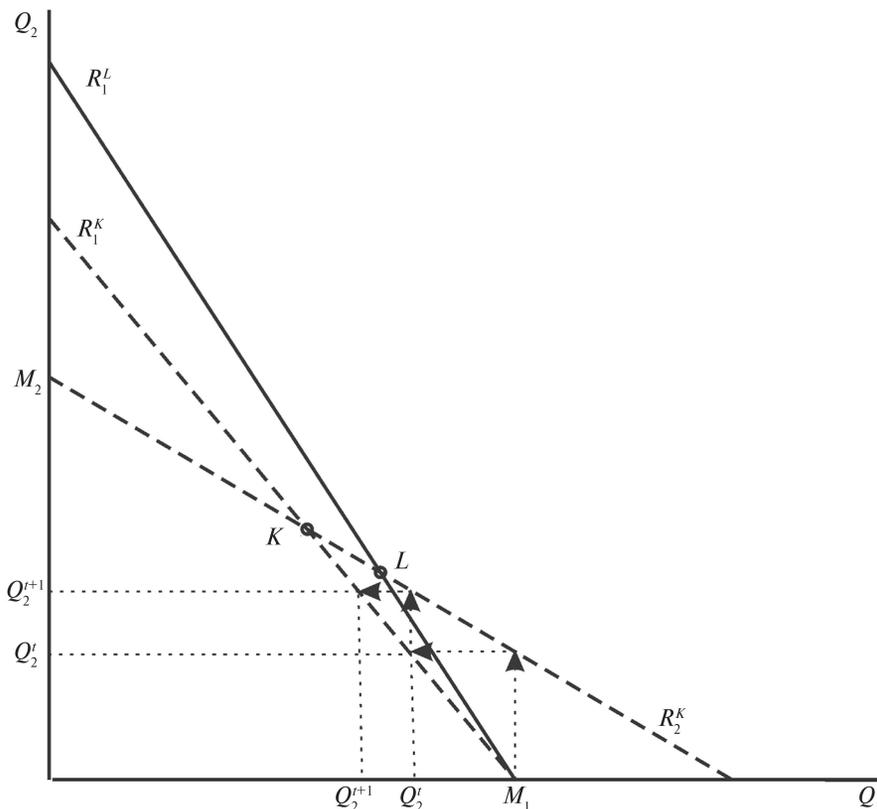


Рис. 2. Графическая иллюстрация возникновения лидера по Штакельбергу.

дуополии и начнем с описания классического принципа возникновения лидера по Штакельбергу в игре изначально равноправных участников (рис. 2), т.е. из ситуации реакций Курно (равновесие и реакции Курно обозначены символом « $K$ »). Как известно [13], в линейной модели дуополии Курно функции оптимальных реакций игроков имеют вид

$$Q_1 = \frac{\alpha_1 - Q_2}{2}, \quad Q_2 = \frac{\alpha_2 - Q_1}{2},$$

где  $\alpha_1 = \frac{a-B_i}{b}$ ,  $a, b$  – максимальная цена и темп снижения цены в обратной функции спроса,  $B_i$  – предельные издержки  $i$ -го игрока. Однако если бы функции реакций не были известны игрокам, они могли бы восстановить эти функции исходя из наблюдений за действиями друг друга. Если рассматривать первого игрока как потенциального лидера, то он наблюдает в динамике игры реакцию второго игрока: на действие  $M_1$  второй игрок совершает действие  $Q_2^t$ , а на ответное действие первого  $Q_1^t$  совершает действие  $Q_2^{(t+1)}$ . На основе этих наблюдений первый игрок (его функция реакции  $R_1^K$ ) определяет функцию реакции второго игрока  $R_2^K$ , из которой вычисляет свою предположительную вариацию (в дуополии она равна СПВ), следующим образом:

$$S_1 = Q'_{2Q_1} = -\frac{1}{2}.$$

В результате функция реакции первого игрока трансформируется к виду

$$Q_1 = \frac{\alpha_1 - Q_2}{2 + S_2} = \frac{\alpha_1 - Q_2}{2 - \frac{1}{2}},$$

после чего этот игрок становится лидером по Штакельбергу, реакция которого и соответствующее равновесие обозначено на рис. 2 символом « $L$ ». Другими словами, первый игрок, наблюдая реакцию второго игрока  $Q_2 = \frac{\alpha_2 - Q_1}{2+0}$ , пересмотрел свою СПВ, т.е. СПВ второго игрока  $S_2 = 0$  побудила второго игрока к установлению СПВ на уровне  $S_1 = -\frac{1}{2}$ .

Если распространить эту процедуру на многоуровневое лидерство, то можно сформулировать следующую закономерность: для того чтобы некоторый игрок изменил свою предположительную вариацию до некоторой заданной величины, соответствующей лидеру по Штакельбергу определенного уровня, он должен наблюдать такое действие другого игрока, которое соответствует реакции лидера по Штакельбергу предшествующего уровня. Следовательно, другой игрок должен создать так называемого фантомного агента, действующего не по его истинной функции реакции, поэтому будем называть эту реакцию фантомной и обозначать символом « $f$ ». Формально это означает, что для побуждения  $i$ -го игрока установить СПВ, равную  $\bar{S}_i$ , окружение должно совершить действие по следующей фантомной функции реакции:

$$Q_j^f = \frac{\alpha_j - Q_i}{2 + S_j^f}$$

при условии

$$S_i = Q_{jQ_i}^f = -\frac{1}{2 + S_j^f} = \bar{S}_i.$$

Следовательно, СПВ окружения для этого действия вычисляется по формуле:

$$S_j^f = -\frac{1}{\bar{S}_i} - 2.$$

В общем виде этот принцип доказан ранее [6] в виде формулы (5), на основе которой можно сформулировать метод расчета фантомной реакции в общем случае нелинейных функций издержек, когда функции реакции невозможно выразить в явном виде. Обобщим представленные рассуждения в виде следующего утверждения.

*Утверждение 4. Фантомная функция реакции окружения, побуждающая управляемого игрока установить целевое значение СПВ  $\bar{S}_i$ , соответствует СПВ окружения  $S_j^f$ , вычисленной из решения следующего уравнения:*

$$(9) \quad \bar{S}_i = \left( \frac{1}{\sum_{j \in N \setminus i} \frac{1}{u_j - S_j^f + 1}} - 1 \right)^{-1}.$$

На основе этого принципа опишем процедуру процесса управления в рассмотренном выше примере дуополии, предположив, что целевое значение СПВ управляемого (второго) игрока равно  $\bar{S}_2 = -\frac{3}{4}$ , т.е. первый игрок стремится перевести второго игрока на реакцию лидера по Штакельбергу третьего уровня (напомним, что в линейной дуополии лидерам первого, второго и третьего уровней соответствуют СПВ  $-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}$ ). Исходное состояние равновесия обозначим индексом «0», т.е. равновесные действия при этом будут  $Q_1^0, Q_2^0$ , СПВ игроков  $S_1^0, S_2^0$ , функции реакции  $R_1^0, R_2^0$ . Процесс управления проиллюстрирован на рис. 3.

В момент  $t$  первый игрок вычисляет свое действие по фантомной функции реакции  $R_1^f$  лидера второго уровня  $Q_1^{f(t)} = \frac{\alpha_1 - Q_2^0}{2 - \frac{3}{4}}$ . Поэтому состояние игры в этот момент, обозначенное точкой  $E^t$ , описывается вектором действий  $(Q_1^{f(t)}, Q_2^0)$ .

В момент  $t + 1$  второй игрок по этому действию вычисляет  $\bar{S}_2 = -\frac{3}{4}$  и переходит на целевую функцию реакции  $\bar{R}_2$ , заданную уравнением  $Q_2^{t+1} = \frac{\alpha_2 - Q_1^{f(t)}}{2 - \frac{3}{4}}$ , по которой реагирует на действие  $Q_1^{f(t)}$  действием  $Q_2^{t+1} = \frac{\alpha_2 - Q_1^{f(t)}}{2 - \frac{3}{4}}$ . В этот момент состояние игры обозначено точкой  $E^{t+1}$ .

В момент  $t + 2$  первый игрок совершает действие по своей истинной функции реакции  $Q_1^{t+2} = \frac{\alpha_1 - Q_2^{t+1}}{2 + S_2^0}$ , поскольку он максимизировал свою полезность

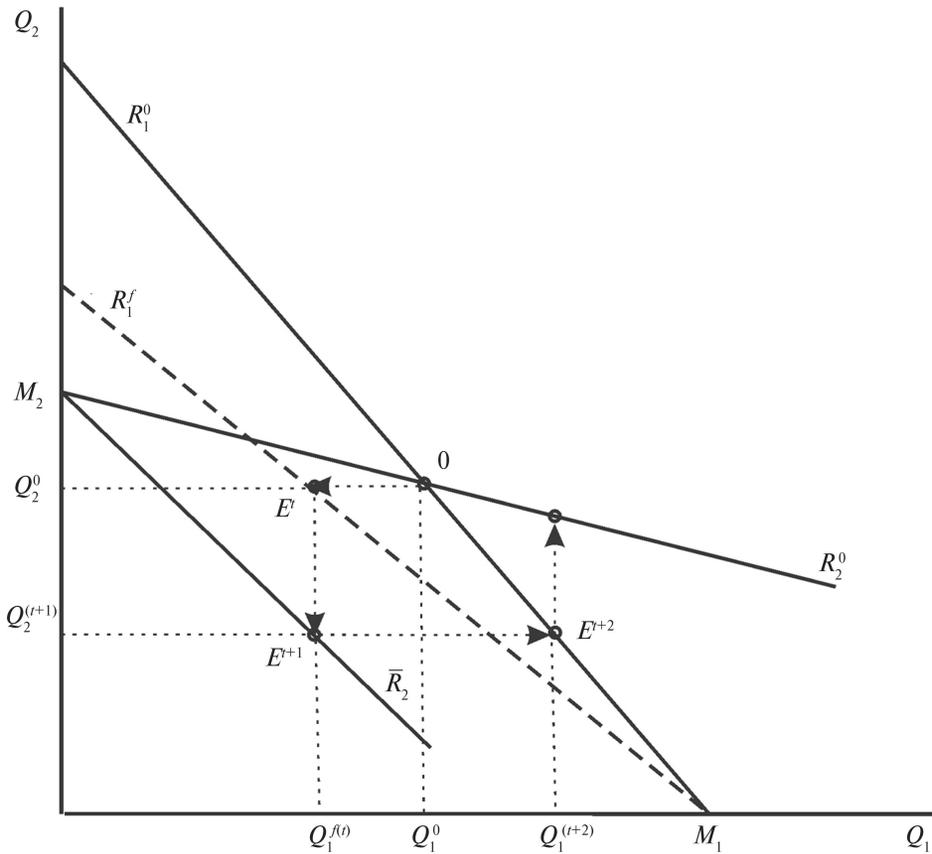


Рис. 3. Графическая иллюстрация процесса информационного управления.

для исходного равновесия. Состояние игры при сочетании  $(Q_1^{t+2}, Q_2^{t+1})$  обозначено точкой  $E^{t+2}$ .

В последующие моменты игры исходное равновесие восстанавливается согласно процедуре, показанной выше на рис. 2. В результате описанной процедуры первый игрок получает дополнительный выигрыш полезности в моменты  $t + 1$  и  $t + 2$ , поскольку второй игрок при этом совершает действия согласно целевой величине СПВ  $\bar{S}_2$ .

Поскольку состояние игры возвращается в исходное равновесие за бесконечное число шагов, то оценить эффективность управления для Центра можно по следующему условию:

$$\sum_{\tau=t}^{\infty} \pi^{*(\tau)} e^{-\rho\tau} - \pi^{*(0)} \sum_{\tau=t}^{\infty} e^{-\rho\tau} \geq 0,$$

где  $\pi^{*(0)}$  — максимум полезности Центра при исходном равновесии;  $\pi^{*(\tau)}$  — максимум полезности Центра в момент  $\tau$ ;  $\rho$  — ставка дисконтирования.

## 6. Заключение

В статье разработан способ информационного управления действиями игрока в теоретико-игровой модели олигополии, которое осуществляется другими игроками путем выполнения управляющего действия, побуждающего игрока сделать оптимальный для окружения ответный ход. Основаниями управления являются, во-первых, зависимость действий игроков от их предположений об ожидаемых действиях контрагентов и, во-вторых, априорная неинформированность игроков относительно предположений друг друга, связанная с дуальной природой предположительных вариаций игроков. Эти вариации, с одной стороны, базируются на анализе функций полезности окружения, а, с другой стороны, игрок не может игнорировать характер реагирующих действий окружения. Поэтому в статье принята гипотеза о том, что в случае противоречия между этими двумя подходами игроки оценивают предположительные вариации по действиям друг друга, которые являются более достоверной информацией. Благодаря этому окружение может, не изменяя своих предположительных вариаций, совершить действие как бы от лица фантомного игрока, побуждающего управляемого игрока к выгодной для окружения реакции, а последний воспринимает это действие как сигнал об изменении истинной реакции окружения и совершает желательное для него действие.

Основные результаты исследования можно обобщить следующим образом. Сформулирована модель взаимодействий игроков в ситуации олигополии в виде иерархической игры, в которой окружение рассматривается как Центр, а некоторый игрок как объект управления. Выведено выражение максимума функции полезности окружения в зависимости от вектора СПВ всех игроков, позволяющее найти значение СПВ управляемого игрока, оптимизирующее функцию полезности окружения. Определена методика вычисления целевого с позиций окружения значения СПВ управляемого игрока. Разработана итерационная процедура, побуждающая управляемого игрока выбрать функцию реакции, соответствующую целевому значению СПВ, в результате которой окружение максимизирует свою полезность.

Поскольку задача оптимального управления сформулирована для игры  $n$  лиц и для функций полезности общего вида, то в разработанных методиках и процедурах невозможно получить решения в явном виде, позволяющие проанализировать результаты игры. Поэтому дальнейший этап исследования предусматривает приложение этих общих инструментов к конкретным видам функций полезности и проведение численных экспериментов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Anderson S.P., Erkal N., Piccinin D.* Aggregative games and oligopoly theory: short-run and long-run analysis // *RAND J. Econ.* 2020. 51(2), P. 470–495.
2. *Cournot A.A.* *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth.* London: Hafner, 1960. (Original 1838).

3. *Nash J.* Non-cooperative Games // *Ann. Math.* 1951. No. 54. P. 286–295.
4. *Stackelberg H.* Market Structure and Equilibrium: 1st Edition. Translation into English, Bazin, Urch & Hill, Springer, 2011. (Original 1934).
5. *Novikov D.A., Chkhartishvili A.G.* Reflexion and Control: Mathematical Models. London: CRC Press, 2014.
6. *Julien L.A.* On noncooperative oligopoly equilibrium in the multiple leader-follower game // *Eur. J. Oper. Res.* 2017. V. 256(2). P. 650–662.
7. *Гераськин М.И.* Свойства предположительных вариаций в нелинейной модели олигополии Штакельберга // *АиТ.* 2020. № 6. С. 105–130.  
*Geraskin M.I.* The Properties of Conjectural Variations in the Nonlinear Stackelberg Oligopoly Model // *Autom. Remote Control.* 2020. V. 81. No. 6. P. 1051–1072.
8. *Malsagov M., Ougolnitsky G., Usov A.* A differential Stackelberg game theoretic model of the promotion of innovations in universities // *Advances Syst. Sci. Appl.* 2020. V. 20. No. 3. P. 166–177.
9. *Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Модели информационного влияния и информационного управления в социальных сетях // *Проблемы управления.* 2009. № 5. С. 28–35.
10. *Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства. М.: Изд-во физ-мат лит-ры, 2010.
11. *Губанов Д.А., Петров И.В., Чхартишвили А.Г.* Многомерная модель динамики мнений в социальных сетях: индексы поляризации // *Проблемы управления.* 2020. № 3. С. 26–33.  
*Gubanov D.A., Petrov I.V., Chkhartishvili A.G.* Multidimensional Model of Opinion Dynamics in Social Networks: Polarization Indices // *Autom. Remote Control.* 2021. V. 82. No. 10. P. 1802–1811.
12. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974.
13. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Моделирование динамики коллективного поведения в рефлексивной игре с произвольным числом лидеров // *Информатика и автоматизация.* 2022. Т. 21. № 2. С. 339–375.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Чхартишвили.*

Поступила в редакцию 29.11.2024

После доработки 21.03.2025

Принята к публикации 25.03.2025

# Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2025 г. С.В. ИВАНОВ, д-р физ.-мат. наук (sergeyivanov89@mail.ru),  
А.Е. СТЕПАНОВ (rus.fta@yandex.ru)  
(Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет))

## ОПТИМИЗАЦИЯ ПО ВЕРОЯТНОСТНОМУ КРИТЕРИЮ В ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОХОЖДЕНИЯ ТЕСТА

Рассматривается динамическая модель прохождения ограниченного по времени теста. Ставятся задачи поиска программной и позиционной стратегий, максимизирующих вероятность прохождения теста. Стратегией является выполнение или невыполнение текущего тестового задания. Позиционная стратегия определяется как функция времени, прошедшего с начала тестирования, и набранных за предыдущие задания баллов. Для синтеза позиционной стратегии используется метод динамического программирования Беллмана. Для поиска оптимальной программной стратегии предлагается алгоритм, основанный на методе ветвей и границ. Приводятся результаты вычислений и производится их сравнение с результатами решения аналогичной задачи, в которой тест не считается пройденным, когда тестируемый не уложился в лимит времени.

*Ключевые слова:* модель тестирования, вероятностный критерий, синтез управления.

**DOI:** 10.31857/S0005231025060073, **EDN:** IKHNWB

### 1. Введение

Современный уровень применения информационных технологий в образовании обосновывает актуальность развития в настоящее время, в частности, теории адаптивного тестирования (САТ-теории), основы которой были заложены в конце прошлого столетия, например, в работах Дж. Раша [1]. Хороший обзор современных результатов в этой области предложен в [2]. Концепция рассматриваемой теории подразумевает использование информации о результатах обучения тестируемого и прохождения им контрольного мероприятия в процессе формирования содержания теста и принятия решения о его завершении. Обработка этой информации и принятие решения часто происходит с применением современных методов машинного обучения и искусственного интеллекта. Эти же технологии используются также при

формировании индивидуальных траекторий обучения в системах дистанционного обучения (СДО), например [3, 4]. К современным работам в этой области можно отнести [5–7]. Подобные технологии используются обычно организаторами тестирования и разработчиками программного обеспечения СДО. Однако на проблему тестирования можно посмотреть и со стороны тестируемого, которому необходимо выработать собственную стратегию прохождения, как правило, ограниченного по времени теста. Время прохождения теста напрямую связано со временем ответа тестируемого на задания теста. Вероятностным моделям времени ответа тестируемого или пользователя СДО на задание посвящено значительное количество работ, например [8–10]. Задача поиска оптимальной стратегии тестируемого по критерию максимизации вероятности набора тестируемым определенного количества баллов, при одновременном выполнении ограничения на время выполнения теста, рассмотрена в [11]. Похожая задача в квантильной постановке, когда максимизируется число набранных за тест баллов при выполнении вероятностного ограничения на время выполнения теста, рассмотрена в [12]. В последних двух работах решаются задачи стохастического программирования, в которых тестируемый априорно, перед прохождением теста, выбирает в качестве собственной стратегии набор заданий, которые он будет решать в первую очередь. Другие задания теста решаются тестируемым в случае, если у него остается время до окончания теста после завершения работы с первой группой заданий. В рассмотренных постановках не принимается во внимание последовательность решения тестируемым заданий теста. Это может быть естественным в случае, если тестируемый не получает в процессе прохождения теста информацию о правильности решения очередного выполненного задания, а следовательно, и о текущем количестве набранных баллов. Однако очень часто, особенно при тестировании в СДО, например в [4], такая информация доступна пользователю и может быть использована им в процессе прохождения теста. Это делает актуальным рассмотрение динамических моделей тестирования с корректировкой стратегии прохождения теста после каждого рассмотренного тестируемым задания.

В данной работе рассматривается динамическая модель прохождения фиксированного (не изменяемого в процессе прохождения) теста по критерию максимизации вероятности набора тестируемым не менее заданного числа баллов в условиях наличия ограничения на время выполнения теста. Решаются задачи поиска программной и позиционной стратегий тестируемого. Предлагаются алгоритмы решения рассмотренных задач, построенные с использованием методов стохастического и динамического программирования. Проводится сравнительный анализ с решениями, полученными в [11, 12], на тех же исходных данных.

## 2. Описание модели и задачи синтеза управлений

Введем в рассмотрение динамическую систему, описывающую прохождение тестирования студентом. На  $k$ -м шаге студенту предлагается выполнить задание, за успешное решение которого начисляется  $b_k$  баллов,  $k = \overline{1, n}$ . Для успешного прохождения теста требуется набрать не менее  $\varphi$  баллов. Время выполнения теста ограничено величиной  $\overline{T}$ . Время прохождения  $k$ -го задания описывается случайной величиной  $\tau_k$ . Правильность выполнения  $k$ -го задания описывается случайной величиной  $X_k$ , которая равна 1, если  $k$ -е задание выполнено верно, и равна 0 в противном случае. Стратегия определяется набором переменных  $u = (u_1, \dots, u_n)$ , в котором  $u_k = 1$ , если студент пытается решать  $k$ -е задание, в противном случае  $u_k = 0$ . Введем переменные состояния динамической системы. Пусть время, затраченное на выполнение первых  $k$  заданий, равно  $T_k$ , а балл, набранный за это время, равен  $S_k$ . Тогда динамика системы описывается уравнениями

$$\begin{aligned} (1) \quad & T_k = T_{k-1} + \tau_k u_k, \\ (2) \quad & S_k = S_{k-1} + b_k X_k I\{T_k \leq \overline{T}\} u_k, \\ (3) \quad & T_0 = 0, S_0 = 0, \quad k = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

где  $I\{\cdot\}$  – индикатор события, стоящего в скобках, равный 1, если условие выполнено, и равный 0 в противном случае. Таким образом, баллы  $b_k$  начисляются, если студент затратил на выполнение первых  $k$  заданий не более  $\overline{T}$  единиц времени. Будем считать, что все  $\tau_k$  – дискретные случайные величины с конечным множеством реализаций  $\mathcal{T}_k$ . В дальнейшем будем использовать обозначение  $p_k(t, x) = \mathbf{P}\{\tau_k = t, X_k = x\}$ . В настоящей работе предполагается, что для всех  $k = \overline{2, n}$  сигма-алгебра, порожденная случайными величинами  $X_k$  и  $\tau_k$ , не зависит от сигма-алгебры, порожденной случайными величинами  $X_1, \dots, X_{k-1}, \tau_1, \dots, \tau_{k-1}$ . Подобное предположение означает, что ответ на текущие вопросы теста не влияет на дальнейшее прохождение тестирования. Влияние знания о правильности решения предыдущих задач на правильность решения будущих задач требует дополнительного статистического анализа. Пусть  $S(u)$  – случайная сумма баллов, равная величине  $S_n$ , при выбранном управлении  $u$ .

Поставим задачу поиска максимума функции вероятности

$$(4) \quad P_{\varphi, \overline{T}}^1(u) = \mathbf{P}\{S(u) \geq \varphi\} \rightarrow \max_{u \in \{0,1\}^n}.$$

Данная задача направлена на синтез программной стратегии выбора заданий, решение которых позволит студенту максимизировать вероятность прохождения теста.

Теперь будем считать, что управление выбирается в классе позиционных стратегий. Это значит, что на каждом шаге при выборе своей стратегии студент принимает во внимание затраченное к текущему моменту время и общий

балл, набранный за предыдущие задания. Через  $\mathbf{u}_k(T_{k-1}, S_{k-1})$  обозначим стратегию студента на  $k$ -м шаге как значение некоторой функции  $\mathbf{u}_k$  переменных состояния системы, равное 1, если студент пытается решить  $k$ -е задание, и равное 0 в противном случае. Пусть  $\mathbf{u}$  – вектор, составленный из функций  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  и описывающий позиционную стратегию. Обозначим через  $\mathbf{S}(\mathbf{u})$  случайную сумму баллов  $S_n$ , определяемую уравнениями (1) и (2) при подстановке в них  $u_k = \mathbf{u}_k(T_k, S_k)$ . Здесь используется жирный шрифт, чтобы отличать позиционную стратегию  $\mathbf{u}$ , являющуюся функцией, от программной стратегии  $u$ , описываемой набором переменных, а также чтобы отличить сумму баллов  $\mathbf{S}(\mathbf{u})$ , получаемую в результате применения позиционной стратегии, от суммы баллов  $S_n$ , полученных при программной стратегии.

Поставим задачу поиска максимума функции вероятности при применении позиционной стратегии:

$$(5) \quad P_{\varphi, \bar{T}}^2(\mathbf{u}) = \mathbf{P}\{\mathbf{S}(\mathbf{u}) \geq \varphi\} \rightarrow \max_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}},$$

$$(6) \quad \mathbf{u}^* = (\mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_n^*) \in \text{Arg} \max_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} P_{\varphi, \bar{T}}^2(\mathbf{u}),$$

где  $\mathcal{U}$  – множество допустимых функций, описывающих управление. Поскольку случайное время на ответ для любой задачи является дискретной случайной величиной с конечным числом значений, а факт правильного ответа на задачу моделируется распределением Бернулли, то количество состояний  $(T_k, S_k)$  на  $k$ -м шаге является конечным. Однако для удобства оптимизации управление на  $k$ -м шаге  $\mathbf{u}_k$  будем выбирать как функцию на более широком множестве состояний  $\mathbb{T}_k \times \mathbb{S}_k$ , где  $\mathbb{T}_k$  и  $\mathbb{S}_k$  – некоторые конечные множества, содержащие в себе все возможные значения состояний  $T_k$  и  $S_k$  соответственно. В связи с этим будем считать, что  $\mathcal{U}$  является множеством всех функций из  $\bigotimes_{k=1}^n \mathbb{T}_k \times \mathbb{S}_k$  во множество  $\{0, 1\}^n$ .

*Замечание 1.* В [11] решается задача максимизации вероятности получения требуемого балла и одновременного выполнения ограничения на время тестирования с использованием программных стратегий, которая в обозначениях настоящей статьи записывается в виде

$$(7) \quad \tilde{P}_{\varphi, \bar{T}}^1(u) = \mathbf{P}\{S(u) \geq \varphi, T(u) \leq \bar{T}\} \rightarrow \max_{u \in \{0, 1\}^n},$$

где через  $T(u)$  обозначено случайное время прохождения теста при использовании программной стратегии  $u$ . Таким образом, постановка (7) предполагает, что тест не считается пройденным, когда тестируемый не уложился в лимит времени, даже если в результате теста набран требуемый балл. В задаче (4) отсутствует требование уложиться в заданный лимит времени, но за решение задач после момента времени  $\bar{T}$  баллы не начисляются. Вместе с тем, достоинством постановки (7) является независимость оптимального выбора задач от их порядка в тесте. В задачах (4) и (5) оптимальный набор

решаемых задач зависит от их порядка. Полезно отметить, что оптимальное значение критериальной функции в задаче (7) является нижней оценкой оптимальных значений критериальных функций задач (4) и (5) при любом порядке задач в тесте.

*Замечание 2.* Постановку (7) можно обобщить и на случай позиционных стратегий. В результате получится задача

$$(8) \quad \tilde{P}_{\varphi, \bar{T}}^2(\mathbf{u}) = \mathbf{P}\{\mathbf{S}(\mathbf{u}) \geq \varphi, \mathbf{T}(\mathbf{u}) \leq \bar{T}\} \rightarrow \max_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}},$$

где через  $\mathbf{T}(\mathbf{u})$  обозначено случайное время прохождения теста  $T_n$ , определяемое уравнениями (1) при подстановке в них  $u_k = \mathbf{u}_k(T_k, S_k)$ . Ниже будет показано, что постановка (5) оказывается полностью эквивалентной постановке (8) в отличие от пары постановок (4) и (7).

### 3. Синтез позиционного управления

Для решения задачи синтеза позиционного управления (5) применим метод динамического программирования Р. Беллмана. Определим функцию Беллмана для  $k = \overline{1, n}$  по правилу:

$$(9) \quad B_k(T_{k-1}, S_{k-1}) = \max_{\mathbf{u}_k, \dots, \mathbf{u}_n} \mathbf{P}\{\mathbf{S}(\mathbf{u}) \geq \varphi \mid T_{k-1}, S_{k-1}\}.$$

При этом на последнем шаге функцию Беллмана определим равенством

$$(10) \quad B_{n+1}(T_n, S_n) = I\{S_n \geq \varphi\}.$$

Отметим, что зависимости от  $T_n$  на последнем шаге нет. Она введена для удобства записи соотношений динамического программирования. Как нетрудно заметить,

$$\max_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} P_{\varphi, \bar{T}}^2(\mathbf{u}) = B_1(T_0, S_0).$$

Получим соотношения динамического программирования, используя формулу полной вероятности:

$$(11) \quad \begin{aligned} B_k(T_{k-1}, S_{k-1}) &= \max_{u_k = \mathbf{u}_k(T_{k-1}, S_{k-1})} \max_{\mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_n} \sum_{t \in \mathcal{T}_k, x \in \{0,1\}} \mathbf{P}\{\mathbf{S}(\mathbf{u}) \geq \\ &\geq \varphi \mid S_k = S_{k-1} + b_k x I\{T_{k-1} + tu_k \leq \bar{T}\} u_k, T_k = T_{k-1} + tu_k\} p_k(t, x) = \\ &= \max_{u_k \in \{0,1\}} \sum_{t \in \mathcal{T}_k, x \in \{0,1\}} B_{k+1}(T_{k-1} + tu_k, S_{k-1} + b_k x I\{T_{k-1} + tu_k \leq \bar{T}\} u_k) p_k(t, x). \end{aligned}$$

Управление  $\mathbf{u}_k^*(T_{k-1}, S_{k-1})$  определим из условия максимума полученной функции Беллмана на  $k$ -м шаге.

Поскольку распределения случайных величин являются дискретными, все получаемые функции в методе динамического программирования являются

измеримыми, что обеспечивает корректность применения метода динамического программирования.

Таким образом, для решения поставленной задачи можно предложить следующий алгоритм, реализующий метод динамического программирования.

*Алгоритм 1* (синтез позиционного управления).

1. Установить  $k := n + 1$ ; вычислить для всех  $S_n \in \mathbb{S}_n$  значение  $B_{n+1}(T_n, S_n)$ .
2. Если  $k > 1$ , установить  $k := k - 1$ , иначе перейти к шагу 4.
3. Для всех  $T_{k-1} \in \mathbb{T}_{k-1}$ ,  $S_{k-1} \in \mathbb{S}_{k-1}$  вычислить значение  $B_k(T_{k-1}, S_{k-1})$  и определить  $\mathbf{u}_k^*(T_{k-1}, S_{k-1})$ .
4. Вычислить значение  $B_1(0, 0)$  и определить управление на первом шаге  $\mathbf{u}_1^*(0, 0)$ .

Заметим, что если на шаге 4 алгоритма 1 дополнительно вычислить  $B_1(t, s)$ , то будет найдено решение задачи поиска максимума функционала  $P_{\varphi-s, \bar{T}-t}^2(\mathbf{u})$ . Данные вычисления можно провести, если множество достижимых состояний динамической системы при начальных условиях  $T_0 = t$ ,  $S_0 = s$  на каждом шаге  $k$  является подмножеством  $\mathbb{T}_k \times \mathbb{S}_k$ . Таким образом, можно получать решения поставленной задачи сразу для нескольких значений  $\varphi$  и  $\bar{T}$ .

Приведенный метод решения задачи позволяет доказать эквивалентность задач (5) и (8).

*Утверждение 1.* *Оптимальные значения целевых функционалов в задачах (5) и (8) равны. При этом существуют стратегии, являющиеся оптимальными в обеих задачах, а именно стратегии, удовлетворяющие условию  $\mathbf{u}_k^*(T_{k-1}, S_{k-1}) = 0$  при  $S_{k-1} \geq \varphi$  или  $T_{k-1} > \bar{T}$ .*

*Доказательство.* Для решения задачи (8) также применим метод динамического программирования. Для этого нужно на последнем шаге определить функцию Беллмана по правилу  $\tilde{B}_{n+1}(T_n, S_n) = I\{T_n \leq \bar{T}, S_n \geq \varphi\}$ . Соотношения динамического программирования для решения задачи (8) будут такими же, как и (11), с тем уточнением, что вместо функций  $B_k$  записываются функции  $\tilde{B}_k$ .

Проанализируем получившиеся соотношения динамического программирования. Заметим, что при  $T_{k-1} > \bar{T}$  (лимит времени исчерпан) или  $S_{k-1} \geq \varphi$  (требуемый балл набран) при вычислении  $B_k(T_{k-1}, S_{k-1})$  и  $\tilde{B}_k(T_{k-1}, S_{k-1})$  можно положить  $\mathbf{u}_k^*(T_{k-1}, S_{k-1}) = 0$  (условие, сформулированное в утверждении 1).

Теперь докажем по индукции следующее утверждение:  $B_k(T_{k-1}, S_{k-1}) = \tilde{B}_k(T_{k-1}, S_{k-1})$  при  $T_{k-1} \leq \bar{T}$ , при этом среди стратегий, на которых достигается максимум, есть совпадающие стратегии, а если  $S_{k-1} < \varphi$ , то максимум достигается на одних и тех же стратегиях. При  $k = n$  утверждение выполнено по определению введенных функций Беллмана. Докажем, что утверждение выполнено для  $B_k(T_{k-1}, S_{k-1})$  в предположении, что оно выполнено для

$B_{k+1}(T_k, S_k)$ . Если  $S_{k-1} \geq \varphi$  и  $T_{k-1} \leq \bar{T}$ , то  $B_k(T_{k-1}, S_{k-1}) = \tilde{B}_k(T_{k-1}, S_{k-1}) = 1$  (как отмечено выше, можно взять  $\mathbf{u}_k^*(T_{k-1}, S_{k-1}) = 0$ ). При вычислении  $B_k(T_{k-1}, S_{k-1})$ , когда  $S_{k-1} < \varphi$  и  $T_{k-1} \leq \bar{T}$ , может возникнуть два случая: 1) если  $T_k > \bar{T}$ , тогда выполнено равенство  $S_k = S_{k-1}$  и принимается во внимание значение  $B_k(T_k, S_{k-1}) = \tilde{B}_k(T_k, S_{k-1}) = 0$ ; 2) если  $T_k \leq \bar{T}$ , тогда учитывается значение  $B_k(T_k, S_{k-1}) = \tilde{B}_k(T_k, S_{k-1})$  (равенство выполнено по предположению индукции). При этом в обоих случаях  $B_k(T_{k-1}, S_{k-1}) = \tilde{B}_k(T_{k-1}, S_{k-1})$  и максимум в определениях функций Беллмана достигается на одних и тех же стратегиях, что и доказывает утверждение 1.

*Замечание 3.* Среди оптимальных стратегий в задаче (5) могут оказаться стратегии, удовлетворяющие условию  $\mathbf{u}_k^*(T_{k-1}, S_{k-1}) = 1$  при  $S_{k-1} \geq \varphi$ , не являющиеся оптимальными стратегиями в задаче (8). Действительно, решение дополнительных задач, когда требуемый балл уже набран, уменьшает вероятность неперевышения лимита времени, что ведет к уменьшению значения целевого функционала в задаче (8) по сравнению со значением функционала (5).

#### 4. Синтез программного управления

Сначала опишем способ вычисления значения целевого функционала (4) при фиксированном  $u \in \{0, 1\}^n$ . Определим следующие функции:

$$(12) \quad B_{n+1}^u(T_n, S_n) = I\{S_n \geq \varphi\},$$

$$B_k^u(T_{k-1}, S_{k-1}) =$$

$$= \sum_{t \in \mathcal{T}_k, x \in \{0, 1\}} B_{k+1}^u(T_{k-1} + tu_k, S_{k-1} + b_k x I\{T_{k-1} + tu_k \leq \bar{T}\} u_k) p_k(t, x),$$

где  $k = \overline{1, n}$ . Получаемое с помощью данных формул значение  $B_1^u(0, 0)$  равно значению функционала вероятности  $P_{\varphi, \bar{T}}^1(u)$ . Это следует из определения функции Беллмана (9), поскольку соотношения (12) аналогичны уравнениям Беллмана, но в них исключен поиск максимума, а стратегия управления на  $k$ -м шаге считается равной  $u_k$ .

Описанная процедура за счет использования динамических соотношений значительно эффективней непосредственного вычисления вероятности путем перебора всех возможных реализаций случайных величин  $X_k, \tau_k$ .

Оптимальное программное управление может быть найдено путем перебора всех возможных управлений  $u \in \{0, 1\}^n$ . При этом можно исключить управления, для которых  $\sum_{k=1}^n b_k u_k < \varphi$ , поскольку такие управления не обеспечивают прохождение теста при любых реализациях случайных величин с ненулевой вероятностью. Также можно исключить управления  $u$  такие, что  $u_n = 0$ , потому что они не хуже, чем соответствующие управления, в которых  $u_n = 1$ . Действительно, попытка решить последнее задание не может уменьшить вероятность прохождения теста.

Предложим процедуру для существенного уменьшения перебираемых программных управлений. Будем считать, что известны значения функции Беллмана  $B_k(S_{k-1}, T_{k-1})$ , которые могут вычислены с помощью алгоритма из предыдущего раздела. Введем обозначения

$$\begin{aligned}
 (13) \quad C_{k,k}^{u_1, \dots, u_k}(T_{k-1}, S_{k-1}) &= \\
 &= \sum_{t \in \mathcal{T}_k, x \in \{0,1\}} B_{k+1}(T_{k-1} + tu_k, S_{k-1} + b_k x I\{T_{k-1} + tu_k \leq \bar{T}\} u_k) p_k(t, x), \\
 C_{l,k}^{u_1, \dots, u_k}(T_{l-1}, S_{l-1}) &= \\
 &= \sum_{t \in \mathcal{T}_l, x \in \{0,1\}} C_{l+1,k}^{u_1, \dots, u_k}(T_{l-1} + tu_l, S_{l-1} + b_l x I\{T_{l-1} + tu_l \leq \bar{T}\} u_l) p_l(t, x), \\
 l = k - 1, k - 2, \dots, 1, \quad C_k(u_1, \dots, u_k) &= C_{1,k}^{u_1, \dots, u_k}(T_0, S_0).
 \end{aligned}$$

Величина  $C_{l,k}^{u_1, \dots, u_k}(T_{l-1}, S_{l-1})$  описывает минимальные потери начиная с шага  $k$ , если на первых  $k$  шагах применялись управления  $u_1, \dots, u_k$ . Вычисление этих величин соответствует соотношениям динамического программирования при фиксированных управлениях на первых  $k$  шагах. Величины  $C_k(u_1, \dots, u_k)$  могут быть использованы в качестве верхних оценок критериальной функции.

*Утверждение 2. Для величин, введенных формулой (13), справедливы следующие утверждения:*

- 1)  $C_k(u_1, \dots, u_k) \geq B_1^u(0, 0) = P_{\varphi, \bar{T}}^1(u) = C_n(u_1, \dots, u_n)$ ;
- 2)  $C_k(u_1, \dots, u_k) \geq C_{k+1}(u_1, \dots, u_{k+1})$  для всех  $k = \overline{1, n-1}$ .

*Доказательство.* Уравнения (13) представляют собой динамические соотношения Беллмана, в которых на первых  $k$  шагах управления равны  $u_1, \dots, u_k$ . Поэтому величина  $C_k(u_1, \dots, u_k)$  равна значению целевого функционала в задаче с позиционным управлением (5), когда на первых  $k$  шагах компоненты вектора управления  $\mathbf{u}$  фиксированы и равны  $u_1, \dots, u_k$ , а на последующих шагах компоненты  $\mathbf{u}$  выбираются оптимальным образом относительно достигнутого за  $k$  шагов состояния. Значит, для любого программного управления  $u$ , в котором фиксированы  $u_1, \dots, u_k$ , справедливо неравенство  $C_k(u_1, \dots, u_k) \geq B_1^u(0, 0)$ . Кроме того, если в управлении фиксированы  $u_1, \dots, u_{k+1}$ , то такое управление обеспечивает меньшее значение функционала (5), чем управление с фиксированными  $u_1, \dots, u_k$ , поэтому  $C_k(u_1, \dots, u_k) \geq C_{k+1}(u_1, \dots, u_{k+1})$  для всех  $k = \overline{1, n-1}$ . Равенство  $B_1^u(0, 0) = P_{\varphi, \bar{T}}^1(u)$  было обосновано выше. Утверждение 2 доказано.

Таким образом, если известна нижняя граница оптимального значения критериальной функции  $\psi < \max_{u \in \{0,1\}^n} P_{\varphi, \bar{T}}^1(u)$  и для некоторого  $k$  выполнено  $C_k(u_1, \dots, u_k) \leq \psi$ , то в силу утверждения 2  $P_{\varphi, \bar{T}}^1(u) < \max_{u \in \{0,1\}^n} P_{\varphi, \bar{T}}^1(u)$ , а значит, любая стратегия  $u$  с соответствующими первыми  $k$  компонентами не

является оптимальной. Поэтому для решения задачи поиска программной стратегии можно предложить приведенный ниже алгоритм 2, основанный на методе ветвей и границ. Данный алгоритм использует обход бинарного дерева, корень которого соответствует переменной  $u_1$ , а ребра, выходящие из него, соответствуют значениям 1 и 0 этой переменной, смежные вершины с корнем соответствуют переменной  $u_2$ , выходящие из них ребра – значениям переменной  $u_2$  и т.д. Из вершин, соответствующих переменной  $u_n$ , выходят два ребра, соответствующие значениям переменной  $u_n$  и соединяющие их с листьями. Для обхода дерева применяется поиск в глубину. При этом поиск в глубину может быть прекращен, если его дальнейшее осуществление не приведет к нахождению оптимальной стратегии. Для описания момента прекращения поиска в глубину вводится функция  $L(u_1, \dots, u_k)$ , равная 0, если дальнейший поиск в глубину не проводится, и равная 1 в противном случае. Переменные  $\psi$  и  $u^*$ , модифицируемые при выполнении функции  $L(u_1, \dots, u_k)$ , являются глобальными.

*Алгоритм 2* (синтез программного управления).

0. Определим функцию  $L(u_1, \dots, u_k)$  по следующему правилу:

0,а) задать  $\tilde{y} = (u_1, \dots, u_k, 1, \dots, 1)$ ; если  $\sum_{k=1}^n b_k \tilde{u}_k \geq \varphi$  или  $(k = n \text{ и } u_n = 1)$ ,

то вычислить  $C_k(u_1, \dots, u_k)$ , иначе вернуть  $L(u_1, \dots, u_k) = 0$ ;

0,б) если  $C_k(u_1, \dots, u_k) \leq \psi$ , то вернуть  $L(u_1, \dots, u_k) = 0$ ;

если  $k = n$  и  $C_n(u_1, \dots, u_n) > \psi$ , то присвоить  $\psi := C_n(u_1, \dots, u_n)$ ,  $u^* := (u_1, \dots, u_n)$ , вернуть  $L(u_1, \dots, u_k) = 0$ ;

если  $k = n$  и  $C_n(u_1, \dots, u_n) \leq \psi$ , то вернуть  $L(u_1, \dots, u_k) = 0$ ;

иначе вернуть  $L(u_1, \dots, u_k) = 1$ .

1. Установить  $k := 1$ ,  $\psi := 0$ ,  $u^* := (0, \dots, 0)$ ,  $u_1 := 1$ .

2. Вычислить  $L(u_1, \dots, u_k)$ .

3. Если  $L(u_1, \dots, u_k) = 1$ , то установить  $k := k + 1$ ,  $u_k := 1$  и перейти к шагу 2;

если  $L(u_1, \dots, u_k) = 0$  и  $u_k = 1$ , то установить  $u_k := 0$  и перейти к шагу 2;

если  $L(u_1, \dots, u_k) = 0$  и  $u_l = 0$  для всех  $l = \overline{1, k}$ , то прекратить выполнение алгоритма;

иначе присвоить  $k := \max\{l \mid u_l = 1, l < k\}$ ,  $u_k := 0$  и перейти к шагу 2.

В результате применения алгоритма 2 будет найдено оптимальное управление  $u^*$  и соответствующее оптимальное значение целевой функции  $P_{\varphi, \bar{T}}^1(u^*) = \psi$ .

В предложенном алгоритме поиск в глубину начинается со значений переменной  $u_k = 1$ , поскольку в этом случае первой исследуемой стратегией будет стратегия «решать все задачи», которой, как правило, соответствует большое значение вероятности прохождения теста.

*Замечание 4.* С помощью предложенного алгоритма 2 можно решить и задачу (7). Для этого нужно при определении величин  $C_k(u_1, \dots, u_k)$  задать

$B_{n+1}(T_n, S_n) = I\{T_n \leq \bar{T}, S_n \geq \varphi\}$ . Кроме того, на шаге 0,а) нужно исключить проверку ( $k = n$  и  $u_n = 1$ ), так как в оптимальной стратегии может быть  $u_n = 0$ .

## 5. Численные результаты

Две поставленные задачи были успешно решены для данных из статьи [11]. В рассматриваемом тесте имеется 10 заданий, за которые можно получить баллы  $b_1 = \dots = b_5 = 1$ ,  $b_6 = b_8 = 2$ ,  $b_7 = b_{10} = 3$ ,  $b_9 = 4$ . Тестируемому необходимо набрать  $\varphi = 11$  баллов. Известны вероятности правильных ответов на каждое из заданий. Каждой задаче сопоставляются три возможные реализации времени решения в случае правильного решения и три реализации в случае неправильного решения, условные вероятности которых известны и приведены в [11].

В табл. 1 приведены решения задач (4) и (5) в зависимости от параметра  $\bar{T}$ . Рассматриваются значения  $\bar{T}$ , равные различным долям от максимально возможного времени решения всех задач  $T^m = 3830$  секунд. Указано время счета при использовании алгоритмов 2 и 1 для поиска программной (прогр.) и позиционной (поз.) стратегий соответственно. В последней колонке указано время решения задачи (4) при переборе всех возможных программных стратегий за исключением заведомо неоптимальных с использованием формул (12).

**Таблица 1.** Зависимость решений задач (4) и (5) от параметра  $\bar{T}$  при  $\varphi = 11$

$\bar{T}$	Оптимальная программная стратегия $u^*$	$P_{\varphi, \bar{T}}^1(u^*)$	$\max_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} P_{\varphi, \bar{T}}^2(\mathbf{u})$	Время счета прогр./поз. (с)	Время счета (перебор, с)
$0,4T^m$	(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1)	0,1447	0,1689	0,83/0,08	1,69
$0,5T^m$	(1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1)	0,3583	0,4220	0,45/0,07	1,78
$0,6T^m$	(1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1)	0,5244	0,6130	0,53/0,07	1,93
$0,7T^m$	(1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1)	0,6906	0,7242	0,28/0,07	2,17
$0,8T^m$	(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)	0,7815	0,7876	0,11/0,08	2,34
$0,9T^m$	(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)	0,8006	0,8007	0,15/0,07	2,64

**Таблица 2.** Зависимость решений задач (7) и (8) от параметра  $\bar{T}$  при  $\varphi = 11$

$\bar{T}$	Оптимальная программная стратегия $u^*$	$\tilde{P}_{\varphi, \bar{T}}^1(u^*)$	$\max_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} \tilde{P}_{\varphi, \bar{T}}^2(\mathbf{u})$	Время счета прогр./поз. (с)	Время счета (перебор, с)
$0,4T^m$	(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1)	0,1447	0,1689	0,99/0,08	3,47
$0,5T^m$	(1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1)	0,2460	0,4220	3,02/0,07	3,45
$0,6T^m$	(1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1)	0,4963	0,6130	1,49/0,07	3,45
$0,7T^m$	(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1)	0,6059	0,7242	0,64/0,07	3,46
$0,8T^m$	(1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1)	0,7216	0,7876	0,63/0,07	3,41
$0,9T^m$	(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)	0,7965	0,8007	0,14/0,07	3,42

Аналогично в табл. 2 приведены решения задач (7) и (8). Указано время счета при использовании модификаций алгоритмов 2 и 1. Все расчеты проводились на компьютере Acer Aspire A315-54K (Intel Core i5-6300U 2.4 GHz, 8Gb RAM).

Из приведенных таблиц видно преимущество использования позиционных стратегий по сравнению с программными не только с точки зрения оптимального значения целевого функционала, но и с точки зрения скорости вычислений. Если сравнить постановку (4) с постановкой из [11], то можно отметить, что, как правило, решение задачи (4) предполагает большее количество решаемых задач и большее значение целевого функционала. Это связано с тем, что в задаче (4) не требуется уложиться в лимит времени.

Как отмечалось ранее, решение задач (4) и (5) зависит от порядка тестовых заданий. Поэтому были проведены дополнительные вычисления стратегий прохождения того же теста, но с обратным порядком задач, т.е. первой задачей теста считалась десятая задача рассмотренного выше теста, второй задачей являлась девятая задача предыдущего теста и т.д. Баллы, присуждаемые за задания, и вероятности решения заданий остались такими же. Результаты решения этой задачи приведены в табл. 3. Для удобства сравнения таблиц компоненты оптимальных программных стратегий выведены в обратном порядке. Время счета в этой таблице не указано, поскольку оно незначительно отличается от времени счета, указанного в табл. 1. Сравнение полученных решений показывает, что значения критериальных функций незначительно изменились при изменении порядка задач, а программная стратегия отличается для ограничений по времени  $0,4T^m$  и  $0,6T^m$ .

**Таблица 3.** Зависимость решений задач (4) и (5) от параметра  $\bar{T}$  при  $\varphi = 11$  при обратном порядке заданий

$\bar{T}$	Оптимальная программная стратегия $(u_{10}^*, \dots, u_1^*)$	$P_{\varphi, \bar{T}}^1(u^*)$	$\max_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} P_{\varphi, \bar{T}}^2(\mathbf{u})$
$0,4T^m$	(1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1)	0,1639	0,1787
$0,5T^m$	(1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1)	0,3526	0,3834
$0,6T^m$	(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1)	0,5340	0,5718
$0,7T^m$	(1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1)	0,6781	0,7003
$0,8T^m$	(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)	0,7824	0,7847
$0,9T^m$	(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)	0,8007	0,8007

## 6. Заключение

В работе решены задачи поиска программной и позиционной стратегий прохождения ограниченного по времени теста в условиях доступности тестируемому информации о количестве набранных за тест баллов после решения каждого очередного задания. Продемонстрирована эффективность предложенных алгоритмов решения. Проведен сравнительный анализ полученных результатов с результатами решения ранее рассматриваемой одним из ав-

торов постановки задачи. Анализ показал, что доступность тестируемому в процессе прохождения теста информации о количестве набранных баллов после решения каждого задания позволяет предложить стратегию прохождения теста, существенно повышающую вероятность превышения суммарным количеством набранных за тест баллов требуемого уровня.

В дальнейшем могут быть рассмотрены различные модификации изученной модели. В частности, может быть учтена зависимость результатов решения задач теста от набранного балла, возникающая вследствие психологических особенностей некоторых тестируемых. Требуется изучение возможности модификации уравнений Беллмана (11) в этом случае. Также представляют интерес использование непрерывных случайных величин для описания времени ответов на вопросы теста и исследование точности решения задачи при их дискретизации.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rasch G.* Probabilistic models for some intelligence and attainment tests. Chicago: The University of Chicago Press, 1980.
2. *Xiao J., Bulut O.* Item selection with collaborative filtering in On-the-fly multistage adaptive testing // *Appl. Psychol. Meas.* 2022. V. 46. No. 8. P. 690–704.
3. *Наумов А.В., Джумурат А.С., Иноземцев А.О.* Система дистанционного обучения математическим дисциплинам CLASS.NET // *Вест. компьют. и информ. технологий.* 2014. № 10. С. 36–40.
4. СДО МАИ CLASS.NET [Электронный ресурс] // URL: <http://www.https://distance.kaf804.ru/> (дата обращения: 12.10.2024.)
5. *Kuravsky L.S., Margolis A.A., Marmalyuk P.A., et al.* A Probabilistic Model of Adaptive Training // *Appl. Math. Sci. (Ruse).* 2016. V. 10. No. 48. P. 2369–2380.
6. *Босов А.В., Мартюшова Я.Г., Наумов А.В., Сапунова А.П.* Байесовский подход к построению индивидуальной траектории пользователя в системе дистанционного обучения // *Информатика и ее применения.* 2020. Т. 14. № 3. С. 86–93.
7. *Босов А.В.* Применение самоорганизующихся нейронных сетей к процессу формирования индивидуальной траектории обучения // *Информатика и ее применения.* 2022. Т. 16. № 3. С. 7–15.
8. *Van der Linden W.J., Scrams D.J., Schnipke D.L.* Using Response-Time Constraints to Control for Differential Speededness in Computerized Adaptive Testing // *Appl. Psych. Meast.* 1999. V. 23. No. 3. P. 195–210.
9. *Босов А.В., Мхитарян Г.А., Наумов А.В., Сапунова А.П.* Использование гамма-распределения в задаче формирования ограниченного по времени теста // *Информатика и ее применения.* 2019. Т. 13. № 4. С. 12–18.
10. *Наумов А.В., Мхитарян Г.А., Черыгова Е.Е.* Стохастическая постановка задачи формирования теста заданного уровня сложности с минимизацией квантили времени выполнения // *Вест. компьют. и информ. технологий.* 2019. № 2. С. 37–46.
11. *Наумов А.В., Степанов А.Е., Устинов А.Э.* О задаче максимизации вероятности успешного прохождения ограниченного по времени теста // *АиТ.* 2024. № 1. С. 83–94.

*Naumov A.V., Stepanov A.E., Ustinov A.E.* On the Problem of Maximizing the Probability of Successful Passing of a Time-Limited Test // Autom. Remote Control. 2024. V. 85. No. 1. P. 64–72.

12. *Мартюшова Я.Г., Наумов А.В., Степанов А.Е.* Оптимизация ограниченного по времени теста по квантильному критерию // Информатика и ее применения. 2024. Т. 18. № 4. С. 44–51.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.*

Поступила в редакцию 23.02.2025

После доработки 08.04.2025

Принята к публикации 12.04.2025

---

---

## СОДЕРЖАНИЕ

### Линейные системы

- Фуртат И.Б.** Обобщение теоремы о кругах Гершгорина с применением к анализу и синтезу систем управления.....3
- Хартовский В.Е., Метельский А.В., Карпук В.В.** Экспоненциальная стабилизация по неполным измерениям и асимптотическая оценка решения линейных систем нейтрального типа ..... 24

### Нелинейные системы

- Тхай В.Н.** Стабилизация колебаний в автономной скорректированной консервативной системе путем конструирования притягивающего цикла ..... 43

### Стохастические системы

- Борисов А.В.** Использование методов оптимальной фильтрации для пассивного мониторинга доступной пропускной способности сетевого канала ..... 61

### Управление в технических системах

- Архипова А.С., Вязьмин В.С.** Фильтр Калмана в задаче бескарданной аэрогравиметрии с учетом уточненной модели погрешностей спутниковых данных..... 86

### Управление в социально-экономических системах

- Гераськин М.И.** Информационное управление стратегией игрока в игре олигополии  $n$  лиц при рефлексивном поведении игроков ..... 102

### Оптимизация, системный анализ и исследование операций

- Иванов С.В., Степанов А.Е.** Оптимизация по вероятностному критерию в динамической модели прохождения теста.....118

## C O N T E N T S

### Linear Systems

- Furtat I.B.** Generalization of Gershgorin Circle Theorem with Application to Analysis and Design of Control Systems . . . . . 3
- Khartovskii V.E., Metel'skii A.V., Karpuk V.V.** Exponential Stabilization with Incomplete Measurements and Asymptotic Estimation of Solutions of Linear Systems of Neutral Type . . . . . 24

### Nonlinear Systems

- Tkhai V.N.** Stabilization of Oscillations in an Autonomous Corrected Conservative System by Constructing an Attracting Cycle . . . . . 43

### Stochastic Systems

- Borisov A.V.** Optimal Filtering Methods for Passive Monitoring of Available Bandwidth Estimation of Network Channel . . . . . 61

### Control in Technical Systems

- Arhipova A.S., Vyazmin V.S.** Kalman Filter in the Strapdown Airborne Gravimetry Problem Based on the Refined Model of GNSS Data Errors . . . . . 86

### Control in Social Economic Systems

- Geraskin M.I.** Information Control of Player Strategy in  $N$  Persons Oligopoly Game with Reflexive Behavior of Players . . . . . 102

### Optimization, System Analysis, and Operations Research

- Ivanov S.V., Stepanov A.E.** Optimization with Regard to Probabilistic Criterion in a Dynamic Model of Passing a Test . . . . . 118