

© 2025 г. С.П. ЗУБОВА, д-р физ.-мат. наук (spzubova@mail.ru)  
(Воронежский государственный университет),  
Е.В. РАЕЦКАЯ, канд. физ.-мат. наук (raetskaya@inbox.ru)  
(Воронежский лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова)

## АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ МАТРИЦ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ В ЗАДАЧЕ РАЗМЕЩЕНИЯ СПЕКТРА ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ<sup>1</sup>

Предлагается алгоритм построения матрицы обратной связи в задаче управления спектром для линейной непрерывной динамической системы без каких-либо ограничений на матричные коэффициенты системы. Алгоритм основан на построении собственных и присоединенных элементов, отвечающих заданным собственным числам соответствующей матрицы. Для их построения разработан алгоритм с минимальным количеством простейших алгебраических операций. В результате для решения поставленной задачи строится полный набор матриц обратной связи, зависящих от определенного количества произвольных скалярных величин. Определены случаи единственности такой матрицы. Приводятся иллюстративные примеры в случаях простого спектра и кратного. Строятся матрицы обратной связи для динамической системы, описывающей работу многокамерной нагревательной печи.

*Ключевые слова:* линейные непрерывные системы, обратная связь по состоянию, задача назначения спектра, метод каскадной декомпозиции, алгоритм построения множества матриц обратной связи.

DOI: 10.7868/S2413977725120029

### 1. Введение

Задача стабилизации программного движения динамической системы является одной из важнейших задач теории управления, необходимость решения которой вызвана насущными запросами практики.

Решение задачи стабилизации имеет большую историю (более 150 лет) и обширную библиографию, включающую как чисто теоретические работы, так и практические. История вопроса до 2019 г. подробно описана в [1], где приведена объемная библиография в 107 наименований.

Большой интерес вызывает и более общая задача: если линейную динамическую систему управления с обратной связью записать как систему

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 24-21-20012, <https://rscf.ru/project/24-21-20012/>).

дифференциальных уравнений относительно неизвестных компонент вектора состояния системы, то требуется определить такую обратную связь, чтобы спектр матричного коэффициента при векторе состояния обладал определенными свойствами. Например, был бы расположен в определенной области комплексной плоскости. В частности, если заданная область расположена в левой полуплоскости комплексной плоскости, то построение соответствующей матрицы обратной связи приводит к решению задачи стабилизации программного движения рассматриваемой системы управления.

В частном случае областью расположения значений точек спектра может быть набор определенного количества произвольно заданных чисел. В этом случае задачу нахождения соответствующей матрицы обратной связи называют задачей назначения полюсов, управления спектром, назначения спектра.

В монографии [2] Zubovым В.И. при исследовании нелинейной нестационарной системы управления получены достаточные условия существования таких дополнительных компонент, введение в систему которых приводит к стабилизируемости динамической системы, дан метод нахождения этих дополнительных компонент.

Для линейной стационарной системы управления

$$(1.1) \quad \dot{x} = Ax + Bu,$$

где  $x = x(t)$ ,  $u = u(t)$ ,  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ;  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ;  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $B : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ;  $t \in [t_0, t_k]$ , задача назначения спектра состоит в следующем:

для произвольно заданных чисел  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$  требуется построить такую обратную связь

$$(1.2) \quad u = Kx,$$

чтобы спектр матрицы  $A + BK$  совпадал с  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ , т.е. чтобы

$$(1.3) \quad \det(A + BK - \lambda_j I) = 0.$$

В случае комплексных  $\lambda_j$  они должны быть попарно упорядоченными, комплексно сопряженными.

Для линейной стационарной системы с одномерным вектором управления В.И. Zubovым фактически получено достаточное условие разрешимости задачи назначения спектра – это условие управляемости системы. Спектр при этом рассматривался произвольным и лишь для решения задачи стабилизации системы автор перешел к условию расположения спектра в левой полуплоскости комплексной плоскости [2, с. 153–154].

Полный результат существования решения задачи (1.1)–(1.3) получил М. Уонэм [3, 4, с. 79]:

*Теорема 1. Для разрешимости задачи (1.1)–(1.3) необходимо и достаточно, чтобы пара  $(A, B)$  была управляемой.*

Следовательно, чтобы выполнялось условие

$$\text{rank}(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B) = n.$$

В [1] изложена история доказательства этой теоремы некоторыми авторами с целью упрощения доказательства.

Практическое решение задачи (1.1)–(1.3) было получено для случая  $m = 1$  как решение уравнения

$$\det(A + BK - \lambda I) = f(\lambda),$$

где  $f(\lambda)$  – многочлен  $n$ -ой степени с соответствующими вещественными коэффициентами, содержащий компоненты матрицы строки  $K = (k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n)$ . Это уравнение разрешимо однозначно относительно  $k_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , и решение дается точными формулами Басса–Гура и Акермана [1, с. 579].

Численная реализация задачи (1.1)–(1.3) в MATLAB, основанная на методе полного размещения полюсов [5], приведена в [6].

В [7] описан метод построения множества матриц обратной связи для заданных  $A$  и  $B$  в случае управляемости системы (1.1) и при условии  $\text{Ker } B = \{0\}$ . Для этого использовались жордановы цепочки векторов матрицы  $(A - \lambda I \ B)$  для каждого  $\lambda = \lambda_j$  и вводились дополнительные параметризующие матрицы.

В [8] предложен метод решения задачи (1.1)–(1.3) без каких-либо ограничений на  $A$  и  $B$  – метод каскадной декомпозиции (каскадный метод). В результате применения этого метода либо устанавливается, что система (1.1) не является управляемой и матрица  $K$  не может быть построена, либо управляемость системы имеет место и строится полное многообразие матриц  $K$ , отвечающих данным  $A$ ,  $B$  и  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ . Таким образом, получено еще одно доказательство теоремы 1 и, кроме того, разработан метод построения полного набора матриц обратной связи.

Задача (1.1)–(1.3) решается в [8] следующим образом.

Решается уравнение

$$(1.4) \quad (A + BK)v_j = \lambda_j v_j$$

относительно  $v_j$  и  $K$ , причем вначале строится набор из  $n$  линейно независимых векторов  $v_j$ , отвечающих собственным числам  $\lambda_j$ , затем находятся компоненты матрицы  $K$ . Каскадный метод применяется лишь для построения  $v_j$ .

Однако применение каскадного метода достаточно трудоемко: здесь используются разложения пространств на подпространства, проекторы на подпространства, полубратные матрицы.

Цель настоящей работы – максимально упростить решение задачи (1.1)–(1.3), для этого создать алгоритм построения  $n$  линейно независимых

собственных и присоединенных элементов матрицы  $A + BK$  такой, применение которого требует лишь решения систем линейных алгебраических уравнений и проверки линейной независимости построенных векторов на последнем шаге алгоритма, например с помощью вычисления определителей.

Такое построение матриц обратной связи значительно упрощает вычислительный процесс, создает условия для создания более простых вычислительных программ.

Для сравнения: в [6] для численного решения прикладной задачи (1.1)–(1.3) в среде MATLAB применяются псевдообратные матрицы Мура–Пенроуза, вычисляемые как предел последовательности некоторых матриц. При этом строится лишь одна матрица  $K$ , хотя для задачи, рассмотренной в [6], их множество [8, стр. 2024].

В настоящей работе выявляется полный набор матриц обратной связи для конкретной задачи, для чего устанавливается зависимость матрицы от некоторых числовых параметров, одни из которых произвольные, другие должны удовлетворять некоторым условиям.

Многообразие матриц обратной связи весьма полезно при решении прикладных задач, это позволяет выделить матрицу, например, меньшую по норме или с меньшим количеством ненулевых компонент.

Количество шагов алгоритма нахождения собственных и присоединенных векторов матрицы  $A + BK$  можно установить заранее: их ровно  $p$ , где  $p = \min q$ , а число  $q$  таково, что

$$(1.5) \quad \text{rank}(B \ A \ B \ \dots \ A^q B) = n.$$

Предложенный алгоритм получен на основании каскадного метода, описанного в [8], и является его значительным упрощением. Обоснование алгоритма построения собственных и присоединенных векторов матрицы  $A + BK$  приведено в Приложении к данной работе.

Приводятся иллюстративные примеры нахождения матриц обратной связи в случаях простого спектра и кратного, а также строятся матрицы обратной связи для системы, описывающей работу многокамерной нагревательной печи.

## 2. О решении линейного алгебраического уравнения с необратимой матрицей при неизвестной

Решение линейной системы

$$(2.1) \quad Cx = y$$

относительно  $x$  с необратимой матрицей  $C$  может быть возможным лишь при выполнении некоторого ограничения, условия на  $y$ :

$$(2.2) \quad Qy = 0.$$

Решение  $x$  может быть неединственно:

$$(2.3) \quad x = C^{-}y + z,$$

где  $C^{-}$  – некоторая матрица,  $z$  – произвольный вектор, такой, что  $Cz = 0$ .

Будем называть (2.2) – условием корректности системы (2.1), а (2.3) – решением системы (2.1).

$$\text{Например, если } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ т.е.}$$

$$(2.4) \quad \begin{aligned} x_1 + x_3 &= y_1, \\ x_2 &= y_2, \\ 2x_1 + 2x_3 &= y_3, \\ 0 &= y_4, \end{aligned}$$

то  $x = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$  – решение системы (2.4) с произвольным  $x_3$  при выполнении условий

$$\begin{aligned} -2y_1 + y_3 &= 0, \\ y_4 &= 0. \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } Qy = 0, \text{ где } Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Здесь } z = \begin{pmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Можно решить систему (2.4) и следующим образом:

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix} \text{ для любого } x_1 \text{ при выполнении условия корректности}$$

$$\begin{aligned} y_1 - \frac{1}{2}y_3 &= 0, \\ y_4 &= 0. \end{aligned}$$

Но совокупности решения и условия корректности при этом эквивалентны, поэтому тот или иной вид решения с соответствующим условием корректности на практике не имеет значения.

### 3. Алгоритм построения матрицы обратной связи в случае простого спектра

#### 3.1. Предварительные преобразования

$A_1$ . В случае простых значений  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , в уравнении (1.4)

$$(3.1) \quad (A + BK)v(\lambda_j) = \lambda_j v(\lambda_j)$$

ввести обозначение

$$(3.2) \quad Kv(\lambda_j) = f(\lambda_j).$$

$A_2$ . Уравнение (3.1) записать как

$$(3.3) \quad Bf(\lambda_j) = (\lambda I - A)v(\lambda_j).$$

$A_3$ . Решить уравнение (3.3) относительно  $f(\lambda_j)$ :

$$(3.4) \quad f(\lambda_j) = B^-(\lambda_j I - A)v(\lambda_j) + z(\lambda_j)$$

с произвольным  $z = z(\lambda_j)$  при выполнении условия корректности

$$(3.5) \quad Q(\lambda_j I - A)v(\lambda_j) = 0.$$

В результате предварительных преобразований соотношение (3.1) заменяется эквивалентно системой из трех соотношений (3.2), (3.4) и (3.5).

*3.2. Алгоритм решения уравнения (3.5) относительно вектора  $v = v(\lambda_j)$*

Прямой ход.

Первый шаг.  $A_{11}$ . В уравнении (3.5) с опущенным пока индексом  $j$  коэффициент при  $\lambda$ , т.е.  $Qv$ , следует обозначить через  $w_1 = w_1(\lambda)$ , тогда (3.5) с учетом этого обозначения эквивалентно системе

$$(3.6) \quad \begin{cases} Qv = w_1, \\ QA v = \lambda w_1. \end{cases}$$

$A_{12}$ . Получить решение  $v$  системы (3.6):

$$(3.7) \quad v = G_1(\lambda, w_1) + z_1$$

с некоторым  $G_1$  и произвольным  $z_1 = z_1(\lambda)$  при условии корректности системы

$$(3.8) \quad Q_1(\lambda, w_1) = 0.$$

Второй шаг.  $A_{21}$ . В соотношении (3.8) обозначить коэффициент при  $\lambda$  (это  $Q_1 w_1$ ) через  $w_2 = w_2(\lambda)$ , тогда (3.8) с учетом этого обозначения эквивалентно системе

$$(3.9) \quad \begin{cases} Q_1 w_1 = w_2, \\ Q_{11} w_1 = \lambda w_2 \end{cases}$$

с некоторой матрицей  $Q_{11}$ .

$A_{22}$ . Получить решение этой системы

$$w_1 = G_2(\lambda, w_2) + z_2$$

с некоторой матрицей  $G_2$  и произвольным  $z_2 = z_2(\lambda)$  при условии корректности

$$Q_2(\lambda, w_2) = 0.$$

И так далее . . . .

Шаг  $i$ .  $A_{i1}$ . В выявленном на  $(i - 1)$ -м шаге условии корректности

$$(3.10) \quad Q_{i-1}(\lambda, w_{i-1}) = 0, \quad i = 2, 3, \dots,$$

обозначить коэффициент при  $\lambda$  через  $w_i = w_i(\lambda)$ , в результате чего (3.10) эквивалентно системе

$$(3.11) \quad \begin{cases} Q_{i-1}w_{i-1} = w_i, \\ Q_{i-11}w_{i-1} = \lambda w_i. \end{cases}$$

$A_{i2}$ . Получить решение этой системы

$$(3.12) \quad w_{i-1} = G_i(\lambda, w_i) + z_i$$

с некоторой матрицей  $G_i$  и произвольным  $z_i = z_i(\lambda)$  при условии корректности

$$Q_i(\lambda, w_i) = 0.$$

И так далее . . . .

Шаг  $p$ .  $A_{p2}$ . В [8] доказано, что если система (1.1) является полностью управляемой, то при  $i = p$  (см. (1.5)) система (3.11) разрешима относительно  $w_{p-1}$  без какого-либо условия корректности:

$$(3.13) \quad w_{p-1} = G_p(\lambda, w_p) + z_p$$

с некоторой матрицей  $G_p$  и произвольным  $z_p = z_p(\lambda)$ . Элемент  $w_p = w_p(\lambda)$  также произвольный.

Построить  $w_{p-1}$ .

### 3.3. Алгоритм построения вектора $v(\lambda)$

#### Обратный ход.

$B_1$ . Вектор  $w_{p-1}$ , построенный в  $A_p$ , подставить в (3.12) с  $i = p - 1$ , определив тем самым вектор  $w_{p-2}$ .

$B_2$ . Вектор  $w_{p-2}$ , построенный в предыдущем пункте, подставить в (3.12) с  $i = p - 2$ , определив тем самым вектор  $w_{p-3}$ .

И так далее . . . .

$B_{p-2}$ . Вектор  $w_2$ , построенный в пункте  $B_{p-3}$ , подставить в (3.12) с  $i = 2$ , определив тем самым вектор  $w_1$ .

$B_{p-1}$ . Вектор  $w_1$ , построенный в пункте  $B_{p-2}$ , подставить в (3.7), определив тем самым вектор  $v$ :

$$(3.14) \quad v = G(w_p(\lambda), z_p(\lambda), z_{p-1}(\lambda), \dots, z_1(\lambda))$$

с некоторой матрицей  $G$  и произвольными вектор-функциями  $w_p(\lambda)$  и  $z_s(\lambda)$ ,  $s = 1, \dots, p$ .

### 3.4. Построение системы $n$ линейно независимых векторов $v(\lambda_j)$

Если система (1.1) является полностью управляемой, то для любого набора  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$  существуют такие элементы  $w_p(\lambda), z_p(\lambda), z_{p-1}(\lambda), \dots, z_1(\lambda)$ , что векторы  $v(\lambda_j)$ , описанные в (3.14) с этими  $w_{p-1}(\lambda), z_p(\lambda), z_{p-1}(\lambda), \dots, z_1(\lambda)$ , являются линейно независимыми [8].

Числа  $\lambda_j$  могут быть и комплексными, попарно упорядоченными.

Если система (1.1) не является полностью управляемой, то построить  $n$  линейно независимых векторов  $v(\lambda_j)$  невозможно, и матрица  $K$  построена быть не может [8].

Здесь следует построить вектор  $v(\lambda_j)$  такой, что векторы  $v(\lambda_1), v(\lambda_2), \dots, v(\lambda_n)$  являются линейно независимыми при любом наборе  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ .

### 3.5. Алгоритм построения матрицы обратной связи в случае простого спектра

$C_1$ . Подставить векторы  $v_j = v(\lambda_j)$ , построенные в разделе 3.4, в формулу (3.4), определяя тем самым  $f_j = f_j(\lambda_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

$C_2$ . Подставить  $v_j$  и  $f_j$  в (3.2) при каждом значении  $j$ . В результате получится  $n$  линейных уравнений с неизвестными  $k_{ij}$  — компонентами матрицы  $K$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

$C_3$ . Выделить из этих уравнений те, которые содержат неизвестными компоненты  $k_{1j}$ , формируя тем самым систему линейных алгебраических уравнений с главным определителем  $\Delta_1$ , составленным из компонент линейно независимых векторов  $v(\lambda_j)$ , следовательно,  $\Delta_1 \neq 0$ .

$C_4$ . Решить полученную в п.  $C_3$  систему относительно  $k_{1j}$  — компонентов первой строки матрицы  $K$ .

$C_5$ . Повторить п.  $C_3, C_4$  при  $i = 2, 3, \dots, m$ , определяя при этом компоненты  $i$ -ых строк матрицы  $K$ .

*Пример 1.* Пусть  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $K = (k_{ij})$ ,  $i = 1, 2$ ;  $j = \overline{1, 3}$ .

Решаем уравнение  $Bf = (\lambda I - A)v$ , где  $f = (f_1, f_2)$ ,  $v = (v_1, v_2, v_3)$ , относительно  $f$  (п.  $A_3$ ):

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 &= \lambda v_1, \\ f_1 + f_2 &= -v_1 + \lambda v_2, \\ f_1 + f_2 &= -v_2 + \lambda v_3. \end{aligned}$$

Отсюда

$$(3.15) \quad \begin{aligned} f_1 &= \lambda v_1 - z(\lambda), \\ f_2 &= z(\lambda), \end{aligned}$$



с произвольным  $z(\lambda)$  ((3.15) – это (3.4)) при выполнении условия корректности (3.5):

$$\begin{aligned}\lambda v_1 &= -v_1 + \lambda v_2, \\ \lambda v_1 &= -v_2 + \lambda v_3,\end{aligned}$$

или

$$(3.16) \quad \begin{cases} \lambda(v_1 - v_2) = -v_1, \\ \lambda(v_1 - v_3) = -v_2. \end{cases}$$

Обозначаем (это п.  $A_{11}$ )

$$(3.17) \quad \begin{aligned}v_1 - v_2 &= w_{11}, \\ v_1 - v_3 &= w_{12},\end{aligned}$$

тогда (3.16) – это

$$(3.18) \quad \begin{cases} -v_1 = \lambda w_{11}, \\ -v_2 = \lambda w_{12}. \end{cases}$$

Система, составленная из (3.17) и (3.18), это система (3.6).

Решаем (п.  $A_{12}$ ) систему (3.17), (3.18) относительно  $v_1, v_2, v_3$  (формула (3.7)):

$$(3.19) \quad \begin{aligned}v_1 &= -\lambda w_{11}, \\ v_2 &= -\lambda w_{12}, \\ v_3 &= -\lambda w_{11} - w_{12}\end{aligned}$$

(здесь  $z_1 = 0$ ) при условии корректности системы (3.17), (3.18):  $-\lambda w_{11} + \lambda w_{12} = w_{11}$ , тем самым получаем соотношение (3.8):

$$\lambda(-w_{11} + w_{12}) = w_{11}.$$

Обозначаем (п.  $A_{21}$ ):

$$-w_{11} + w_{12} = w_2,$$

тогда

$$w_{11} = \lambda w_2.$$

Последние два равенства – это система (3.9).

Решаем (п.  $A_{22}$ ) эту систему относительно  $w_{11}, w_{12}$  :

$$(3.20) \quad \begin{aligned}w_{11} &= \lambda w_2, \\ w_{12} &= (1 + \lambda)w_2.\end{aligned}$$

Решение существует при любом  $w_2$  без какого-либо условия корректности, следовательно, п.  $A_{22}$  – это п.  $A_{p2}$  при  $p = 2$ .

Подставив (3.20) в (3.19), получаем формулу (3.14):

$$(3.21) \quad v(\lambda) = (\lambda^2, \lambda + \lambda^2, 1 + \lambda + \lambda^2).$$

При различных значениях  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  векторы  $v(\lambda_j) = (\lambda_j^2, \lambda_j + \lambda_j^2, 1 + \lambda_j + \lambda_j^2)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , линейно независимы, так как определитель  $\Delta_1$ , составленный из компонент этих векторов при каждом  $j$ , сводится к определителю Вандермонда [9, с. 33], отличному от нуля.

Затем полученные значения  $v(\lambda_j)$  подставляются в (3.15) (п.  $C_1$ ) и вместе с полученными  $f_1, f_2$  подставляются в (3.2) (п.  $C_2$ ).

Из полученных равенств формируются две системы.

При  $i = 1$  (п.  $C_3$ ):

$$\begin{cases} \lambda_1^2 k_{11} + (\lambda_1 + \lambda_1^2) k_{12} + (1 + \lambda_1 + \lambda_1^2) k_{13} = \lambda_1^3 - z(\lambda_1), \\ \lambda_2^2 k_{11} + (\lambda_2 + \lambda_2^2) k_{12} + (1 + \lambda_2 + \lambda_2^2) k_{13} = \lambda_2^3 - z(\lambda_2), \\ \lambda_3^2 k_{11} + (\lambda_3 + \lambda_3^2) k_{12} + (1 + \lambda_3 + \lambda_3^2) k_{13} = \lambda_3^3 - z(\lambda_3), \end{cases}$$

при  $i = 2$  (п.  $C_4$ ):

$$\begin{cases} \lambda_1^2 k_{21} + (\lambda_1 + \lambda_1^2) k_{22} + (1 + \lambda_1 + \lambda_1^2) k_{23} = z(\lambda_1), \\ \lambda_2^2 k_{21} + (\lambda_2 + \lambda_2^2) k_{22} + (1 + \lambda_2 + \lambda_2^2) k_{23} = z(\lambda_2), \\ \lambda_3^2 k_{21} + (\lambda_3 + \lambda_3^2) k_{22} + (1 + \lambda_3 + \lambda_3^2) k_{23} = z(\lambda_3), \end{cases}$$

откуда и находятся компоненты матрицы  $K$ .

Неединственность вида матрицы  $K$  обеспечивается произвольной функцией  $z(\lambda)$ .

#### 4. Алгоритм построения матрицы обратной связи в случае кратного спектра

Пусть, например,  $\lambda_1$  имеет кратность  $k$ ,  $k \leq n$ , а  $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \dots, \lambda_n$  — различные произвольные, не равные  $\lambda_1$  числа.

Векторы  $v_1 = v(\lambda_1)$ ,  $v_{k+1} = v(\lambda_{k+1}), \dots, v_n = v(\lambda_n)$  строятся так, как это описано в разделе 3, а в качестве  $k-1$  векторов  $\tau_j = \tau_j(\lambda)$  берутся присоединенные к  $v_1$  векторы  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-1}$  матрицы  $A + BK$ , отвечающие собственному числу  $\lambda_1$ :

$$(A + BK)\tau_j = \lambda_1 \tau_j + \tau_{j-1}, \quad j = 1, \dots, k-1, \quad \tau_0 = v_1.$$

##### 4.1. Предварительные преобразования

$D_1$ . Ввести обозначение

$$(4.1) \quad K\tau_j = g_j,$$

$D_2$ . При каждом  $j = 1, \dots, k-1$  решить уравнения  $Bg_j = (\lambda_1 I - A)\tau_j + \tau_{j-1}$  относительно  $g_j$ :

$$(4.2) \quad g_j = B^{-1}((\lambda_1 I - A)\tau_j + \tau_{j-1}) + z_j,$$

с произвольными  $z_j$ , такими, что  $Bz_j = 0$ , при выполнении условий корректности

$$(4.3) \quad Q((\lambda_1 I - A)\tau_j + \tau_{j-1}) = 0.$$

4.2. Алгоритм решения уравнений (4.3) относительно  $\tau_j$

Прямой ход.

Первый шаг.  $D_{11}$ . В (4.3) коэффициенты при  $\lambda_1$ , а именно  $Q\tau_j$ , обозначить через  $w_1^j$ ,  $j = 1, \dots, k-1$ :

$$(4.4) \quad Q\tau_j = w_1^j,$$

в результате чего (4.3) принимает вид

$$(4.5) \quad QA\tau_j = \lambda_1 w_1^j + Q\tau_{j-1},$$

где  $\tau_0 = v_1$  – известная (см. раздел 3) функция.

$D_{12}$ . Найти решения систем (4.4), (4.5):

$$(4.6) \quad \tau_j = G_1^j(\lambda_1, w_1^j) + z_1^j,$$

с некоторыми  $G_1^j$  и произвольными  $z_1^j$  при условиях корректности этих систем:

$$Q_1^j(\lambda_1, w_p, w_1^j) = 0.$$

Шаг  $i$ .  $D_{i1}$ . В соотношениях, полученных на  $i-1$ -ом шаге алгоритма,

$$(4.7) \quad Q_{i-1}^j(\lambda_1, w_p, w_{i-1}^j) = 0$$

коэффициенты при  $\lambda_1$  обозначить через  $w_i^j$ :

$$(4.8) \quad Q_{i-1}^j w_{i-1}^j = w_i^j.$$

Выражения (4.7) принимают вид:

$$(4.9) \quad Q_{i-1}^j w_{i-1}^j = \lambda_1 w_i^j.$$

$D_{i2}$ . Решить системы (4.8), (4.9) относительно  $w_{i-1}^j$ :

$$(4.10) \quad w_{i-1}^j = G_i^j(\lambda_1, w_i^j) + z_i^j,$$

с некоторыми матрицами  $G_i^j$  и произвольными  $z_i^j$  при выполнении условий корректности

$$(4.11) \quad Q_i^j(\lambda_1, w_p, w_i^j) = 0,$$

и так далее...

Шаг  $p$ .  $D_{p2}$ . В [8] доказано, что если система (1.1) является полностью управляемой, то при каждом  $j = 1, \dots, k-1$  и  $i = p$  уравнения (4.11) разрешимы относительно  $w_{p-1}^j$ :

$$(4.12) \quad w_{p-1}^j = G_p^j(\lambda_1, w_p, w_p^j) + z_p^j,$$

где  $G_p^j$  – некоторые матрицы,  $z_p^j$ ,  $w_p$  и  $w_p^j$  – произвольные векторы. Условия корректности при этом отсутствуют.

Сформировать  $w_{p-1}^j$ .

Обратный ход.

$E_1$ . При каждом  $j = 1, \dots, k-1$  векторы  $w_{p-1}^j$ , имеющие вид (4.12), с произвольными пока  $w_p^j$  и  $r_p^j$  подставить в (4.10) с  $i = p-1$ , определяя при этом векторы  $w_{p-2}^j$ .

$E_2$ . Найденные  $w_{p-2}^j$  подставить в (4.10) с  $i = p-2$ . При этом находятся векторы  $w_{p-3}^j$ .

И так далее . . . .

$E_{p-2}$ . Найденные в п.  $E_{p-3}$  значения  $w_2^j$  подставить в (4.10) с  $i = 2$ . При этом находятся векторы  $w_1^j$ .

$E_{p-1}$ . Из (4.6) определить  $\tau_j$  :

$$(4.13) \quad \tau_j = G(w_p, w_p^j, z_p^j, z_{p-1}^j, \dots, z_1^j), \quad j = 1, \dots, k-1.$$

#### 4.3. Построение системы $n$ линейно независимых векторов в случае кратного спектра

В [8] доказано, что в случае полной управляемости системы (1.1) существуют такие векторы  $w_p, w_p^j, z_p^j, z_{p-1}^j, \dots, z_1^j$ , что векторы  $v_1, \tau_1, \dots, \tau_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n$  являются линейно независимыми. Здесь векторы  $\tau_1, \dots, \tau_{k-1}$  построены по формулам (4.13), а  $v_j = v(\lambda_j)$ ,  $j = 1, k+1, \dots, n$ , по формулам (3.14).

Если же система (1.1) не является полностью управляемой, то  $n$  линейно независимых векторов  $v_1, \tau_1, \dots, \tau_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n$  построить невозможно для произвольных  $\lambda_1, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$ , если  $\lambda_1$  –  $k$ -кратное число [8].

Подобрать такие элементы  $w_p, w_p^j, z_p^j, z_{p-1}^j, \dots, z_1^j$ , чтобы векторы  $v_1, \tau_1, \dots, \tau_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n$  были линейно независимыми.

#### 4.4. Алгоритм построения матрицы обратной связи в случае кратного спектра

Пусть  $\lambda_1$  –  $k$ -кратное собственное число матрицы  $A + BK$ , остальные  $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$  – простые собственные числа.

$G_1$ . При каждом  $j = 1, k+1, \dots, n$  векторы  $v_j = v(\lambda_j)$ , построенные в разделе 3, подставить в (3.4), определяя при этом  $f_j$ .

$G_2$ . Подставить найденные  $f_j$  и  $v_j$  в (3.2):

$$(4.14) \quad Kv(\lambda_j) = f(\lambda_j), \quad j = 1, k+1, \dots, n.$$

$G_3$ . Подставить найденные в п. 4.3 векторы  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-1}$  в формулы (4.2), определяя при этом векторы  $g_j$ .

$G_4$ . Найденные  $g_j$  и  $\tau_j$  подставить в (4.1):

$$(4.15) \quad K\tau_j = g_j, \quad j = 1, \dots, k.$$

$G_5$ . Из равенств (4.14) и (4.15) выделить те, которые содержат компоненты  $k_{1j}$  первой строки матрицы  $K$ ,  $j = 1, \dots, n$ . При этом формируется линейная алгебраическая система с неизвестными  $k_{1i}$  с главным определителем  $\Delta_2$ , состоящим из компонент линейно независимых векторов  $v_1, \tau_1, \dots, \tau_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n$ , следовательно,  $\Delta_2 \neq 0$ .

$G_6$ . Решить систему, построенную в предыдущем пункте, получив тем самым значения компонент первой строки матрицы  $K$ .

$G_7$ . Повторить п.  $G_5$  и п.  $G_6$  для  $i = 2, 3, \dots, m$ , определяя при этом компоненты  $i$ -ых строк матрицы  $K$ .

*Пример 2.* Пусть  $A$  и  $B$  – матрицы, рассмотренные в иллюстративном примере 1, и  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ . Следует построить три линейно независимых вектора  $v_1, \tau_1, \tau_2$ , таких, что

$$(4.16) \quad (A + BK)v_1 = \lambda_1 v_1,$$

$$(4.17) \quad (A + BK)\tau_1 = \lambda_1 \tau_1 + v_1,$$

$$(4.18) \quad (A + BK)\tau_2 = \lambda_1 \tau_2 + \tau_1.$$

Вектор  $v_1$  построен в разделе 3:  $v_1 = (\lambda_1^2, \lambda_1 + \lambda_1^2, 1 + \lambda_1 + \lambda_1^2)$  (формула (3.21)).

Для построения  $\tau_1 = (\tau_{11}, \tau_{12})$  в уравнении (4.17) вводится обозначение (равенство (4.1) с  $j = 1$ ):

$$(4.19) \quad K\tau_1 = g_1, \quad g_1 = (g_{11}, g_{12}),$$

и оно записывается как

$$Bg_1 = (\lambda_1 I - A)\tau_1 + v_1,$$

откуда

$$(4.20) \quad \begin{aligned} g_{11} &= \lambda_1 \tau_{11} + \lambda_1^2 - z_1^1, \\ g_{12} &= z_1^1, \end{aligned}$$

(это (4.2) при  $j = 1$ ) с произвольным  $z_1^1$  при условии корректности ((4.3) с  $j = 1$ )

$$\begin{cases} \lambda_1(\tau_{11} - \tau_{12} - 1) = -\tau_{11}, \\ \lambda_1(\tau_{11} - \tau_{13} - 1) = -\tau_{12} + 1. \end{cases}$$

Далее коэффициенты при  $\lambda_1$  в последних двух соотношениях обозначаются как новые неизвестные (п.  $D_{11}$ ), например:

$$\tau_{11} - \tau_{12} - 1 = a,$$

$$\tau_{11} - \tau_{13} - 1 = b,$$

( $a$  и  $b$  – вместо  $w_{11}^1$  и  $w_{12}^1$  для простоты обозначений, см. (4.4)). И далее производятся действия, как это описано в разделе 4.2. В результате определяется вектор  $\tau_1 = (2\lambda_1, 1 + 2\lambda_1, 1 + 2\lambda_1)$ .

Далее (раздел 4.1,  $j = 2$ ) в обозначении

$$(4.21) \quad K\tau_2 = g_2, \quad g_2 = (g_{21}, g_{22}),$$

уравнение (4.18) принимает вид

$$(4.22) \quad Bg_2 = (\lambda \cdot I - A)\tau_2 + \tau_1,$$

откуда находятся

$$(4.23) \quad \begin{aligned} g_{21} &= \lambda_1 \tau_{21} + 2\lambda_1 - z_2, \\ g_{22} &= z_2 \end{aligned}$$

с произвольным  $z_2$  при условии

$$\begin{cases} \lambda_1(\tau_{21} - \tau_{22}) = -\tau_{21} + 1, \\ \lambda_1(\tau_{21} - \tau_{23}) = -\tau_{22} + 1. \end{cases}$$

Продолжая решать последнюю систему методом, описанным в разделе 4.4, получаем:

$$\tau_2 = (1, 1, 1).$$

Легко убедиться, что определитель  $\Delta_2$ , составленный из компонент векторов  $v_1, \tau_1, \tau_2$ , отличен от нуля.

Далее по формулам (4.20) и (4.23) определяются  $g_1 = (3\lambda_1^2 - z_1^1, z_1^1)$  и  $g_2 = (3\lambda_1^2 - z_2, z_2)$  с произвольными значениями  $z_1^1$  и  $z_2$ . Вектор  $f$  определен в (3.15):  $f = (\lambda_1^3 - z, z)$  с произвольным  $z$ .

Наконец, формируется система, состоящая из уравнений  $Kv_1 = f_1$ , (4.19) и (4.21).

В результате образуются две системы:

$$\begin{cases} \lambda_1^2 k_{11} + (\lambda_1 + \lambda_1^2)k_{12} + (1 + \lambda_1 + \lambda_1^2)k_{13} = \lambda_1^3 - z, \\ 2\lambda_1^2 k_{11} + (1 + 2\lambda_1)k_{12} + (1 + 2\lambda_1)k_{13} = 3\lambda_1^2 - z_1^1, \\ k_{11} + k_{12} + k_{13} = 3\lambda_1 - z_2, \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \lambda_1^2 k_{21} + (\lambda_1 + \lambda_1^2)k_{22} + (1 + \lambda_1 + \lambda_1^2)k_{23} = z, \\ 2\lambda_1 k_{21} + (1 + 2\lambda_1)k_{22} + (1 + 2\lambda_1)k_{23} = z_1^1, \\ k_{21} + k_{22} + k_{23} = z_2, \end{cases}$$

откуда находятся компоненты  $k_{ij}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $j = 1, 2, 3$ , матрицы  $K$  неединственным образом, в зависимости от произвольных значений  $z, z_1^1, z_2$ .

В частном случае, если  $\lambda = -1$  – трехкратное собственное число матрицы  $A + BK$ , то  $K = \begin{pmatrix} c_1 & -2 + c_2 & -1 - c_3 \\ -c_1 & -c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ , где  $c_1, c_2, c_3$  есть линейные комбинации произвольных значений  $z, z_1^1, z_2$ , следовательно, произвольные значения.

Проверка показывает, что при таких  $K$

$$\det(A + BK - \lambda I) = -(\lambda + 1)^3.$$

## 5. О неединственности матрицы обратной связи

Неединственность  $K$  при заданных  $A, B$  и  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$  возникает, если  $\text{Ker } B \neq \{0\}$ , т.е. уравнение  $Bf = h$  при фиксированном  $h \in \mathbb{R}^n$  имеет неединственное решение  $f = B^-h + z$  с произвольным  $z \in \mathbb{R}^m$ .

Также неединственность  $K$  возникает, если хотя бы одна из систем (3.11) или систем (4.8), (4.9) с  $i = 1, \dots, p$ , имеет неединственное решение  $w_{i-1}$  или  $w_{i-1}^j$ ,  $j = 1, \dots, k$ , где  $k$  – кратность  $\lambda_s$ .

Если же  $\text{Ker } B = \{0\}$  и все системы (3.11) или (4.8), (4.9) разрешаются однозначно, то  $K$  имеет единственный вид (пример 2 в [8]).

Заметим, чем выше кратность собственного числа, тем больше произвольных параметров может содержать  $K$ .

К примеру, в [6] построена единственная матрица  $K$  для системы (1.1) с матрицами  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  и четырехкратным  $\lambda = -1$ .

Однако для этого случая алгоритмом, предложенным в данной работе, строится матрица  $K$ , зависящая от восьми параметров  $K = K(c_1, c_2, \dots, c_8)$ , связанных лишь условием

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & 0 & 0 \\ c_3 & c_4 & c_1 & c_2 \\ c_5 & c_6 & c_3 & c_4 \\ c_7 & c_8 & c_5 & c_6 \end{vmatrix} \neq 0,$$

возникающим из условия линейной независимости векторов  $v_1, \tau_1, \tau_2, \tau_3$  [8].

Для конкретной динамической системы вида (1.1) и заданного произвольного набора  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$  предложенным в данной работе методом строится именно **полный** набор матриц обратной связи, что следует из эквивалентности применяемых преобразований.

## 6. Пример построения матриц обратной связи для стабилизации работы многокамерной нагревательной печи

Динамическая модель и схема работы трех печей для обогрева трех камер приведена в [10].

Рассмотрим случай трех печей и пяти камер

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= 2ax_1 + bu_1 + cu_2, \\
 \dot{x}_2 &= ax_2 + cu_2 + du_3, \\
 \dot{x}_3 &= ax_3 + bu_1 + 2cu_2 + du_3, \\
 \dot{x}_4 &= 3ax_4 + 2cu_2 + 2du_3, \\
 \dot{x}_5 &= 3ax_5 + 2bu_1 + 3cu_2 + du_3,
 \end{aligned}
 \tag{6.1}$$

где  $a \leq -\frac{1}{10}$ ,  $b = \frac{1}{4}$ ,  $c = \frac{1}{9}$ ,  $d = \frac{1}{5}$ . В случае неосуществимости заданной начальной температуры  $x_i(t_0) = x_{0i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5$ , в  $i$ -х камерах требуется исправить программное управление, или загрузку топлива  $u_r = u_r(t)$  в  $r$ -ые печи,  $r = 1, 2, 3$ , так, чтобы в заданный момент  $t = t_k$  температура в камерах  $x_i(t_k)$  была близка к заданной температуре  $x_{ki}$ , для чего можно воспользоваться стабилизирующим управлением с матрицей обратной связи  $K$  такой, что стабилизированное состояние системы (6.1) стремится экспоненциально к программному состоянию.

$$\text{Здесь } A = \begin{pmatrix} 2a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/9 & 0 \\ 0 & 1/9 & 1/5 \\ 1/4 & 2/9 & 1/5 \\ 0 & 2/9 & 2/5 \\ 2/4 & 3/9 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Компоненты матрицы  $K = (k_{ij})$  находятся из уравнения  $Kv = f$ , где  $f = f(\lambda)$  и  $v = (v_1, \dots, v_5)$ ,  $v_i = v_i(\lambda)$ , находятся из уравнения  $Bf = (\lambda I - A)v$ , или

$$\begin{aligned}
 f_1 + f_2 &= (\lambda - 2a)v_1, \\
 f_2 + f_3 &= (\lambda - a)v_2, \\
 f_1 + 2f_2 + f_3 &= (\lambda - a)v_3, \\
 2f_2 + 2f_3 &= (\lambda - 3a)v_4, \\
 2f_1 + 3f_2 + f_3 &= (\lambda - 3a)v_5,
 \end{aligned}
 \tag{6.2}$$

где  $f = (4f_1, 9f_2, 5f_3)$ , чтобы избавиться от дробей в матрице  $B$ .

Решение системы (6.2) – это

$$\begin{aligned}
 f_1 &= (\lambda - 2a)v_1 - z, \\
 f_2 &= z, \\
 f_3 &= (\lambda - a)v_2 - z,
 \end{aligned}
 \tag{6.3}$$

(формула (3.4)) с произвольным  $z$  при выполнении условий (3.5)

$$\begin{aligned}
 2(\lambda - a)v_2 &= (\lambda - 3a)v_4, \\
 (\lambda - 2a)v_1 + (\lambda - a)v_2 &= (\lambda - a)v_3, \\
 2(\lambda - 2a)v_1 + (\lambda - a)v_2 &= (\lambda - 3a)v_5,
 \end{aligned}$$



или

$$(6.4) \quad \begin{aligned} \lambda(2v_2 - v_4) &= 2av_2 - 3av_4, \\ \lambda(v_1 + v_2 - v_3) &= 2av_1 + av_2 - av_3, \\ \lambda(2v_1 + v_2 - v_5) &= 4av_1 + av_2 - 3av_5. \end{aligned}$$

*Построение вектора  $v(\lambda)$ .*

Первый шаг.

Вводятся обозначения (п.  $A_{11}$ )

$$(6.5) \quad \begin{aligned} 2v_2 - v_4 &= aw_{11}, \\ v_1 + v_2 - v_3 &= aw_{12}, \\ 2v_1 + v_2 - v_5 &= aw_{13}. \end{aligned}$$

Тогда из (6.4) следует

$$(6.6) \quad \begin{aligned} 2v_2 - 3v_4 &= \lambda w_{11}, \\ 2v_1 + v_2 - v_3 &= \lambda w_{12}, \\ 4v_1 + v_2 - 3v_5 &= \lambda w_{13}. \end{aligned}$$

**A<sub>12</sub>.** Из системы (6.5), (6.6), где шесть уравнений и пять неизвестных, находятся  $v_j$  (п.  $A_{12}$ ):

$$(6.7) \quad \begin{aligned} v_1 &= (\lambda - a)w_{12}, \\ v_2 &= -\frac{1}{4}(\lambda - 3a)w_{11}, \\ v_3 &= -\frac{1}{4}(\lambda - 3a)w_{11} + (\lambda - 2a)w_{12}, \\ v_4 &= -\frac{1}{2}(\lambda - a)w_{11}, \\ v_5 &= -\frac{1}{4}(\lambda - 3a)w_{11} + 2(\lambda - a)w_{12} - aw_{13}, \end{aligned}$$

(это формула (3.7)) при выполнении условия корректности этой системы

$$(\lambda - 3a)w_{11} - 4(\lambda - a)w_{12} - 2(\lambda - 3a)w_{13} = 0,$$

откуда

$$\lambda(w_{11} - 4w_{12} - 2w_{13}) = a(3w_{11} - 4w_{12} - 6w_{13}).$$

Второй шаг.

**A<sub>21</sub>.** Обозначается (п.  $A_{21}$ )

$$(6.8) \quad w_{11} - 4w_{12} - 2w_{13} = aw_{21},$$

тогда

$$(6.9) \quad 3w_{11} - 4w_{12} - 6w_{13} = \lambda w_{21}.$$

**A22.** Решается (п. A22) система (6.8), (6.9) относительно  $w_{1i}$  :

$$(6.10) \quad \begin{aligned} w_{11} &= \frac{1}{2}(\lambda - a)w_{21} + 2w_{13}, \\ w_{12} &= \frac{1}{8}(\lambda - 3a)w_{21}, \end{aligned}$$

при любых  $w_{13}, w_{21}$ . Условие корректности отсутствует, следовательно  $p = 2$ .

Подставляем значения  $w_{11}, w_{12}$ , описанные в (6.10), в формулы (6.7):

$$(6.11) \quad \begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{8}(\lambda - a)(\lambda - 3a)w_{21}, \\ v_2 &= -\frac{1}{2}(\lambda - 3a)w_{13} - \frac{1}{8}(\lambda - a)(\lambda - 3a)w_{21}, \\ v_3 &= -\frac{1}{2}(\lambda - 3a)w_{13} - \frac{1}{8}a(\lambda - 3a)w_{21}, \\ v_4 &= -(\lambda - a)w_{13} - \frac{1}{4}(\lambda - a)^2w_{21}, \\ v_5 &= -\frac{1}{2}(\lambda - a)w_{13} + \frac{1}{8}(\lambda - a)(\lambda - 3a)w_{21}, \end{aligned}$$

(это (3.14 при  $p = 2$ )) с любыми  $w_{13}(\lambda), w_{21}(\lambda)$ , такими, что  $v(\lambda_j)$  линейно независимые:

$$\det(v(\lambda_1) \ v(\lambda_2) \ v(\lambda_3) \ v(\lambda_4) \ v(\lambda_5)) \neq 0.$$

В частности, если  $w_{13} = -2$ ,  $w_{21} = 8\lambda^2$ , то

$$(6.12) \quad v(\lambda) = \begin{pmatrix} (\lambda - a)(\lambda - 3a)\lambda^2 \\ (\lambda - 3a)(1 - (\lambda - a)\lambda^2) \\ (\lambda - 3a)(1 - a\lambda^2) \\ 2(\lambda - a)(1 - (\lambda - a)\lambda^2) \\ (\lambda - a)(1 + (\lambda - 3a)\lambda^2) \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что определитель  $\Delta$ , составленный из компонент этого вектора при различных значениях  $\lambda = \lambda_j, j = 1, 2, \dots, 5$ , путем преобразований сводится к определителю Вандермонда  $W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$ , следовательно, отличен от нуля.

Таким образом, векторы  $v(\lambda_j), j = 1, 2, \dots, 5$ , линейно независимые.

*Построение матрицы обратной связи в случае простого спектра*

В соотношение  $Kv(\lambda) = f(\lambda)$  подставляются при каждом  $\lambda = \lambda_j, j = 1, 2, \dots, 5$ , значения  $v(\lambda_j)$ , полученные в (6.12), и  $f(\lambda_j)$ , описанные в (6.3).

В результате получается система для нахождения компонент матрицы  $K$ , состоящая из пятнадцати уравнений, которые разбиваются на три системы

$$V_1 \cdot \begin{pmatrix} k_{i1} \\ k_{i2} \\ k_{i3} \\ k_{i4} \\ k_{i5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_i(\lambda_1) \\ f_i(\lambda_2) \\ f_i(\lambda_3) \\ f_i(\lambda_4) \\ f_i(\lambda_5) \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3. \quad \text{В частном случае } \lambda_j = -\frac{1}{2}(j+1), \quad a = -\frac{1}{10}$$

имеем:

$$(6.13) \quad V_1 = \begin{pmatrix} 63/100 & -133/100 & -77/100 & -171/50 & -27/100 \\ 189/50 & -249/50 & -147/100 & -581/50 & 119/50 \\ 323/25 & -731/50 & -119/50 & -817/25 & 551/50 \\ 33 & -176/5 & -143/40 & -384/5 & 153/5 \\ 7047/100 & -7317/100 & -513/100 & -7859/50 & 6757/100 \end{pmatrix},$$

$$f_1 = (-252/125 - 4z, -2457/125 - 4z, -11\,628/125 - 4z, -1518/5 - 4z, -98\,658/125 - 4z),$$

$$f_2 = (9z, 9z\,9z\,9z\,9z),$$

$$f_3 = (-65\,201/2 - 50z, -136\,255/8 - 25z, 17\,431, -15\,687/4, 62\,181/8 + 25z).$$

В результате, элементы  $V_1^{-1}f_i^T$  – это элементы  $i$ -ой строки матрицы  $K$ . Окончательно:

$$K = \begin{pmatrix} 128\,394/5 - 40z_1 & 134\,253/10 - 20z_2 & -68\,724/5 & 15\,437/5 & -61\,163/10 + 20z_3 \\ 90z_1 & 45z_2 & 0 & 0 & -45z_3 \\ -65\,201/2 - 50z_1 & -136\,255/8 - 25z_2 & 17\,431 & -15\,687/4 & 62\,181/8 + 25z_3 \end{pmatrix}$$

с произвольными  $z_1, z_2, z_3$ . Подстановка полученной матрицы  $K$  в выражение  $A + BK - \lambda \cdot I$  приводит к результату:

$$\begin{aligned} & \det(A + BK - \lambda I) = \\ = & \begin{vmatrix} 12\,839/2 - \lambda & 134\,253/40 & -17\,181/5 & 15\,437/20 & -61\,163/40 \\ -65\,201/10 & -136\,259/40 - \lambda & 17\,431/5 & -15\,687/20 & 62\,181/40 \\ -502/5 & -1001/20 & 499/10 - \lambda & -25/2 & 509/20 \\ -65\,201/5 & -27\,251/4 & 34\,862/2 & -1569 - \lambda & 62\,181/20 \\ 63\,193/10 & 132\,251/40 & -16\,931/5 & 15\,187/20 & -60\,157/40 - \lambda \end{vmatrix} = \\ & = -\frac{45}{2} - \frac{261}{4}\lambda - \frac{145}{2}\lambda^2 - \frac{155}{4}\lambda^3 - 10\lambda^4 - \lambda^5 = \\ & = (\lambda + 1) \left( \lambda + \frac{3}{2} \right) (\lambda + 2) \left( \lambda + \frac{5}{2} \right) (\lambda + 3). \end{aligned}$$

Заметим, в данном примере вариативность матрицы обратной связи зависит от выбора произвольных значений  $z$  и от значений  $w_{13}$  и  $w_{21}$  таких, чтобы векторы  $v(\lambda_j)$  в (6.11) были линейно независимыми.

*Случай кратного спектра.*

Требуется построить матрицу  $K$  такую, что  $\lambda = -2$  – пятикратное собственное число матрицы  $A + BK$ , где  $A$  и  $B$  – матрицы, фигурирующие в системе (6.1).

Вектор  $v(-2) = \tau_0$  построен по формуле (6.12) с  $a = -\frac{1}{10}$ ,  $\lambda = -2$ ; компоненты вектора  $v(-2) = \tau_0$  есть компоненты третьей строки матрицы  $V_1$  в (6.13). Векторы  $\tau_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, 4$ , находятся из условий корректности уравнений  $BK\tau_j = (\lambda I - A)\tau_j + \tau_{j-1}$ .

Компоненты векторов  $\tau_j$  есть компоненты  $j$ -х строк матрицы  $V_2$ , где

$$V_2 = \begin{pmatrix} 323/25 & -731/50 & -119/50 & -817/25 & 551/50 \\ -72/5 & 77/5 & 7/5 & 162/5 & -67/5 \\ 4 & -57/10 & -17/10 & -59/5 & 21/10 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -17/10 & -17/10 & -38/10 & -19/10 \end{pmatrix}.$$

Из уравнений  $Bg_j = (\lambda I - A)\tau_j + \tau_{j-1}$  находятся решения  $g_j$ , в данном случае при определенном выборе произвольных постоянных получаем:

$$g_1 = (-11\,628/125 - 4z, \quad 3884/25 - 4z, \quad -432/5 - 4z, \quad 16 - 4z, \quad -4z),$$

$$g_2 = (9z, \quad 9z, \quad 9z, \quad 9z, \quad 9z),$$

$$g_3 = (13\,889/100 - 5z, \quad -1097/5 - 5z, \quad 2623/20 - 5z, \quad -38 - 5z, \quad 423/20 - 5z),$$

с произвольным  $z$ .

Решение системы

$$V_2 \cdot \begin{pmatrix} k_{i1} \\ k_{i2} \\ k_{i3} \\ k_{i4} \\ k_{i5} \end{pmatrix} = g_i^T$$

приводит к нахождению  $k_{ij}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $j = 1, 2, \dots, 5$ .

Вычисления, произведенные в Mathcad, дают результат

$$K = \begin{pmatrix} 16\,704/5 - 112z & 9519/5 - 58z & -8759/5 & 6613/20 & -7973/10 + 54z \\ 252z & 261/2z & 0 & 0 & -243/2z \\ -4163 - 140z & -4765/2 - 145/2z & 8509/4 & -6363/16 & 8101/8 + 135/2z \end{pmatrix}.$$

Проверка показывает, что

$$\begin{aligned} & \det(A + BK - \lambda \cdot I) = \\ & = \begin{vmatrix} 835 - \lambda & 9519/20 & -8759/20 & 6613/80 & -7973/40 \\ -4163/5 & -2383/5 - \lambda & 8509/20 & -6363/80 & 8101/40 \\ 13/5 & -11/20 & -63/5 - \lambda & 25/8 & 16/5 \\ -8326/5 & -953 & 8509/10 & -1275/8 - \lambda & 8101/20 \\ 4189/5 & 2377/5 & -9009/20 & 6863/80 & -785\,740 - \lambda \end{vmatrix} = \\ & = -32 - 80\lambda - 80\lambda^2 - 40\lambda^3 - 10\lambda^4 - \lambda^5 = -(\lambda + 2)^5. \end{aligned}$$

*Замечание 1.* В случае обратимой матрицы  $B$  система (1.1) управляемая и  $K$  найдется из уравнений

$$Kv_j = B^{-1}(\lambda_j I - A)v_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

или

$$Kv_s = B^{-1}(\lambda_j I - A)v_s,$$

$$K\tau_j = B^{-1}(\lambda_j I - A)\tau_j + B^{-1}\tau_{j-1}, \quad j = 1, \dots, k-1, \quad \tau_0 = v_s,$$

где в качестве  $v_j$  или  $v_1, \dots, v_s, \tau_1, \dots, \tau_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n$  можно взять произвольные линейно независимые векторы.

## 7. Заключение

Предложен новый алгоритм построения матриц обратной связи для линейной непрерывной динамической системы в задаче назначения спектра без каких-либо ограничений на матричные коэффициенты системы, кроме управляемости пары  $(A, B)$ .

Алгоритм основан на методе каскадной декомпозиции, разработанном в [8]. В отличие от [8] в данной работе вместо разложений пространств на подпространства, построения проекторов на них, использования полуобратных матриц предлагается алгоритм, использующий простейшие алгебраические операции: решение линейных алгебраических уравнений, замены переменных и проверка линейной независимости векторов.

Такое решение поставленной задачи значительно упрощает вычислительный процесс, дает возможность создания простых вычислительных программ.

При этом выявляется зависимость матрицы обратной связи от определенного количества произвольных или связанных каким-либо условием скалярных величин и определяется полный набор таких матриц для каждой задачи.

Выявлен также случай единственности матрицы обратной связи.

Приведены иллюстративные (обучающие) примеры построения матриц обратной связи.

Рассмотрены различные случаи построения такой матрицы для динамической системы, описывающей работу многокамерной нагревательной печи.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Обоснование алгоритма построения линейно независимых векторов (разделы 3.4 и 4.2)

В разделе 2 приведено решение линейного алгебраического уравнения  $Cx = y$  с необратимой матрицей  $C: \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^l$ ,  $y \in \mathbb{R}^l$ . Решение обусловлено тем, что с помощью отображения  $C$  (отображения и соответствующие им матрицы обозначаем одинаково) можно получить разложения пространств  $\mathbb{R}^s$  и  $\mathbb{R}^l$  в прямые суммы подпространств:

$$(П.1) \quad \mathbb{R}^s = \text{Coim } C \dot{+} \text{Ker } C, \quad \mathbb{R}^l = \text{Im } C \dot{+} \text{Coker } C,$$

где  $\text{Ker } C$  – ядро  $C$ ,  $\text{Im } C$  – образ,  $\text{Coker } C$  – дефектное подпространство,  $\text{Coim } C$  – прямое дополнение к  $\text{Ker } C$  в  $\mathbb{R}^s$ . При этом сужение  $\tilde{C}$  на  $\text{Coim } C$  имеет обратное отображение  $\tilde{C}^-$  [11]. Если обозначить через  $P$  – проектор на  $\text{Ker } C$ , через  $Q$  – проектор на  $\text{Coker } C$ , то отображение  $\tilde{C}^-(I - Q)$  называется полуобратным [12, с. 164] и обозначается  $C^-$ . Через  $I$  обозначается единичное отображение в любом подпространстве.

Известна [8, 13–17] следующая

*Лемма.* Соотношение  $Cx = y$  эквивалентно системе

$$(П.2) \quad \begin{cases} Qy = 0, \\ x = C^{-}y + z, \end{cases}$$

для любого  $z$  из  $\text{Ker } C$ .

Заметим,  $z = Px$ . Соотношение  $Qy = 0$  в (П.2) есть условие корректности равенства  $Cx = y$ , второе соотношение в (П.2) – решение этого уравнения.

В силу этой леммы уравнение (3.3) с опущенным  $j : Bf = (\lambda I - A)v$  имеет решение (3.4):  $f = B^{-}(\lambda I - A)v + z$ , для любого  $z \in \text{Ker } B$  при выполнении условия корректности (3.5):

$$(П.3) \quad Q(\lambda I - A)v = 0.$$

Первый шаг. Если обозначить

$$(П.4) \quad Qv = w_1, \quad (I - Q)v = v_1, \quad QAQ = A_1, \quad QA(I - Q) = B_1,$$

то

$$(П.5) \quad v = v_1 + w_1,$$

и (П.3) запишется как

$$(П.6) \quad B_1v_1 = (\lambda I - A_1)w_1.$$

Заметим, обозначения  $Qv = w_1$  в (П.4) и в (3.6) идентичны.

Далее исследуется (П.6) с  $B_1 : \text{Im } B \rightarrow \text{Coker } B$ . Используется разложение

$$(П.7) \quad \text{Im } B = \text{Coim } B_1 \dot{+} \text{Ker } B_1, \quad \text{Coker } B = \text{Im } B_1 \dot{+} \text{Coker } B_1,$$

и уравнение (П.6) в силу леммы имеет решение

$$(П.8) \quad v_1 = B_1^{-}(\lambda I - A_1)w_1 + \tilde{z}_1, \quad \forall \tilde{z}_1 \in \text{Ker } B_1,$$

при условии

$$(П.9) \quad Q_1(\lambda I - A_1)w_1 = 0,$$

где  $P_1$  и  $Q_1$  – проекторы на  $\text{Ker } B_1$  и  $\text{Coker } B_1$  соответственно, отвечающие разложению (П.7),  $B_1^{-}$  – полубратная к  $B_1$  матрица. Формулы (П.5), (П.8) и (П.9) соответствуют формулам (3.7) и (3.8).

Второй шаг. Если обозначить

$$Qw_1 = w_2, \quad (I - Q_1)w_1 = v_2, \quad Q_1A_1Q_1 = A_2, \quad Q_1A_1(I - Q_1) = B_2,$$

то

$$(П.10) \quad w_1 = v_2 + w_2,$$

и (П.9) – это

$$B_2 v_2 = (\lambda I - A_2) w_2.$$

Заметим, обозначение  $Qw_1 = w_2$  фигурирует в (3.9).

Применив лемму к последнему уравнению, получим выражение для  $v_2$  через  $w_2$  и произвольного  $\tilde{z}_2 \in \text{Ker } B_2$ , и с помощью (П.10) получим выражение для  $w_1$  через  $\lambda$ ,  $w_2$  и  $\tilde{z}_2$ , это есть (3.11) с  $i = 2$ . И так далее ....

В результате соотношение (П.3) эквивалентно системе, состоящей из соотношений (П.5), (П.8), (П.10) и

$$(П.11) \quad w_i = v_{i+1} + w_{i+1},$$

$$(П.12) \quad v_{i+1} = B_{i+1}^-(\lambda I - A_{i+1})w_{i+1} + \tilde{z}_{i+1}, \quad \forall \tilde{z}_{i+1} \in \text{Ker } B_{i+1},$$

$$(П.13) \quad B_p v_p = (\lambda I - A_p)w_p,$$

где  $B_{i+1}^- = Q_i A_i (I - Q_i)$ ,  $A_{i+1} = Q_i A_i Q_i$ ,  $w_i = Q_{i-1} w_{i-1}$ ,  $v_{i+1} = (I - Q_i)w_i$ ,  $Q_i$  и  $P_i$  – проекторы на  $\text{Coker } B_i$  и  $\text{Ker } B_i$  соответственно, отвечающие разложению

$$\text{Im } B_{i-1} = \text{Coim } B_i \dot{+} \text{Ker } B_i, \quad \text{Coker } B_{i-1} = \text{Im } B_i \dot{+} \text{Coker } B_i,$$

$$B_{-i-1}^- = \tilde{B}_{i-1}^{-1}(I - Q_{i-1}), \quad \tilde{B}_{i-1} - \text{сужение } B_{i-1} \text{ на } \text{Coim } B_{i-1}, \quad i = 1, \dots, p, \\ B_0 = B, \quad A_0 = A.$$

В силу управляемости пары  $(A, B)$  уравнение (П.13) разрешимо относительно  $v_p$  при любом  $w_p \in \text{Coker } B_{p-1}$  [8, 13–17]. Из (П.11) с  $i = p - 1$  находится  $w_{p-1}$ , далее из (П.12) с  $i = p - 2$  определяется  $v_{p-1}$ , затем по формуле (П.11) с  $i = p - 2$  строится  $w_{p-2}$  и так далее .... Наконец, по формуле (П.5) находится  $v = v(\lambda, w_p, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_p)$  с произвольными  $w_p \in \text{Coker } B_{p-1}$  и  $\tilde{z}_s \in \text{Ker } B_s$ ,  $s = 1, \dots, p$ .

Очевидно, построение  $v$  способом, предложенным в данной работе, а именно с помощью линейных замен искоемых векторов и решения линейных алгебраических систем, значительно упрощает построение матриц обратной связи в задаче размещения спектра.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шумафов М.М.* Стабилизация линейных систем управления. Проблема назначения полюсов. Обзор // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6(64). С. 564–591.
2. *Зубов В.И.* Теория оптимального управления судном и другими подвижными объектами. Л.: Судостроение, 1966.
3. *Wonham W.M.* On Pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear Systems // IEEE Trans. Aut. Contr. 1967. V. AC-12(6). P. 660–665.

4. Уонэм М. Линейные многомерные системы управления. Геометрический подход. М. : Наука, 1980.
5. Лапин А.В., Зубов Н.Е. Реализация в среде MATLAB аналитических алгоритмов модального управления по состоянию и по выходу // Инженерный журнал: наука и инновации. 2020. Вып. 1. С. 1–16.
6. Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н. Матричные методы в теории и практике автоматического управления летательных аппаратов. М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2016. 67 с.
7. Schmid R., Ntogramatzidis L., Nguyen T., Pandey A. A unified method arbitrary pole placement // Automatika, ELSEVIER. 2014. V. 50. P. 2150–2154.
8. Зубова С.П., Раецкая Е.В. Решение задачи размещения спектра для линейной системы управления, замкнутой обратной связью // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60. № 6. С. 798–816.
9. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. М.: Наука. Физматлит, 1999.
10. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976.
11. Аткинсон Ф.В. Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах // Матем. сборник. 1951. Т. 28 (70). № 1. С. 3–14.
12. Бортакровский А.С., Пантелеев А.В. Линейная алгебра в примерах и задачах: Учебн. пособие. М.: Высшая школа, 2005. 591 с.
13. Zubova S.P., Raetskaya E.V. Solution of the multi-point control problem for a dynamic system in partial derivatives // Mathematical Methods in the Applied Sciences. AIMS Press, New York. 2021. V. 44. No. 15. P. 11998–12009.
14. Зубова С.П., Раецкая Е.В. Алгоритм решения линейных многоточечных задач управления методом каскадной декомпозиции // АиТ. 2017. Т. 59. № 3. С. 22–39.
15. Зубова С.П. Решение обратных задач для линейных динамических систем каскадным методом // Доклады АН. 2012. Т. 447. № 6. С. 599–602.
16. Зубова С.П. Решение задачи управления для линейной дескрипторной системы с прямоугольно–матричными коэффициентами // Математические заметки. 2010. Т. 88. Вып. 6. С. 884–895.
17. Зубова С.П., Раецкая Е.В., Ле Хай Чунг. О полиномиальных решениях линейной стационарной системы управления // АиТ. 2008. № 11. С. 41–47.
18. Зубова С.П., Раецкая Е.В. Об алгоритме построения матрицы обратной связи для линейной динамической системы управления // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы международной конференции. Воронежская зимняя математическая школа. Воронеж: ИД ВГУ, 2025. С. 139–141.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.*

Поступила в редакцию 24.02.2025

После доработки 21.07.2025

Принята к публикации 24.07.2025