

Стохастические системы

© 2025 г. С.Л. СЕМАКОВ, д-р физ.-мат. наук (slsemakov@yandex.ru)
(Научно-исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва;
Московский физико-технический институт)

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ, СВЯЗАННОЙ С МОМЕНТОМ ПЕРВОГО ДОСТИЖЕНИЯ ЗАДАННОГО УРОВНЯ СЛУЧАЙНЫМ ПРОЦЕССОМ

Рассматривается задача оценки вероятности события, состоящего в том, что первое достижение заданного уровня непрерывным случайным процессом произойдет в какой-либо момент из заданного промежутка изменения независимой переменной. Ранее полученные результаты общего характера конкретизируются для гауссовского гладкого процесса. Приводятся результаты численных расчетов оценок при различных параметрах процесса.

Ключевые слова: вероятность, случайный процесс, пересечение уровня.

DOI: 10.7868/S2413977725120053

1. Введение, постановка задачи и ранее полученные результаты

Пусть $\xi(x)$ – непрерывный с вероятностью 1 случайный процесс, y – заданное число. В качестве области определения процесса $\xi(t)$ будем рассматривать два промежутка: а) полуинтервал $(x_0, x'']$ или б) отрезок $[x_0, x'']$. В случае а) будем считать, что выполнено условие

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \mathbf{P}\{\xi(x) > y\} = 1,$$

причем в качестве x_0 может выступать как конечное число, так и $-\infty$. В случае б) будем считать, что выполнено условие $\mathbf{P}\{\xi(x_0) > y\} = 1$.

Рассмотрим произвольное значение $x' \in (x_0, x'')$. Определим событие

$$Z = \{\exists \tilde{x} \in (x', x'') \quad \forall x \in (x_0, \tilde{x}) \quad \xi(x) > y, \xi(\tilde{x}) = y\}$$

и событие

$$L = \{\exists \hat{x} \in (x_0, x'') \quad \forall x \in (x_0, \hat{x}) \quad \xi(x) > y\}.$$

Событие L означает, что в начальный момент траектория $\xi(x)$ расположена выше уровня y , а событие Z означает, что первое достижение уровня y происходит в некоторый момент из интервала (x', x'') (см. рис. 1). Требуется найти условную вероятность $\mathbf{P}\{Z|L\}$ события Z при условии, что произошло событие L .

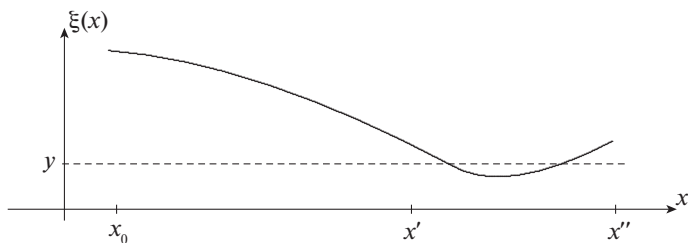


Рис. 1. Некоторая реализация процесса $\xi(x)$.

Сформулированная задача является частным случаем задачи, поставленной в [1]. Для немарковских гладких процессов она изучалась, в частности, в авторских публикациях [2–5], а связанные с ней задачи рассматривались во многих известных работах, например [6–13]. Более подробная библиография приведена в [5]. Для диффузионных марковских процессов данная задача может быть сведена к решению смешанной задачи для уравнения в частных производных, что было показано еще в [1]. В настоящей работе, как и в [2–5], рассматривается случай немарковского гладкого случайного процесса $\xi(x)$. При этом в [2] – в отличие от [3–5] – предлагается несколько другая процедура формирования нижних оценок искомой вероятности. Настоящая работа продолжает работу [2].

В приложениях поставленная задача возникает при изучении различных стохастических систем (см., например, [14]). Для констатации ее практической важности достаточно упомянуть, что к решению этой задачи сводится проблема вероятностной оценки точности и безопасности посадки самолета (см. [15–19]).

Следуя [10], обозначим через $G_y(x_0, x'')$ множество скалярных функций, непрерывных на $[x_0, x'']$ или (x_0, x'') (в зависимости от того, на каком промежутке – $[x_0, x'']$ или (x_0, x'') – определен процесс $\xi(x)$) и таких, которые не совпадают тождественно с y ни на каком подынтервале интервала (x_0, x'') . Для функций из $G_y(x_0, x'')$ определим понятия “пересечение уровня y ”, “касание уровня y ”, “пересечение уровня y снизу вверх” (upcrossing по терминологии, предложенной в [10]) и “пересечение уровня y сверху вниз” (downcrossing по терминологии, предложенной в [10]) так, как это сделано в [10].

Если¹ 1) с вероятностью 1 выборочные функции $\xi(x)$ принадлежат множеству $G_y(x_0, x'')$ и не имеют касаний уровня y , 2) среднее² число пересечений $N(x_0, x'')$ уровня y процессом $\xi(x)$ на интервале (x_0, x'') конечно, то, принимая во внимание условие (1), нетрудно показать, что $\mathbf{P}\{Z|L\} = \mathbf{P}\{Z\}$, т.е. вместо оценок условной вероятности $\mathbf{P}\{Z|L\}$ можно заниматься оценками безусловной вероятности $\mathbf{P}\{Z\}$.

¹ Достаточные условия выполнения предположений 1) и 2) сформулированы в [2].

² Термин “среднее” здесь означает математическое ожидание соответствующей случайной величины.

Для процесса $\xi(x)$ обозначим через $N^+(x_1, x_2)$ среднее число пересечений уровня y снизу вверх на интервале (x_1, x_2) , а через $N^-(x_1, x_2)$ – среднее число пересечений сверху вниз. Через $m_y(x_1, x_2)$ обозначим среднее число локальных максимумов процесса $\xi(x)$ на интервале (x_1, x_2) , расположенных выше уровня y . В [2] получен следующий результат.

Теорема. Предположим, что 1) с вероятностью 1 выборочные функции $\xi(x)$ принадлежат множеству $G_y(x_0, x'')$ и не имеют касаний уровня y на интервале (x_0, x'') , $N(x_0, x'') < \infty$; 2) $\mathbf{P}\{\xi(x') = y\} = 0$; 3) условие (1) выполнено. Пусть x^ – какая-либо точка из интервала (x_0, x'') такая, что $\mathbf{P}\{\xi(x^*) = y\} = 0$, $m_y(x^*, x'') < \infty$. Тогда*

$$N^-(x', x'') - \left(N^+(x_0, x^*) + m_y(x^*, x'') \right) \leq \mathbf{P}\{Z\} \leq N^-(x', x'').$$

Если процесс $\xi(x)$ дифференцируем в среднеквадратичном, то числа $N^-(x_1, x_2)$, $N^+(x_1, x_2)$ и $m_y(x_1, x_2)$ могут быть вычислены по формулам Райса (см., например, [6, 8, 10]):

$$(2) \quad N^-(x_1, x_2) = - \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{-\infty}^0 v f_x(y, v) dv,$$

$$(3) \quad N^+(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_0^{\infty} v f_x(y, v) dv,$$

$$(4) \quad m_y(x_1, x_2) = - \int_{x_1}^{x_2} dx \int_y^{\infty} du \int_{-\infty}^0 z w_x(u, 0, z) dz,$$

где $f_x(u, v)$ – плотность совместного распределения случайных величин $\xi(x)$ и $\xi'(x)$, $w_x(u, v, z)$ – плотность совместного распределения случайных величин $\xi(x)$, $\xi'(x)$ и $\xi''(x)$. Здесь через $\xi'(x)$ и $\xi''(x)$ обозначены первая и вторая производные в среднеквадратичном процесса $\xi(x)$.

2. Конкретизация для гауссовского процесса

Пусть процесс $\xi(x)$ определяется формулой

$$\xi(x) = a_1 x + a_0 + \eta(x), \quad x \in (-\infty, x''],$$

где $a_1 < 0$ и a_0 являются постоянными величинами, $\eta(x)$ – стационарный центрированный гауссовский процесс с непрерывными реализациями и корреляционной функцией

$$r(\tau) \equiv \mathbf{E}\{\eta(x)\eta(x+\tau)\}/\sigma^2,$$

где σ^2 – дисперсия процессов $\xi(x)$ и $\eta(x)$, $\mathbf{E}$ – знак математического ожидания. Если существует конечная вторая производная $r''(0)$, то процесс $\xi(x)$

будет дифференцируем в среднеквадратичном и можно использовать формулы Райса (2) и (3) для вычисления чисел N^- и N^+ . Если существует конечная четвертая производная $r^{IV}(0)$, то процесс $\xi(x)$ будет дважды дифференцируем в среднеквадратичном и число m_y может быть вычислено по формуле Райса (4).

В рассматриваемом случае условия теоремы выполнены, и для любого x^* из интервала $(-\infty, x'')$ справедливы неравенства

$$(5) \quad N^-(x', x'') - \left(N^+(-\infty, x^*) + m_y(x^*, x'') \right) \leq \mathbf{P}\{Z\} \leq N^-(x', x''),$$

где $N^+(-\infty, x^*) = \lim_{x \rightarrow -\infty} N^+(x, x^*)$.

Обозначим через σ_1^2 дисперсию процесса $\xi'(x)$, через σ_2^2 – дисперсию процесса $\xi''(x)$, через ρ – коэффициент корреляции случайных величин $\xi(x)$ и $\xi''(x)$. Заметим, что

$$\sigma_1^2 = -\sigma^2 r''(0), \quad \sigma_2^2 = \sigma^2 r^{IV}(0), \quad \rho = r''(0)/\sqrt{r^{IV}(0)}.$$

Из этих соотношений следует, что в невырожденном случае (т.е. когда $\sigma \neq 0$, $\sigma_1 \neq 0$ и $\sigma_2 \neq 0$), который и рассматривается, коэффициент корреляции ρ может принимать только отрицательные значения.

Для рассматриваемого процесса $\xi(x)$ формулы для $f_x(u, v)$ и $w_x(u, v, z)$ принимают следующий вид³:

$$(6) \quad f_x(u, v) = \frac{1}{2\pi\sigma\sigma_1} \exp \left\{ -\frac{(u - a_0 - a_1x)^2}{2\sigma^2} - \frac{(v - a_1)^2}{2\sigma_1^2} \right\},$$

$$(7) \quad w_x(u, v, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp \left\{ -\frac{(v - a_1)^2}{2\sigma_1^2} \right\} \frac{1}{2\pi\sigma\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(u - a_0 - a_1x)^2}{\sigma^2} - 2\rho \frac{(u - a_0 - a_1x)z}{\sigma\sigma_2} + \frac{z^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}.$$

Пусть для определенности $y = 0$, $a_0 = 0$ и $x'' > 0$ (см. рис. 2). Тогда событие Z означает, что первое достижение нулевого уровня процессом $\xi(x) = a_1x + \eta(x)$ произойдет в какой-либо точке из интервала (x', x'') .

Введем параметры⁴

$$\alpha = -a_1/\sigma_1 \quad \text{и} \quad \beta = -a_1x''/\sigma.$$

³ Поскольку процесс $\xi(x)$ – гауссовский, то плотности распределения $f_x(u, v)$ и $w_x(u, v, z)$ будут гауссовскими (см., например, [10, 15]), т.е. $f_x(u, v)$ – двумерная, а $w_x(u, v, z)$ – трехмерная гауссовские плотности распределения. При этом при любом x коэффициент корреляции случайных величин $\xi(x)$ и $\xi'(x)$ и коэффициент корреляции случайных величин $\xi'(x)$ и $\xi''(x)$ равны нулю в силу стационарности процесса $\eta(x)$ (см., например, [14, 15]). Эти обстоятельства и приводят к формулам (6) и (7).

⁴ Физический смысл параметра α состоит в том, что по его величине можно судить, насколько сильно в среднем наклон реализаций процесса $\xi(x)$ отличается от наклона его математического ожидания $\mathbf{E}\{\xi(x)\}$: при малых α это отличие велико, а при больших – мало.

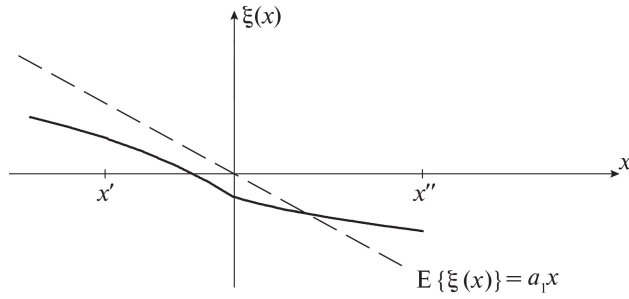


Рис. 2. Пересечение нулевого уровня $y = 0$ некоторой реализацией процесса $\xi(x)$ и его математическим ожиданием $\mathbf{E}\{\xi(x)\}$ при $a_0 = 0$.

Тогда (см. Приложение) по формулам (2), (3) и (4) получим

$$(2') \quad N^-(x', x'') = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha} \exp\left\{-\frac{\alpha^2}{2}\right\} + \Phi(\alpha) \right] \left[\Phi(\beta) - \Phi\left(\beta \frac{x'}{x''}\right) \right],$$

$$(3') \quad N^+(-\infty, x^*) = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha} \exp\left\{-\frac{\alpha^2}{2}\right\} - \Phi(-\alpha) \right] \Phi\left(\beta \frac{x^*}{x''}\right),$$

$$(4') \quad m_y(x^*, x'') = -\frac{\beta}{2\pi\rho\alpha} \exp\left\{-\frac{\alpha^2}{2}\right\} \times \\ \times \int_{x^*/x''}^1 \left[\Phi\left(-\frac{\beta}{\sqrt{1-\rho^2}}v\right) - \rho\Phi\left(-\frac{\rho\beta v}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \exp\left\{-\frac{\beta^2 v^2}{2}\right\} \right] dv,$$

где введено следующее обозначение:

$$(8) \quad \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\{-x^2/2\} dx.$$

3. Исследование точности оценок вероятности

Перепишем неравенства (5) в следующей форме:

$$N^-(x', x'') - f(x^*) \leq \mathbf{P}\{Z\} \leq N^-(x', x''),$$

где

$$f(x^*) = N^+(-\infty, x^*) + m_y(x^*, x''), \quad x^* \in (-\infty, x'').$$

Введем безразмерную переменную $w = x^*/x''$. Тогда оценки (5) примут вид

$$(5') \quad N^-(x', x'') - f(w) \leq \mathbf{P}\{Z\} \leq N^-(x', x''),$$

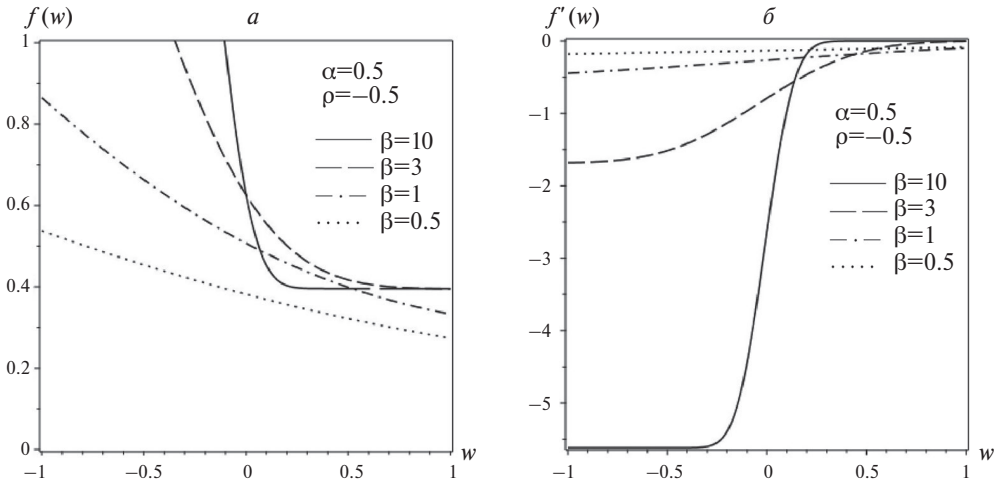


Рис. 3. *a* – кривые $f(w)$ при различных β в случае $\alpha = 0,5$ и $\rho = -0,5$; *б* – кривые $f'(w)$ при различных β в случае $\alpha = 0,5$ и $\rho = -0,5$.

где $w \in (-\infty, 1]$ и

$$f(w) = N^+(-\infty, w) + m_y(w, 1),$$

$$N^+(-\infty, w) = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} \exp\left\{-\frac{\alpha^2}{2}\right\} - \Phi(-\alpha) \right] \Phi(\beta w),$$

$$m_y(w, 1) = -\frac{\beta}{2\pi\rho\alpha} \exp\left\{-\frac{\alpha^2}{2}\right\} \int_w^1 \left[\Phi\left(-\frac{\beta}{\sqrt{1-\rho^2}}v\right) - \right. \\ \left. - \rho\Phi\left(-\frac{\rho\beta v}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \exp\left\{-\frac{\beta^2 v^2}{2}\right\} \right] dv.$$

Исследуем поведение функции $f(w)$ на интервале $(-\infty, 1]$. Чем меньше значения $f(w)$, тем более точные оценки вероятности $\mathbf{P}\{Z\}$ дают неравенства (5').

Будем исследовать поведение функции $f(w)$ в зависимости от трех параметров: α , β и ρ . Интерес представляет промежуток $w \in [-1, 1]$, поскольку, принимая во внимание физический смысл чисел $N^+(-\infty, w)$ и $m_y(w, 1)$, ясно, что при $w < -1$ функция $f(w)$ будет монотонно убывающей, так что минимальные значения $f(w)$ будут достигаться при $w > -1$.

На рис. 3, *a* показано поведение функции $f(w)$ при различных β для $\alpha = 0,5$ и $\rho = -0,5$. Оказалось, что для любой комбинации параметров α , β и ρ функция $f(w)$ является монотонно убывающей на промежутке $(-\infty, 1]$. Этот вывод следует из анализа производной $f'(w)$. Используя известную формулу для производной определенного интеграла с переменными пределами

$$\frac{d}{dt} \int_{\phi_1(t)}^{\phi_2(t)} h(v) dv = -h(\phi_1(t)) \frac{d\phi_1(t)}{dt} + h(\phi_2(t)) \frac{d\phi_2(t)}{dt},$$

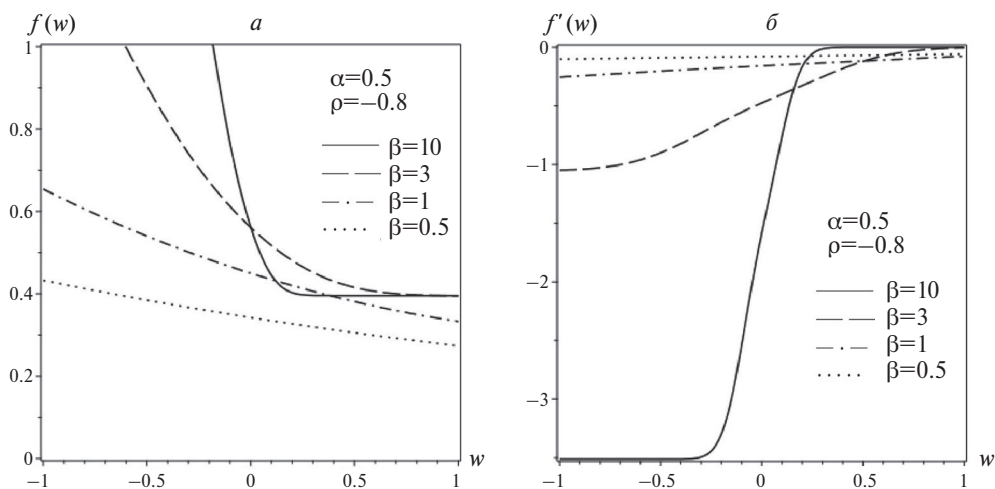


Рис. 4. а – кривые $f(w)$ при различных β в случае $\alpha = 0,5$ и $\rho = -0,8$; б – кривые $f'(w)$ при различных β в случае $\alpha = 0,5$ и $\rho = -0,8$.

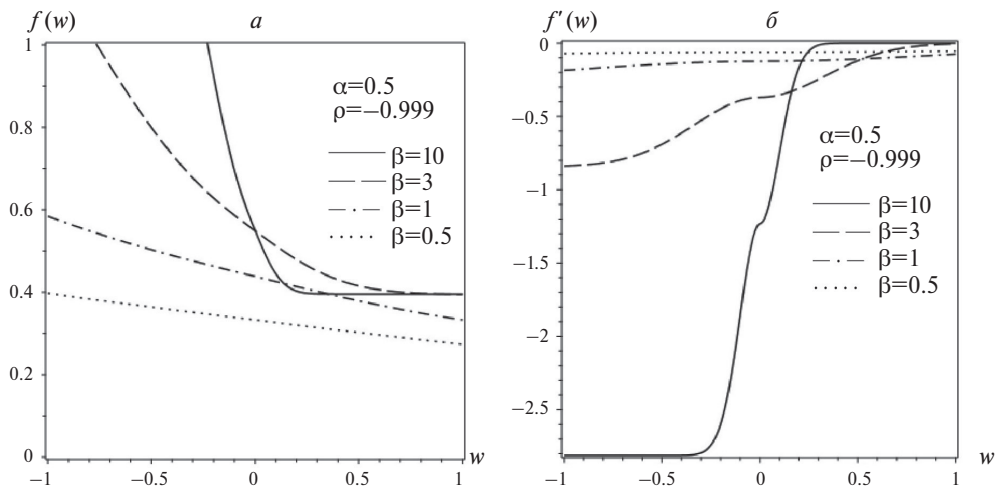


Рис. 5. а – кривые $f(w)$ при различных β в случае $\alpha = 0,5$ и $\rho = -0,999$; б – кривые $f'(w)$ при различных β в случае $\alpha = 0,5$ и $\rho = -0,999$.

получим следующее выражение для производной функции $f(w)$:

$$\begin{aligned} \frac{df(w)}{dw} = & \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha} \exp\left\{-\frac{\alpha^2}{2}\right\} - \Phi(-\alpha) \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\beta^2 w^2}{2}\right\} \beta + \\ & + \frac{\beta}{2\pi\rho\alpha} \exp\left\{-\frac{\alpha^2}{2}\right\} \left[\Phi\left(-\frac{\beta w}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) - \rho\Phi\left(-\frac{\rho\beta w}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \exp\left\{-\frac{\beta^2 w^2}{2}\right\} \right]. \end{aligned}$$

На рис. 3,б показано поведение производной $f'(w)$ при различных β для $\alpha = 0,5$ и $\rho = -0,5$. Численные расчеты показали, что $f'(w) < 0$ при всех

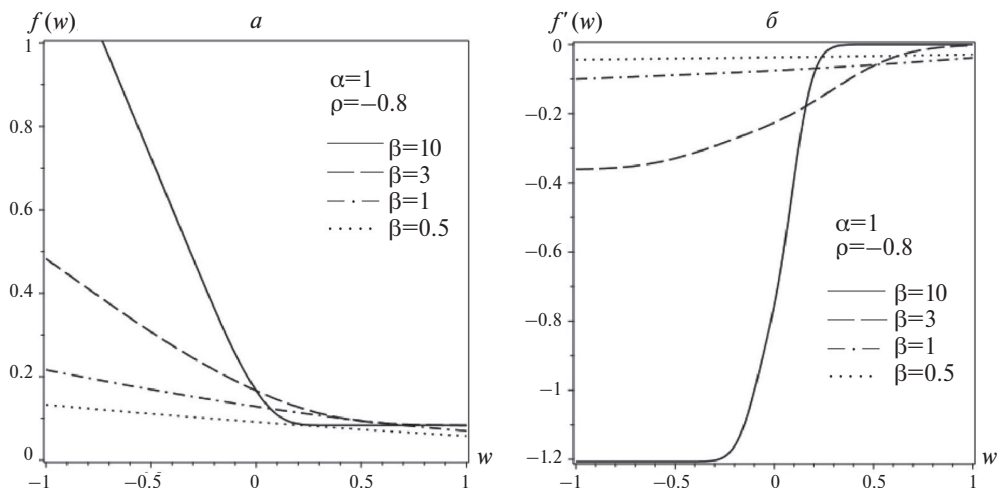


Рис. 6. *а* – кривые $f(w)$ при различных β в случае $\alpha = 1$ и $\rho = -0,8$; *б* – кривые $f'(w)$ при различных β в случае $\alpha = 1$ и $\rho = -0,8$.

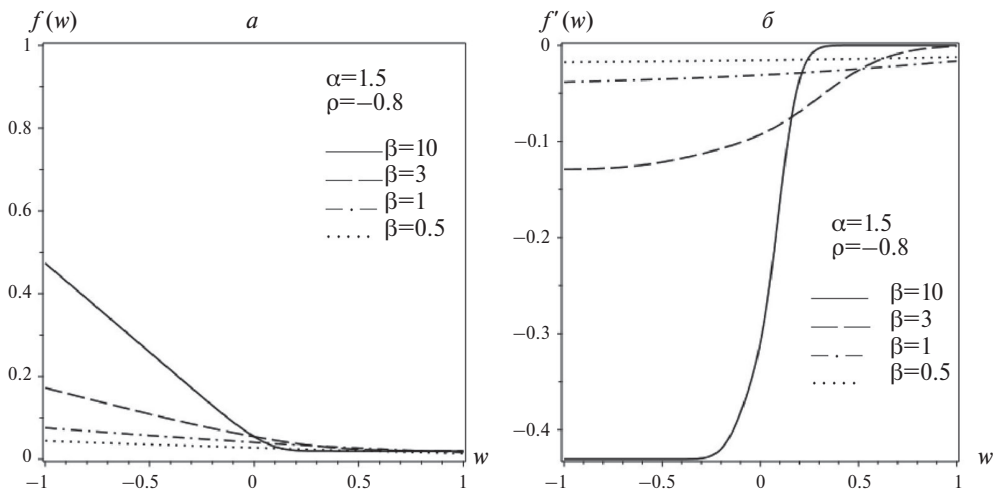


Рис. 7. *а* – кривые $f(w)$ при различных β в случае $\alpha = 1,5$ и $\rho = -0,8$; *б* – кривые $f'(w)$ при различных β в случае $\alpha = 1,5$ и $\rho = -0,8$.

$w \in (-\infty, 1]$. Так что минимальные значения функции $f(w)$ достигаются при $w = 1$. Но при этом характер изменения производной $f'(w)$ может сильно зависеть от параметров α , β и ρ . Например, при $\beta = 10$ значения $f'(w)$ ничтожно малы на промежутке от 0,5 до 1, так что $f(w)$ практически не зависит от w на этом промежутке.

Сравнение рис. 3,*а*, 4,*а* и 5,*а* показывает, как поведение функции $f(w)$ изменяется в зависимости от изменения коэффициента корреляции ρ : $\rho = -0,5$ для рис. 3,*а*, $\rho = -0,8$ для рис. 4,*а* и $\rho = -0,999$ для рис. 5,*а*. Рисунки 3,*б*, 4,*б* и 5,*б* показывают, как изменяются соответствующие производные

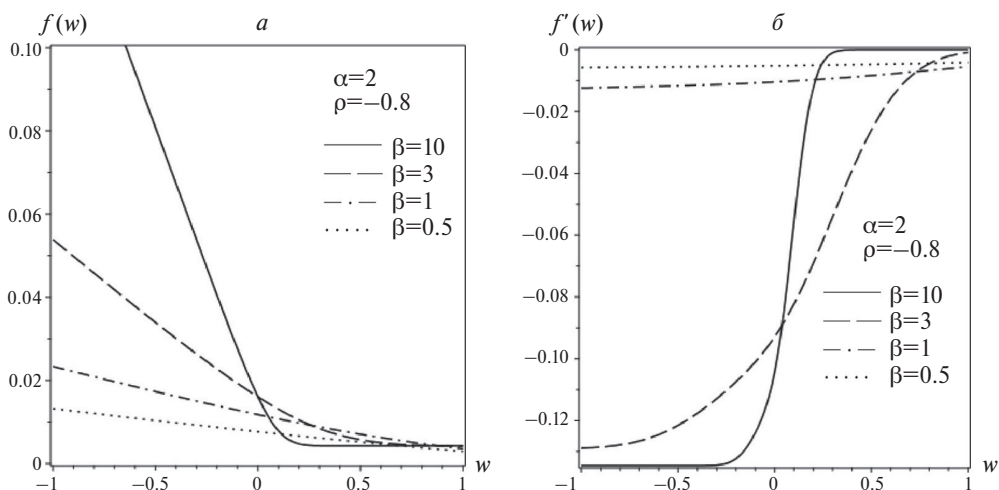


Рис. 8. *a* – кривые $f(w)$ при различных β в случае $\alpha = 2$ и $\rho = -0,8$; *б* – кривые $f'(w)$ при различных β в случае $\alpha = 2$ и $\rho = -0,8$.

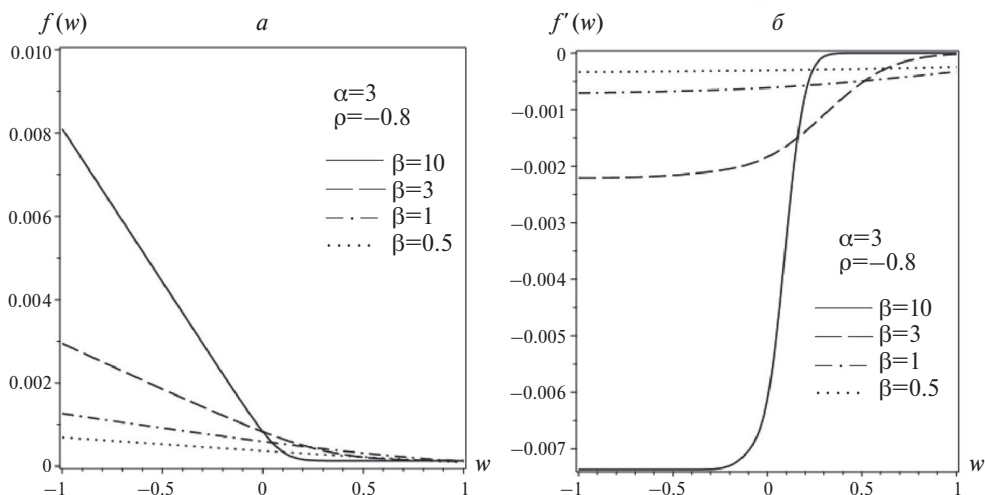


Рис. 9. *a* – кривые $f(w)$ при различных β в случае $\alpha = 3$ и $\rho = -0,8$; *б* – кривые $f'(w)$ при различных β в случае $\alpha = 3$ и $\rho = -0,8$.

водные $f'(w)$. Если w близко к 1, то значения $f(w)$ изменяются очень слабо. Если w меньше 1, то значения $f(w)$ уменьшаются при переходе $\{\rho = -0,5\} \rightarrow \{\rho = -0,8\} \rightarrow \{\rho = -0,999\}$, и это уменьшение тем значительнее, чем меньше w . Причем данный вывод имеет место при всех β .

Сравнение рис. 4,*a*, 6,*a*, 8,*a* и 9,*a* показывает, как изменяется поведение функции $f(w)$ при изменении параметра α : $\alpha = 0,5$ для рис. 4,*a*, $\alpha = 1$ для рис. 6,*a*, $\alpha = 1,5$ для рис. 7,*a*, $\alpha = 2$ для рис. 8,*a* и $\alpha = 3$ для рис. 9,*a*. Рисунки 4,*б*, 6,*б*, 7,*б*, 8,*б* и 9,*б* показывают, как изменяются соответствующие значения $f'(w)$. Видно, что при любом фиксированном β увеличение α приво-

дит к уменьшению $f(w)$. Если $\alpha = 3$ (см. рис. 9,а), то значения $f(w)$ меньше, чем 0,008, для $\beta = 10$ и $\beta = 3$ и меньше, чем 0,001, для $\beta = 1$ и $\beta = 0,5$. Для всех рассматриваемых комбинаций значений параметров α , β и ρ минимальное значение функции $f(w)$ достигается при $w = 1$. Отметим также, что при $\alpha > 3$ значения $f(w)$ являются пренебрежимо малыми. В этом случае неравенства (5') позволяют определить вероятность $\mathbf{P}\{Z\}$ практически точно.

При проведении численных расчетов использовался пакет Maple.

4. Заключение

Для стационарного со сном гауссовского процесса $\xi(x)$ специального вида проведен численный анализ полученных в [2] оценок (5) для вероятности $\mathbf{P}\{Z\}$, а именно исследована точность этих оценок в зависимости от выбора точки x^* и параметров α , β и ρ , характеризующих процесс $\xi(x)$. Точность оценок даётся величиной $f(w)$, $w \in (-\infty, 1]$ (см. (5')), где значение w однозначно определяется выбором точки x^* . Чем меньше $f(w)$, тем точнее определяется искомая вероятность $\mathbf{P}\{Z\}$. Оказалось, что для *гауссовских* процессов минимальное значение $f(w)$ получается при $w = 1$ для любой комбинации параметров α , β и ρ . Значения $f(w)$ сильно зависят от параметра α : чем больше α , тем меньше $f(w)$. Если $\alpha > 3$, то значения $f(w)$ являются пренебрежимо малыми и вероятность $\mathbf{P}\{Z\}$ определяется практически точно.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Найдем число $N^+(x_1, x_2)$ по формуле (3), подставив вместо плотности $f_x(u, v)$ ее выражение по формуле (6) при $u = y$. Имеем:

$$N^+(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma\sigma_1} \int_{x_1}^{x_2} \exp \left\{ -\frac{(y - a_0 - a_1x)^2}{2\sigma^2} \right\} dx \int_0^\infty v \exp \left\{ -\frac{(v - a_1)^2}{2\sigma_1^2} \right\} dv.$$

Оба интеграла здесь легко вычисляются:

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} \exp \left\{ -\frac{(y - a_0 - a_1x)^2}{2\sigma^2} \right\} dx = \\ & = -\frac{\sigma}{a_1} \sqrt{2\pi} \left[\Phi \left(\frac{y - a_0 - a_1x_2}{\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{y - a_0 - a_1x_1}{\sigma} \right) \right], \\ & \int_0^\infty v \exp \left\{ -\frac{(v - a_1)^2}{2\sigma_1^2} \right\} dv = \sigma_1^2 \exp \left\{ -\frac{a_1^2}{2\sigma_1^2} \right\} + \sqrt{2\pi} a_1 \sigma_1 \Phi \left(\frac{a_1}{\sigma_1} \right), \end{aligned}$$

где функция $\Phi(\cdot)$ ранее введена равенством (8). В результате получим:

$$\begin{aligned} N^+(x_1, x_2) &= \left[\frac{\sigma_1}{\sqrt{2\pi} a_1} \exp \left\{ -\frac{a_1^2}{2\sigma_1^2} \right\} + \Phi \left(\frac{a_1}{\sigma_1} \right) \right] \times \\ &\times \left[\Phi \left(\frac{y - a_0 - a_1x_1}{\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{y - a_0 - a_1x_2}{\sigma} \right) \right]. \end{aligned}$$

Если в этой формуле положить $y = 0$ и $a_0 = 0$, заменить (переобозначить) x_2 на x^* , ввести обозначения $\alpha = -a_1/\sigma_1$ и $\beta = -a_1x''/\sigma$ (как в основном тексте статьи), учесть, что $a_1 < 0$, то при $x_1 \rightarrow -\infty$ получим формулу (3').

Аналогично, подставляя вместо плотности $f_x(u, v)$ ее выражение по формуле (6) при $u = y$, по формуле (2) находим число $N^-(x_1, x_2)$:

$$N^-(x_1, x_2) = \left[\frac{\sigma_1}{\sqrt{2\pi}a_1} \exp \left\{ -\frac{a_1^2}{2\sigma_1^2} \right\} - \Phi \left(-\frac{a_1}{\sigma_1} \right) \right] \times \\ \times \left[\Phi \left(\frac{y - a_0 - a_1x_1}{\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{y - a_0 - a_1x_2}{\sigma} \right) \right].$$

Если в этой формуле положить $y = 0$ и $a_0 = 0$, x_1 и x_2 заменить (переобозначить) на x' и x'' , ввести обозначения $\alpha = -a_1/\sigma_1$ и $\beta = -a_1x''/\sigma$ (как в основном тексте статьи), то получим формулу (2').

Найдем теперь по формуле (4) число $m_y(x_1, x_2)$, когда плотность $w_x(u, 0, z)$ вычисляется по формуле (7) при $v = 0$. Вводя новые переменные $\tilde{u} = u - a_0 - a_1x$, $\tilde{z} = z$, $\tilde{x} = x$, получим

$$m_y(x_1, x_2) = - \int_{x_1}^{x_2} d\tilde{x} \int_{y-a_0-a_1\tilde{x}}^{\infty} d\tilde{u} \int_{-\infty}^0 \frac{\tilde{z}}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp \left\{ -\frac{a_1^2}{2\sigma_1^2} \right\} \times \\ \times \frac{1}{2\pi\sigma\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{\tilde{u}^2}{\sigma^2} - 2\rho \frac{\tilde{u}\tilde{z}}{\sigma\sigma_2} + \frac{\tilde{z}^2}{\sigma_2^2} \right] \right\} d\tilde{z}.$$

После еще одной замены $\bar{u} = \tilde{u}/\sigma$, $\bar{z} = \tilde{z}/\sigma_2$, $\bar{x} = \tilde{x}$ найдем

$$m_y(x_1, x_2) = - \int_{x_1}^{x_2} d\bar{x} \int_{\frac{y-a_0-a_1\bar{x}}{\sigma}}^{\infty} \sigma d\bar{u} \int_{-\infty}^0 \frac{\sigma_2\bar{z}}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp \left\{ -\frac{a_1^2}{2\sigma_1^2} \right\} \times \\ \times \frac{1}{2\pi\sigma\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{\bar{u}^2 - 2\rho\bar{u}\bar{z} + \bar{z}^2}{2(1-\rho^2)} \right\} \sigma_2 d\bar{z} = \\ = -\frac{\sigma_2(1-\rho^2)^{-\frac{1}{2}}}{2\pi\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp \left\{ -\frac{a_1^2}{2\sigma_1^2} \right\} \int_{x_1}^{x_2} d\bar{x} \int_{\frac{y-a_0-a_1\bar{x}}{\sigma}}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\bar{u}^2}{2(1-\rho^2)} \right\} d\bar{u} \times \\ \times \int_{-\infty}^0 \bar{z} \exp \left\{ -\frac{\bar{z}^2 - 2\rho\bar{u}\bar{z}}{2(1-\rho^2)} \right\} d\bar{z}.$$

Преобразуем показатель экспоненты в последнем интеграле:

$$-\frac{\bar{z}^2 - 2\rho\bar{u}\bar{z}}{2(1-\rho^2)} = -\frac{(\bar{z} - \rho\bar{u})^2 - \rho^2\bar{u}^2}{2(1-\rho^2)},$$

после чего сделаем замену переменных

$$\lambda = \bar{u}, \quad \mu = \bar{z} - \rho\bar{u}, \quad \tau = \bar{x}.$$

Получим

$$\begin{aligned} m_y(x_1, x_2) &= -\frac{\sigma_2(1-\rho^2)^{-\frac{1}{2}}}{2\pi\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{a_1^2}{2\sigma_1^2}\right\} \times \\ &\times \int_{x_1}^{x_2} d\tau \int_{\frac{y-a_0-a_1\tau}{\sigma}}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2(1-\rho^2)}\right\} d\lambda \int_{-\infty}^{-\rho\lambda} (\mu + \rho\lambda) \exp\left\{-\frac{\mu^2 - \rho^2\lambda^2}{2(1-\rho^2)}\right\} d\mu = \\ &= -\frac{\sigma_2(1-\rho^2)^{-\frac{1}{2}}}{2\pi\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{a_1^2}{2\sigma_1^2}\right\} \int_{x_1}^{x_2} d\tau \int_{\frac{y-a_0-a_1\tau}{\sigma}}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2}\right\} d\lambda \times \\ &\times \int_{-\infty}^{-\rho\lambda} (\mu + \rho\lambda) \exp\left\{-\frac{\mu^2}{2(1-\rho^2)}\right\} d\mu. \end{aligned}$$

Обозначим внутренний интеграл по μ через $g(\lambda)$ и вычислим его:

$$\begin{aligned} g(\lambda) &\equiv \int_{-\infty}^{-\rho\lambda} (\mu + \rho\lambda) \exp\left\{-\frac{\mu^2}{2(1-\rho^2)}\right\} d\mu = \\ &= -(1-\rho^2) \exp\left\{-\frac{\rho\lambda^2}{2(1-\rho^2)}\right\} + \rho\lambda \int_{-\infty}^{-\rho\lambda} \exp\left\{-\frac{\mu^2}{2(1-\rho^2)}\right\} d\mu, \end{aligned}$$

или, используя введенную выше функцию $\Phi(\cdot)$,

$$g(\lambda) = -(1-\rho^2) \exp\left\{-\frac{\rho\lambda^2}{2(1-\rho^2)}\right\} + \sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\rho\lambda\Phi\left(-\frac{\rho\lambda}{\sqrt{1-\rho^2}}\right).$$

Таким образом,

$$(II.1) \quad m_y(x_1, x_2) = -\frac{\sigma_2(1-\rho^2)^{-\frac{1}{2}}}{2\pi\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{a_1^2}{2\sigma_1^2}\right\} \int_{x_1}^{x_2} I(\tau) d\tau,$$

где обозначено

$$\begin{aligned} I(\tau) &= I_1(\tau) + I_2(\tau), \\ I_1(\tau) &= \int_{\frac{y-a_0-a_1\tau}{\sigma}}^{\infty} -(1-\rho^2) \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2(1-\rho^2)}\right\} d\lambda, \\ I_2(\tau) &= \int_{\frac{y-a_0-a_1\tau}{\sigma}}^{\infty} \sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\rho\lambda \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2}\right\} \Phi\left(-\frac{\rho\lambda}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) d\lambda. \end{aligned}$$

Используя формулу интегрирования по частям, приводим $I_2(\tau)$ к виду

$$I_2(\tau) = \sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\rho\Phi\left(-\frac{\rho(y-a_0-a_1\tau)}{\sigma\sqrt{1-\rho^2}}\right)\exp\left\{-\frac{(y-a_0-a_1\tau)^2}{2\sigma^2}\right\} - \\ - \rho^2 \int_{\frac{y-a_0-a_1\tau}{\sigma}}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2(1-\rho^2)}\right\}d\lambda,$$

что позволяет для $I(\tau)$ выписать следующее равенство:

$$I(\tau) = - \int_{\frac{y-a_0-a_1\tau}{\sigma}}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2(1-\rho^2)}\right\}d\lambda + \\ + \sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\rho\Phi\left(-\frac{\rho(y-a_0-a_1\tau)}{\sigma\sqrt{1-\rho^2}}\right)\exp\left\{-\frac{(y-a_0-a_1\tau)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Выражая здесь первое слагаемое через введенную выше функцию $\Phi(\cdot)$, найдем

$$- \int_{\frac{y-a_0-a_1\tau}{\sigma}}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2(1-\rho^2)}\right\}d\lambda = -\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\left[1 - \Phi\left(\frac{y-a_0-a_1\tau}{\sigma\sqrt{1-\rho^2}}\right)\right],$$

откуда в соответствии с (П.1) получаем для $m_y(x_1, x_2)$ следующее равенство:

$$m_y(x_1, x_2) = -\frac{\sigma_2}{2\pi\sigma_1}\exp\left\{-\frac{a_1^2}{2\sigma_1^2}\right\} \times \\ \times \int_{x_1}^{x_2} \left[-1 + \Phi\left(\frac{y-a_0-a_1\tau}{\sigma\sqrt{1-\rho^2}}\right) + \right. \\ \left. + \rho\Phi\left(-\frac{\rho(y-a_0-a_1\tau)}{\sigma\sqrt{1-\rho^2}}\right)\exp\left\{-\frac{(y-a_0-a_1\tau)^2}{2\sigma^2}\right\} \right] d\tau.$$

Полагая здесь $y = 0$ и $a_0 = 0$, переобозначив x_1 на x^* и x_2 на x'' , а также учитывая тождество $1 - \Phi(z) = \Phi(-z)$, найдем

$$m_y(x^*, x'') = \frac{\sigma_2}{2\pi\sigma_1}\exp\left\{-\frac{a_1^2}{2\sigma_1^2}\right\} \times \\ \times \int_{x^*}^{x''} \left[\Phi\left(\frac{a_1\tau}{\sigma\sqrt{1-\rho^2}}\right) - \rho\Phi\left(\frac{\rho a_1\tau}{\sigma\sqrt{1-\rho^2}}\right)\exp\left\{-\frac{(a_1\tau)^2}{2\sigma^2}\right\} \right] d\tau,$$

или, после введения новой переменной интегрирования $\nu = \tau/x''$,

$$m_y(x^*, x'') = \frac{\sigma_2 x''}{2\pi\sigma_1} \exp\left\{-\frac{a_1^2}{2\sigma_1^2}\right\} \times \\ \times \int_{x^*/x''}^1 \left[\Phi\left(\frac{a_1 x'' \nu}{\sigma \sqrt{1-\rho^2}}\right) - \rho \Phi\left(\frac{\rho a_1 x'' \nu}{\sigma \sqrt{1-\rho^2}}\right) \exp\left\{-\frac{(a_1 \nu x'')^2}{2\sigma^2}\right\} \right] d\nu.$$

Если теперь ввести обозначения $\alpha = -a_1/\sigma_1$ и $\beta = -a_1 x''/\sigma$ (как в основном тексте статьи), то получим формулу (4').

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Понтрягин Л.С., Андронов А.А., Витт А.А.* О статистическом рассмотрении динамических систем // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1933. Т. 3. № 3. С. 165–180.
2. *Semakov S.L., Semakov I.S.* Estimating the probability that a random process first reaches the boundary of a region on a given time interval // Proc. 2018 IEEE 57th Conference on Decision and Control (CDC-2018), Miami Beach, USA, 2018. P. 256–261.
3. *Семаков С.Л.* Вероятность первого достижения уровня компонентом многомерного процесса на заданном промежутке с соблюдением ограничений на его другие компоненты // Теория вероятностей и ее применения. 1989. Т. 34. № 2. С. 402–406.
4. *Семаков С.Л., Семаков И.С.* Вероятность первого достижения уровня случайным процессом на заданном промежутке // АиТ. 2019. № 3. С. 83–102.
5. *Semakov S.L.* The first achievement of a given level by a random process // IEEE Transactions on Information Theory. 2024. V. 70. No. 10. P. 7162–7178.
6. *Rice S.O.* Mathematical analysis of random noise // The Bell System Technical Journal. 1944. V. 23. No. 3. P. 282–332; 1945. V. 24. No. 1. P. 46–156.
7. *Itô K.* The expected number of zeros of continuous stationary Gaussian processes // Journal of Mathematics of Kyoto University. 1964. V. 3. No. 2. P. 207–221.
8. *Leadbetter M.R.* On crossings of levels and curves by a wide class of stochastic processes // Annals of Mathematical Statistics. 1966. V. 37. No. 1. P. 260–267.
9. *Беляев Ю.К.* О числе пересечений уровня гауссовским случайным процессом I, II // Теория вероятностей и ее применения. 1966. Т. 11. № 1. С. 120–128; 1967. Т. 12. № 3. С. 444–457.
10. *Крамер Г., Лидбеттер М.* Стационарные случайные процессы. М.: Мир, 1969.
11. *Pickands J.* Upcrossing probabilities for stationary Gaussian processes // Transactions of the American Mathematical Society. 1969. V. 145. P. 51–73.
12. *Blake I., Lindsey W.* Level-crossings problems for random processes // IEEE Transactions on Information Theory. 1973. V. 19. No. 3. P. 295–315.
13. *Hüsler J.* Extreme values and high boundary crossings of locally stationary Gaussian processes // Annals of Probability. 1990. V. 18. No. 3. P. 1141–1158.
14. *Тихонов В.И.* Выбросы случайных процессов. М.: Наука, 1970.

15. *Семаков С.Л.* Выбросы случайных процессов: приложения в авиации. М.: Наука, 2005.
16. *Semakov S.L., Semakov I.S.* Estimating the probability of safe landing for aircrafts // Proc. 2019 IEEE 58th Conference on Decision and Control (CDC-2019), Nice, France, 2019. P. 2568–2573.
17. *Semakov S.L., Semakov I.S.* Method of calculating the probability of a safe landing for ship-based aircraft // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 2022. V. 58. No. 6. P. 5425–5442.
18. *Семаков С.Л., Семакова М.В.* Управление тягой при посадке самолета на корабль // АиТ. 2023. № 3. С. 126–138.
19. *Semakov S.L.* Crossings problems in random processes theory and their applications in aviation. Newcastle, UK: Cambridge Scholars Publishing, 2nd edition, 2024.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В. Назинным.

Поступила в редакцию 16.04.2025

После доработки 17.06.2025

Принята к публикации 03.10.2025