

Нелинейные системы

© 2025 г. Б.А. ЛАГОВСКИЙ, д-р техн. наук (robertlag@yandex.ru)
(Российский технологический университет, Москва),
Е.Я. РУБИНОВИЧ, д-р техн. наук (rubinvch@gmail.com)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

КОМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД УГЛОВОГО СВЕРХРАЗРЕШЕНИЯ ГРУППОВОЙ ЦЕЛИ¹

Предложен комплексный метод повышения разрешающей способности и точности угловых измерений радаров при обнаружении и определении координат объектов в виде близко расположенных друг к другу множественных воздушных целей, которые не разрешаются при прямом наблюдении. Решение задачи позволяет повысить качество управления беспилотными летательными аппаратами различных типов, находящимися вблизи подобных целей. Практическая реализация метода особенно важна при расчетах и моделировании траекторий полета автономных и управляемых летательных аппаратов, когда видеонаблюдение затруднено или неэффективно. Математически задача сводится к решению интегральных уравнений Фредгольма первого рода типа свертки с дополнительными условиями. Решения с угловым сверхразрешением ищутся в виде разложения искомой функции по системам выбираемых ортогональных функций. Для групповых целей с высокой плотностью расположения объектов далеко не всегда удается получить адекватное решение поставленной обратной задачи. Повышение степени достигаемого сверхразрешения в подобных случаях предложено осуществлять на основе нового метода, названного методом отделения. Он основан на исключении из анализируемого сигнала его составляющей, образованной отражением от одной или нескольких выделенных тем или иным способом целей. Обосновано применение при исследованиях методов нелинейной регрессии. Приведены и проанализированы результаты численных экспериментов на математической модели.

Ключевые слова: критерий Рэлея, угловое сверхразрешение, устойчивость решений обратных задач.

DOI: 10.7868/S2413977725120033

1. Введение

Угловым сверхразрешением системы измерений или наблюдений называется угловая разрешающая способность, превышающая критерий Рэлея. Критерий Рэлея представляет собой минимальное угловое расстояние θ_R между

¹ Работа выполнена при частичной поддержке Российского научного фонда (проект № 23-29-00448).

двумя точечными объектами, на котором система измерений еще может фиксировать их по отдельности:

$$(1) \quad \theta_R = \lambda/L,$$

где L – линейные размеры приемной системы, λ – используемая длина волны. Угол θ_R равен ширине диаграммы направленности антенны $\theta_{0,5}$, определяемой по уровню снижения принимаемой мощности в 2 раза.

При проведении измерений угловых координат получаемое разрешение не превышает критерий Рэлея. Результаты цифровой обработки сигналов по специальным алгоритмам позволяют системам детализировать изображения исследуемых объектов с точностью до заранее не известного угла $\theta_s < \theta_R$. Значение θ_s зависит от отношения сигнал/шум (ОСШ) в данных, используемого метода цифровой обработки, а также от угловых характеристик отражения (или излучения) сигналов исследуемыми объектами.

Достигнутое угловое сверхразрешение повышает точность измерений, улучшает вероятностные характеристики обнаружения и идентификации объектов. Появляется возможность наблюдать и измерять координаты отдельных близко расположенных объектов в составе целей, называемых групповыми, которые ранее, в соответствии с (1), сливались в единый протяженный объект.

В итоге, получаемая динамическая картина дает возможность повысить эффективность управления беспилотными летательными аппаратами (БПЛА), осуществляющими свою деятельность в зоне нахождения множества других БПЛА и «роев» БПЛА.

Известно несколько десятков численных методов достижения сверхразрешения и их разновидностей [1–7]. Не существует, однако, единого универсального метода решения задачи достижения сверхразрешения. Все методы и алгоритмы имеют различные ограничения. Например, для большинства методов сверхразрешение удастся получить только при ОСШ выше 20–25 дБ. Наиболее известные методы [5–7] эффективны только при решении одномерных задач. При решении двумерных задач алгоритмы значительно усложняются [8] и не позволяют использовать их в режиме реального времени. Для каждой конкретной задачи следует подбирать свой, наиболее эффективный в рассматриваемых условиях метод обработки данных измерений или наблюдений. Качество получаемого приближенного решения может быть повышено при представляемом объединении нескольких новых методов в единый комплексный. Он основан на последовательном применении исходя из получающихся результатов, новых специализированных методов обработки, описанных в разделах 4–6.

2. Постановка задачи

Пусть в зоне обзора радиолокационной станции (РЛС) – наземной или расположенной на летательном аппарате (ЛА) – присутствует большое ко-

личество близко расположенных БПЛА. Значительная часть объектов ввиду относительно небольших расстояний между ними не разрешается по углу при прямом наблюдении. В этом случае они образуют единый большой пространственный объект, т.е. групповую цель.

Необходимо выделить максимально возможное количество отдельных объектов в зоне обзора и определить их координаты. Известными считаются характеристики системы измерений и принимаемый сигнал.

Математическая постановка задачи.

Заданы: диаграмма направленности (ДН) антенной системы $F(\alpha, \varphi)$, принимаемый при сканировании двумерного сектора обзора Ψ сигнал $U(\alpha, \varphi)$ в виде линейного интегрального преобразования:

$$(2) \quad U(\alpha, \varphi) = \int_{\Omega} F(\alpha - \alpha', \varphi - \varphi') I(\alpha', \varphi') d\alpha' d\varphi',$$

где Ω – неизвестный заранее двумерный угол, в пределах которого расположены источники сигнала, причем $\Omega < \Psi$. Требуется найти угловое распределение амплитуды отраженного сигнала $I(\alpha, \varphi)$, равное нулю вне области Ω .

Задача поиска функции $I(\alpha, \varphi)$ представляет собой некорректную по Адамару обратную задачу в виде интегрального уравнения (ИУ) Фредгольма первого рода. В этих задачах нарушается третий признак корректности – устойчивость решений относительно исходных данных.

Хорошо известно, что устойчивость обратных задач можно повысить, используя какие-либо дополнительные данные о решении. Для введения в решения различного рода дополнительных условий удобны алгебраические методы [9–15]. Кроме того, упомянутые методы относительно шумоустойчивы, а высокое быстродействие позволяет использовать их в режиме реального времени. Для рассматриваемого круга задач они оказываются наиболее перспективными.

3. Регуляризация задачи при использовании алгебраического метода

Алгебраические методы заключаются в представлении одно- или двумерных решений (2) в виде разложений по заданной ортогональной системе функций в области расположения источника.

Рассмотрим одномерную задачу, когда сканирование проводится по одной координате. Обобщение получаемых результатов на двумерный случай принципиальных трудностей не вызывает.

Следуя идеологии алгебраических методов, искомое решение $I(\alpha)$ можно представить как

$$(3) \quad I(\alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m g_m(\alpha) \cong \sum_{m=1}^M b_m g_m(\alpha),$$

где $g_m(\alpha)$, $m = 1, \dots, M$ – выбранная конечная система функций, ортогональных в области Ω , b_m – искомые коэффициенты разложения $I(\alpha)$ в ряд. Тогда принятый сигнал (2) может быть представлен в виде

$$(4) \quad U(\alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m G_m(\alpha) \cong \sum_{m=1}^M b_m G_m(\alpha), \quad G_m(\alpha) = \int_{\Omega} F(\alpha - \alpha') g_m(\alpha') d\alpha',$$

и он оказывается суперпозицией неортогональных функций $G_m(\alpha)$. Тем самым обратная задача становится параметризованной. Ее приближенное решение сведено к поиску вектора коэффициентов B с элементами b_m , которые находятся из системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) при минимизации среднеквадратического отклонения $U(\alpha)$ (4) от принятого сигнала (2) [16–23]:

$$(5) \quad V = HB,$$

$$(6) \quad V_n = \int_{\Omega} U(\alpha) G_n(\alpha) d(\alpha), \quad H_{n,m} = \int_{\Omega} G_m(\alpha) G_n(\alpha) d(\alpha), \quad n, m = 1, \dots, M.$$

При задании сигнала в виде дискретной последовательности значений задача сводится к решению переопределенной СЛАУ на основе метода наименьших квадратов.

Границы сектора углов Ω , в пределах которого расположены источники сигналов, вначале выбираются на основе оценки, исходя из значительного снижения уровня принимаемого сигнала на границах Ω по отношению к его максимальному значению. В дальнейшем, на основании получаемых предварительных решений границы сектора Ω уточняются, и решение ищется в новом, чаще всего меньшем секторе углов. В итоге, как показали численные эксперименты, после нескольких итераций размеры и границы сектора Ω оказываются близки к истинным.

Выбор системы функций $g_m(\alpha)$ для представления решения (3) осуществляется на основе использования априорной информации об источниках сигналов либо, при ее отсутствии, на основе разумной модели физически реализуемых типов источников.

Повышение достигаемого уровня сверхразрешения основывается на увеличении числа функций в представлении (3). Однако в рассматриваемых обратных задачах матрицы H в СЛАУ (5) оказываются плохо обусловленными. При этом их числа обусловленности экспоненциально возрастают с увеличением размерности матриц. Устойчивое приближенное решение для источников сигналов типа БПЛА удастся получить только для нескольких первых функций из (3), что при высоком ОСШ позволяет превысить критерий Рэлея в 2–4 раза [10, 13, 14].

Для дальнейшего повышения качества приближенного решения за счет увеличения числа используемых функций в (4)–(6) предлагается применить к поставленной задаче (2) метод регуляризации Тихонова [16].

Формально решение СЛАУ (5) эквивалентно задаче минимизации функции

$$(7) \quad \Phi(B) = \|HB - V\|^2,$$

где введено обозначение $\| \cdot \|$ – норма вектора или матрицы. Метод регуляризации Тихонова позволяет найти нормальное решение системы (5), используя представление (7), т.е. вектор B , минимизирующий норму вектора $\|HB - V\|$.

Решение заключается в поиске вектора B , при котором функция

$$(8) \quad \Phi(B, \lambda) = \|HB - V\|^2 + \lambda \|B\|^2$$

достигает наименьшего значения для фиксированного положительного λ . Известно, что решение такой задачи существует и единственно [16].

Задача минимизации функции $\Phi(B, \lambda)$ (8), как несложно показать, эквивалентна решению СЛАУ

$$(9) \quad (H^T H + \lambda E)B = H^T V,$$

где E – единичная матрица, H^T – транспонированная матрица. При значении $\lambda = 0$ уравнение (9) переходит в исходную СЛАУ.

Метод регуляризации Тихонова позволяет дополнительно учитывать возможную априорную приближенную оценку решения, задаваемую в виде ожидаемых координат вектора B в виде вектора C .

Тогда вместо (8), (9) получим

$$(10) \quad \begin{aligned} \Phi(B, \lambda) &= \|HB - V\|^2 + \lambda \|B - C\|^2, \\ (H^T H + \lambda E)B &= H^T V + \lambda C. \end{aligned}$$

Поскольку при решении реальных задач, связанных с измерительными системами, в исходных данных всегда присутствуют случайные составляющие, для выбора наилучшего решения необходимо провести расчеты при различных значениях параметра регуляризации λ , близких к уровню случайных составляющих в исследуемом сигнале. В качестве модельного примера была решена задача достижения углового сверхразрешения для двух близко расположенных одинаковых малоразмерных объектов при высоком ОСШ.

На рис. 1 и последующих рисунках за нулевое направление принято направление к плоскости антенны; вертикальная ось – амплитудное значение источников сигнала и принятый сигнал, нормированные на единицу; горизонтальная ось – угол α сканирования системы в относительных единицах $\theta_{0,5}$ ширины ДН; истинные источники сигнала, имитирующие БПЛА, показаны в виде тонкой черной сплошной ломаной линии (кривая 1). Штриховой кривой (кривая 2) представлена угловая зависимость принимаемого сигнала $U(\alpha)$,

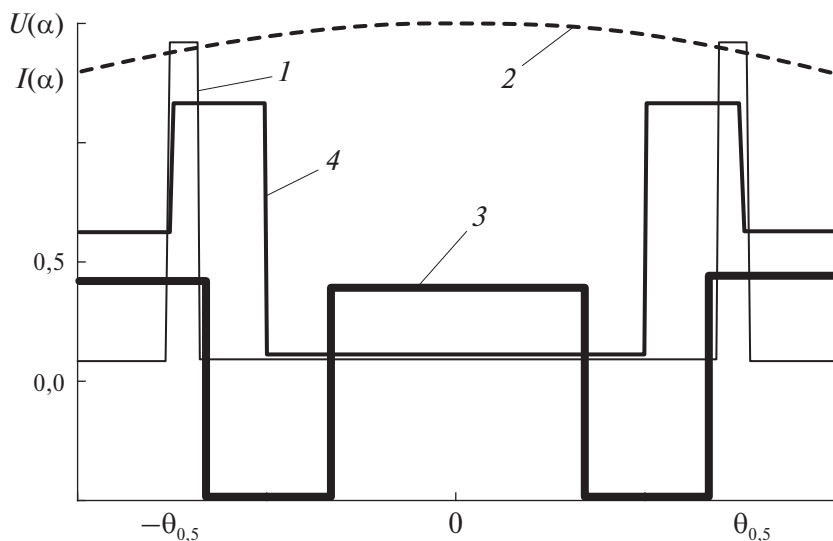


Рис. 1. Решение задачи для двух близких объектов.

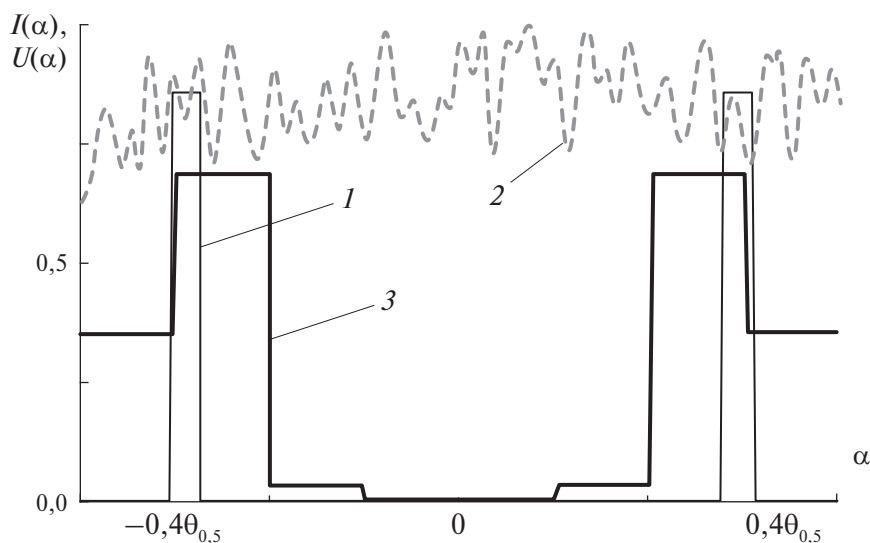


Рис. 2. Решение задачи для двух близких объектов, ОСШ – 12дБ: 1 – истинные источники, 2 – принимаемый сигнал $U(\alpha)$, 3 – решение со сверхразрешением.

показывающая, что при непосредственном наблюдении без обработки сигнала источники сливаются в единый объект. Толстая ступенчатая линия 3 – решение алгебраическим методом (3)–(6) без регуляризации задачи. Полученное неадекватное решение неустойчиво и представляет собой осциллирующую функцию. Ломаная кривая 4 – устойчивое решение, полученное при использовании регуляризации задачи по Тихонову. Оба истинных источника наблюдаются раздельно. Критерий Рэлея превышен в 5 раз.

При сравнении методов достижения сверхразрешения одним из главных критериев качества является зависимость степени превышения критерия Рэлея от ОСШ. Это обусловлено тем, что решаются обратные задачи, которые существенно более чувствительны к уровню случайных составляющих в исследуемых сигналах, чем прямые. По этому критерию регуляризация задачи по Тихонову позволяет резко повысить качество получаемых решений.

На рис. 2 представлено решение той же задачи в тех же обозначениях, что и на рис. 1, но при ОСШ, составлявшем 12 дБ. Полученное устойчивое решение практически не претерпело изменений, в то время как для популярных методов достижения сверхразрешения [1–7] минимально необходимый уровень ОСШ составляет 20 дБ.

4. Регуляризация задачи методом отделения

Пусть из групповой цели при использовании M ступенчатых функций удалось выделить K отдельных объектов (или один объект) и приближенно определить их угловые положения и амплитуды отражаемых сигналов. Тогда число объектов в новой групповой цели составит $M - K$. Для выделенных K объектов будем считать, что найдены их расположения $g_k(\alpha)$ и амплитуды b_k :

$$(11) \quad I_k(\alpha) = b_k g_k(\alpha), \quad k = M - K + j, \quad j = 1, \dots, K.$$

Возникает задача разделения оставшихся объектов в новой групповой. Для этого предлагается метод, основанный на выделении из получаемых отраженных сигналов $U(\alpha)$ только тех, которые принадлежат новой групповой цели.

Сигнал, принимаемый от уже выделенных K источников

$$(12) \quad \begin{aligned} U_K(\alpha) &= \sum_{k=P}^M \int_{\Gamma} F(\alpha - \alpha') I_k(\alpha') d\alpha' = \\ &= \sum_{k=P}^M b_k \int_{\Gamma} F(\alpha - \alpha') g_k(\alpha') d\alpha' = \sum_{k=P}^M b_k G_k(\alpha), \end{aligned}$$

где $P = M - K + 1$, Γ – область расположения выделенных источников. Для новой задачи сигнал $U_K(\alpha)$ становится помехой, причем сильной, что не позволяет выделить отдельные источники из новой групповой.

Влияние этой помехи на решение возможно в значительной степени нейтрализовать. Для этого из принятого реального сигнала $U(\alpha)$ следует вычесть искусственно синтезированный сигнал, имитирующий сигнал от ранее отделенных K источников (12). Тогда сигнал, принимаемый от оставшихся объектов, представляющих собой новую групповую цель из P объектов, станет равным

$$(13) \quad U_S(\alpha) = U(\alpha) - U_K(\alpha).$$

Сформированный сигнал в виде (13) может быть далее использован при решении задачи достижения сверхразрешения для новой групповой цели аналогично (3)–(6). Введя для этого новую систему ступенчатых функций $h_m(\alpha)$, в итоге получим СЛАУ вида

$$(14) \quad W = QC,$$

где элементы вектора W и матрицы Q имеют представление:

$$(15) \quad \begin{aligned} W_k &= \int_{\Phi} U_S(\alpha) H_k(\alpha) d\alpha, & Q_{k,q} &= \int_{\Phi} H_k(\alpha) H_q(\alpha) d\alpha, \\ H_k(\alpha) &= \int_{\Phi} F(\alpha - \alpha') h_k(\alpha') d\alpha'. \end{aligned}$$

Здесь C – вектор с элементами b_k из (11), Φ – область расположения новой групповой цели.

Оценка положения и границ области Φ теперь проводится на основе анализа синтезированного сигнала $U_S(\alpha)$ аналогично определению области Ω в (6). Если ранее отделенные K объектов расположены у границы области Ω , то размеры области Φ становятся меньше, чем Ω . Если же отделяемые объекты расположены не у края области, то новая область Φ также оказывается меньше Ω , но двухсвязанной и даже многосвязанной. Построение решения в многосвязанной области проводится по той же схеме, что и в одномерной, путем введения конечной системы функций, ортогональных в области Φ .

В новой уменьшенной области Φ одинаковое с областью Ω число функций $g_m(\alpha)$ в (3) обеспечивает большее разрешение без существенного увеличения чисел обусловленности матрицы H в (5). Во многих случаях это позволяет разрешить по углу объекты новой групповой цели. Описанный подход к задаче анализа роя БПЛА или других объектов, составляющих групповую цель, может быть назван *методом отделения*.

5. Метод отделения

Следует отметить, что коэффициенты b_m из (5), (6), а следовательно и $U_S(\alpha)$, находятся с некоторой ошибкой. Для прямых задач ошибка может быть незначительной и ею можно пренебречь. Однако рассматриваемая задача относится к обратным, устойчивость решений которых значительно хуже. Для получения адекватных результатов необходимо уточнить значения b_m перед их дальнейшим использованием в (7)–(15).

Уточнение значений предлагается осуществлять по следующей схеме. Решается задача (3)–(6), но вместо сигнала $U(\alpha)$ используется сигнал $U_S(\alpha)$, т.е. заменяем вектор V вектором W из (10). В идеализированном случае, т.е. если коэффициенты b_m и $U_S(\alpha)$ ранее были найдены точно, все коэффициенты b_k в (7) оказываются равными нулю.

В реальном случае получим значения b_m и b_k , удовлетворяющие соотношению

$$(16) \quad U_S(\alpha) = U(\alpha) - \sum_{k=M-K+1}^K b_k^0 G_k(\alpha) = \sum_{m=1}^{M-K} b_m^1 G_m(\alpha) + \sum_{k=M-K+1}^M b_k^1 G_k(\alpha),$$

где b_k^0 – значения b_k , найденные с некоторой ошибкой при решении задачи (8)–(15) с исходным сигналом $U(\alpha)$, b_m^1 – уточненные значения коэффициентов b_m при решении задачи с исходным сигналом $U_S(\alpha)$, b_k^1 – остаточные значения коэффициентов b_k не равные нулю, возникающие из-за ошибок в определении b_k^0 .

Для снижения этих ошибок далее строится итерационный процесс [17]. Вместо коэффициентов b_k^0 в (8) на первом шаге используем $\tilde{b}_k^1 = b_k^0 + b_k^1$, а вместо $U_S(\alpha)$ в виде (9) $U_S^1(\alpha)$ т.е.

$$(17) \quad U_S(\alpha) = U(\alpha) - U_K(\alpha), \quad U_K^1(\alpha) = \sum_{k=M-K+1}^M \tilde{b}_k^1 G_k(\alpha).$$

Далее, аналогично (14), (15) получаем второе приближение b_k^2 . На следующем шаге используем $\tilde{b}_k^1 = b_k^0 + b_k^1 + b_k^2$ и т.д. На n -м шаге приходим к соотношению

$$(18) \quad U_S^n(\alpha) = U(\alpha) - U_K(\alpha), \quad U_K^1(\alpha) = \sum_{k=M-K+1}^M \tilde{b}_k^1 G_k(\alpha).$$

Численные эксперименты показали, что за несколько итераций b_k^n значительно уменьшаются по сравнению с первоначальными значениями и становятся сравнимыми с ошибками в задании исходных данных.

В качестве примера применения метода отделения рассмотрим групповую цель из четырех точечных объектов, расположенных в секторе углов $[-1,1\theta_{0,5}; 1,5\theta_{0,5}]$, с небольшими различиями в амплитудных значениях сигнала.

На рис. 3 в виде штриховой кривой (кривая 3) приведена исходная угловая зависимость принятого сигнала $U(\alpha)$. Объекты неразрешены по углу при прямом наблюдении. Решение алгебраическим методом (3)–(6) при использовании восьми ступенчатых функций позволило выделить один объект из состава групповой цели.

Использование большего числа функций приводит к появлению неустойчивых неадекватных решений, которые перестают отражать реальность. Решения такого рода могут быть легко распознаны, так как коэффициенты b_m начинают принимать значения на порядки больше реальных.

Степень устойчивости решений может быть оценена с помощью чисел обусловленности матриц H из (5). Отметим, что числа обусловленности подобных матриц резко (экспоненциально) возрастают с ростом числа используемых функций. В результате число функций $g_m(\alpha)$ в представлении решения (3) всегда оказывается ограниченным.

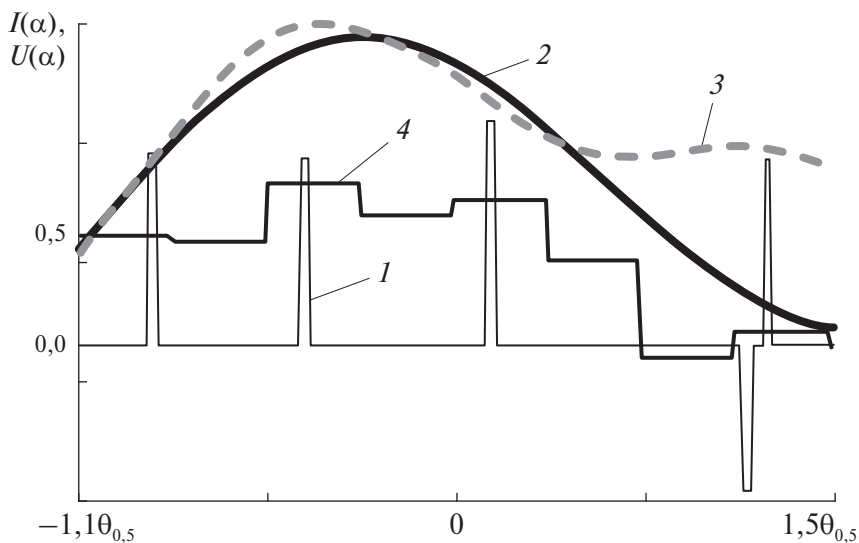


Рис. 3. Отделение одного объекта от групповой цели. 1 – истинные источники, 2 – синтезированный сигнал $U_S(\alpha)$, 3 – принятый сигнал, 4 – решение со сверхразрешением.

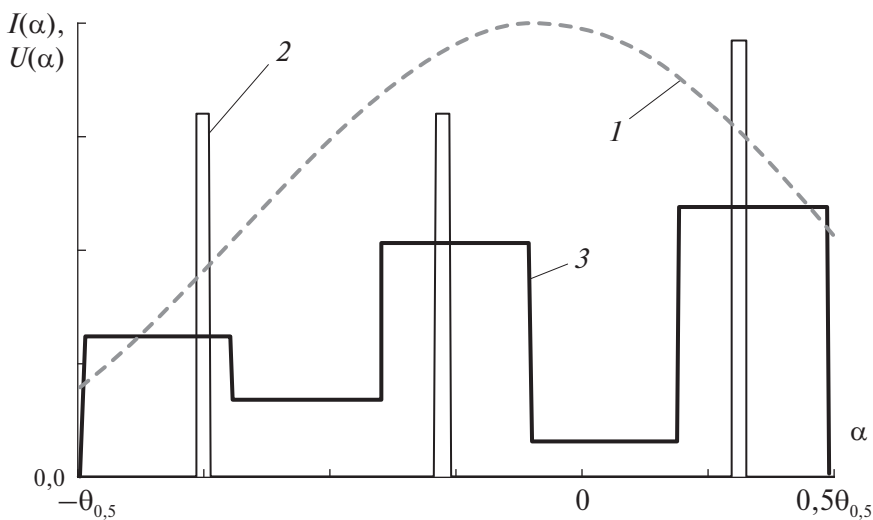


Рис. 4. Решение задачи на основе метода отделения объектов.

На рис. 3 показаны: в виде тонкой ломаной (кривая 1)– положения истинных точечных источников сигналов и введенного виртуального источника $I_N(\alpha)$ (12) с отрицательной полярностью; в виде жирной сплошной кривой (кривая 2) – синтезированный сигнал $U_S(\alpha)$, который использовался для уточнения амплитуды сигнала, отражаемого четвертым объектом, т.е. уточнения b_4 ; пунктирная кривая (кривая 3) – отраженный сигнал; в виде жирной ступенчатой кривой (кривая 4) – решение обратной задачи (2) на основе синтезированного сигнала $U_S(\alpha)$ в исходной области Ω .

Решение подтвердило корректность проведенного выделения одного объекта из групповой цели. При этом, однако, разрешить по углу остальные объекты с помощью восьми введенных ступенчатых функций $g_m(\alpha)$ в Ω не удалось.

В этом случае следует перейти ко второму этапу решения задачи методом отделения в найденной новой области Φ (15).

Второй этап заключается в использовании $U_S^n(\alpha)$ вместо $U_S(\alpha)$ в (13)–(15) для возникшей новой групповой цели.

На рис. 4 представлены результаты решения. В виде штриховой жирной кривой (кривая 1) показан синтезированный сигнал $U_S^n(\alpha)$ (18). Тонкая ломаная (кривая 2) – истинные точечные источники сигналов, жирная сплошная ломаная (кривая 3) – найденное решение при использовании пяти ступенчатых функций $g_m(\alpha)$ в области Φ , размеры которой оказались в 1,75 раза меньше первоначальной области Ω .

Достаточная устойчивость решения и достигнутый уровень сверхразрешения в рассмотренном примере позволили отдельно зафиксировать и определить координаты всех объектов в новой групповой цели.

Второй этап решения не всегда позволяет разрешить объекты групповой цели. Для каждой конкретной цели и конкретной измерительной системы существует угловое расстояние между объектами, меньше которого их разрешение оказывается невозможным.

6. Нелинейная регрессия

В случае, если разрешить объекты групповой цели по предложенной методике не удастся, в комплексном методе предлагается использовать более сложный подход.

Отметим, что приведенный выше метод отделения основан на определении амплитуд объектов b_j с высокой точностью. Однако точность углового положения каждого объекта не изменяется, так как она ограничена угловым размером используемой ступенчатой функции. Более точное определение координат α_j одновременно с поиском b_j позволит повысить качество получаемых решений.

Пусть, как и в приведенных примерах, угловые координаты объектов пренебрежимо малы и могут быть описаны с помощью дельта-функций $\delta(\alpha - \alpha_j)$, где α_j – координата j -го объекта, $j = 1, \dots, N$, $N = M - K$. Тогда вместо (3)–(4) получим далее (19)–(20)

$$(19) \quad I(\alpha) = \sum_{m=1}^N \delta(\alpha - \alpha_m),$$

$$(20) \quad U_S^n(\alpha) = \sum_{m=1}^N F(\alpha - \alpha_m).$$

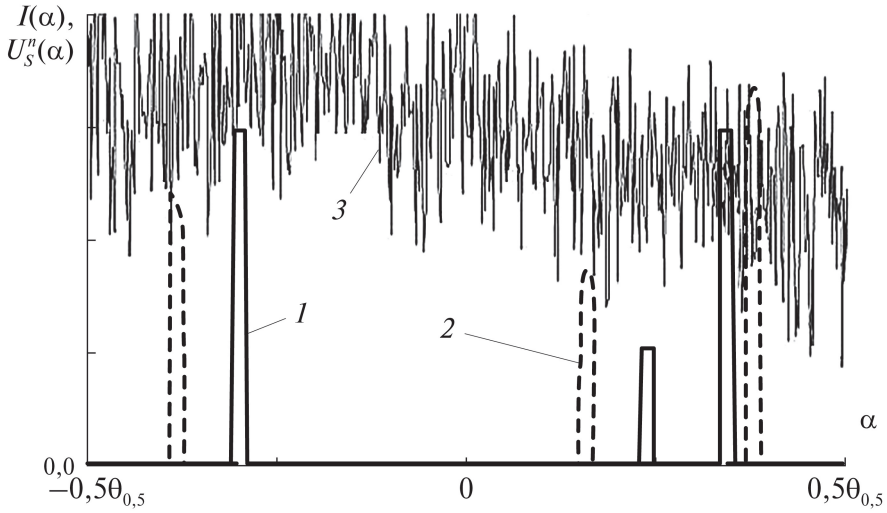


Рис. 5. Решение задачи для групповой цели при использовании нелинейной регрессии.

Поиск новых уточненных решений α_j и b_j предлагается проводить на основе применения нелинейной регрессии [25–29]. Введем функцию регрессии подобно (16), т.е.

$$(21) \quad L(\alpha) = \sum_{m=1}^N d_m F(\alpha - \gamma_m),$$

где γ_m и d_m – искомые параметры. Используем также дополнительное условие в виде равенства принимаемой мощности сигналов

$$(22) \quad \int_{\Phi} \left(U_S^n(\alpha) \right)^2 d\alpha = \int_{\Phi} \left(\sum_{m=1}^N d_m F(\alpha - \gamma_m) \right)^2 d\alpha.$$

Решение на основе минимизации среднеквадратичного отклонения (21) от $U_S^n(\alpha)$ сводится к решению системы нелинейных уравнений. Далее по стандартным алгоритмам нелинейной регрессии определяем неизвестные параметры γ_m и d_m , минимизирующие отклонение.

Численный поиск решений для нескольких объектов не вызывает значительных сложностей, так как используется хорошее начальное приближение в виде найденных ранее b_m и задаваемых в пределах каждой ранее использовавшейся ступенчатой функции координат α_m .

На рис. 5 приведен пример решения задачи для трех близко расположенных объектов с различными амплитудами отражаемых сигналов. Реальное расположение точечных источников и их амплитудные значения показаны сплошными ломаными линиями (кривая 1). Принимаемый при сканировании полезный сигнал $U_S^n(\alpha)$ вместе с шумовой составляющей в пределах углов $[-\theta_{0,5}/2, \theta_{0,5}/2]$ показан в виде быстро осциллирующей кривой (кривая 3). Использование ранее приведенных методов не позволило разрешить цели. Ис-

пользование нелинейной регрессии позволило получить адекватное решение, показанное штриховой ломаной линией (кривая 2).

Все объекты разрешены, их расположение определено с хорошей точностью, составившей 0,07 ширины луча. Амплитудные значения найдены с меньшей точностью, но они имеют второстепенное значение. Разрешающая способность превысила критерий Рэлея более чем в четыре раза.

Решение системы нелинейных уравнений на основе (19)–(22) заметно более устойчиво, чем решения СЛАУ (14). Численные эксперименты показали, что адекватные решения получаются при ОСШ до 18 дБ, т.е. при более высоких уровнях случайных составляющих, чем при использовании известных методов сверхразрешения.

В ряде случаев, когда БПЛА расположены с высокой плотностью разрешить объекты описанными выше методами не удастся. Однако, за счет более сложного подхода и некоторого усложнения технической системы возможно достижение сверхразрешения и в этих случаях. Для этого предлагается использовать так называемый *гармонический радар*.

7. Нелинейный вторичный радар

Вторичный, или гармонический радар (ГР) при приеме использует частоту сигнала в два или три раза превышающую частоту зондирующего (или запросного) сигнала. Принимаемый сигнал формируется за счет отражения от нелинейных элементов исследуемых объектов. В результате сигнал представляет собой суперпозицию гармоник, кратных излучаемой частоте [24–29].

Обычные радиолокационные объекты проявляют нелинейные свойства в очень малой степени. В настоящее время ГР со специально встроенными нелинейными элементами чаще всего применяются в спасательных операциях в сложных условиях на суше и на море для поиска и измерения координат объектов.

В рассматриваемых задачах в исследуемой области углов на излучаемой частоте f_0 присутствует множество сигналов, отраженных от большого количества объектов, в том числе от опасных мобильных объектов. Кроме того, сигналы могут представлять собой помехи на используемой частоте f_0 , в том числе создаваемые специально. В итоге определить координаты отдельных объектов, анализируя ответный суммарный сигнал на частоте f_0 , оказывается практически невозможно.

В то же время нелинейный ГР обнаруживает только цели, обладающие нелинейными свойствами, используя частоты $2f_0$ и $3f_0$, а любые сигналы и помехи на частоте f_0 не оказывают влияния на его работу.

Основной недостаток ГР – слабый отраженный сигнал на используемых, кратных f_0 , частотах по сравнению с отражением на исходной частоте f_0 . Это обстоятельство существенно ограничивает дальность действия D нелинейных радаров. Для ее повышения предлагаются различные методы [24–29]. В итоге на частотах $2f_0$ и $3f_0$ удастся обеспечить дальность до $D \sim 1\text{--}5$ км.

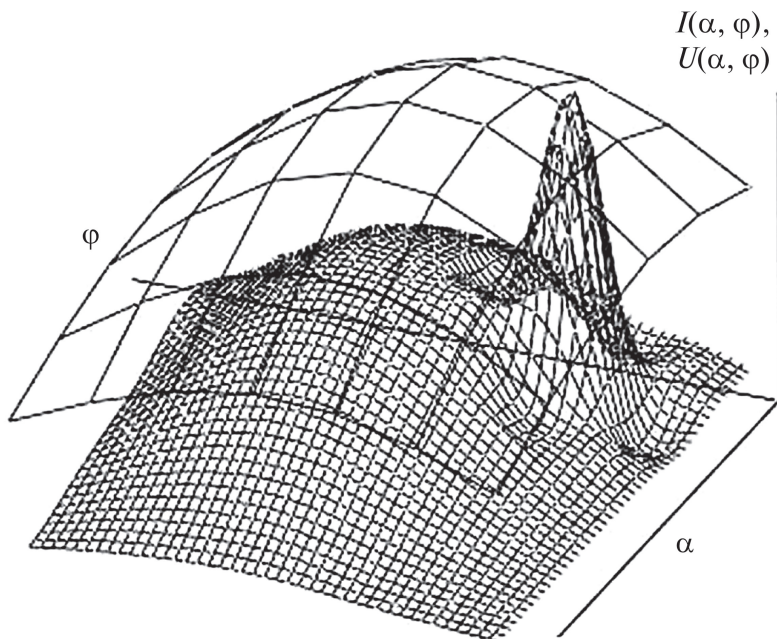


Рис. 6. Повышение точности угловых измерений бортовых РЛС.

Обеспечение определения координат отдельных объектов возможно при снижении количества объектов в исследуемой области. Для этого предлагается устанавливать на БПЛА определенных типов легкие малоразмерные нелинейные элементы. В качестве таких могут быть использованы простейшие антенны, в том числе печатные, в виде диполей с диодом. Тогда на фоне отраженных ими сигналов на частотах $2f_0$ и $3f_0$ остальные БПЛА окажутся практически незаметными.

В этом случае оказывается возможным измерить координаты выделенных типов БПЛА на частотах $2f_0$ и $3f_0$, в том числе с использованием методов сверхразрешения, если это будет необходимо. На основной частоте f_0 оказывается применим описанный выше метод отделения объектов в виде выделенных типов БПЛА с известными теперь координатами. В итоге количество БПЛА в зоне обзора уменьшается, и задача определения координат оставшихся БПЛА других типов упростилась. Ее решение проводится теперь по приведенной выше схеме (3)–(6) и (7)–(10).

Невысокая точность угловых измерений для летательных аппаратов относительно небольших размеров в автономном режиме на частотах $2f_0$ и $3f_0$ может значительно снизить эффективность использования представленного метода отделения. Указанный недостаток можно в значительной степени компенсировать, используя алгебраические методы обработки сигналов бортовых РЛС (3)–(6) в целях получения сверхразрешения на частотах $2f_0$ и $3f_0$. Пример подобной компенсации приведен на рис. 6.

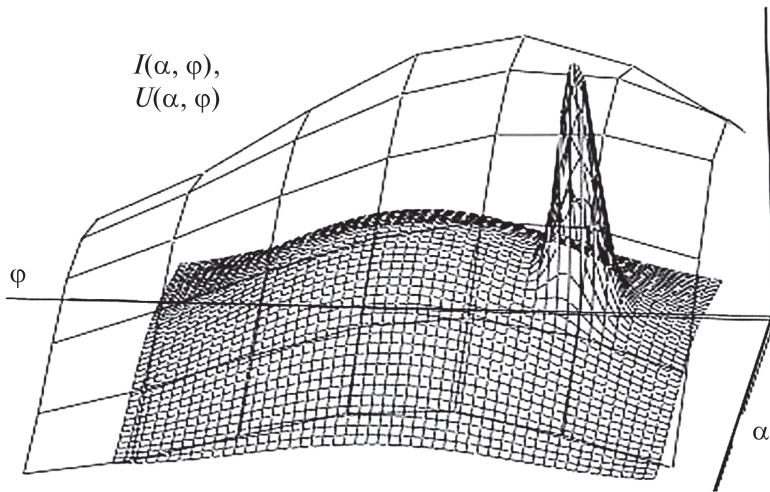


Рис. 7. Решение ИУ для суммы двух гармоник.

В виде редкой сетки показан двумерный принимаемый сигнал $U(\alpha, \varphi)$ на частоте $2f_0$. Истинное распределение амплитуды излучаемого сигнала представляло собой точечный источник и небольшое фоновое излучение на второй гармонике. При решении прямых задач фоновым излучением можно пренебречь без сколько-нибудь заметной ошибки. Однако при решении обратных неустойчивых задач в виде ИУ (2) оно может заметно искажать решения.

Принимаемый сигнал $U(\alpha, \varphi)$ очень грубо оценивает угловые координаты источника. В рассматриваемой задаче это область, охватываемая редкой сеткой. Найденное алгебраическим методом (4)–(6) приближенное решение, т.е. распределение $I(\alpha, \varphi)$ с учетом мешающего фонового излучения, приведено в виде густой сетки. Полученное решение ИУ показывает, что точечный источник расположен в пределах пика $I(\alpha, \varphi)$.

Точность определения координат источника сигналов и его локализация повысилась более чем в пять раз. Шум в виде фонового излучения немного исказил истинное решение и не позволил получить еще более точные координаты источника.

Для ГР возможно осуществить дальнейшее повышение точности угловых измерений и углового разрешения. Для этого следует одновременно анализировать принимаемые сигналы на второй $U_2(\alpha, \varphi)$ и третьей $U_3(\alpha, \varphi)$ гармониках. Наиболее простой способ анализа – сложение амплитуд этих сигналов при сканировании:

$$U(\alpha, \varphi) = U_2(\alpha, \varphi) + kU_3(\alpha, \varphi) =$$

$$(23) \quad = \int_{\Omega} [f_2(\alpha - \alpha', \varphi - \varphi')I_2(\alpha', \varphi') + kf_3(\alpha - \alpha', \varphi - \varphi')I_3(\alpha', \varphi')] d\alpha' d\varphi',$$

где $I_2(\alpha, \varphi)$ и $I_3(\alpha, \varphi)$ описывают одно и то же угловое положение источника, но с различными амплитудными значениями. Для сигналов на третьей гармонике введен коэффициент усиления k . Поскольку амплитуда сиг-

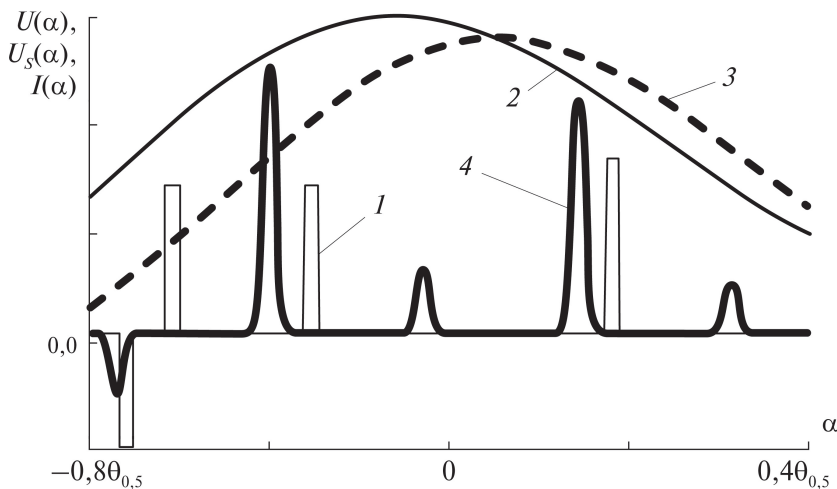


Рис. 8. Решение при отделении одного объекта известного типа. Представлено решение задачи определения угловых координат сложного объекта при использовании ГР. Объект представлял собой групповую цель, состоящую из трех близко расположенных точечных целей – тонкая ломаная линия (кривая 1). Исходный сигнал $U(\alpha)$ (2) показан в виде тонкой плавной кривой (кривая 2).

налов на третьей гармонике существенно ниже, чем на второй, коэффициент k выбирается из условия приблизительного равенства значений максимумов $U_2(\alpha, \varphi)$ и $U_3(\alpha, \varphi)$. Условие равенства максимумов обеспечивает приблизительно одинаковый вклад гармоник в искомое решение. Дополнительное преимущество суммирования гармоник – шумы, присутствующие в сигналах $U_2(\alpha, \varphi)$ и $U_3(\alpha, \varphi)$, некогерентны и их сложение обеспечивает повышение ОСШ в (23) по сравнению с ОСШ на каждой из частот $2f_0$ и $3f_0$. На рис. 7 показаны результаты решения ИУ (23) для той же задачи, что приведена на рис. 6, и в тех же обозначениях. Как и следовало ожидать, точность локализации истинного источника заметно увеличилась – в два раза. Это обеспечило повышение точности решения задачи отделения от групповой цели объекта известного типа. Разрешить цели не удастся ни при прямом наблюдении, ни при использовании известных методов сверхразрешения.

Один из объектов, а именно расположенный близко к левой границе зоны Ω , на частотах $2f_0$ и $3f_0$ опознан ГР как объект известного типа. На этих частотах измерена его угловая координата α_1 . В соответствии с методом отделения (12)–(14) на частоте f_0 синтезирован компенсирующий сигнал с отрицательной полярностью:

$$(24) \quad U_S(\alpha) = U(\alpha) - AF(\alpha_1).$$

Коэффициент отражения A на частоте f_0 заранее не известен и задается вначале на основе разумной оценки. Далее он подлежит уточнению в ходе итерационного процесса решения задачи аналогичного (16)–(18).

Итоговый сигнал $U_S(\alpha)$ (14) показан на рис. 8 в виде жирной штриховой кривой (кривая 3).

Для представления решения в качестве функций $g_m(\alpha)$ в (3) использовались функции Гаусса. Найденное решение без опознанного ранее БПЛА с угловой координатой α_1 показано в виде жирной кривой (кривая 4). В итоговом решении источник был представлен как суперпозиция пяти функций Гаусса $g_m(\alpha)$:

$$(25) \quad I(\alpha) = \sum_{m=1}^5 b_m g_m(\alpha - \Delta \alpha m)$$

с расстоянием $\Delta = 0,23\theta_{0,5}$ между максимумами соседних $g_m(\alpha)$.

Истинные, близкие к точечным источники сигналов вместе с виртуальным компенсирующим источником $A\delta(\alpha - \alpha_1)$ приведены в виде тонкой ломаной линии (кривая 1).

Появление в решении множества небольших объектов, интенсивность излучения которых $I^2(\alpha)$ на порядок ниже, чем у остальных, обычно обусловлено воздействием шумов и помех. Такие цели считаются ложными.

В итоге полученное решение позволило разрешить все объекты групповой цели и с хорошей точностью определить их угловые координаты.

8. Заключение

1. Теоретически обоснован и проверен в ходе численных экспериментов новый комплексный метод цифровой обработки радиолокационных сигналов, отраженных от множественных объектов. Метод позволяет измерительным системам достигать углового разрешения, значительно превышающего критерий Рэлея.

2. Предложенный метод отделения, как показывают аналитические и численные результаты, применим при обнаружении и определении координат отдельных объектов в составе групповых целей, в том числе состоящих из «роя» БПЛА. Создание искусственного синтезированного сигнала в ходе обработки полученной информации позволяет существенно повысить уровень достигаемого сверхразрешения по сравнению с известными методами.

3. Новые алгоритмы обработки сигналов на основе методов нелинейной регрессии позволяют повысить точность определения угловых координат и улучшить локализацию исследуемых объектов в 2–5 раз.

4. На математических моделях показано, что методы нелинейной регрессии позволяют решать задачи достижения сверхразрешения при больших уровнях шумов и помех, чем известные методы.

5. Обосновано применение гармонического радара для достижения углового разрешения, позволяющего выделять опасные БПЛА, входящие в состав групповых целей.

6. Алгоритмы на основе предложенного комплексного метода относительно просты и могут применяться в режиме реального времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Morse P., Feshbach H.* Methods of Theoretical Physics. McGraw-Hill. Science/Engineering/Math. 1953. 1978 p.
2. *Uttam S., Goodman N.A.* Superresolution of coherent sources in real-beam Data // IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems. 2010. V. 46. No. 3. P. 1557–1566.
3. *Park S.C., Park M.K., Kang M.G.* Super-resolution image reconstruction: a technical overview // IEEE Signal Processing Magazine. 2003. V. 20(3). P. 21–36.
4. *Kasturiwala S.B., Ladhake S.A.* Superresolution: A novel application to image restoration // Int. J. Comput. Sci. Engineer. 2010. No. 5. P. 1659–1664.
5. *Waweru N.P., Konditi D.B.O., Langat P.K.* Performance Analysis of MUSIC Root-MUSIC and ESPRIT // DOA Estimation Algorithm. Int. J. Electric. Comput. Energet. Electron. Comm. Engineering. 2014. V. 8. No. 1. P. 209–216.
6. *Lavate T.B., Kokate V.K., Sapkal A.M.* Performance Analysis of MUSIC and ESPRIT // DOA Estimation Algorithms for Adaptive Array Smart Antenna in Mobile Communication. 2nd Int. Conf. on Computer and Network Technology ICCNT, United States. 2010. P. 308–311.
7. *Almeida M.S., Figueiredo M.A.* Deconvolving images with unknown boundaries using the alternating direction method of multipliers // IEEE Trans. Image Process. 2013. V. 22. No. 8. P. 3074–3086.
8. *Evdokimov N.A., Lukyanenko D.V., Yagola A.G.* Application of multiprocessor systems to solving the two-dimensional convolution-type Fredholm integral equations of the first kind for vector-functions // Numerical Methods and Programming. 2009. V. 10. P. 263.
9. *Lagovsky B.A., Rubinovich E.Y.* Algebraic methods for achieving superresolution by digital antenna arrays // Mathematics. 2023. V. 11. No. 4. P. 1–9.
<https://doi.org/10.3390/math11041056>
10. *Lagovsky B., Samokhin A., Shestopalov Y.* Angular Superresolution Based on A Priori Information. Radio Science // 2021. V. 5. Issue 3. P. 1–11.
<https://doi.org/10.1029/2020RS007100>
11. *Lagovsky B.A., Rubinovich E.Y.* A modified algebraic method of mathematical signal processing in radar problems // Results in Control and Optimization. 2024. V. 14. No. 3. <https://doi.org/10.1016/j.rico.2024.100405>
12. *Alexandrov A.E., Borisov S.P., Bunina L.V., Bikovsky S.S., Stepanova I.V., Titov A.P.* Statistical model for assessing the reliability of non-destructive testing systems by solving inverse problems // Russ. Technol. J. 2023. V. 11(3). P. 56–69.
13. *Lagovsky B., Rubinovich E.* Algorithms for Digital Processing of Measurement Data Providing Angular Superresolution // Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie. 2021. V. 22(7). P. 349–356.
14. *Lagovsky B., Rubinovich E.* Achieving Angular Superresolution of Control and Measurement Systems in Signal Processing // Advances in Systems Science and Applications. 2021. V. 21. No. 2. P. 104–116.
15. *Lagovsky B.A., Rubinovich E.Y.* A modified algebraic method of mathematical signal processing in radar problems // Results in Control and Optimization. 2024. V. 14. No. 3. <https://doi.org/10.1016/j.rico.2024.10040>
16. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.

17. Лаговский Б.А., Рубинович Е.Я. Повышение углового разрешения и дальности действия измерительных систем, использующих сверхширокополосные сигналы // *АиТ*. 2023. № 10. С. 72–90. <https://doi.org/10.31857/S0005231023100070>
18. Келли К.Т. Итерационные методы оптимизации // *SIAM Frontiers in Applied Mathematics*. No. 18. 1999.
19. Marquardt D.W. An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters // *J. Soc. Indust. Appl. Math.* 1963. V. 11. No. 2. P. 431–441. <https://doi.org/10.1137/0111030>
20. Lourakis M.I.A., Argyros A.A. Is Levenberg-Marquardt the Most Efficient Optimization Algorithm for Implementing Bundle Adjustment // *ICCV'05 Proceedings of the Tenth IEEE International Conference on Computer Vision*. V. 2. Beijing, China. P. 1526–1531. <https://doi.org/10.1109/ICCV.2005.128>
21. Nocedal J., Wright, S.J. Numerical Optimization. New York: Springer, 2006. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-40065-5>
22. Seber G.A.F., Wild C.J. Nonlinear Regression. New York: John Wiley and Sons, 1989.
23. Oosterbaan R.J. Frequency and Regression Analysis / Drainage Principles and Applications / H.P. Ritzema. Wageningen, The Netherlands: International Institute for Land Reclamation and Improvement (ILRI). 1994. V. 16. P. 175–224.
24. Lavrenko A., Cavers J.K., Woodward G.K. Harmonic Radar With Adaptively Phase-Coherent Auxiliary Transmitters // *IEEE Transactions on Signal Processing*. 2022. V. 70. P. 1788–1802. <https://doi.org/10.1109/TSP.2022.3164183>
25. Harzheim T., Muhmel M., Heuermann H. A SFCW harmonic radar system for maritime search and rescue using passive and active tags // *Int. J. Microwav. Wirel. Technol.* 2021. V. 13(7) P. 691–707. <https://doi.org/10.1017/S1759078721000520>
26. Mazzaro G.J., Martone A.F. Multitone harmonic radar // *Proc. SPIE 8714, Radar Sensor Technology XVII*, 87140E (31 May 2013). <https://doi.org/10.1117/12.2014241>
27. Kumar D., Mondal S., Karuppuswami S., Deng Y., Chahal P. Harmonic RFID communication using conventional UHF system // *IEEE J. Radio Freq. Identif.* 2019. V. 3. No. 4. P. 227–235.
28. Mondal S., Kumar D., Chahal P. Recent advances and applications of passive harmonic RFID systems // *A Rev. Micromachines*. 2021. V. 12. No. 4. P. 1–22.
29. Viikari V., Sepp H., Kim D.-W. Intermodulation read-out principle for passive wireless sensors. 2011. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. V. 59. No. 4. P. 1025–1031.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 19.11.2024

После доработки 05.04.2025

Принята к публикации 07.04.2025