

© 2025 г. М.В. ХЛЕБНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (khlebnik@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СИНТЕЗ ПИД-РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ ПОДАВЛЕНИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ¹

Предлагается новый подход к задаче подавления неслучайных ограниченных внешних возмущений в линейных системах управления при помощи ПИД-регулятора. Подход предполагает сведение исходной проблемы к задаче невыпуклой матричной оптимизации. Выписан градиентный метод для отыскания параметров ПИД-регулятора и дано его обоснование. Предлагаемая рекуррентная процедура отличается простотой реализации и приводит ко вполне удовлетворительным по инженерным критериям качества регуляторам.

Ключевые слова: линейная система, внешние возмущения, ПИД-регулятор, оптимизация, уравнение Ляпунова, градиентный метод.

DOI: 10.31857/S0005231025110024

1. Введение

ПИД-регуляторы являются наиболее распространенным типом автоматических регуляторов; по различным оценкам к ним относится более 90% используемых в настоящее время регуляторов. В 2019 г. IFAC Industry Committee провел [1] опрос своих членов на тему, какие технологии управления наиболее востребованы в современной промышленности; можно было указывать несколько вариантов ответов. Первое место с большим отрывом заняло ПИД-управление – 91% опрошенных. При этом согласно прогнозам на среднесрочный период, эта доля по-прежнему будет исключительно велика, составляя около 80%. Столь обширное применение ПИД-регуляторов в промышленности обусловлено рядом обстоятельств. Помимо пригодности для решения большинства практических задач, невысокой стоимости, их востребованность связана с простотой: для настройки ПИД-регулятора необходимо правильно выбрать всего три коэффициента.

Вместе с тем, сами процедуры их практической настройки во многом остаются эвристичными: в реальных установках ПИД-регуляторы часто настраиваются вручную, исходя из интуитивного понимания технологического процесса и влияния на него отдельных составляющих ПИД-управления.

¹ Результаты исследований, представленные в разделах 4 и 5, получены за счет средств Российского научного фонда (грант № 25-29-20062), <https://rscf.ru/project/25-29-20062/>.

Известные аналитические подходы к синтезу ПИД-регуляторов рассматривают “фиксированные” модели объектов управления, т.е. не являются универсальными, они также часто не учитывают влияние неопределенностей. Соответственно проблема разработки регулярных подходов к их настройке по-прежнему сохраняет свою содержательность и актуальность.

Среди публикаций, посвященных этой проблематике, отметим [2], в которой синтез ПИД-регуляторов производится на основе генетических алгоритмов, и [3], где для этой цели привлекаются эволюционные алгоритмы. Следует упомянуть и работы [4, 5], связанные с так называемым активным управлением с подавлением возмущений (ADRC), относящимся к безмодельному управлению, и [6, 7] по применению в этих целях метода оптимального значения (magnitude optimum method). Для настройки ПИД-регуляторов активно применяется и метод внутренней модели [8–10]. Обширную библиографию читатель также найдет в недавнем обзоре [11].

Общий тренд последних десятилетий – это переход к численным методам синтеза ПИД-регуляторов на основе решения задач оптимизации. В его русле находится предложенный в [12] и восходящий к [13] оптимизационный подход к задаче подавления ограниченных внешних возмущений. Напомним, что классическая задача подавления неслучайных ограниченных внешних возмущений ставится следующим образом. Рассмотрим линейную систему управления

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + Dw, \quad x(0) = x_0, \\ y &= C_1 x, \\ z &= C_2 x + B_1 u\end{aligned}$$

с состоянием $x(t) \in \mathbb{R}^n$, измеряемым выходом $y(t) \in \mathbb{R}^\ell$, регулируемым выходом $z(t) \in \mathbb{R}^r$, управлением $u(t) \in \mathbb{R}^p$ и внешним возмущением $w(t) \in \mathbb{R}^m$ таким, что $\|w(t)\| \leq \bar{w}$ для всех $t \geq 0$. Задача состоит в поиске стабилизирующей обратной связи так, чтобы уменьшить “пиковое” значение выхода z , т.е. величину $\sup_{t \geq 0} \max_{\|w\| \leq \bar{w}} \|z(t)\|$. В [12] эта задача была сведена к задаче невыпуклой матричной оптимизации, был выписан градиентный метод для отыскания статической линейной обратной связи по состоянию ($u = Kx$) или по выходу ($u = Ky$) системы и дано его обоснование.

С другой стороны, в [14] оптимизационный подход был применен к задаче синтеза ПИД-регулятора. А именно, был предложен регулярный подход к отысканию его параметров, предполагающий решение задачи невыпуклой матричной оптимизации. При этом качество регулятора оценивалось по квадратичному критерию от выхода системы: регулятор настраивался против неопределенности в начальных условиях так, чтобы выход системы был равномерно малым. Предложенная рекуррентная процедура оказалась весьма эффективной и приводящей к регуляторам, вполне удовлетворительным по инженерным критериям качества. Позже, в [15] оптимизационный подход был использован при решении задачи подавления ограниченных внешних возмущений при помощи ПИД-регулятора. Настоящая статья продолжает

и развивает эту линию исследований: в ней решается задача синтеза ПИД-регулятора для подавления ограниченных внешних возмущений. Важно отметить, что развиваемый подход может быть распространен и на различные робастные постановки задачи.

Всюду далее $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора и спектральная норма матрицы, $\|\cdot\|_F$ – фробениусова норма матрицы, T – символ транспонирования, tr – след матрицы, I – единичная матрица соответствующей размерности, $\lambda_i(A)$ – собственные значения матрицы A , а $\sigma(A) \doteq -\max_i \text{Re}(\lambda_i(A)) > 0$ – степень устойчивости гурвицевой матрицы A .

2. Постановка задачи

Рассмотрим линейную SISO-систему управления

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu + Dw, & x(0) &= x_0, \\ y &= c^T x, \\ z &= Cx, \end{aligned}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$, с состоянием $x(t) \in \mathbb{R}^n$, управлением $u(t) \in \mathbb{R}$, измеряемым выходом $y(t) \in \mathbb{R}$, регулируемым выходом $z(t) \in \mathbb{R}^r$ и внешним возмущением $w(t) \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющим ограничению

$$(2) \quad \|w(t)\| \leq \bar{w} \quad \text{для всех } t \geq 0.$$

Пара (A, D) предполагается управляемой, пара (A, C) – наблюдаемой.

Будем искать управление в виде ПИД-регулятора

$$(3) \quad u(t) = -k_P y(t) - k_I \int_0^t y(\tau) d\tau - k_D \dot{y}(t),$$

который стабилизирует замкнутую систему и подавляет воздействие внешних возмущений w , минимизируя размер ограничивающего эллипсоида для выхода z .

Напомним концепцию метода инвариантных эллипсоидов (подробнее см. [17]). Рассмотрим линейную стационарную динамическую систему

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Dw, & x(0) &= x_0, \\ z &= Cx \end{aligned}$$

с состоянием $x(t) \in \mathbb{R}^n$, выходом $z(t) \in \mathbb{R}^r$ и измеримым по t внешним возмущением $w(t) \in \mathbb{R}^\ell$, ограниченным в каждый момент времени: $\|w(t)\| \leq 1$ для всех $t \geq 0$. Будем полагать, что система (4) устойчива (т.е. матрица A гурвицева), пара (A, D) управляема.

Эллипсоид с центром в начале координат будем называть *инвариантным* для динамической системы (4), если любая ее траектория, исходящая из точки, лежащей в эллипсоиде, в любой момент времени будет оставаться в этом эллипсоиде при всех допустимых внешних возмущениях, действующих на систему.

Оценивая влияние внешних возмущений на выход системы, естественно интересоваться минимальными (в том или ином смысле) эллипсоидами, содержащими этот выход. Нетрудно видеть, что если эллипсоид

$$(5) \quad \mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T P^{-1} x \leq 1\}$$

с положительно определенной матрицей P ($P \succ 0$) является инвариантным, то выход системы (4) при $x_0 \in \mathcal{E}$ принадлежит так называемому *ограничивающему* эллипсоиду

$$(6) \quad \mathcal{E}_z = \{z \in \mathbb{R}^r : z^T (CPC^T)^{-1} z \leq 1\}.$$

В литературе в качестве критерия его минимальности часто рассматривается линейная функция $f(P) = \text{tr } CPC^T$, равная сумме квадратов полуосей ограничивающего эллипсоида.

В [16] был установлен критерий инвариантности эллипсоида в терминах линейных матричных неравенств; приведем его в следующей формулировке (см. [17]).

Теорема 1. Пусть матрица A гурвицева, пара (A, D) управляема, а матрица $P(\alpha) \succ 0$ удовлетворяет уравнению Ляпунова

$$\left(A + \frac{\alpha}{2}I\right)P + P\left(A + \frac{\alpha}{2}I\right)^T + \frac{1}{\alpha}DD^T = 0$$

на интервале $0 < \alpha < 2\sigma(A)$.

Тогда задача о минимальном ограничивающем эллипсоиде для системы (4) сводится к минимизации функции $f(\alpha) = \text{tr } CP(\alpha)C^T$ на интервале $0 < \alpha < 2\sigma(A)$.

В [12] (в предположениях, которые заведомо можно ослабить) была показана строгая выпуклость функции $f(\alpha)$ на интервале $0 < \alpha < 2\sigma(A)$. Заметим также, что если α^* – точка минимума в задаче из теоремы 1 и $x(0) = x_0$ удовлетворяет условию $x_0^T P^{-1}(\alpha^*)x_0 \leq 1$, то гарантируется очевидная равномерная оценка

$$\|z(t)\| \leq \sqrt{\|CP(\alpha^*)C^T\|} \leq \sqrt{f(\alpha^*)}$$

для всех $t \geq 0$.

3. Подход к решению

Введем в рассмотрение вспомогательную скалярную переменную ξ следующим образом:

$$\dot{\xi} = y, \quad \xi(0) = 0.$$

Тогда, введя расширенный вектор состояния

$$g = \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1},$$

систему (1) можно записать в виде

$$(7) \quad \begin{aligned} \dot{g} &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ c^T & 0 \end{pmatrix} g + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} w, \quad g(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ y &= (c^T \ 0) g, \\ z &= (C \ 0) g. \end{aligned}$$

При этом согласно (1), (3) имеем:

$$\begin{aligned} u &= -k_P y(t) - k_I \int_0^t y(\tau) d\tau - k_D \dot{y}(t) = \\ &= -k_P c^T x - k_I \xi - k_D c^T \dot{x} = -k_P c^T x - k_I \xi - k_D c^T (Ax + bu + Dw) = \\ &= -k_P (c^T \ 0) g - k_I (0 \ 1) g - k_D (c^T A \ 0) g - k_D c^T bu - k_D c^T Dw, \end{aligned}$$

откуда

$$(1 + k_D c^T b) u = -k_P (c^T \ 0) g - k_I (0 \ 1) g - k_D (c^T A \ 0) g - k_D c^T Dw$$

или

$$(8) \quad \begin{aligned} u &= -\frac{k_P}{1 + k_D c^T b} (c^T \ 0) g - \frac{k_I}{1 + k_D c^T b} (0 \ 1) g - \\ &\quad - \frac{k_D}{1 + k_D c^T b} (c^T A \ 0) g - \frac{k_D}{1 + k_D c^T b} c^T Dw. \end{aligned}$$

Если ввести новые переменные

$$k_1 = \frac{k_P}{1 + k_D c^T b}, \quad k_2 = \frac{k_I}{1 + k_D c^T b}, \quad k_3 = \frac{k_D}{1 + k_D c^T b},$$

то (8) примет вид

$$(9) \quad u = - (k_1 c^T + k_3 c^T A \ k_2) g - k_3 c^T Dw,$$

при этом исходные параметры ПИД-регулятора восстанавливаются единственным образом:

$$k_P = \frac{k_1}{1 - k_3 c^T b}, \quad k_I = \frac{k_2}{1 - k_3 c^T b}, \quad k_D = \frac{k_3}{1 - k_3 c^T b}.$$

Итак, замыкая систему (7) обратной связью (9), приходим к замкнутой системе

$$\begin{aligned}\dot{g} &= \begin{pmatrix} A - k_1 bc^T - k_3 bc^T A & -k_2 b \\ c^T & 0 \end{pmatrix} g + \begin{pmatrix} (I - k_3 bc^T)D \\ 0 \end{pmatrix} w, \quad g(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ z &= (C \ 0) g,\end{aligned}$$

которой можно придать вид

$$(10) \quad \begin{aligned}\dot{g} &= (\mathcal{A}_0 + k_1 \mathcal{A}_1 + k_2 \mathcal{A}_2 + k_3 \mathcal{A}_3)g + (\mathcal{D}_0 + k_3 \mathcal{D}_3)w, \quad g(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ z &= \mathcal{C}g,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_0 &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ c^T & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} -bc^T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_3 = \begin{pmatrix} -bc^T A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{D}_0 &= \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}_3 = \begin{pmatrix} -bc^T D \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} = (C \ 0).\end{aligned}$$

Замечание 1. Обратим внимание, что пара $(\mathcal{A}_0, \mathcal{D}_0)$ управляема. В самом деле, в противном случае существует вектор $0 \neq v \in \mathbb{C}^{n+1}$ такой, что при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$ выполняются условия

$$v^* \begin{pmatrix} A & 0 \\ c^T & 0 \end{pmatrix} = \lambda v^*, \quad v^* \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Представим вектор v в виде $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $v_1 \in \mathbb{C}^n$, $v_2 \in \mathbb{C}$. Тогда имеем

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} A & 0 \\ c^T & 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}^*, \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

или $v_1^* A = \lambda v_1^*$, $v_1^* D = 0$, что противоречит управляемости пары (A, D) .

Таким образом, “номинальная” система

$$(11) \quad \begin{aligned}\dot{g} &= \mathcal{A}_0 g + \mathcal{D}_0 w, \\ z &= \mathcal{C}g\end{aligned}$$

является управляемой.

Аналогичным образом пара $(\mathcal{A}_0, \mathcal{C})$ является наблюдаемой. В самом деле, в противном случае существует вектор $0 \neq v \in \mathbb{C}^{n+1}$ такой, что при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$ выполняются условия

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ c^T & 0 \end{pmatrix} v = \lambda v, \quad (C \ 0) v = 0.$$

Вновь представляя вектор v в виде $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $v_1 \in \mathbb{C}^n$, $v_2 \in \mathbb{C}$, получим

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ c^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

или $Av_1 = \lambda v_1$, $Cv_1 = 0$, что противоречит наблюдаемости пары (A, C) . Таким образом, “номинальная” система (11) является наблюдаемой.

Продолжим: следуя методу инвариантных эллипсоидов, заключим состояние g системы (10) в инвариантный эллипсоид (5), порожденный матрицей $0 \prec P \in \mathbb{S}^{n+1}$, и будем минимизировать размер соответствующего ограничивающего эллипсоида (6) по выходу $z = Cg$.

Учитывая условие (2) путем масштабирования соответствующим образом матрицы D , согласно теореме 1 приходим к задаче минимизации $\text{tr } CPC^T$ при ограничении

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{A}_0 + k_1 \mathcal{A}_1 + k_2 \mathcal{A}_2 + k_3 \mathcal{A}_3 + \frac{\alpha}{2} I \right) P + P \left(\mathcal{A}_0 + k_1 \mathcal{A}_1 + k_2 \mathcal{A}_2 + k_3 \mathcal{A}_3 + \frac{\alpha}{2} I \right)^T + \\ & + \frac{\bar{w}^2}{\alpha} (D_0 + k_3 D_3)(D_0 + k_3 D_3)^T = 0. \end{aligned}$$

Введя для удобства обозначения

$$\begin{aligned} A_k & \doteq \mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} \doteq \mathcal{A}_0 + k_1 \mathcal{A}_1 + k_2 \mathcal{A}_2 + k_3 \mathcal{A}_3, \\ D_k & \doteq \begin{pmatrix} (I - k_3 bc^T)D \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

придадим ему вид

$$(12) \quad \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2} I \right) P + P \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2} I \right)^T + \frac{\bar{w}^2}{\alpha} D_k D_k^T = 0.$$

При этом оптимизация проводится по матричной переменной $0 \prec P \in \mathbb{S}^{n+1}$, векторной переменной $k \in \mathbb{R}^3$ и скалярному параметру $\alpha > 0$.

Окончательно, в качестве критерия качества примем величину

$$(13) \quad f(k, \alpha) = \text{tr } CPC^T + \rho \|k\|^2, \quad \rho > 0,$$

в которую введен штраф за величину управления (коэффициент $\rho > 0$ регулирует его важность).

Таким образом, исходная задача о синтезе ПИД-регулятора, подавляющего внешние возмущения, свелась к невыпуклой матричной оптимизационной задаче (13)–(12). Обратим внимание, что при заданных k и α матрица P находится из уравнения Ляпунова (12); тем самым, независимыми переменными являются k и α .

Отсутствие выпуклости в полученной оптимизационной задаче обусловлено наличием билинейных слагаемых вида $A_i k_i P$, $i = 1, \dots, 3$, в уравнении

Ляпунова (12), задающем ограничение в пространстве параметров. Фактически приходится иметь дело с билинейным матричным уравнением, решение которого (как и в случае с билинейными матричными неравенствами), является NP-трудной задачей [18–20]. В некоторых частных случаях билинейные матричные уравнения (или неравенства) могут быть линеаризованы путем специальных замен переменных: например, в задаче стабилизации линейной стационарной системы вида $\dot{x} = Ax + Bu$ пропорциональным регулятором $u = Kx$. Однако уже в задаче стабилизации этой системы по выходу $y = Cx$ (т.е. с помощью регулятора $u = KCx$) такой подход принципиально невозможен, и для ее решения требуются иные методы; один из них сопряжен с наложением более сильных условий, предъявляемых к системе, например, в духе условий теоремы о пассивации (частотной теоремы с обратной связью), см. [19]. Несмотря на разницу между постановками задач стабилизации и подавления внешних возмущений, в них возникают сходные проблемы, что демонстрирует сложность решения рассматриваемой задачи. В следующем разделе, после изучения свойств минимизируемой функции, прибегнем к прямой оптимизации в пространстве параметров для ее решения.

4. Свойства функции $f(k, \alpha)$

Минимизацию функции $f(k, \alpha)$ по α можно осуществлять, например, при помощи метода Ньютона, как было предложено в [12]. А именно, рассмотрим задачу

$$\min f(\alpha), \quad f(\alpha) = \text{tr } PC^T C,$$

при ограничении

$$\left(A + \frac{\alpha}{2}I\right)P + P\left(A + \frac{\alpha}{2}I\right)^T + \frac{1}{\alpha}DD^T = 0$$

относительно матричной переменной $P \in \mathbb{S}^n$ и скалярного параметра $0 < \alpha < 2\sigma(A)$; матрица A предполагается устойчивой (гурвицевой).

Зададимся начальным приближением $0 < \alpha_0 < 2\sigma(A)$ и применим итерационный процесс

$$\alpha_{j+1} = \alpha_j - \frac{f'(\alpha_j)}{f''(\alpha_j)},$$

где

$$f'(\alpha) = \text{tr } Y \left(P - \frac{1}{\alpha^2} DD^T \right), \quad f''(\alpha) = 2 \text{tr } Y \left(X + \frac{1}{\alpha^3} DD^T \right),$$

а матрицы Y и X – решения уравнений Ляпунова

$$\left(A + \frac{\alpha}{2}I\right)^T Y + Y \left(A + \frac{\alpha}{2}I\right) + C^T C = 0$$

и

$$\left(A + \frac{\alpha}{2}I\right) X + X \left(A + \frac{\alpha}{2}I\right)^T + P - \frac{1}{\alpha^2} DD^T = 0.$$

Метод будет сходиться глобально (быстрее, чем геометрическая прогрессия с коэффициентом $1/2$), причем в окрестности решения сходимость квадратичная.

С другой стороны, в силу выпуклости (см. [12]) функции $f(\alpha)$ ее минимизацию на интервале $(0, 2\sigma(A))$ можно весьма эффективно проводить и более простыми средствами, например методом золотого сечения.

Далее, введем в рассмотрение функцию

$$f(k) \doteq \min_{\alpha} f(k, \alpha).$$

Легко видеть, что $f(k)$ определена и неотрицательна на множестве $\mathcal{S}$ стабилизирующих регуляторов. При этом множество $\mathcal{S}$ может быть невыпуклым и несвязным, причем его границы могут быть негладкими.

Сделаем следующее предположение.

Предположение. Известен стабилизирующий ПИД-регулятор с коэффициентами

$$k^{(0)} = \begin{pmatrix} k_1^{(0)} \\ k_2^{(0)} \\ k_3^{(0)} \end{pmatrix},$$

т.е. такой, что матрица $A_{k^{(0)}} = \mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k^{(0)}\}$ гурвицева.

Перейдем к свойствам градиента минимизируемой функции.

Лемма 1. Функция $f(k, \alpha)$ определена на множестве стабилизирующих обратных связей k и для $0 < \alpha < 2\sigma(A_k)$. На этом допустимом множестве она дифференцируема, причем градиент дается выражениями

$$(14) \quad \begin{aligned} f'_\alpha(k, \alpha) &= \text{tr} Y \left(P - \frac{\bar{w}^2}{\alpha^2} D_k D_k^T \right), \\ \frac{1}{2} \frac{\partial f(k, \alpha)}{\partial k_i} &= \text{tr} P Y \mathcal{A}_i + \rho k_i - \delta_{i3} \frac{\bar{w}^2}{\alpha} \text{tr} Y D_k \begin{pmatrix} bc^T D \\ 0 \end{pmatrix}^T, \quad i = 1, \dots, 3, \end{aligned}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, матрица P является решением уравнения (12), а матрица Y – решение уравнения Ляпунова

$$(15) \quad \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2} I \right)^T Y + Y \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2} I \right) + C^T C = 0.$$

Минимум $f(k, \alpha)$ достигается во внутренней точке допустимого множества и определяется условиями

$$f'_\alpha(k, \alpha) = 0, \quad f'_{k_i}(k, \alpha) = 0, \quad i = 1, \dots, 3.$$

При этом $f(k, \alpha)$ как функция от α строго выпукла на $0 < \alpha < 2\sigma(A_k)$ и достигает минимума во внутренней точке этого интервала.

Свойства якобиана функции $f(k)$ представлены следующим утверждением.

Лемма 2. Функция $f(k)$ дважды дифференцируема, при этом

$$(16) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2}(f''(k)v, v) &= 2 \operatorname{tr} PY' \{\mathcal{A}, v\} + \rho(v, v) - \\ &- \frac{\bar{w}^2}{\alpha} v_3 \operatorname{tr} \left[2Y' D_k - v_3 Y \begin{pmatrix} bc^T D \\ 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} bc^T D \\ 0 \end{pmatrix}^T, \end{aligned}$$

где $v \in \mathbb{R}^3$, матрица P удовлетворяет уравнению (12), матрица Y удовлетворяет уравнению (15), а матрица Y' является решением уравнения Ляпунова

$$(17) \quad \begin{aligned} \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2} I \right)^T Y' + Y' \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2} I \right) + \\ + \{\mathcal{A}, v\}^T Y + Y \{\mathcal{A}, v\} = 0. \end{aligned}$$

Градиент функции $f(k)$ не является липшицевым на множестве $\mathcal{S}$ стабилизирующих регуляторов, однако он обладает этим свойством на его подмножестве $\mathcal{S}_0$. Соответствующий результат будет представлен ниже.

Далее для получения простых количественных оценок в леммах 3 и 4 в оптимизационную задачу (13), (12) вводятся регуляризующие добавки ε и δ , и она принимает следующий вид:

$$\min f(k, \alpha), \quad f(k, \alpha) = \operatorname{tr} P(\mathcal{C}^T \mathcal{C} + \varepsilon I) + \rho \|k\|^2, \quad 0 < \varepsilon \ll 1,$$

при ограничении

$$(18) \quad \left(A_k + \frac{\alpha}{2} I \right) P + P \left(A_k + \frac{\alpha}{2} I \right)^T + \frac{\bar{w}^2}{\alpha} (D_k D_k^T + \delta I) = 0, \quad 0 < \delta \ll 1.$$

Требование необходимости их введения можно существенно ослабить, но цель сейчас состоит в получении наиболее простых и наглядных результатов.

Лемма 3. На множестве $\mathcal{S}$ стабилизирующих регуляторов функция $f(k)$ коэрцитивна (т.е. стремится к бесконечности на границе области), причем справедливы следующие оценки:

$$(19) \quad \begin{aligned} f(k) &\geq \frac{\bar{w}^2}{4\sigma(A_k)} \frac{\varepsilon}{\|A_k\| + \sigma(A_k)} \|D_k\|_F^2, \\ f(k) &\geq \rho \|k\|^2. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение множество уровня

$$\mathcal{S}_0 = \{k \in \mathcal{S}: \quad f(k) \leq f(k^{(0)})\}.$$

Из леммы 3 вытекает очевидное следствие 1.

Следствие 1. Для любого регулятора $k^{(0)} \in \mathcal{S}$ множество $\mathcal{S}_0$ ограничено.

С другой стороны, у функции $f(k)$ на множестве $\mathcal{S}_0$ существует точка минимума (как у непрерывной функции на компактном множестве), но множество $\mathcal{S}_0$ не имеет общих точек с границей $\mathcal{S}$ в силу (19). Выше было показано, что $f(k)$ дифференцируема на $\mathcal{S}_0$. Следовательно, справедливо следствие 2.

Следствие 2. Существует точка минимума k_ на множестве $\mathcal{S}$, причём $f'(k_*) = 0$.*

Лемма 4. На множестве $\mathcal{S}_0$ градиент функции $f(k)$ липшицев с константой

$$\begin{aligned} L = & 2\sqrt{3(n+1)} \frac{f(k_0)}{\varepsilon} \frac{2(n+1)^{3/2} f(k_0)}{\bar{w}^2 \varepsilon \delta} \times \\ & \times \left[\frac{4f^2(k_0)}{\bar{w}^4 \delta^2} \left(\|\mathcal{A}_0\| + \max_i \|\mathcal{A}_i\| \sqrt{\frac{3}{\rho} f(k_0)} \right)^2 + 3 \max_i \|\mathcal{A}_i\|^2 \right] \times \\ & \times \left(\|\mathcal{A}_0\| + \max_i \|\mathcal{A}_i\| \sqrt{\frac{3}{\rho} f(k_0)} \right) \max_i \|\mathcal{A}_i\| + 2\rho + \\ & + 2\bar{w}^2 \left(2 \frac{(n+1)f(k_0)}{\bar{w}^2 \varepsilon \delta} \left[\frac{4f^2(k_0)}{\bar{w}^4 \delta^2} \left(\|\mathcal{A}_0\| + \max_i \|\mathcal{A}_i\| \sqrt{\frac{3}{\rho} f(k_0)} \right)^2 + 3 \max_i \|\mathcal{A}_i\|^2 \right] \times \right. \\ & \left. \times \left(1 + \sqrt{\frac{f(k_0)}{\rho}} \|bc^T\| \right) \|D\|_F + \frac{f(k_0)}{\bar{w}^2 \delta} \|bc^T D\|_F \right) \|bc^T D\|_F. \end{aligned}$$

Полученные свойства минимизируемой функции и ее производных позволяют построить оптимизационную процедуру и обосновать ее сходимость.

5. Алгоритм оптимизации

Предлагается итеративный подход к решению этой задачи, в основе которого лежит применение градиентного метода по переменной k и выпуклой минимизации по α . Приведем принципиальную схему соответствующего алгоритма.

- 1) Задаемся параметрами $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, $0 < \tau < 1$ и начальным стабилизирующим приближением $k^{(0)}$. Вычисляем величину

$$\alpha_0 = \sigma(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k^{(0)}\}).$$

- 2) На j -й итерации заданы $k^{(j)}$, α_j . Вычисляем $A_{k^{(j)}} = \mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k^{(j)}\}$ и находим матрицы P , Y как решения уравнений (12) и (15). Вычисляем градиент

$$H_j = \nabla_k f(k^{(j)}, \alpha_j)$$

из соотношений (14). Если $\|H_j\| \leq \varepsilon$, то $k^{(j)}$ принимаем за приближенное решение и завершаем работу алгоритма.

3) Делаем шаг градиентного метода

$$k^{(j+1)} = k^{(j)} - \gamma_j H_j.$$

При этом длину шага $\gamma_j > 0$ подбираем дроблением γ до выполнения условий:

а. матрица $\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k^{(j+1)}\} + \frac{\alpha_j}{2}I$ гурвицева;

б. $f(k^{(j+1)}) \leq f(k^{(j)}) - \tau\gamma_j \|H_j\|^2$.

4) Для полученного $k^{(j+1)}$ решаем задачу минимизации $f(k^{(j+1)}, \alpha)$ по α (см. начало раздела 4), получая α_{j+1} . Переходим к п. 2.

Предлагаемый метод сходится в следующем смысле.

Теорема 2. В алгоритме 1 на каждой итерации реализуется лишь конечное число дроблений γ_j , функция $f(k^{(j)})$ монотонно убывает и градиент стремится к нулю

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|H_j\| = 0$$

со скоростью геометрической прогрессии.

В самом деле, алгоритм 1 определен корректно в начальной точке, так как $k^{(0)}$ является стабилизирующим регулятором в силу предположения. При этом при достаточно малых γ_j в алгоритме происходит монотонное уменьшение $f(k)$ (движение по антиградиенту); такой способ подбора шага в алгоритме гарантирует, что величины $k^{(j)}$ остаются в области $\mathcal{S}_0$, для которой лемма 4 гарантирует липшицевость градиента. Таким образом, применимы результаты о сходимости градиентного метода для безусловной минимизации [21]. В частности, условие б на шаге 3 алгоритма 1 будет выполнено после конечного числа дроблений, а в градиентном методе будет иметь место сходимость по градиенту с линейной скоростью.

Естественно, что трудно рассчитывать на сходимость к глобальному минимуму, поскольку область определения $f(k)$ может быть даже несвязной.

Сделаем важное

Замечание 2. Введение в функционал (13) вместо евклидовой нормы взвешенной

$$\|x\|_\rho \doteq \sqrt{\sum_i \rho_i x_i^2}, \quad \rho_i > 0$$

дает возможность несколько более гибкой настройки параметров ПИД-регулятора, позволяя в разной мере влиять на их величину.

6. Примеры

Рассматриваемый в этом разделе пример взят из статьи [22]. Рассмотрим передаточную функцию

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)(1+\alpha s)(1+\alpha^2 s)(1+\alpha^3 s)}, \quad \alpha = 0,5.$$

МАТЛАВ-процедура **tf2ss** доставляет матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -15 & -70 & -120 & -64 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 64 \end{pmatrix}$$

системы (4). В качестве матрицы D возьмем

$$D = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а в качестве матрицы регулируемого выхода

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Положим $\rho = 0,1$ и выберем в качестве начального некоторый стабилизирующий ПИД-регулятор с коэффициентами

$$k_0 = \begin{pmatrix} 0,6389 \\ 0,9853 \\ 0,3243 \end{pmatrix}.$$

Итерационный процесс, соответствующий предложенному алгоритму, завершился нахождением ПИД-регулятора с коэффициентами

$$k_* = \begin{pmatrix} 0,6670 \\ 0,5466 \\ 0,1081 \end{pmatrix},$$

и соответствующего ограничивающего эллипса с матрицей

$$CP_*C^T = \begin{pmatrix} 4,0336 & -0,1999 \\ -0,1999 & 0,3259 \end{pmatrix}, \quad \text{tr } CP_*C^T = 4,3595.$$

Динамика изменения критерия $f(k)$ показана на рис. 1.

Система, замкнутая ПИД-регулятором с коэффициентами k_* , является устойчивой по критерию Найквиста; ее минимальный запас устойчивости по модулю составляет 23,3 дБ, а по фазе $70,3^\circ$, см. рис. 2.

Положив теперь $\rho = 10$, приходим к ПИД-регулятору с коэффициентами

$$k'_* = \begin{pmatrix} 0,1232 \\ 0,2410 \\ -0,0710 \end{pmatrix}$$

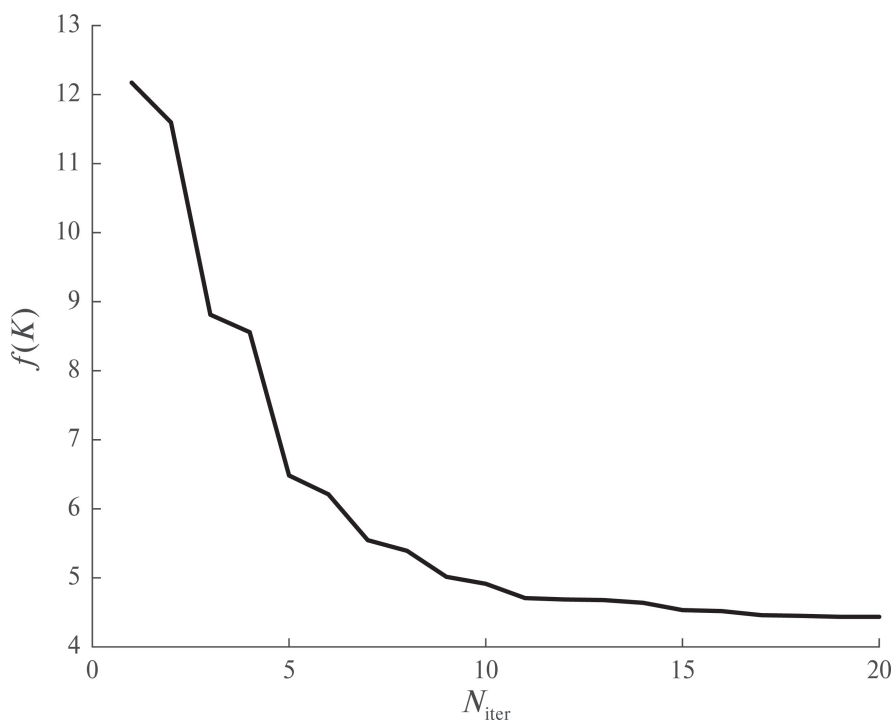


Рис. 1. Оптимизационная процедура.

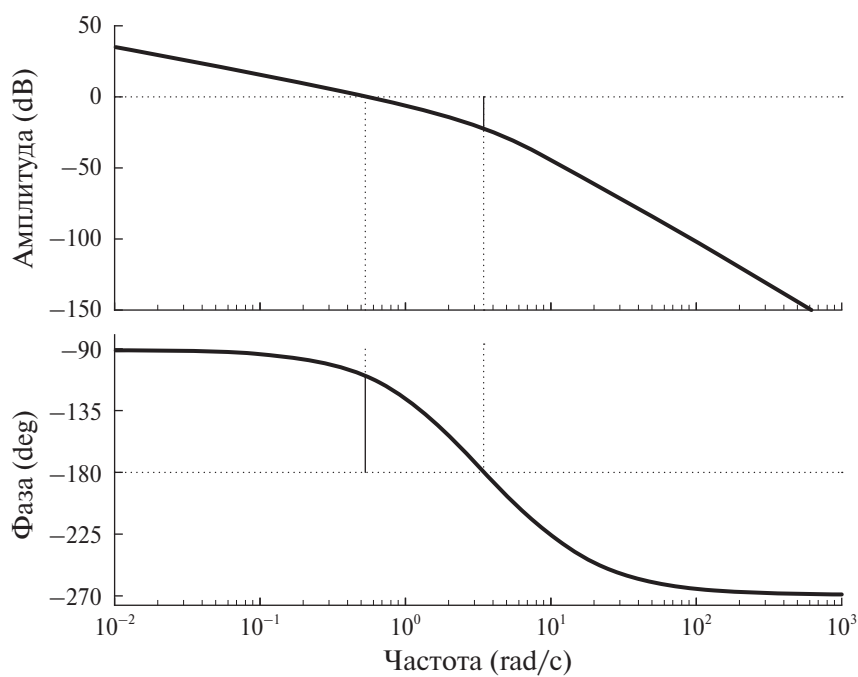


Рис. 2. ЛАФЧХ замкнутой системы.

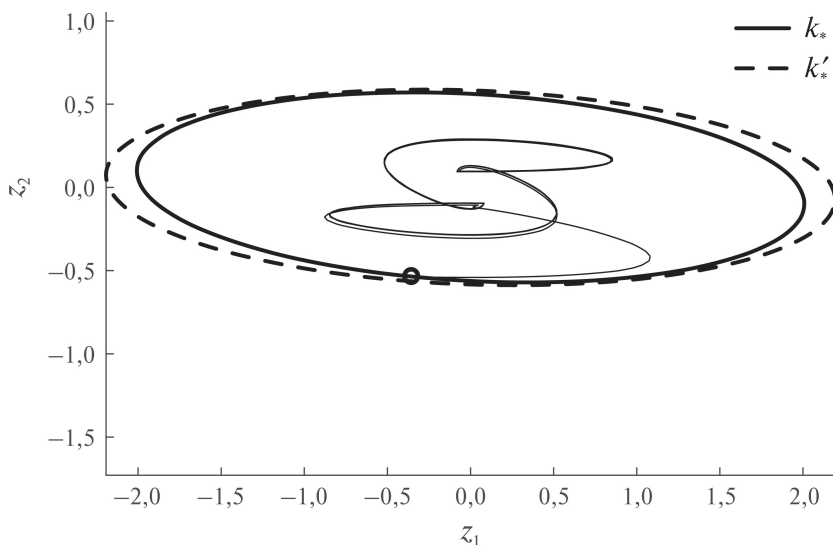


Рис. 3. Ограничивающие эллипсы.

и соответствующему ограничивающему эллипсу с матрицей

$$CP_*'C^T = \begin{pmatrix} 4,8090 & -0,1560 \\ -0,1560 & 0,3453 \end{pmatrix}, \quad \text{tr} CP_*'C^T = 5,15437.$$

При этом норма вектора коэффициентов ПИД-регулятора уменьшилась втрое; “платой” за это явилось увеличение ограничивающего эллипса менее чем на 20%.

На рис. 3 показаны полученные ограничивающие эллипсы и траектория системы, замкнутой ПИД-регулятором с коэффициентами k_* при некотором допустимом внешнем возмущении.

Вычисления производились в среде MATLAB с использованием программного пакета `cvx` [23].

Проведение обширного численного моделирования с обсуждением вычислительных аспектов автор предполагает осуществить в будущем; здесь же важна принципиальная возможность нового подхода к задаче подавления возмущений.

7. Заключение

Предложен новый легкорезализуемый подход к задаче синтеза ПИД-регуляторов, подавляющих неслучайные ограниченные внешние возмущения в линейных системах управления. Подход основан на сведении исходной задачи к невыпуклой задаче матричной оптимизации, которая далее решается градиентным методом. Построен соответствующий алгоритм и дано его обоснование.

Несмотря на то, что в работе рассматриваются только SISO-системы, развиваемый подход полностью переносится и на многомерный случай; при этом

выкладки становятся несколько более громоздкими, в то время как идейная сторона меняется мало.

Важным направлением дальнейших исследований является распространение полученных результатов на системы с неопределенностями.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Лемма П.1 [12]. Пусть X и Y – решения двойственных уравнений Ляпунова с гурвицевой матрицей A :

$$A^T X + X A + W = 0 \quad \text{и} \quad A Y + Y A^T + V = 0.$$

Тогда $\text{tr}(XV) = \text{tr}(YW)$.

Лемма П.2 [24]. 1. Для вещественных матриц A и B соответствующих размерностей справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \|AB\|_F &\leq \|A\|_F \|B\|, \\ |\text{tr} AB| &\leq \|A\|_F \|B\|_F, \\ \|A\| &\leq \|A\|_F, \\ AB + B^T A^T &\leq \varepsilon A A^T + \frac{1}{\varepsilon} B^T B \quad \text{для любого } \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

2. Для неотрицательно определенных матриц A и B справедливы соотношения

$$0 \leq \lambda_{\min}(A) \lambda_{\max}(B) \leq \lambda_{\min}(A) \text{tr} B \leq \text{tr} AB \leq \lambda_{\max}(A) \text{tr} B \leq \text{tr} A \text{tr} B.$$

Доказательство леммы 1. Продифференцируем уравнение (12) по α :

$$(П.1) \quad \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2} I \right) \frac{\partial P}{\partial \alpha} + \frac{\partial P}{\partial \alpha} \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2} I \right)^T + P - \frac{\bar{w}^2}{\alpha^2} D_k D_k^T = 0.$$

Применяя лемму П.1 к двойственным уравнениям Ляпунова (П.1) и (15), получаем

$$f'_\alpha(k, \alpha) = \text{tr} \mathcal{C} \frac{\partial P}{\partial \alpha} \mathcal{C}^T = \text{tr} \frac{\partial P}{\partial \alpha} \mathcal{C}^T \mathcal{C} = \text{tr} Y \left(P - \frac{\bar{w}^2}{\alpha^2} D_k D_k^T \right).$$

Для дифференцирования по k дадим ему приращение Δk и обозначим соответствующее приращение P через ΔP :

$$\begin{aligned} &\left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k + \Delta k\} + \frac{\alpha}{2} I \right) (P + \Delta P) + \\ &+ (P + \Delta P) \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k + \Delta k\} + \frac{\alpha}{2} I \right)^T + \frac{\bar{w}^2}{\alpha} D_{k+\Delta k} D_{k+\Delta k}^T = 0, \end{aligned}$$

где

$$D_{k+\Delta k} = \begin{pmatrix} (I - (k_3 + \Delta k_3)bc^T)D \\ 0 \end{pmatrix} = D_k - \Delta k_3 \begin{pmatrix} bc^T D \\ 0 \end{pmatrix}.$$

После линеаризации и вычитания этого и предыдущего уравнений, имеем

$$(П.2) \quad \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2} I \right) \Delta P + \Delta P \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2} I \right)^T + \\ + \{\mathcal{A}, \Delta k\} P + P \{\mathcal{A}, \Delta k\}^T - \Delta k_3 \frac{\bar{w}^2}{\alpha} \left[D_k \begin{pmatrix} bc^T D \\ 0 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} bc^T D \\ 0 \end{pmatrix} D_k^T \right] = 0.$$

Вычислим приращение $f(k)$, линеаризуя соответствующие величины:

$$\Delta f(k) = \text{tr} \mathcal{C}(P + \Delta P) \mathcal{C}^T + \rho \|k + \Delta k\|^2 - (\text{tr} \mathcal{C} P \mathcal{C}^T + \rho \|k\|^2) = \\ = \text{tr} \Delta P \mathcal{C}^T \mathcal{C} + 2\rho k^T \Delta k.$$

Применяя лемму П.1 к двойственным уравнениям Ляпунова (П.2) и (15), имеем

$$\Delta f(k) = 2 \text{tr} Y \left[\{\mathcal{A}, \Delta k\} P - \Delta k_3 \frac{\bar{w}^2}{\alpha} D_k \begin{pmatrix} bc^T D \\ 0 \end{pmatrix}^T \right] + 2\rho k^T \Delta k = \\ = 2 \text{tr} P Y \{\mathcal{A}, \Delta k\} - 2 \frac{\bar{w}^2}{\alpha} \text{tr} Y D_k \begin{pmatrix} bc^T D \\ 0 \end{pmatrix}^T \Delta k_3 + 2\rho k^T \Delta k.$$

Таким образом,

$$df(k) = 2 \text{tr} P Y \sum_{i=1}^3 \mathcal{A}_i dk_i - 2 \frac{\bar{w}^2}{\alpha} \text{tr} Y D_k \begin{pmatrix} bc^T D \\ 0 \end{pmatrix}^T dk_3 + 2\rho \sum_{i=1}^3 k_i dk_i.$$

Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Пусть $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Вычислим вели-

чину $(f''(k)v, v)$. Для этого, линеаризуя соответствующие величины и введя для удобства обозначение

$$[\text{tr} P Y \mathcal{A}] \doteq \begin{pmatrix} \text{tr} P Y \mathcal{A}_1 \\ \text{tr} P Y \mathcal{A}_2 \\ \text{tr} P Y \mathcal{A}_3 \end{pmatrix},$$

вычислим приращение $f'(k)$ по направлению v :

$$\frac{1}{2} \Delta f'(k)v = \\ = [\text{tr} (P + \Delta P)(Y + \Delta Y) \mathcal{A}] + \rho(k + \delta v) - \frac{\bar{w}^2}{\alpha} \text{tr} (Y + \Delta Y) D_{k+\delta v} \begin{pmatrix} bc^T D \\ 0 \end{pmatrix}^T e_3 - \\ - \left([\text{tr} P Y \mathcal{A}] + \rho k - \frac{\bar{w}^2}{\alpha} \text{tr} Y D_k \begin{pmatrix} bc^T D \\ 0 \end{pmatrix}^T e_3 \right) = \\ = [\text{tr} (P + \delta P'(k)v)(Y + \delta Y'(k)v) \mathcal{A}] + \rho(k + \delta v) -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\bar{w}^2}{\alpha} \operatorname{tr} (Y + \delta Y'(k)v) D_{k+\delta v} \begin{pmatrix} bc^T D \\ 0 \end{pmatrix}^T e_3 - \\
& -\left([\operatorname{tr} PY\mathcal{A}] + \rho k - \frac{\bar{w}^2}{\alpha} \operatorname{tr} Y D_k \begin{pmatrix} bc^T D \\ 0 \end{pmatrix}^T e_3 \right) = \\
& = \delta [\operatorname{tr} (PY'(k)v + P'(k)vY)\mathcal{A}] + \delta \rho v - \\
& -\frac{\bar{w}^2}{\alpha} \operatorname{tr} \left[(Y + \delta Y') \left(D_k - \delta v_3 \begin{pmatrix} bc^T D \\ 0 \end{pmatrix} \right) - Y D_k \right] \begin{pmatrix} bc^T D \\ 0 \end{pmatrix}^T e_3 = \\
& = \delta [\operatorname{tr} (PY'(k)v + P'(k)vY)\mathcal{A}] + \delta \rho v - \\
& -\delta \frac{\bar{w}^2}{\alpha} \operatorname{tr} \left[Y' D_k - v_3 Y \begin{pmatrix} bc^T D \\ 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} bc^T D \\ 0 \end{pmatrix}^T e_3,
\end{aligned}$$

где $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, а

$$\begin{aligned}
\Delta P &= P(k + \delta v) - P(k) = \delta P'(k)v, \\
\Delta Y &= Y(k + \delta v) - Y(k) = \delta Y'(k)v.
\end{aligned}$$

Таким образом, обозначая $P' = P'(k)v$ и $Y' = Y'(k)v$, имеем

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} (f''(k)v, v) = \\
& = \operatorname{tr} (PY' + P'Y) \{\mathcal{A}, v\} + \rho(v, v) - \frac{\bar{w}^2}{\alpha} \operatorname{tr} \left[Y' D_k - v_3 Y \begin{pmatrix} bc^T D \\ 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} bc^T D \\ 0 \end{pmatrix}^T v_3.
\end{aligned}$$

Далее, $P = P(k)$ есть решение уравнения (12); запишем его в приращениях по направлению v :

$$\begin{aligned}
& \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k + \delta v\} + \frac{\alpha}{2} I \right) (P + \delta P') + \\
& + (P + \delta P') \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k + \delta v\} + \frac{\alpha}{2} I \right)^T + \frac{\bar{w}^2}{\alpha} D_{k+\delta v} D_{k+\delta v}^T = 0
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
& \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k + \delta v\} + \frac{\alpha}{2} I \right) (P + \delta P') + (P + \delta P') \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k + \delta v\} + \frac{\alpha}{2} I \right)^T + \\
& + \frac{\bar{w}^2}{\alpha} \left[D_k - \delta v_3 \begin{pmatrix} bc^T D \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left[D_k - \delta v_3 \begin{pmatrix} bc^T D \\ 0 \end{pmatrix} \right]^T = 0,
\end{aligned}$$

откуда после динеаризации

$$\begin{aligned}
& \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2} I \right) (P + \delta P') + (P + \delta P') \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2} I \right)^T + \\
& + \delta \left(\{\mathcal{A}, v\} P + P \{\mathcal{A}, v\}^T \right) + \\
& + \frac{\bar{w}^2}{\alpha} \left[D_k D_k^T - \delta v_3 D_k \begin{pmatrix} bc^T D \\ 0 \end{pmatrix}^T - \delta v_3 \begin{pmatrix} bc^T D \\ 0 \end{pmatrix} D_k^T \right] = 0.
\end{aligned}$$

Почленно вычитая из полученного соотношения уравнение (12), приходим к уравнению

$$(П.3) \quad \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2} I \right) P' + P' \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2} I \right)^T + \\ + \{\mathcal{A}, v\} P + P \{\mathcal{A}, v\}^T - v_3 \frac{\bar{w}^2}{\alpha} \left[D_k \begin{pmatrix} bc^T D \\ 0 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} bc^T D \\ 0 \end{pmatrix} D_k^T \right] = 0.$$

Аналогично, $Y = Y(k)$ есть решение уравнения Ляпунова (15); запишем его в приращениях по направлению v :

$$\left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k + \delta v\} + \frac{\alpha}{2} I \right)^T (Y + \delta Y') + \\ + (Y + \delta Y') \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k + \delta v\} + \frac{\alpha}{2} I \right) + \mathcal{C}^T \mathcal{C} = 0$$

или

$$\left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2} I \right)^T (Y + \delta Y') + (Y + \delta Y') \left(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\} + \frac{\alpha}{2} I \right) + \\ + \delta (\{\mathcal{A}, v\}^T Y + Y \{\mathcal{A}, v\}) + \mathcal{C}^T \mathcal{C} = 0.$$

Почленно вычитая из полученного соотношения уравнение (15), приходим к соотношению (17).

Из (П.3) и (17) имеем соотношение

$$\text{tr } P' Y \{\mathcal{A}, v\} = \text{tr } Y' \left[\{\mathcal{A}, v\} P - v_3 \frac{\bar{w}^2}{\alpha} D_k \begin{pmatrix} bc^T D \\ 0 \end{pmatrix}^T \right] = \\ = \text{tr } P Y' \{\mathcal{A}, v\} - v_3 \frac{\bar{w}^2}{\alpha} \text{tr } Y' D_k \begin{pmatrix} bc^T D \\ 0 \end{pmatrix}^T,$$

так что

$$\frac{1}{2} (f''(k) v, v) = \\ = \text{tr } (P Y' + P' Y) \{\mathcal{A}, v\} + \rho(v, v) - \frac{\bar{w}^2}{\alpha} v_3 \text{tr} \left[Y' D_k - v_3 Y \begin{pmatrix} bc^T D \\ 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} bc^T D \\ 0 \end{pmatrix}^T = \\ = 2 \text{tr } P Y' \{\mathcal{A}, v\} + \rho(v, v) - v_3 \frac{\bar{w}^2}{\alpha} \text{tr } Y' D_k \begin{pmatrix} bc^T D \\ 0 \end{pmatrix}^T - \\ - \frac{\bar{w}^2}{\alpha} v_3 \text{tr} \left[Y' D_k - v_3 Y \begin{pmatrix} bc^T D \\ 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} bc^T D \\ 0 \end{pmatrix}^T = \\ = 2 \text{tr } P Y' \{\mathcal{A}, v\} + \rho(v, v) - \frac{\bar{w}^2}{\alpha} v_3 \text{tr} \left[2 Y' D_k - v_3 Y \begin{pmatrix} bc^T D \\ 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} bc^T D \\ 0 \end{pmatrix}^T.$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Рассмотрим последовательность стабилизирующих регуляторов $\{k^{(j)}\} \in \mathcal{S}$ такую, что $k^{(j)} \rightarrow k \in \partial\mathcal{S}$, т.е. $\sigma(A_k) = 0$. Это означает, что для любого $\epsilon > 0$ найдется число $N = N(\epsilon)$ такое, что неравенство

$$|\sigma(A_{k^{(j)}}) - \sigma(A_k)| = \sigma(A_{k^{(j)}}) < \epsilon$$

справедливо для всех $j \geq N(\epsilon)$.

Пусть P_j – решение уравнения Ляпунова (12), ассоциированного с регулятором $k^{(j)}$:

$$\left(A_{k^{(j)}} + \frac{\alpha_j}{2}I\right)P_j + P_j\left(A_{k^{(j)}} + \frac{\alpha_j}{2}I\right)^T + \frac{\bar{w}^2}{\alpha_j}(D_{k^{(j)}}D_{k^{(j)}}^T + \delta I) = 0,$$

а Y_j – решение двойственного к нему уравнения Ляпунова

$$\left(A_{k^{(j)}} + \frac{\alpha_j}{2}I\right)^T Y_j + Y_j \left(A_{k^{(j)}} + \frac{\alpha_j}{2}I\right) + C^T C + \varepsilon I = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(k^{(j)}) &= \text{tr } P_j(C^T C + \varepsilon I) + \rho \|k^{(j)}\|^2 \geq \\ &\geq \text{tr } P_j(C^T C + \varepsilon I) = \text{tr } Y_j \frac{\bar{w}^2}{\alpha_j} (D_{k^{(j)}} D_{k^{(j)}}^T + \delta I) \geq \\ &\geq \frac{\bar{w}^2}{\alpha_j} \lambda_{\min}(Y_j) \text{tr } (D_{k^{(j)}} D_{k^{(j)}}^T + \delta I) \geq \frac{\bar{w}^2}{\alpha_j} \frac{\lambda_{\min}(C^T C + \varepsilon I)}{2 \|A_{k^{(j)}} + \frac{\alpha_j}{2}I\|} \|D_{k^{(j)}}\|_F^2 \geq \\ &\geq \frac{\bar{w}^2}{4\sigma(A_{k^{(j)}})} \frac{\varepsilon}{\|A_{k^{(j)}}\| + \sigma(A_{k^{(j)}})} \|D_{k^{(j)}}\|_F^2 \geq \frac{\bar{w}^2}{4\epsilon} \frac{\varepsilon}{\|A_{k^{(j)}}\| + \epsilon} \|D_{k^{(j)}}\|_F^2 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} +\infty, \end{aligned}$$

поскольку

$$0 < \alpha_j < 2\sigma(A_{k^{(j)}})$$

и

$$\|A_{k^{(j)}} + \frac{\alpha_j}{2}I\| \leq \|A_{k^{(j)}}\| + \frac{\alpha_j}{2} \leq \|A_{k^{(j)}}\| + \sigma(A_{k^{(j)}}).$$

С другой стороны,

$$f(k^{(j)}) = \text{tr } P_j(C^T C + \varepsilon I) + \rho \|k^{(j)}\|^2 \geq \rho \|k^{(j)}\|^2 \xrightarrow{\|k^{(j)}\| \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 4. Установим несколько полезных для дальнейшего оценок. Прежде всего,

$$(П.4) \quad \|\{\mathcal{A}, v\}\| = \left\| \sum_i \mathcal{A}_i v_i \right\| \leq \sum_i \|\mathcal{A}_i\| |v_i| \leq \max_i \|\mathcal{A}_i\| \|v\|_1 \leq \sqrt{3} \max_i \|\mathcal{A}_i\| \|v\|,$$

поскольку $\|a\|_1 \leq \sqrt{n}\|a\|$ для $a \in \mathbb{R}^n$.

С учетом (П.4) оценка для α устанавливается следующим образом:

$$(П.5) \quad \alpha < 2\sigma(\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\}) \leq 2\|\mathcal{A}_0 + \{\mathcal{A}, k\}\| \leq 2(\|\mathcal{A}_0\| + \|\{\mathcal{A}, k\}\|) \leq \\ \leq 2(\|\mathcal{A}_0\| + \sqrt{3} \max_i \|\mathcal{A}_i\| \|k\|) \leq 2\left(\|\mathcal{A}_0\| + \max_i \|\mathcal{A}_i\| \sqrt{\frac{3}{\rho} f(k_0)}\right),$$

так как

$$\|k\| \leq \sqrt{\frac{f(k)}{\rho}} \leq \sqrt{\frac{f(k_0)}{\rho}}.$$

Наконец,

$$(П.6) \quad \|D_k\|_F = \left\| \begin{pmatrix} (I - k_3 bc^T)D \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_F = \|(I - k_3 bc^T)D\|_F \leq \|I - k_3 bc^T\| \|D\|_F \leq \\ \leq (1 + |k_3| \|bc^T\|) \|D\|_F \leq \left(1 + \sqrt{\frac{f(k_0)}{\rho}} \|bc^T\|\right) \|D\|_F.$$

Применяя к (16) лемму П.2, имеем

$$(П.7) \quad \frac{1}{2} \|f''(k)\| = \frac{1}{2} \sup_{\|v\|=1} (f''(k)v, v) \leq 2 \sup_{\|v\|=1} |\operatorname{tr} PY' \{\mathcal{A}, v\}| + \rho \sup_{\|v\|=1} |(v, v)| + \\ + \frac{\bar{w}^2}{\alpha} \sup_{\|v\|=1} \left| v_3 \operatorname{tr} \left[2Y'D_k - v_3 Y \begin{pmatrix} bc^T D \\ 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} bc^T D \\ 0 \end{pmatrix}^T \right| \leq \\ \leq \|P\|_F \|Y'\|_F \sup_{\|v\|=1} \|\{\mathcal{A}, v\}\| + \rho + \bar{w}^2 \sup_{\|v\|=1} |v_3| \sup_{\|v\|=1} \left\| \frac{2}{\alpha} Y'D_k - \frac{v_3}{\alpha} Y \begin{pmatrix} bc^T D \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_F \times \\ \times \left\| \begin{pmatrix} bc^T D \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_F \leq \sqrt{3} \|P\|_F \|Y'\|_F \max_i \|\mathcal{A}_i\| + \rho + \\ + \bar{w}^2 \left(2 \frac{1}{\alpha} \|Y'D_k\|_F + \sup_{\|v\|=1} |v_3| \frac{1}{\alpha} \left\| Y \begin{pmatrix} bc^T D \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_F \right) \|bc^T D\|_F \leq \\ \leq \sqrt{3} \underbrace{\|P\|_F}_{(П.8)} \underbrace{\|Y'\|_F}_{(П.12)} \max_i \|\mathcal{A}_i\| + \rho + \\ + \bar{w}^2 \left(2 \frac{1}{\alpha} \underbrace{\|Y'\|}_{(П.11)} \underbrace{\|D_k\|_F}_{(П.6)} + \frac{1}{\alpha} \underbrace{\|Y\|}_{(П.9)} \|bc^T D\|_F \right) \|bc^T D\|_F.$$

Имеем следующую оценку для $\|P\|$:

$$\varepsilon \|P\| \leq \lambda_{\min}(\mathcal{C}^T \mathcal{C} + \varepsilon I) \|P\| \leq \operatorname{tr} P(\mathcal{C}^T \mathcal{C} + \varepsilon I) = f(k) - \rho \|k\|^2 \leq f(k) \leq f(k_0),$$

откуда

$$\|P\| \leq \frac{f(k_0)}{\varepsilon}$$

и

$$(II.8) \quad \|P\|_F \leq \sqrt{n+1} \frac{f(k_0)}{\varepsilon}.$$

Далее, из уравнений (18) и (15) в силу леммы II.1

$$\text{tr } Y(D_k D_k^T + \delta I) = \text{tr } P(\mathcal{C}^T \mathcal{C} + \varepsilon I),$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{\bar{w}^2 \delta}{\alpha} \|Y\| &\leq \frac{\bar{w}^2}{\alpha} \lambda_{\min}(D_k D_k^T + \delta I) \text{tr } Y \leq \text{tr } Y \frac{\bar{w}^2}{\alpha} (D_k D_k^T + \delta I) = \\ &= \text{tr } P(\mathcal{C}^T \mathcal{C} + \varepsilon I) = f(k) - \rho \|k\|^2 \leq f(k) \leq f(k_0), \end{aligned}$$

так что

$$(II.9) \quad \frac{1}{\alpha} \|Y\| \leq \frac{f(k_0)}{\bar{w}^2 \delta}$$

и с учетом (II.5)

$$(II.10) \quad \|Y\| \leq \frac{\alpha}{\bar{w}^2 \delta} f(k_0) \leq \frac{2f(k_0)}{\bar{w}^2 \delta} \left(\|\mathcal{A}_0\| + \max_i \|\mathcal{A}_i\| \sqrt{\frac{3}{\rho} f(k_0)} \right).$$

При этом, с учетом леммы II.2 и оценок (II.4), (II.10) для $\|v\| = 1$ имеем

$$\begin{aligned} &\lambda_{\max}(\{\mathcal{A}, v\}^T Y + Y \{\mathcal{A}, v\}) = \\ &= \|\{\mathcal{A}, v\}^T Y + Y \{\mathcal{A}, v\}\| \leq \|Y^2 + \{\mathcal{A}, v\}^T \{\mathcal{A}, v\}\| \leq \\ &\leq \|Y\|^2 + \|\{\mathcal{A}, v\}\|^2 \leq \frac{4f^2(k_0)}{\bar{w}^4 \delta^2} \left(\|\mathcal{A}_0\| + \max_i \|\mathcal{A}_i\| \sqrt{\frac{3}{\rho} f(k_0)} \right)^2 + 3 \max_i \|\mathcal{A}_i\|^2. \end{aligned}$$

Из уравнений (18) и (17) в силу леммы II.1 имеем

$$\text{tr } Y' \frac{\bar{w}^2}{\alpha} (D_k D_k^T + \delta I) = \text{tr } P(\{\mathcal{A}, v\}^T Y + Y \{\mathcal{A}, v\}),$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{\bar{w}^2 \delta}{\alpha} \|Y'\| &\leq \frac{\bar{w}^2}{\alpha} \lambda_{\min}(D_k D_k^T + \delta I) \text{tr } Y' \leq \text{tr } Y' \frac{\bar{w}^2}{\alpha} (D_k D_k^T + \delta I) = \\ &= \text{tr } P(\{\mathcal{A}, v\}^T Y + Y \{\mathcal{A}, v\}) \leq \lambda_{\max}(\{\mathcal{A}, v\}^T Y + Y \{\mathcal{A}, v\}) \text{tr } P \leq \\ &\leq \left[\frac{4f^2(k_0)}{\bar{w}^4 \delta^2} \left(\|\mathcal{A}_0\| + \max_i \|\mathcal{A}_i\| \sqrt{\frac{3}{\rho} f(k_0)} \right)^2 + 3 \max_i \|\mathcal{A}_i\|^2 \right] (n+1) \|P\| \leq \\ &\leq \frac{(n+1)f(k_0)}{\varepsilon} \left[\frac{4f^2(k_0)}{\bar{w}^4 \delta^2} \left(\|\mathcal{A}_0\| + \max_i \|\mathcal{A}_i\| \sqrt{\frac{3}{\rho} f(k_0)} \right)^2 + 3 \max_i \|\mathcal{A}_i\|^2 \right], \end{aligned}$$

так что

$$(П.11) \quad \frac{1}{\alpha} \|Y'\| \leq \frac{(n+1)f(k_0)}{\bar{w}^2 \varepsilon \delta} \left[\frac{4f^2(k_0)}{\bar{w}^4 \delta^2} \left(\|\mathcal{A}_0\| + \max_i \|\mathcal{A}_i\| \sqrt{\frac{3}{\rho} f(k_0)} \right)^2 + 3 \max_i \|\mathcal{A}_i\|^2 \right].$$

Соответственно с учетом (П.5)

$$\begin{aligned} \|Y'\| &\leq \alpha \frac{(n+1)f(k_0)}{\bar{w}^2 \varepsilon \delta} \left[\frac{4f^2(k_0)}{\bar{w}^4 \delta^2} \left(\|\mathcal{A}_0\| + \max_i \|\mathcal{A}_i\| \sqrt{\frac{3}{\rho} f(k_0)} \right)^2 + 3 \max_i \|\mathcal{A}_i\|^2 \right] \leq \\ &\leq \frac{2(n+1)f(k_0)}{\bar{w}^2 \varepsilon \delta} \left[\frac{4f^2(k_0)}{\bar{w}^4 \delta^2} \left(\|\mathcal{A}_0\| + \max_i \|\mathcal{A}_i\| \sqrt{\frac{3}{\rho} f(k_0)} \right)^2 + 3 \max_i \|\mathcal{A}_i\|^2 \right] \times \\ &\quad \times \left(\|\mathcal{A}_0\| + \max_i \|\mathcal{A}_i\| \sqrt{\frac{3}{\rho} f(k_0)} \right) \end{aligned}$$

и

$$(П.12) \quad \begin{aligned} \|Y'\|_F &\leq \sqrt{n+1} \|Y'\| \leq \\ &\leq \frac{2(n+1)^{3/2} f(k_0)}{\bar{w}^2 \varepsilon \delta} \left[\frac{4f^2(k_0)}{\bar{w}^4 \delta^2} \left(\|\mathcal{A}_0\| + \max_i \|\mathcal{A}_i\| \sqrt{\frac{3}{\rho} f(k_0)} \right)^2 + 3 \max_i \|\mathcal{A}_i\|^2 \right] \times \\ &\quad \times \left(\|\mathcal{A}_0\| + \max_i \|\mathcal{A}_i\| \sqrt{\frac{3}{\rho} f(k_0)} \right). \end{aligned}$$

Возвращаясь к (П.7), с учетом полученных оценок окончательно приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|f''(k)\| &\leq \sqrt{3(n+1)} \frac{f(k_0)}{\varepsilon} \frac{2(n+1)^{3/2} f(k_0)}{\bar{w}^2 \varepsilon \delta} \times \\ &\times \left[\frac{4f^2(k_0)}{\bar{w}^4 \delta^2} \left(\|\mathcal{A}_0\| + \max_i \|\mathcal{A}_i\| \sqrt{\frac{3}{\rho} f(k_0)} \right)^2 + 3 \max_i \|\mathcal{A}_i\|^2 \right] \times \\ &\quad \times \left(\|\mathcal{A}_0\| + \max_i \|\mathcal{A}_i\| \sqrt{\frac{3}{\rho} f(k_0)} \right) \max_i \|\mathcal{A}_i\| + \rho + \\ &+ \bar{w}^2 \left(2 \frac{(n+1)f(k_0)}{\bar{w}^2 \varepsilon \delta} \left[\frac{4f^2(k_0)}{\bar{w}^4 \delta^2} \left(\|\mathcal{A}_0\| + \max_i \|\mathcal{A}_i\| \sqrt{\frac{3}{\rho} f(k_0)} \right)^2 + 3 \max_i \|\mathcal{A}_i\|^2 \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(1 + \sqrt{\frac{f(k_0)}{\rho}} \|bc^T\| \right) \|D\|_F + \frac{f(k_0)}{\bar{w}^2 \delta} \|bc^T D\|_F \right) \|bc^T D\|_F. \end{aligned}$$

Лемма 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. The IFAC Newsletter. No. 2. April, 2019.

https://www.ifac-control.org/newsletter_archive/IFAC_Newsletter_2019_2_April.pdf

2. *Krohling R.A., Rey J.P.* Design of Optimal Disturbance Rejection PID Controllers Using Genetic Algorithms // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. 2001. V. 5. No. 1. P. 78–82.
3. *Kim D.H., Cho J.H.* Robust Tuning for Disturbance Rejection of PID Controller Using Evolutionary Algorithm // Proc. 2004 IEEE Annual Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society (NAFIPS'04). Banff, Canada, 2004. V. 1. P. 248–253.
4. *Han J.* From PID to Active Disturbance Rejection Control // IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2009. V. 56. No. 3. P. 900–906.
5. *Teppa-Garran P.A., Garcia G.* Optimal Tuning of PI/PID/PID⁽ⁿ⁻¹⁾ Controllers in Active Disturbance Rejection Control // J. Control Engineer. Appl. Inform. 2013. V. 15. No. 4. P. 26–36.
6. *Vrančić D., Strmčnik S., Juričić D.* A Magnitude Optimum Multiple Integration Tuning Method for Filtered PID Controller // Automatica. 2001. V. 37. Iss. 9. P. 1473–1479.
7. *Vrančić D., Strmčnik S., Kocijan J., de Moura Oliveira P.B.* Improving Disturbance Rejection of PID Controllers by Means of the Magnitude Optimum Method // ISA Transactions. 2010. V. 49. No. 1. P. 47–56.
8. *Rivera D.E., Morari M., Skogestad S.* Internal Model Control: PID Controller Design // Industrial and Engineering Chemistry Process Design and Development. 1986. V. 25. No. 1. P. 252–265.
9. *Saxena S., Hote Y.V.* Simple Approach to Design PID Controller via Internal Model Control // Arab. J. Sci. Engineer. 2016. V. 41. P. 3473–3489.
10. *Zhou C., Shen Y.* A PID Control Method Based on Internal Model Control to Suppress Vibration of the Transmission Chain of Wind Power Generation System // Energies. 2022. V. 15. No. 16. P. 5919.
11. *Borase R.P., Maghade D.K., Sondkar S.Y., Pawar S.N.* A Review of PID Control, Tuning Methods and Applications // Int. J. Dynam. Control. 2021. V. 9. P. 818–827.
12. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В.* Синтез статического регулятора для подавления внешних возмущений как задача оптимизации // АиТ. 2021. № 9. С. 86–115.
Polyak B.T., Khlebnikov M.V. Static Controller Synthesis for Peak-to-Peak Gain Minimization as an Optimization Problem // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 9. P. 1530–1553.
13. *Fatkhullin I., Polyak B.* Optimizing Static Linear Feedback: Gradient Method // SIAM J. Control Optimiz. 2021. V. 59. Iss. 5. P. 3887–3911.
14. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В.* Новые критерии настройки ПИД-регуляторов // АиТ. 2022. № 11. С. 62–82.
Polyak B.T., Khlebnikov M.V. New Criteria for Tuning PID Controllers // Autom. Remote Control. 2022. V. 83. No. 11. P. 1724–1741.
15. *Хлебников М.В.* Синтез ПИ-регулятора для подавления внешних возмущений // АиТ. 2023. № 8. С. 3–23.
Khlebnikov M.V. PI Controller Design for Suppressing Exogenous Disturbances // Autom. Remote Control. 2023. V. 84. No. 8. P. 901–917.
16. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.

17. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
18. Чурюлов А.Н., Гессен А.В. Исследование линейных матричных неравенств. Путеводитель по программным пакетам. СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, 2004.
19. *Frادkov A.* Passification of Non-square Linear Systems and Feedback Yakubovich-Kalman-Popov Lemma // Eur. J. Control. 2003. V. 9. Iss. 6. P. 577–586.
20. *Toker O., Ozbay H.* On the NP-hardness of Solving Bilinear Matrix Inequalities and Simultaneous Stabilization with Static Output Feedback // Proc. 1995 American Control Conference (ACC'95). Seattle, USA, June 21–23, 1995. V. 4. P. 2525–2526.
21. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. 2-е изд. М.: УРСС, 2014.
22. *Åström K.J., Häggglund T.* Benchmark Systems for PID Control // IFAC Proceedings Volumes. 2000. V. 33. Iss. 4. P. 165–166.
23. *Grant M., Boyd S.* CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming, version 2.1. URL <http://cvxr.com/cvx>
24. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Л. Фрадковым.

Поступила в редакцию 06.05.2025

После доработки 23.07.2025

Принята к публикации 15.08.2025