

© 2025 г. В.А. МОЗЖЕЧКОВ, д-р техн. наук (v.a.moz@yandex.ru)  
(Тульский государственный университет)

## СИНТЕЗ РЕЛЕЙНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ОБУЧАЮЩИХ ПРИМЕРОВ

Рассматривается задача синтеза релейных регуляторов в составе автоколебательной системы с линейным объектом управления. Необходимо обеспечить наличие в системе автоколебаний с заданными параметрами и приблизить ее поведение к желаемому, определяемому набором законов изменения во времени выхода системы, выступающих в качестве обучающих примеров. Учитываются ограничения на структуру регулятора и требование к степени устойчивости автоколебаний. Получены соотношения и предложен основанный на их применении итерационный метод решения рассматриваемой задачи, позволяющий синтезировать релейные регуляторы с простой структурой. Приведены примеры реализации предложенного метода.

*Ключевые слова:* релейный регулятор, автоколебания, обучающие примеры.

DOI: 10.31857/S0005231025110034

### 1. Введение

Релейное управление с обратной связью, анализ и синтез основанных на его применении автоколебательных систем управления – классические темы теории управления [1–9].

Актуальность задачи синтеза автоколебательных систем управления с релейным регулятором подтверждается наличием большого числа примеров практического использования таких систем различного назначения. К ним относятся: автоколебательные системы регулирования разнообразных физических величин [1], следящие системы [1, 2, 4, 5, 8], самонастраивающиеся и адаптивные системы, использующие автоколебания в режиме автонастройки регулятора [6–8], автоколебательные конверторы электрических напряжений и автогенераторы сигналов [1, 10], вибрационные гироскопы и акселерометры [11, 12], сенсоры на основе нанорезонаторов, резонисторов и кантилеверов [13, 14], вибрационные машины [15], системы управления неполноприводных многосвязных механизмов и роботов, использующие автоколебания [16], и многие другие устройства. Автоколебания в указанных системах являются рабочим режимом, в котором регулируемая величина колеблется с заданной частотой в допустимом диапазоне ее значений.

Длительное время преобладающим подходом к анализу и синтезу автоколебательных систем был подход, основанный на использовании частотных методов [1–3, 8]. Среди них наибольшую популярность, благодаря простоте применения, получил метод гармонической линеаризации [2, 3]. Существенно более точным и универсальным является частотный метод анализа автоколебаний, разработанный Я.З. Цыпкиным [1], основанный на использовании предложенного им понятия годографа релейной системы. Развитие методов анализа релейных систем в пространстве состояний позволило обеспечить более высокую эффективность процедур их анализа и синтеза, а также более детальный учет возможных режимов функционирования релейной системы в сравнении с частотными методами. В [4, 5] был предложен метод синтеза автоколебательных систем, основанный на использовании понятия фазового годографа, представляющего собой линию в пространстве состояний объекта управления, каждая точка  $x^*$  которой соответствует переключению реле с минуса на плюс при некотором свойственном ей периоде автоколебаний. Фазовый годограф остается неизменным при выборе коэффициентов обратной связи, что существенно упрощает синтез системы и позволяет обеспечить высокую точность реализации назначенных параметров автоколебаний. В [6, 7] получена аналитическая зависимость вектора  $x^*$  от периода автоколебаний, матриц и векторов параметров, присутствующих в описании линейного объекта управления в пространстве состояний, а также представлены алгебраические условия существования автоколебаний заданной частоты, включая условие их локальной устойчивости.

В [9] решена задача синтеза релейных регуляторов, обеспечивающих наличие в системе с линейным объектом управления автоколебаний заданной частоты и амплитуды и приближающих ее поведение к желаемому, определяемому заданной передаточной функцией. Предложенный в [9] метод синтеза основан на полиномиальном представлении гармонически линеаризованной синтезируемой системы и сведении процедуры синтеза к решению систем линейных алгебраических уравнений и неравенств. Следствием использования в методе [9] гармонической линеаризации является в некоторых случаях значительное отклонение частоты автоколебаний от ее заданного значения, что иногда приводит к существенному отличию поведения синтезированной системы от желаемого.

В настоящей работе с целью исключения недостатков метода [9] при решении задачи синтеза релейной автоколебательной системы используются результаты исследований [4–7], обеспечивающие более высокую точность предсказания параметров автоколебаний в сравнении с методом гармонической линеаризации. Синтез осуществляется согласно предлагаемому в статье методу, основанному на применении соотношений, полученных с использованием описания объекта управления в пространстве состояний, и являющемуся результатом развития и распространения алгоритма, изложенного в [17], на класс релейных автоколебательных систем управления. Желаемое поведение системы определяется набором законов изменения во времени ее выхо-

да, выступающих в качестве обучающих примеров, а также требованием к степени ее устойчивости. Регулятор реализует статическую обратную связь с релейным выходом. Предложен метод, позволяющий находить начальное приближение искомых значений коэффициентов обратной связи и осуществлять их итерационное уточнение. В общем случае, когда вектор выхода объекта управления содержит несколько измеряемых линейно независимых величин, решается задача синтеза регуляторов, имеющих простую структуру [18, 19], т.е. регуляторов, в которых отличны от нуля только те коэффициенты обратной связи, выбор значений которых, отличных от нуля, необходим и достаточен для придания системе желаемых свойств.

## 2. Постановка задачи

Объект управления задан системой уравнений

$$(1) \quad \dot{x} = Ax + Bu,$$

$$(2) \quad y = Cx,$$

где  $x$  – вектор состояния,  $\dot{x} = dx/dt$ ,  $t$  – время,  $u$  – скалярное управляющее воздействие,  $y$  – вектор выхода, все его компоненты могут быть измерены и использованы в регуляторе, матрицы  $A$ ,  $C$  и вектор  $B$  считаем заданными, их элементы, а также значения величины  $u$  и компонент векторов  $x$ ,  $y$  – действительные числа, пара  $(A, B)$  является управляемой, а пара  $(A, C)$  – наблюдаемой.

Математическое описание регулятора имеет вид

$$(3) \quad \tilde{u} = K^T y,$$

$$(4) \quad u = \text{sgn}(\tilde{u}),$$

где скалярная величина  $\tilde{u}$  является выходом линейной части (3) регулятора; вектор  $K$  коэффициентов обратной связи подлежит определению, его элементы – действительные числа, функция  $\text{sgn}(\cdot)$  описывает реле, формирующее управляющее воздействие  $u$ , ее значением является  $-1$ ,  $+1$  или действительное число из отрезка  $[-1, 1]$  соответственно, если значение ее аргумента отрицательно, положительно или равно нулю. При этом равенство единице амплитудных значений  $u$  не снижает общности рассматриваемой задачи, поскольку реальные амплитуды управляющего воздействия можно учесть в (1) при определении вектора  $B$ .

Примем во внимание ограничения, накладываемые на структуру линейной части регулятора, которые обычно сводятся [20] к требованию равенства нулю некоторых компонент в векторе  $K = (k_i)$ , поэтому будем учитывать условие

$$(5) \quad k_i = 0, \quad \forall i \notin S,$$

где  $S$  – набор значений индексов тех коэффициентов обратной связи  $k_i$ , которые не стеснены требованием равенства их значений нулю. Набор  $S$  в описании регулятора (3)–(5) определяет перечень используемых в нем сигналов

обратных связей и с учетом (3)–(5) определяет его структуру. Полагаем, что структура регулятора при решении данной задачи может изменяться только в результате изменения набора  $S$ . Поэтому далее выбор структуры регулятора отождествляется с выбором набора  $S$ , а термины “структура регулятора” и “набор  $S$ ” используются как синонимы.

Далее решение разрывной системы (1)–(5) понимается в смысле Филиппова [21].

В системе (1)–(5) установившимся режимом функционирования должно быть асимптотически орбитально устойчивое периодическое движение, представляющее собой автоколебания с заданной частотой  $\omega_0$  и заданной амплитудой  $\tilde{U}$  колебаний сигнала  $\tilde{u}$ . Автоколебаниям в фазовом пространстве соответствует изолированная замкнутая фазовая траектория – предельный цикл. В результате решения задачи синтеза регулятора предельный цикл  $L$  должен быть устойчивым, симметричным (каждой точке  $x \in L$  должна соответствовать точка  $-x \in L$ ) и простым (сигнал  $\tilde{u}$  должен менять знак только дважды за период автоколебаний).

Требование наличия запаса устойчивости автоколебаний опишем условием

$$(6) \quad \eta(K) \geq \check{\eta},$$

где  $\eta(K)$  – запас устойчивости автоколебаний,  $\check{\eta}$  – заданный нижний предел допустимых значений запаса устойчивости. Математическое описание функции  $\eta(K)$  представлено в разделе 3.

Желаемое поведение системы (1)–(5) определим, задав для начальных условий  $x_0^\gamma$ ,  $\gamma \in \{\overline{1, q}\}$  соответствующие желаемые траектории изменения во времени выхода (2) системы (1)–(5), представленные векторами  $Y_\gamma = (y_k^\gamma)$ ,  $k \in \{\overline{1, N}\}$  его значений в дискретные моменты времени  $t = k\Delta t$ , где  $\Delta t$  – шаг выборки,  $k$  – натуральное число. Величины  $N$  и  $\Delta t$  определяют отрезок времени  $[0, N\Delta t]$ , на котором заданы желаемые траектории. Задаваемые начальные состояния  $x_0^\gamma$ ,  $\gamma \in \{\overline{1, q}\}$  должны быть достаточно удаленными от траектории установившегося движения, чтобы переходный процесс имел длительность по времени, существенно превосходящую период автоколебаний. Кроме того, задаваемые начальные состояния должны существенно различаться между собой. Целесообразно назначать  $q \in [1, n]$ . Набор  $Q = \{(x_0^\gamma, Y_\gamma)\}$ ,  $\gamma \in \{\overline{1, q}\}$  является набором обучающих примеров и должен определять желаемое поведение синтезируемой системы при переходе системы от возмущенного к установившемуся режиму движения. Требование соответствия системы (1)–(5) желаемому поведению запишем в виде

$$(7) \quad \varepsilon_k^{\gamma-} \leq y(x_0^\gamma, K)_k - y_k^\gamma \leq \varepsilon_k^{\gamma+}, \quad \forall k \in \{\overline{1, N}\}, \quad \forall \gamma \in \{\overline{1, q}\},$$

где  $\varepsilon_k^{\gamma-}$ ,  $\varepsilon_k^{\gamma+}$  – заданные постоянные векторы,  $y(x_0^\gamma, K)_k$  – вектор выхода системы (1)–(5) в  $k$ -ый момент времени, соответствующий начальному условию  $x(0) = x_0^\gamma$  и выбранному вектору  $K$ , символ  $\leq$  здесь и далее применительно к векторам означает, что каждый элемент вектора, указанного слева

от него, меньше или равен соответствующему элементу вектора, указанного справа от него, т.е. обозначает покомпонентное неравенство векторов. Векторы  $\varepsilon_k^{\gamma-}, \varepsilon_k^{\gamma+}$  можно задать, вычислив их координаты  $\varepsilon_{ki}^{\gamma-}, \varepsilon_{ki}^{\gamma+}$ , например, по формулам  $\varepsilon_{ki}^{\gamma-} = -\delta_i m_i^{\gamma}, \varepsilon_{ki}^{\gamma+} = +\delta_i m_i^{\gamma}$ , где  $\delta_i$  – допустимое значение абсолютной величины относительной погрешности  $(y(x_0^{\gamma}, K)_{ki} - y_{ki}^{\gamma})/m_i^{\gamma}$  воспроизведения в системе  $i$ -ой координаты желаемой траектории,  $m_i^{\gamma}$  – максимальное значение абсолютной величины  $i$ -ой координаты желаемой траектории  $y^{\gamma}$ . В более общем случае можно использовать при вычислении  $\varepsilon_{ki}^{\gamma-}, \varepsilon_{ki}^{\gamma+}$  значения  $\delta_i$ , различающиеся для различных моментов времени  $k\Delta t$  и траекторий  $y^{\gamma}$ . Целесообразно назначать  $\delta_i \in [1, 20]10^{-2}$ .

Выбор вектора  $K$  осуществим из условия наилучшего приближения поведения системы (1)–(5) к желаемому в смысле минимизации евклидовой нормы вектора  $\Delta y(K)$ , составленного из разностей  $y(x_0^{\gamma}, K)_k - y_k^{\gamma}$ , т.е. из условия

$$(8) \quad |\Delta y(K)| \rightarrow \min_K,$$

где  $|\cdot|$  – евклидова норма [22].

Рассматриваемая задача в случае, когда структура регулятора задана (указан фиксированный набор  $S$ , определяющий совместно с (3)–(5) структуру регулятора), состоит в нахождении вектора  $K$ , обеспечивающего выполнение системой управления (1)–(5) требований (6)–(8) для заданных значений  $\omega_0$  и  $\tilde{U}$ .

В общем случае, когда набор  $S$  не задан и вектор выхода  $y$  содержит несколько измеряемых линейно независимых величин, будем решать задачу структурного синтеза, состоящую в определении тех наборов  $S$  и соответствующих им векторов  $K$ , для которых при заданных  $\omega_0$  и  $\tilde{U}$  выполняются условия (6)–(8) и структура регулятора (3), (5) является простой, что означает [18–19] отличие от нуля только тех коэффициентов  $k_i$ , выбор значений которых, отличных от нуля, необходим и достаточен для придания системе (1)–(5) желаемых свойств. Формально задача поиска множества  $\Omega$  простых структур регулятора состоит в нахождении таких приемлемых структур  $S \in \zeta$ , для которых нельзя указать менее сложную приемлемую структуру  $S' \in \zeta$  (структуру  $S'$  считаем проще, чем  $S$ , если  $S' \subset S$ ), т.е. требуется найти

$$(9) \quad \Omega = \{S \in \zeta \mid \{S' \in \zeta \mid S' \subset S\} = \emptyset\},$$

где  $\zeta$  – множество приемлемых структур, т.е. структур, для которых существует вектор  $K$ , обеспечивающий выполнение системой управления (1)–(5) требований (6)–(8), формула  $\{S' \in \zeta \mid S' \subset S\} = \emptyset$  указывает на отсутствие приемлемой структуры  $S'$ , которая проще, чем структура  $S \in \Omega$ .

### 3. Анализ задачи

Согласно [5, 6] для существования в системе (1)–(5) простого симметричного предельного цикла с периодом  $2h = 2\pi/\omega_0$  необходимо выполнение сле-

дующих условий:

$$(10) \quad x^* = -(I + e^{Ah})^{-1} \int_0^h e^{A(h-\tau)} B d\tau,$$

$$(11) \quad K^\top C x^* = 0,$$

$$(12) \quad K^\top C \left( e^{At} x^* + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B d\tau \right) > 0, \quad 0 < t < h,$$

где  $x^*$  – точка предельного цикла, соответствующая смене знака  $\tilde{u}$  с минуса на плюс и, следовательно, переключению реле (4) с  $-1$  на  $+1$ ,  $I$  – единичная матрица.

Предельный цикл локально устойчив [5–7] тогда и только тогда, когда меньше единицы абсолютные величины всех собственных чисел матрицы

$$(13) \quad W = (I - v K^\top C / (K^\top C v)) e^{Ah},$$

$$(14) \quad v = -A x^* + B.$$

Справедливость данного утверждения доказана в [6, 7] применительно к системам вида (1)–(5) посредством классического подхода к анализу устойчивости периодических движений на основе отображения Пуанкаре.

Требование (6) наличия заданного запаса устойчивости автоколебаний будем считать выполненным, если имеет место неравенство

$$(15) \quad \eta(K) = 1 - \rho(W(K)) \geq \check{\eta},$$

где  $\rho(W(K))$  – спектральный радиус матрицы  $W(K)$ , при этом целесообразно назначать  $\check{\eta} \in [1, 10]h/(N\Delta t)$ .

Процессы в релейных системах, протекающие существенно медленнее в сравнении с процессом автоколебаний, принято называть [1, 2, 5] медленными процессами. В качестве приближенной модели таких процессов в случае, когда диапазон значений сигнала на входе реле незначительно превышает амплитуду  $\tilde{U}$ , часто используют модель, в которой описание реле (4) в случае устойчивого, простого симметричного предельного цикла заменяют линеаризованным описанием [1, 2, 5]

$$(16) \quad u = R\tilde{u}, \quad R = 4/(\pi\tilde{U}),$$

где  $R$  – коэффициент линеаризации. Уравнения (1)–(3), (5), (16) будем использовать как упрощенную модель медленных процессов в автоколебательной системе (1)–(5).

Полагаем, что набор обучающих примеров содержит описания процессов, которые для заданных параметров  $\omega_0, \tilde{U}$  можно считать медленными. Тогда

задачу обучения системы (1)–(5) желаемому поведению можно заместить задачей обучения системы (1)–(3), (5), (16). С целью применения метода обучения [17] заменим систему (1)–(3), (16) ее аналогом с дискретным временем

$$(17) \quad x_{k+1} = \hat{A}x_k + \hat{B}u_k, \quad y_k = Cx_k, \quad u_k = RKy_k,$$

где  $k$  – дискретное время (натуральное число),  $t = k\Delta t$ , шаг дискретизации времени  $\Delta t$  выбираем с учетом условия  $\Delta t \ll h$ , векторы  $x_k, y_k, u_k$  являются дискретной аппроксимацией векторов  $x, y, u$ , при этом  $\hat{A} = e^{A\Delta t}$ ;  $\hat{B} = \int_0^{\Delta t} e^{At} B dt$ .

Согласно [17] условия (7), (8) наилучшего приближения поведения системы (17) к желаемому, заданному набором обучающих примеров  $Q$ , эквивалентны условиям

$$(18) \quad \sum_{\gamma=1}^q |G_\gamma(K)_S K_S - \hat{Y}_\gamma|^2 \rightarrow \min_K,$$

$$(19) \quad \hat{Y}_\gamma + \varepsilon_\gamma^- \leq G_\gamma(K)_S K_S \leq \hat{Y}_\gamma + \varepsilon_\gamma^+, \quad \gamma \in \{\overline{1, q}\},$$

где  $\hat{Y}_\gamma = Y_\gamma - Y_{0\gamma}$ , при этом  $Y_\gamma, Y_{0\gamma}, G_\gamma(K)$  – столбцы, составленные соответственно из блоков  $y_k^\gamma, C\hat{A}^k x_0^\gamma, G_{k\gamma}(K) = C \sum_{i=0}^{k-1} \left( y(x_0^\gamma, K)_i^\top \otimes \hat{A}^{k-i-1} \hat{B} R \right)$ ,  $k \in \{\overline{1, N}\}$ ;  $\otimes$  – произведение Кронекера [23, с. 83], матрица  $G_\gamma(K)_S$  и вектор  $K_S$  составлены соответственно из столбцов матрицы  $G_\gamma(K)$  и координат вектора  $K$ , номера которых указаны в наборе  $S$ .

Система (17) отличается от системы управления, рассмотренной в [17], только наличием множителя  $R$  в выражении, определяющем  $u_k$ . Это отличие учтено в представленном выше выражении, определяющем  $G_{k\gamma}(K)$ .

Условие (11) с учетом (5) принимает вид линейного уравнения

$$(20) \quad (Cx^*)_S^\top K_S = 0,$$

в котором вектор  $(Cx^*)_S$  составлен из координат вектора  $Cx^*$ , номера которых указаны в наборе  $S$ .

Дискретным аналогом требования (12) с учетом (5) является система линейных неравенств

$$(21) \quad H_{kS} K_S > 0, \quad \forall k \in \{\overline{1, \hat{h}}\},$$

где матрица  $H_{kS}$  составлена из указанных в  $S$  столбцов матрицы  $H_k = (Ce^{Ak\Delta t} x^* + C \int_0^{k\Delta t} e^{A(k\Delta t - \tau)} B d\tau)^\top$ ,  $\hat{h} = \text{fix}(h/\Delta t - 1)$ , где  $\text{fix}(\cdot)$  – функция округления до ближайшего целого числа.

Левая часть неравенства (12) определяет для режима автоколебаний значения сигнала  $\tilde{y}$  в пределах полувольтны его колебаний, поэтому амплитуда  $\tilde{U}$

сигнала  $\tilde{u}$  близка значению величины  $H_{kS}K_S$ , когда  $k$  находится в середине отрезка  $[1, \hat{h}]$ . Для реализации заданной амплитуды  $\tilde{U}$  колебаний сигнала  $\tilde{u}$  в режиме простых симметричных автоколебаний потребуем выполнение условия

$$(22) \quad H_{kS}K_S = \tilde{U}, \quad k = \text{fix}((\hat{h} + 1)/2).$$

Таким образом, рассматриваемая задача нахождения вектора  $K$ , обеспечивающего выполнение системой управления (1)–(5) требований (6)–(8) для заданных значений  $\omega_0$ ,  $\tilde{U}$ , сводится к задаче (18)–(22), (15). В ней условия (20)–(22) существования автоколебаний с заданными параметрами и условие (15) их устойчивости получены из нелинейной модели релейной системы (1)–(5) без привлечения упрощающих допущений, и только условия (18), (19) близости поведения синтезируемой системы к желаемому основаны на ее упрощенной линеаризованной модели (17).

#### 4. Метод решения

Пусть структура регулятора задана, т.е. указан набор  $S$ . Искомый вектор  $K$  можно определить, решив, как показано выше, задачу (18)–(22), (15), которая эквивалентна задаче обучения статического регулятора, рассмотренной в [17]. Для ее решения воспользуемся предложенным в [17] методом, на каждой итерации которого решается задача о наименьших квадратах с линейными ограничениями [24, с. 225] (задача НКЛ), относящаяся к классу задач выпуклого программирования [25], для которого разработаны эффективные оптимизационные процедуры, гарантирующие получение решения либо констатацию его отсутствия (в системе Matlab для решения задач НКЛ предназначена функция `lsqlin`). Переход на очередной итерации в методе [17] к задаче НКЛ при решении рассматриваемой задачи основан на замене в (18), (19) матрицы  $G_\gamma(K)_S$  на неизменную в пределах итерации матрицу  $G_\gamma(\dot{K})_S$ , соответствующую вектору  $\dot{K}$ , найденному на предыдущей итерации, а также на замене в (15) функции  $\rho(W(K))$  ее линейной аппроксимацией  $r_0 + r_1\dot{K}_S$  вблизи  $\dot{K}$ , т.е. на замене условия (15) линейным неравенством

$$(23) \quad r_0 + r_1\dot{K}_S \leq 1 - \tilde{\eta},$$

где  $r_0$ ,  $r_1$  – коэффициенты линеаризации.

С целью определения начального приближения решения рассматриваемой задачи выделим ее важный частный случай, в котором ограничимся выполнением только условий (18), (20), (22). При этом упростим условие (18) на основе допущения о том, что все желаемые траектории в наборе  $Q$  принадлежат множеству решений синтезируемой системы. Тогда [17] можно заменить матрицу  $G_\gamma(K)_S$  в (18) матрицей  $\bar{G}_{\gamma S}$ , не зависящей от  $K$ , и записать условие (18) в виде

$$(24) \quad \sum_{\gamma=1}^q |\bar{G}_{\gamma S}K_S - \hat{Y}_\gamma|^2 \rightarrow \min_K,$$



где матрица  $\bar{G}_{\gamma S}$  составлена из указанных в  $S$  столбцов матрицы  $\bar{G}_\gamma$ , представляющей собой столбец блоков  $\bar{G}_{k\gamma} = C \sum_{i=0}^{k-1} (y_i^{\gamma\top} \otimes \hat{A}^{k-i-1} \hat{B} R)$ ,  $k \in \{\overline{1, N}\}$ .

Известно [24], что задача квадратичного программирования с линейными ограничениями в виде равенств, частным случаем которой является задача (20), (22), (24), сводится к решению системы линейных уравнений, имеющей в рассматриваемом случае следующий вид:

$$(25) \quad \begin{pmatrix} F & L^\top \\ L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_S \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},$$

где  $F = \bar{G}_S^\top \bar{G}_S$ ,  $\bar{G}_S$  – матрица системы уравнений  $\bar{G}_{\gamma S} K_S = \hat{Y}_\gamma$ ,  $\forall \gamma \in \{\overline{1, q}\}$ ,  $L = ((Cx^*)^\top, H_{kS})^\top$ ,  $c = \bar{G}_S^\top \hat{Y}_\gamma$ ,  $d = (0, \tilde{U})^\top$ ,  $\lambda$  – вектор множителей Лагранжа.

Вектор  $K_S$ , получаемый в результате решения системы (25), может служить начальным приближением решения задачи (18), (22), (15).

Если с использованием начального приближения, определенного согласно (25), не удалось решить рассматриваемую задачу (18)–(22), (15), можно воспользоваться начальным приближением, рассчитанным с учетом требований, описываемых системой равенств (20), (22), (24) и неравенств (19), (21), (23). В таком случае, заменив (19) его приближенным аналогом – условием

$$(26) \quad \hat{Y}_\gamma + \varepsilon_\gamma^- \leq \bar{G}_{\gamma S} K_S \leq \hat{Y}_\gamma + \varepsilon_\gamma^+, \quad \gamma \in \{\overline{1, q}\},$$

находим начальное приближение, решив задачу НКЛ (20)–(24), (26).

Найденное начальное приближение уточняется на последующих итерациях изложенного выше метода без привлечения допущения о принадлежности траекторий, составляющих набор  $Q$ , множеству решений синтезируемой системы.

Задача поиска множества  $\Omega$  простых структур регулятора может быть решена методом, предназначенным для задач синтеза простых структур общего вида [19], в котором в качестве процедуры оценки приемлемости структуры регулятора и нахождения соответствующего ей вектора  $K$  может использоваться описанная выше процедура решения задачи (18)–(22), (15).

## 5. Примеры

*Пример 1.* Решим задачу синтеза релейного регулятора автоколебательной системы управления электроприводом. Объект управления, включающий в себя двигатель постоянного тока с неизменным потоком возбуждения, редуктор и инерционную нагрузку, описывается уравнениями (1)–(2), в которых:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & C_m/J_m \\ 0 & -C_e/L_e & -R_e/L_e \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U/L_e \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1/k_r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где  $R_e$ ,  $L_e$  – сопротивление и индуктивность якорной обмотки двигателя;  $C_e$ ,  $C_m$  – коэффициент противо ЭДС и коэффициент момента двигателя;  $U$  – напряжение питания;  $k_r$  – коэффициент передачи редуктора;  $J_m$  – момент инерции подвижных частей, приведенный к валу двигателя. В международной системе единиц:  $R_e = 0,475$ ;  $L_e = 5,7 \times 10^{-4}$ ;  $C_e = C_m = 6,83 \times 10^{-2}$ ;  $U = 27$ ;  $k_r = 2$ ;  $J_m = 9,43 \times 10^{-5}$ . Проверка показывает, что пара  $(A, B)$  является управляемой, а пара  $(A, C)$  – наблюдаемой. Вектор состояний  $x = (x_1, x_2, x_3)$ , где  $x_1$ ,  $x_2$  – угловое положение и угловая скорость вращения вала двигателя,  $x_3$  – ток в якорной обмотке. Вектор выхода  $y = (y_1, y_2, y_3) = (x_1/k_r, x_2, x_3)$ , в нем  $y_1$  – регулируемая величина (угловое положение выходного вала электропривода),  $S = \{1, 2, 3\}$ . Назначаем  $\tilde{U} = 0,01$  В. Считаем, что амплитуда автоколебаний регулируемой величины  $y_1$  должна быть не более 0,1 мрад. Для выполнения этого требования, как следует из анализа амплитудно-частотных характеристик объекта управления, частота автоколебаний должна быть не менее 1820 Гц, поэтому принимаем  $f = 2000$  Гц, при этом  $\omega_0 = 2\pi f = 12\,566$  рад/с.

Требуется определить значения коэффициентов обратных связей, составляющих искомый вектор  $K$ .

Сформируем набор обучающих примеров, определяющих желаемое поведение синтезируемой системы при переходе системы от возмущенного к установившемуся режиму движения. Согласно представленной в разделе 2 рекомендации назначать  $q \in [1, n]$  принимаем число обучающих примеров  $q = 2$ . В качестве примеров желаемого поведения системы укажем оптимальные по критерию минимальной энергии управления траектории движения объекта управления (1), (2) из существенно различных начальных состояний  $x_0^1 = (1; 0; 0)$  и  $x_0^2 = (0; 10; -10)$  в начало координат за время 0,025 с. Расчет таких траекторий можно осуществить, используя известные зависимости [22, с. 128]. Указанные траектории  $Y_1, Y_2$  в паре с соответствующими начальными условиями на интервале времени от 0 до 0,05 с составляют набор обучающих примеров  $Q = \{(x_0^1, Y_1), (x_0^2, Y_2)\}$ . При расчете траекторий  $Y_1, Y_2$  был выбран согласно представленной в разделе 3 рекомендации, шаг дискретизации времени  $\Delta t = 2,5 \times 10^{-5} \ll h = 2,5 \times 10^{-4}$ , ему соответствует значение  $N = 2000$ . Задача вычисления этих траекторий имеет решение в силу управляемости и наблюдаемости рассматриваемого объекта управления.

Вначале решим рассматриваемую задачу синтеза, не используя ограничений (6), (7), что эквивалентно решению задачи (20), (22), (24). В качестве начального приближения принимаем решение системы (25). Воспользовавшись методом, изложенным в разделе 4.1, после трех итераций находим  $K = (-5,11; -3,73 \times 10^{-2}; 1,06 \times 10^{-4})$ , при этом запас устойчивости  $\eta(K) = 0,017$ , значение целевой функции (18) равно  $2,1 \times 10^{-6}$ . Полученные значения  $\tilde{U}$ ,  $\omega_0$  равны соответственно 0,010 В и 12 566 рад/с. Графики переходных процессов в системе (1)–(5), соответствующие найденному вектору  $K$ , представлены на рис. 1 для  $x(0) = x_0^1$  и на рис. 2 для  $x(0) = x_0^2 = (-0,5; -10; +10)$ . Рисунок 2 демонстрирует поведение системы, соответ-

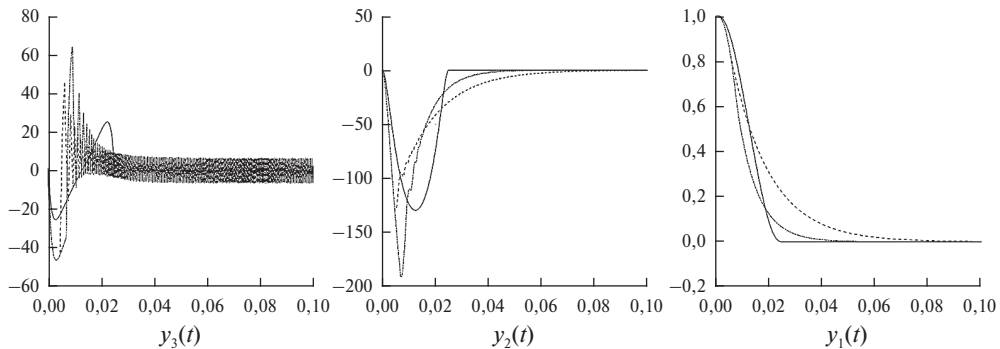


Рис. 1. Графики процессов для  $x(0) = x_0^1$  (желаемый процесс и процессы, полученные в примерах 1, 2, показаны соответственно сплошной, пунктирной и штрихпунктирной линией).

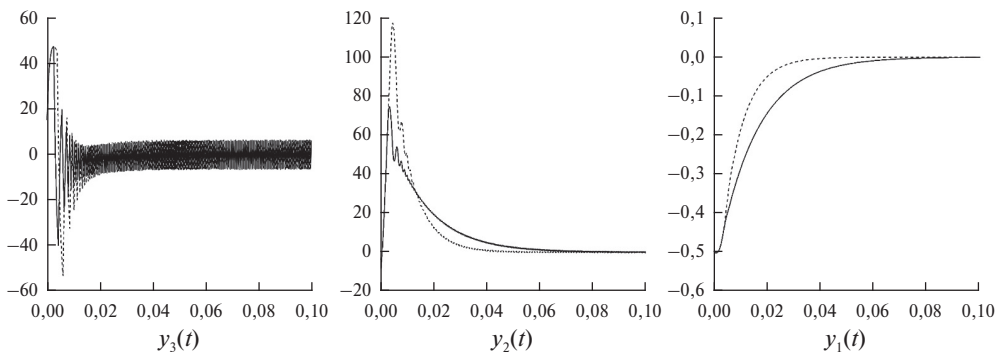


Рис. 2. Графики процессов для  $x(0) = x_0^3$  (процессы, полученные в примерах 1, 2, показаны соответственно сплошной и пунктирной линией).

ствующее начальному состоянию  $x_0^3$ , существенно удаленному от начальных состояний  $x_0^1$  и  $x_0^2$ , указанных в исходных данных рассматриваемого примера.

*Пример 2.* Решим задачу примера 1, в исходных данных которой увеличим запас устойчивости  $\eta(K)$  не менее, чем до  $\tilde{\eta} = 0,030$  и потребуем уменьшить отклонение координат  $y_1, y_2$  вектора выхода от их желаемых значений, назначив для них  $\delta_1 = 0,05, \delta_2 = 0,15$  на интервале времени от 0,025 до 0,05 с и  $\delta_1 = 0,1, \delta_2 = 0,2$  на интервале времени от 0 до 0,025 с. Расчет векторов  $\varepsilon_k^{\gamma-}, \varepsilon_k^{\gamma+}$ , соответствующих указанным значениям  $\delta_1, \delta_2$ , произведен согласно пояснениям к (7). Выбор значения  $\tilde{\eta} = 0,030$  осуществлен согласно пояснениям к (15) по формуле  $\tilde{\eta} = 6h/(N\Delta t)$ , где  $h = 1/(2f) = 1/4000$  с,  $N\Delta t = 0,05$  с.

С учетом указанных требований решаем задачу (18)–(22), (15). В качестве начального приближения принимаем решение задачи НКЛ (20)–(24), (26).

Методом раздела 4.1 в результате трех итераций находим

$$K = (-9,81; -3,76 \times 10^{-2}; 9,75 \times 10^{-5}).$$

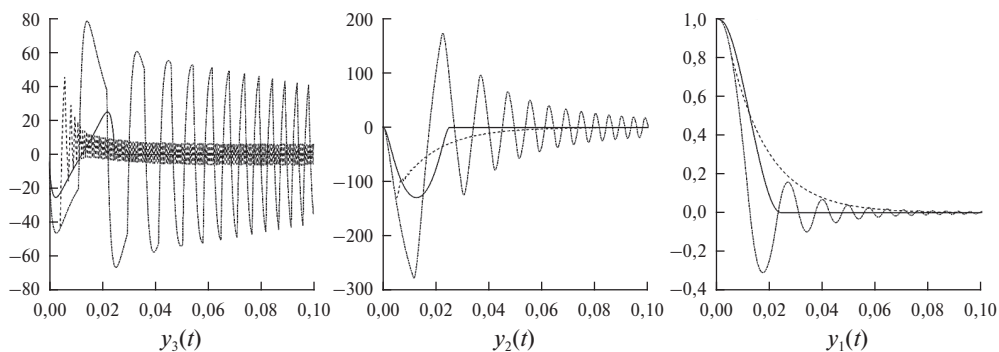


Рис. 3. Графики процессов для  $x(0) = x_0^1$  (желаемый процесс и процессы, полученные в примерах 1, 4, показаны соответственно сплошной, пунктирной и штрихпунктирной линией).

При этом  $\eta(K) = 0,0323$ , условия (6), (7) выполняются, значение целевой функции (18) составило  $4,1 \times 10^{-6}$ .

Графики переходных процессов, соответствующие найденному вектору  $K$ , представлены на рис. 1 для  $x(0) = x_0^1$  и на рис. 2 для  $x(0) = x_0^3$ .

**Пример 3.** Изменим постановку задачи примера 1: решим задачу структурного синтеза, состоящую в определении тех наборов  $S$  и соответствующих им векторов  $K$ , для которых при заданных  $\omega_0, \tilde{U}$  структура регулятора согласно (9) является простой. Искомое множество  $\Omega$  найдем методом синтеза простых структур, представленным в [19, с. 19] для “задач общего вида”. На первом шаге проверяем приемлемость структур  $S \subseteq \{1, 2, 3\}$ . Структура  $S$  приемлема (см. пояснения к (9)), если для нее удастся найти вектор  $K$ , обеспечивающий выполнение системой управления (1)–(5) требований (6)–(8). Проверку наличия такого вектора  $K$  выполняем согласно процедуре решения задачи (18)–(22), (15), изложенной в разделе 4. Проверка структуры  $S = \{1, 2, 3\}$  показала ее приемлемость. Проверка всех структур  $S \subseteq \{1, 2, 3\}$ , соответствующих наборам из двух компонент, т.е. наборам  $\{1, 2\}$ ,  $\{1, 3\}$ ,  $\{2, 3\}$ , показала их неприемлемость. Как следствие, заведомо неприемлемы и не требуют соответствующей проверки все наборы  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{3\}$ , являющиеся подмножествами неприемлемых наборов  $\{1, 2\}$ ,  $\{1, 3\}$ ,  $\{2, 3\}$  [19, утверждение 8]. Таким образом, в данном случае приемлемой и простой оказалась структура  $S = \{1, 2, 3\}$ .

**Пример 4.** Решим задачу примера 3, в исходных данных которой уменьшим заданный нижний предел запаса устойчивости до  $\check{\eta} = 2,5 \times 10^{-3}$ . В результате получаем множество  $\Omega$ , содержащее единственный набор  $S = \{1, 2\}$ , определяющий структуру регулятора, использующего сигналы обратной связи по положению  $y_1$  и скорости вращения  $y_2$  выходного вала привода. При этом структура  $S = \{1, 2, 3\}$  оказалась избыточной, а остальные структуры неприемлемыми. Найденной простой структуре  $S = \{1, 2\}$  соответству-

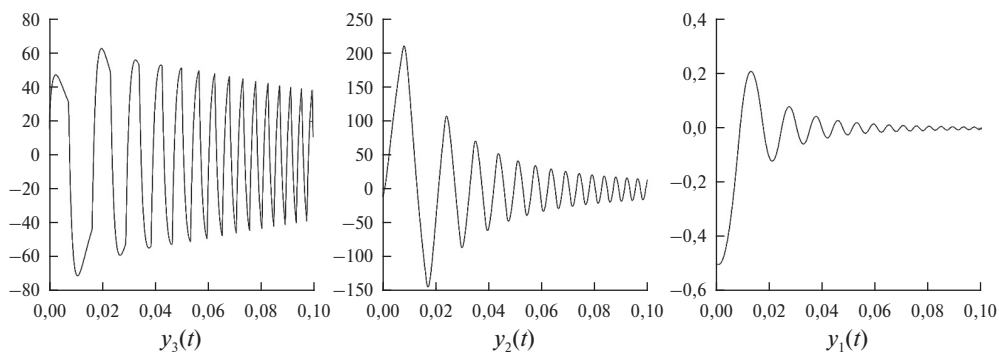


Рис. 4. Графики процессов для  $x(0) = x_0^3$ , полученные в примере 4.

ет  $K = (-61,45; -3,73 \times 10^{-2}; 0)$ . Графики переходных процессов в системе (1)–(5), соответствующие найденному вектору  $K$ , представлены на рис. 3 для  $x(0) = x_0^1$  и на рис. 4 для начального состояния  $x(0) = x_0^3$ , существенно удаленного от начальных состояний  $x_0^1$  и  $x_0^2$ , указанных в исходных данных рассматриваемого примера.

## 6. Заключение

В статье поставлена и решена задача синтеза релейных регуляторов в составе автоколебательной системы с линейным объектом управления. Новизна рассматриваемой задачи состоит в совместном выполнении условий существования в системе асимптотически устойчивых автоколебаний с заданными параметрами, ограничений на структуру регулятора и требований приближения поведения системы к желаемому. Для определения желаемого поведения системы задается набор законов изменения во времени выхода системы, выступающих в качестве обучающих примеров. Предложен метод решения сформулированной задачи, являющийся результатом развития алгоритма, изложенного в [17], с целью его распространения на класс релейных автоколебательных систем управления. В математической модели регулятора используется функция идеального реле. Степень влияния различий характеристик реального и идеального реле на поведение синтезируемой системы можно оценить в результате моделирования синтезируемой системы, заменив в (1)–(5) функцию идеального реле более полным и подробным математическим описанием реального реле.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цыпкин Я.З. Релейные автоматические системы. М.: Наука, 1974.
2. Попов Б.П. Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления. М.: Наука, 1974.
3. Atherton D.P. Nonlinear Control Engineering – Describing Function Analysis and Design. London: Van Nostrand Company Limited, 1975.

4. *Фалдин Н.В., Руднев С.А.* Синтез релейных систем методом фазового годографа // Изв. Вузов. Приборостроение. 1982. № 7. С. 32–36.
5. *Фалдин Н.В.* Релейные системы автоматического управления. Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егунова. М.: Изд-во МГТУ, 2004.
6. *Astrom K.J.* Oscillations in systems with relay feedback. Adaptive Control, Filtering and Signal Processing / K.J. Astrom, G.C. Goodwin, P.R. Kumar. New York: Springer-Verlag, 1995.
7. *Astrom K.J., Hagglund T.* Automatic tuning of simple regulators // 9th IFAC World Congress. Budapest, Hungary. 1984. P. 267–272.
8. *Boiko I.* Discontinuous Control Systems. Boston: Birkhauser, 2009.
9. *Мозжесчков В.А.* Синтез простых релейных регуляторов автоколебательных систем управления // АиТ. 2022. № 9. С. 81–93.  
*Mozzhechkov V.A.* Synthesis of simple relay controllers in self-oscillating control systems // Autom. Remote Control. 2022. V. 83. No. 9. P. 1393–1403.
10. *Varigonda S., Georgiou T.T.* Dynamics of Relay Relaxation Oscillators // IEEE Trans. Autom. Control. 2001. V. 46. No. 1. P. 65–77.
11. *Han T., Wang G., Dong C.* A Self-Oscillating Driving Circuit for Low-Q MEMS Vibratory Gyroscopes. // Micromachines. 2023. V. 14. No. 5. P. 1057–1072.
12. *Малетин А.Н., Хатанзейская М.А.* Исследование фильтрующих свойств маятникового акселерометра, функционирующего в режиме автоколебаний // Авиакосмическое приборостроение. 2021. № 10. С. 3–12.
13. *Индейцев Д.А., Лобода О.С., Морозов Н.Ф.* Автоколебательный режим нанорезонатора // Физическая мезомеханика. 2016. № 5. С. 23–28.
14. *Urasaki S., Yabuno H.* Amplitude control for sensorless self-excited oscillation of cantilever based on a piezoelectric device // Nonlinear Dynamics. 2022. V. 108. P. 15–25.
15. *Красовский А.А.* Синтез автоколебательных систем с применением к ветроэнергетической установке нового класса // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1996. № 2. С. 21–30.
16. *Aguilar L.T., Boiko I., Fridman L., Iriarte R.* Generating Self-excited Oscillations for Underactuated Mechanical Systems via Two-Relay Controller // International Journal of Control. 2009. V. 82. No. 9. P. 1678–1691.
17. *Мозжесчков В.А.* Синтез статической обратной связи в линейных дискретных системах управления на основе обучающих примеров // АиТ. 2023. № 9. С. 68–81.  
*Mozzhechkov V.A.* Static Feedback Design in Linear Discrete-Time Control Systems Based on Training Examples // Autom. Remote Control. 2023. V. 84. No. 9. P. 1065–1074.
18. *Мозжесчков В.А.* Синтез линейных регуляторов с простой структурой // АиТ. 2003. № 1. С. 27–41.  
*Mozzhechkov V.A.* Design of Simple-Structure Linear Controllers // Autom. Remote Control. 2003. V. 64. No. 1. P. 23–36.
19. *Мозжесчков В.А.* Простые структуры в задачах теории управления: формализация и синтез // Известия РАН. Теория и системы управления. 2022. № 3. С. 3–20.

20. *Syrmos V.L., Abdallah C.T., Dorato P., Grigoriadis K.* Static output feedback – a survey // *Automatica*. 1997. V. 33. No. 2. P. 125–137.
21. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
22. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления. М.: Ленанд, 2019.
23. *Икрамов Х.Д.* Численное решение матричных уравнений. М.: Наука, 1984.
24. *Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.* Практическая оптимизация. М.: Мир, 1977.
25. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.*

Поступила в редакцию 13.03.2024

После доработки 10.06.2025

Принята к публикации 20.06.2025