

© 2025 г. Д.Н. ИБРАГИМОВ, канд. физ.-мат. наук (rikk.dan@gmail.com)
(Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)),
К.А. ЦАРЬКОВ, канд. физ.-мат. наук (k6472@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ ОБЩЕГО ВИДА

Построена программно реализуемая численная процедура решения задачи быстрогодействия для линейных дискретных систем с произвольными переменными матрицами системы и выпуклыми множествами геометрических ограничений на управление. Доказана сходимость выстраиваемой алгоритмом последовательности процессов управления к решению задачи. Эффективность продемонстрирована на ряде примеров.

Ключевые слова: задача быстрогодействия, линейные дискретные системы, последовательное глобальное улучшение, метод Кротова.

DOI: 10.31857/S0005231025110018

1. Введение

Задача быстрогодействия представляет собой одну из классических проблем теории оптимального управления. В наибольшей общности она ставится как задача перевода заданной динамической системы из фиксированного начального состояния в некоторое известное множество в фазовом пространстве (целевую область) за наименьшее возможное время. При этом сама система может функционировать как в непрерывном, так и в дискретном времени, может быть линейной или нелинейной, а в качестве целевой области может выступать как заданная гладкая поверхность, так и одноточечное множество (синглтон). В настоящей работе под задачей быстрогодействия будем понимать задачу перевода линейной динамической системы, действующей в дискретном времени, из заданного начального состояния в начало координат за наименьшее возможное число шагов. За исключением некоторых специальных частных случаев основным инструментом исследования задач такого рода всегда был и остается метод прямого перебора моментов времени возможного окончания переходного процесса и непосредственного решения получающихся при этом конечномерных задач терминальной стабилизации. В силу этих причин непосредственно задаче быстрогодействия в указанном выше смысле посвящено сравнительно небольшое число работ. Среди таковых выделим достаточно общие рассуждения в [1–3], а также продолжающие их [4–8].

В настоящей статье разрабатывается принципиально отличный алгоритм решения задачи быстродействия, в основу которого положен метод построения последовательных глобальных улучшений процессов управления, предложенный в работах В.Ф. Кротова [9, 10]. Этот метод также применяется к задачам терминальной стабилизации заданной линейной дискретной системы при различных фиксированных моментах времени окончания переходного процесса. Однако в отличие от классического подхода указанные задачи не предполагается решать полностью. Улучшения строятся до тех пор, пока не будет либо найден оптимальный по быстродействию процесс, либо доказана невозможность попадания в начало координат за заданное число шагов. В этих целях строится оценка оптимального значения функционала качества по текущему приближению. Аналогичный подход может быть реализован и при использовании других численных методов условной конечномерной оптимизации и улучшения, в том числе разработанных непосредственно для исследования дискретных задач оптимального управления. К последним относятся методы из [11, гл. 6] и некоторые методы из [12, часть 2 и часть 4]. Отличительной особенностью метода Кротова является скорость улучшения, а также то обстоятельство, что в рамках рассматриваемых задач терминальной стабилизации линейных дискретных систем для него удается установить наличие ключевого свойства строгого улучшения неоптимальных процессов. Общие результаты о нестрогом улучшении в задачах оптимального управления для дискретных и непрерывных систем были получены В.Ф. Кротовым. Некоторые частные результаты о строгом улучшении, близкие к обсуждаемым здесь, но, в основном, в случае непрерывных систем, излагаются в [13].

Настоящая работа непосредственно продолжает исследования, начатые в [14], где был предложен подход к построению двусторонних оценок времени быстродействия для стационарных линейных систем с невырожденной диагонализированной матрицей системы, а также разработан численный метод улучшения верхней оценки и построения гарантирующего процесса. Здесь результаты, полученные в [14], развиваются в следующих направлениях. Во-первых, будет показано, что итерационная процедура из [14] позволяет не только улучшать верхние оценки времени быстродействия и строить гарантирующие процессы, но и в действительности способна без каких-либо дополнительных предположений приближенно находить оптимальные управления в соответствующей задаче быстродействия. Во-вторых, будет предложена новая процедура, позволяющая решать задачу быстродействия и строить оптимальные процессы в отсутствие каких бы то ни было известных оценок времени быстродействия. В-третьих, все результаты будут обобщены на случай нестационарных линейных дискретных систем общего вида. В частности, все они применимы к стационарным системам с вырожденной матрицей.

2. Постановка задачи

Рассмотрим линейную нестационарную систему с дискретным временем

$$(1) \quad x(k+1) = A(k)x(k) + u(k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – состояние системы, $u(k) \in U(k)$ – управление, $U(k)$ – выпуклые компактные множества в $\mathbb{R}^n$, содержащие начало координат, $A(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – произвольные заданные матрицы. Начальное условие для системы (1) фиксировано:

$$(2) \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Требуется вычислить минимальное число шагов $N_{\min}$, за которое возможно перевести систему (1) из заданного начального состояния x_0 в начало координат и построить оптимальный процесс $\{x^*(k), u^*(k-1)\}_{k=1}^{N_{\min}}$, удовлетворяющий условию $x^*(N_{\min}) = 0$. Число $N_{\min}$ будем далее называть временем быстрогодействия системы (1) с начальным условием (2) и будем предполагать, что поставленная задача разрешима, т.е. $N_{\min} < \infty$.

В стационарном случае $A(k) \equiv A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $U(k) \equiv U \subset \mathbb{R}^n$ хорошо известными достаточными условиями разрешимости задачи быстрогодействия для системы (1)–(2) являются устойчивость по Шуру матрицы A и включение $0 \in \text{int}U$ или управляемость по Калману системы (1) и включение $0 \in \text{ri}U$.

3. Задача с фиксированным временем и условия оптимальности

В [14] в случае стационарных систем с невырожденной матрицей $A(k) \equiv A$ был предложен алгоритм, позволяющий при известных оценках на время быстрогодействия строить гарантирующие процессы и улучшать верхнюю оценку. При этом последовательно решается несколько задач с фиксированным временем функционирования системы. Обсудим их.

Предварительно введем следующие обозначения. Пусть $N > 0$ – некоторое фиксированное значение дискретного времени и $k = 0, \dots, N-1$ в системе (1). Положим

$$\mathcal{U}_N := \{k \mapsto u(k) : \{0, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{R}^n \mid u(k) \in U(k)\},$$

$$\mathcal{X}_N := \{k \mapsto x(k) : \{0, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{R}^n\}.$$

Множество $\mathcal{X}_N$ будем отождествлять с евклидовым пространством $\mathbb{R}^{n(N+1)}$, а элементы множества $\mathcal{U}_N$ – с соответствующими векторами евклидова пространства $\mathbb{R}^{nN}$.

Рассмотрим для системы (1)–(2) задачу

$$(3) \quad J_N(u) = \|x(N)\|^2 \rightarrow \min_{u \in \mathcal{U}_N},$$

где $x \in \mathcal{X}_N$ – решение (1)–(2) при $k = 0, \dots, N - 1$ и фиксированном $u \in \mathcal{U}_N$. Здесь и далее через $\|\cdot\|$ обозначена евклидова норма в $\mathbb{R}^n$.

Задача (3) для системы (1)–(2) удовлетворяет условиям [11, с. 124, условия 1–4], которые гарантируют [11, теорема 5.6.2], что для оптимальности управления $\hat{u} \in \mathcal{U}_N$ в этой задаче необходимо и достаточно потребовать выполнения соотношений классического дискретного принципа максимума [11, теоремы 5.3.1 и 5.6.1]. Поскольку система (1) линейна, эти соотношения сводятся к проверке N условий максимума

$$(4) \quad \langle \hat{\psi}(k+1), \hat{u}(k) \rangle = \max_{u \in U(k)} \langle \hat{\psi}(k+1), u \rangle,$$

при $k = 0, \dots, N - 1$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, а значения двойственной переменной $\hat{\psi}(k)$ однозначно определяются формулами

$$(5) \quad \hat{x}(k+1) = A(k)\hat{x}(k) + \hat{u}(k), \quad \hat{x}(0) = x_0,$$

$$(6) \quad \hat{\psi}(k) = A(k)^T \hat{\psi}(k+1), \quad \hat{\psi}(N) = -2\hat{x}(N).$$

Нетрудно видеть, что при $N \geq N_{\min}$ оптимальные управления в задаче (3) являются особыми [15], поскольку в этом случае $\hat{\psi}(k) \equiv 0$. Для дальнейшего потребуется альтернативная форма записи условий оптимальности в этой задаче, относительно которой оптимальные управления уже не будут особыми ни при каком значении N .

Теорема 1. Пусть $\hat{u} \in \mathcal{U}_N$. Тогда для оптимальности $\hat{u}$ в задаче (1)–(3) необходимо и достаточно, чтобы при $k = 0, \dots, N - 1$ выполнялись включения

$$(7) \quad \hat{u}(k) \in \text{Arg} \min_{u \in U(k)} \|\mathcal{A}_N(k+1)u + \mathcal{A}_N(k)\hat{x}(k) - \hat{\xi}(k+1)\|,$$

где

$$(8) \quad \mathcal{A}_N(k) := A(N-1) \dots A(k), \quad k = 0, \dots, N-1, \quad \mathcal{A}_N(N) := I,$$

I – единичная матрица размеров $n \times n$, а значения $\hat{x}(k)$ и $\hat{\xi}(k)$ определяются равенствами (5) и

$$(9) \quad \hat{\xi}(k) = \hat{\xi}(k+1) - \mathcal{A}_N(k+1)\hat{u}(k), \quad \hat{\xi}(N) = 0.$$

Для удобства читателя доказательства приводимых в работе утверждений отнесены в Приложение 1.

Необходимые условия в теореме 1 с точностью до замен переменных и переобозначений были получены в [14] для случая $A(k) \equiv A$, $\det A \neq 0$, $U(k) \equiv U$. Достаточные условия получены здесь впервые.

Совокупность условий (5), (7) и (9), в отличие от (4)–(6), не вырождается в случае $N \geq N_{\min}$. Так, например, при $k = N - 1$ из (7) имеем

$$\hat{u}(N-1) \in \text{Arg} \min_{u \in U(N-1)} \|A(N-1)\hat{x}(N-1) + u\|,$$

а это условие всегда содержательно и отражает геометрический смысл оптимального управления в задаче (1)–(3).

В качестве прямого следствия из теоремы 1 можно получить утверждение о том, что алгоритм, предложенный в [14], позволяет приближенно находить оптимальные процессы в задаче быстрогодействия для стационарных невырожденных линейных систем. Это усиливает теоретические результаты, представленные в указанной работе. Предлагаемый ниже алгоритм решения задачи быстрогодействия также существенно опирается на утверждение теоремы 1.

4. Теоремы об улучшении

Пусть $\hat{u} \in \mathcal{U}_N$ – некоторое произвольное управление. Зададимся целью построить новое управление $\tilde{u} \in \mathcal{U}_N$, улучшающее $\hat{u}$ в смысле значения функционала J_N в задаче (3).

Теорема 2. Пусть $\hat{u} \in \mathcal{U}_N$ – произвольное управление, а $\hat{x}, \hat{\xi} \in \mathcal{X}_N$ – соответствующие ему решения уравнений (5) и (9). Определим управление $\tilde{u} \in \mathcal{U}_N$ из условия

$$(10) \quad \tilde{u}(k) \in \text{Arg} \min_{u \in U(k)} \|\mathcal{A}_N(k+1)u + \mathcal{A}_N(k)\tilde{x}(k) - \hat{\xi}(k+1)\| \quad \forall k \in \{0, \dots, N-1\},$$

где $\mathcal{A}_N(k)$ определяется из (8), а $\tilde{x}(k)$ удовлетворяет равенствам

$$(11) \quad \tilde{x}(k+1) = A(k)\tilde{x}(k) + \tilde{u}(k), \quad \tilde{x}(0) = x_0.$$

Тогда относительно управлений $\hat{u}, \tilde{u} \in \mathcal{U}_N$ имеет место нестрогое улучшение в задаче (3), т.е.

$$J_N(\tilde{u}) \leq J_N(\hat{u}).$$

Теорема 2 с точностью до обозначений была доказана в [14] в предположениях $A(k) \equiv A$, $\det A \neq 0$, $U(k) \equiv U$, которые несущественны. Доказательство, приведенное в Приложении 1, полностью основано на конструкциях глобального улучшения В.Ф. Кротова.

Теорема 3. Пусть $\hat{u} \in \mathcal{U}_N$, $\hat{x} \in \mathcal{X}_N$ удовлетворяет уравнению (5) и для пары $(\hat{x}, \hat{u})$ выполняются условия (10), (11). Тогда равенство $J_N(\tilde{u}) = J_N(\hat{u})$ имеет место в том и только том случае, когда управление $\hat{u}$ является оптимальным в задаче (1)–(3).

Теорема 3 утверждает, что любое неоптимальное управление в задаче (1)–(3) можно строго улучшить относительно значений функционала J_N , построив новое управление по соотношениям (10), (11). Поскольку все множества $U(k)$ предполагаются компактными, эти соотношения разрешимы всегда (возможно, не единственным образом).

5. Оценка оптимального значения функционала качества

При исследовании задачи (3) в контексте исходной задачи быстрогодействия для системы (1)–(2) важно уметь достаточно точно оценить снизу оптимальное значение функционала J_N . Для этого можно использовать информацию, полученную в процессе построения улучшений. Приведем одну такую оценку.

Теорема 4. Пусть $\hat{u} \in \mathcal{U}_N$, значения $\hat{x}(k)$ и $\hat{\psi}(k)$ определены из (5) и (6), а J_N^* – оптимальное значение функционала J_N в задаче (3). Тогда

$$(12) \quad J_N^* \geq \|\hat{x}(N)\|^2 - \sum_{k=0}^{N-1} \max_{u \in U(k)} \langle \hat{\psi}(k+1), u - \hat{u}(k) \rangle.$$

Из теоремы 4 вытекает следующее: если при некотором $N > 0$ для какого-то управления $\hat{u} \in \mathcal{U}_N$ правая часть неравенства (12) оказывается строго положительной, то гарантированно имеет место $N_{\min} > N$, поскольку $J_N^* = 0$ при всех $N \geq N_{\min}$ ввиду условий $0 \in U(k)$. В частности, подставляя в (12) управление $\hat{u} = 0 \in \mathcal{U}_N$, получаем такую оценку времени быстрогодействия:

$$N_{\min} \geq \min \left\{ N \geq 0 \mid \|\mathcal{A}_N(0)x_0\|^2 + 2 \sum_{k=0}^{N-1} \min_{u \in U(k)} \langle \mathcal{A}_N(k+1)^T \mathcal{A}_N(0)x_0, u \rangle \leq 0 \right\}.$$

Следует отметить, что аналогичное (12) неравенство имеется в [11, с. 166].

6. Итерационный алгоритм решения задачи быстрогодействия

Перейдем к построению общего алгоритма решения исходной задачи быстрогодействия для системы (1)–(2). Для этого будем последовательно улучшать процессы управления в задаче (3) при значениях $N = 1, 2, \dots$, применяя результаты раздела 4, и использовать неравенство (12) для быстрой оценки теоретической возможности попадания в начало координат при текущем значении N . Исключая тривиальный случай, будем предполагать, что $N_{\min} > 0$.

Имеем следующий алгоритм:

0. Задать величину допустимой погрешности вычислений $\varepsilon > 0$, положить $N = 1$.
1. Задать/дополнить начальное приближение равенством $u^{(0)}(N-1) = 0$, положить $l = 0$ и подсчитать матрицы $\mathcal{A}_N(k) = A(N-1) \dots A(k)$, $k = 0, \dots, N-1$, матрицу $\mathcal{A}_N(N)$ задать единичной, размером $n \times n$.
2. Найти решение $\xi^{(l)}$ системы уравнений

$$\xi(k) = \xi(k+1) - \mathcal{A}_N(k+1)u^{(l)}(k), \quad \xi(N) = 0.$$

3. Для каждого $k \in \{0, \dots, N-1\}$ последовательно найти и зафиксировать некоторое решение $u^{(l+1)}(k)$ экстремальной задачи

$$\|\mathcal{A}_N(k+1)u + \mathcal{A}_N(k)x^{(l+1)}(k) - \xi^{(l)}(k+1)\| \rightarrow \min_{u \in U(k)},$$

где значения $x^{(l+1)}(k)$ вычисляются по формулам

$$x^{(l+1)}(k+1) = A(k)x^{(l+1)}(k) + u^{(l+1)}(k), \quad k = 0, \dots, N-1, \quad x^{(l+1)}(0) = x_0.$$

4. Проверить условие внешней остановки

$$\|x^{(l+1)}(N)\| < \varepsilon,$$

при выполнении закончить расчеты с ответом $N_\varepsilon = N$, $u_\varepsilon = u^{(l+1)}$.

5. Найти решение $\psi^{(l+1)}$ системы уравнений

$$\psi(k) = A(k)^T \psi(k+1), \quad k = 0, \dots, N-1, \quad \psi(N) = -2x^{(l+1)}(N).$$

6. Вычислить оценку $E_N^{(l+1)}$ возможного приближения к нулю по формуле

$$E_N^{(l+1)} = \|x^{(l+1)}(N)\|^2 - \sum_{k=0}^{N-1} \max_{u \in U(k)} \langle \psi^{(l+1)}(k+1), u - u^{(l+1)}(k) \rangle.$$

7. Проверить условие внутренней остановки

$$E_N^{(l+1)} > 0,$$

при выполнении зафиксировать найденное $u^{(l+1)}$ в качестве нового начального приближения, т.е. положить $u^{(0)}(k) = u^{(l+1)}(k)$, $k = 0, \dots, N-1$, увеличить N на единицу и перейти к шагу 1, иначе увеличить l на единицу и перейти к шагу 2.

Обозначим через $\mathcal{U}^*$ множество всех оптимальных по быстродействию управлений для системы (1)–(2). В силу сделанных предположений выполняются включения $\mathcal{U}^* \subset \mathcal{U}_{N_{\min}} \subset \mathbb{R}^{nN_{\min}}$. Напомним, что расстоянием от точки до множества в пространстве $\mathbb{R}^{nN_{\min}}$ называется величина

$$\text{dist}(z, Z) := \inf_{\zeta \in Z} \|z - \zeta\|, \quad z \in \mathbb{R}^{nN_{\min}}, \quad Z \subset \mathbb{R}^{nN_{\min}}.$$

Теорема 5. Пусть $N_{\min} < \infty$. Тогда при любом значении $\varepsilon > 0$ построенный выше алгоритм завершает свою работу через конечное число итераций с ответом N_ε , u_ε . При этом $N_\varepsilon \leq N_{\min}$, а если число $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то $N_\varepsilon = N_{\min}$. Более того, при таких значениях ε выполняется $u_\varepsilon \in \mathbb{R}^{nN_{\min}}$ и имеет место сходимость

$$\text{dist}(u_\varepsilon, \mathcal{U}^*) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Таким образом, построенный алгоритм позволяет приближенно находить решения задачи быстродействия для системы (1)–(2).

7. Обсуждение и комментарии

Для реализации предложенного алгоритма необходимо определить способ решения двух типов конечномерных выпуклых задач оптимизации на шагах 3 и 6.

Задачи на шаге 3 по существу представляют собой задачи метрического проектирования заданных векторов на заданные выпуклые компактные множества в $\mathbb{R}^n$. В качестве последних выступают множества $\mathcal{A}_N(k+1)U(k)$, где все $U(k)$ известны заранее, а линейные преобразования $\mathcal{A}_N(k+1)$ вычисляются по известным матрицам системы $A(k)$ и зависят от текущих значений k и N . Таким образом, при любых значениях k, N множество $\mathcal{A}_N(k+1)U(k)$ можно считать заранее известным. При этом зачастую в приложениях $U(k)$ являются линейными преобразованиями некоторого базового множества U (например, U – единичный шар, а $U(k)$ – эллипсоид; U – единичный куб, а $U(k)$ – зонотоп и т.д.), и в этом случае $\mathcal{A}_N(k+1)U(k)$ имеют ту же самую структуру. Для многих таких множеств задача метрического проектирования крайне широко исследована, а для ее решения разработаны различные скоростные алгоритмы [16, 17]. Важно также отметить, что погрешности вычислений, связанные с тем или иным способом приближенного решения задач на шаге 3, не накапливаются при последующих итерациях, поскольку каждый раз заново выполняется нелокальное улучшение полученной ранее (неточной) программы управления. Заметим еще, что задачи оптимизации на шаге 3 можно переписать в терминах траекторий. А именно, вместо выполнения шагов 2 и 3 для каждого $k \in \{0, \dots, N-1\}$ могут быть последовательно решены следующие оптимизационные задачи:

$$x^{(l+1)}(k+1) \in \operatorname{Arg} \min_{x \in A(k)x^{(l+1)}(k)+U(k)} \|\mathcal{A}_N(k+1)(x - x^{(l)}(k+1)) + x^{(l)}(N)\|,$$

где для $k = 0$ имеем

$$x^{(l+1)}(0) = x_0.$$

В таком случае несколько сокращается количество промежуточных вычислений, необходимых для построения улучшенной траектории. При этом соответствующие значения управления определяются равенствами

$$u^{(l+1)}(k) = x^{(l+1)}(k+1) - A(k)x^{(l+1)}(k), \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Более существенным является точное решение задач максимизации на шаге 6. Вычисление величины оценки $E_N^{(l+1)}$ с минимально возможной погрешностью важно для корректной проверки условия $E_N^{(l+1)} > 0$ на шаге 7, которое гарантирует, что текущее значение времени N строго меньше времени быстрогодействия $N_{\min}$. Наличие вычислительных погрешностей для $E_N^{(l+1)}$ может привести к тому, что время быстрогодействия будет найдено неверно даже в том случае, когда величина $\varepsilon > 0$ достаточно мала. В связи с этим актуально использование опорных функций ко множествам $U(k)$, которые могут

быть определены заранее, поскольку структура всех $U(k)$ предполагается известной. При таком подходе вместо решения задач максимизации линейной функции на выпуклом компактном множестве будет достаточно подсчитать значения известных опорных функций в заданных точках. Последнее позволяет повысить точность вычислений и заодно сократить общее время работы.

Предложенный в разделе 6 алгоритм может быть реализован в любой программной среде на произвольном языке программирования. Для демонстрации результатов была выполнена реализация в виде кода на свободно распространяемом высокоуровневом языке Python3. Для численного решения экстремальных задач на шагах 3 и 6 была использована обособленная библиотека выпуклой оптимизации *cvxpy* и методы *cvxpy.SCS* и *cvxpy.CLARABEL*. Отметим, что в том случае, когда множество U является зонотопом, целесообразно использовать метод *cvxpy.CLARABEL* как на шаге 6, так и на шаге 3. Подробная документация и исходные коды указанных методов могут быть найдены на официальной интернет-странице библиотеки <https://www.cvxpy.org/>.

Листинг программы отнесен в Приложение 2. Для подачи исходных данных из нижеследующих примеров на вход программы можно использовать код в формате json, приведенный в Приложении 3.

8. Примеры

Пример 1. Рассмотрим одномерную стационарную систему

$$x(k+1) = x(k) + u(k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad x(0) = x_0 \in (2; 3]$$

с ограничением на управление $|u(k)| \leq 1$ и решим задачу быстродействия для этой системы, используя алгоритм из раздела 6.

Поскольку $n = 1$, то все экстремальные задачи на шаге 3 имеют единственное решение, при этом $\mathcal{A}_N(k) = 1$ при всех N и k . Будем считать $\varepsilon > 0$ настолько малым, что условие полной остановки на шаге 4 заменяется условием $|x^{(l+1)}(N)| = 0$.

Положим $N = 1$ и $u^{(0)}(0) = 0$. На шаге 2 имеем

$$\xi^{(0)}(0) = \xi^{(0)}(1) = 0.$$

На шаге 3 находим

$$u^{(1)}(0) = \arg \min_{u \in [-1; 1]} |u + x_0| = -1, \quad x^{(1)}(1) = x_0 - 1 \in (1; 2].$$

Проверка на шаге 4 показывает, что $|x^{(1)}(1)| > 0$, поэтому на шаге 5 получаем

$$\psi^{(1)}(0) = \psi^{(1)}(1) = -2x^{(1)}(1) = 2 - 2x_0 < 0.$$

Отсюда на шаге 6 вычисляем

$$E_1^{(1)} = |x^{(1)}(1)|^2 - \max_{u \in [-1; 1]} \psi^{(1)}(1)(u - u^{(1)}(0)) = |x^{(1)}(1)|^2 = (x_0 - 1)^2 > 0.$$

На шаге 7 фиксируем найденное $u^{(1)}(0) = -1$ и переходим к случаю $N = 2$.

При $N = 2$ имеем $u^{(0)}(0) = -1$, $u^{(0)}(1) = 0$. Далее последовательно получаем

$$\begin{aligned}\xi^{(0)}(1) &= \xi^{(0)}(2) = 0, \quad \xi^{(0)}(0) = 1; \\ u^{(1)}(0) &= \arg \min_{u \in [-1;1]} |u + x_0| = -1, \quad x^{(1)}(1) = x_0 - 1 \in (1; 2]; \\ u^{(1)}(1) &= \arg \min_{u \in [-1;1]} |u + x^{(1)}(1)| = -1, \quad x^{(1)}(2) = x_0 - 2 \in (0; 1].\end{aligned}$$

Поскольку $|x^{(1)}(2)| > 0$, находим

$$\begin{aligned}\psi^{(1)}(0) &= \psi^{(1)}(1) = \psi^{(1)}(2) = -2x^{(1)}(2) = 4 - 2x_0 < 0; \\ E_2^{(1)} &= |x^{(1)}(2)|^2 - \max_{u \in [-1;1]} \psi^{(1)}(1)(u - u^{(1)}(0)) - \max_{u \in [-1;1]} \psi^{(1)}(2)(u - u^{(1)}(1)) = \\ &= |x^{(1)}(2)|^2 = (x_0 - 2)^2 > 0.\end{aligned}$$

Фиксируем найденное $u^{(1)}(0) = u^{(1)}(1) = -1$ и переходим, наконец, к случаю $N = 3$.

При $N = 3$ имеем $u^{(0)}(0) = u^{(0)}(1) = -1$, $u^{(0)}(2) = 0$. Последовательно получаем

$$\begin{aligned}\xi^{(0)}(2) &= \xi^{(0)}(3) = 0, \quad \xi^{(0)}(0) = \xi^{(0)}(1) = 1; \\ u^{(1)}(0) &= \arg \min_{u \in [-1;1]} |u + x_0 - 1| = -1, \quad x^{(1)}(1) = x_0 - 1 \in (1; 2]; \\ u^{(1)}(1) &= \arg \min_{u \in [-1;1]} |u + x^{(1)}(1)| = -1, \quad x^{(1)}(2) = x_0 - 2 \in (0; 1]. \\ u^{(1)}(2) &= \arg \min_{u \in [-1;1]} |u + x^{(1)}(2)| = -x^{(1)}(2) = 2 - x_0, \quad x^{(1)}(3) = 0.\end{aligned}$$

Проверка на шаге 4 показывает, что работа алгоритма завершена и найдено решение задачи быстродействия: $N_{\min} = 3$, $u^*(0) = u^*(1) = -1$, $u^*(2) = 2 - x_0$, $x^*(1) = x_0 - 1$, $x^*(2) = x_0 - 2$, $x^*(3) = 0$.

Пример 2. Пусть в (1)–(2) $n = 2$, система стационарна и известно, что

$$A(k) \equiv \begin{pmatrix} \frac{4}{5}(\cos(1) + \sin(1)) & -\frac{8}{5}\sin(1) \\ \frac{4}{5}\sin(1) & \frac{4}{5}(\cos(1) - \sin(1)) \end{pmatrix};$$

$$U(k) \equiv \{v \in \mathbb{R}^2 \mid (2v_1 + v_2)v_1 + (v_1 + 3v_2)v_2 \leq 1\};$$

$$x_0 = (-37,79, -26,1); \quad \varepsilon = 0,0001.$$

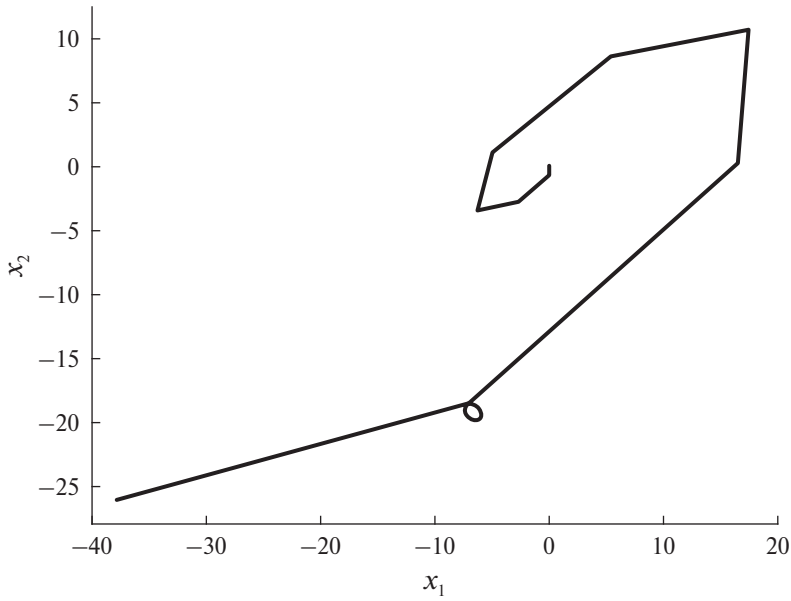


Рис. 1. Оптимальная траектория в примере 2.

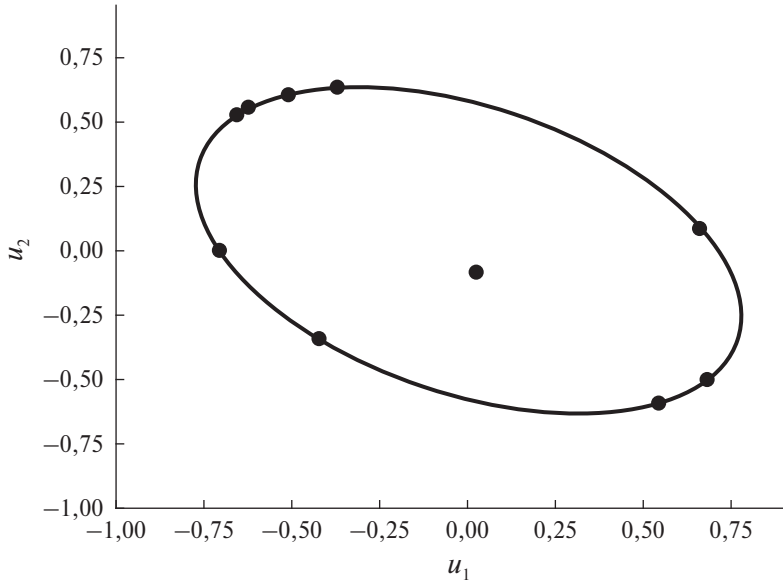


Рис. 2. Оптимальное управление в примере 2.

Применяя предложенный алгоритм, получим следующие результаты: $N_{\min} = 10$, оптимальный по быстродействию процесс имеет вид, представленный на рис. 1, 2. В табл. 1 приведены подробные сведения о сходимости алгоритма. В этой и последующих таблицах N и l соответствуют обозначениям в статье, $\|x(N)\|$ следует читать как $\|x^{(l+1)}(N)\|$, а $\sqrt{E}$ – как $\sqrt{\max\{E_N^{(l+1)}, 0\}}$.

Таблица 1. Сходимость алгоритма в примере 2

N	$l + 1$	$\ x(N)\ $	$\sqrt{E}$
1	1	19,72	19,72
2	1	16,24	16,24
3	1	20,4	20,4
4	1	8,91	8,9
5	1	4,58	4,54
6	1	7,07	7,07
7	1	2,52	2,51
8	3	0,55	0,25
9	1	0,22	0,19
10	1	10^{-5}	0

Пример 3. Пусть в системе (1)–(2) $n = 2$ и известно, что

$$A(k) \equiv \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix};$$

$$x_0 = (9,33, 0,2); \quad \varepsilon = 0,0001.$$

Предположим, что множества $U(k)$ изменяются по следующему правилу:

$$U(k) = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|v_1|, |v_2|\} \leqslant (0,9)^k \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \|v\| \leqslant \frac{3}{4} \right\}.$$

Применяя предложенный алгоритм, получим следующие результаты, представленные в табл. 2 и на рис. 3, 4.

Таблица 2. Сходимость алгоритма в примере 3

N	$l + 1$	$\ x(N)\ $	$\sqrt{E}$
1	1	8,58	8,58
2	1	7,83	7,83
3	1	7,08	7,08
4	1	6,45	6,45
5	1	5,7	5,7
...	...	...	...
28	1	0,13	0,13
29	1	0,07	0,07
30	1	0,03	0,03
31	1	10^{-6}	0

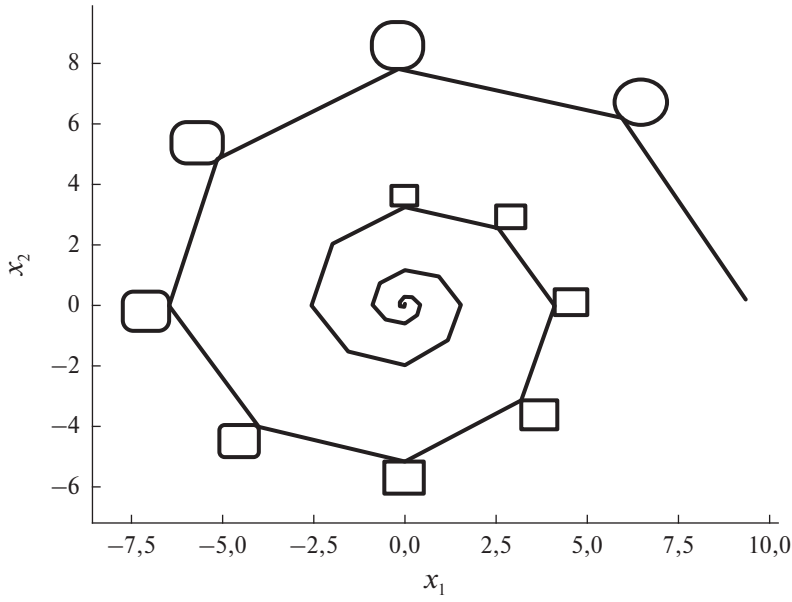


Рис. 3. Оптимальная траектория в примере 3.

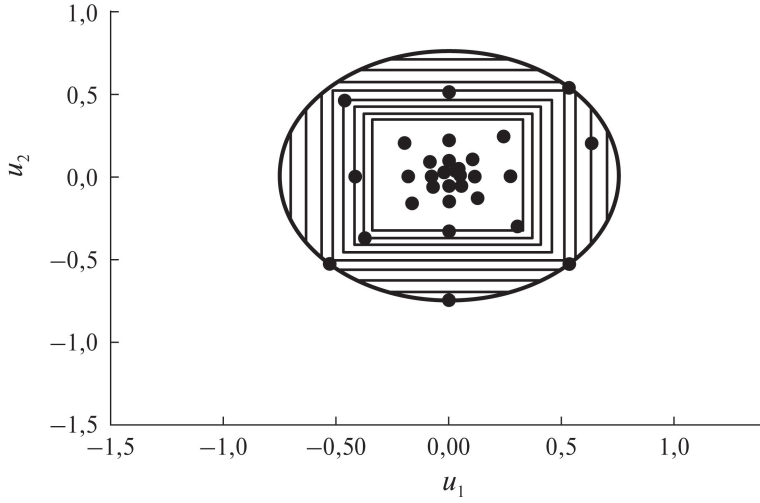


Рис. 4. Оптимальное управление в примере 3.

Пример 4. В условиях предыдущего примера предположим, что одновременно матрицы $A(k)$ и множества $U(k)$ изменяются по следующим правилам:

$$A(k) = (-1)^k \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix};$$

$$U(k) = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|v_1|, |v_2|\} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}, \|v\| \leq (0,9)^k \right\}.$$

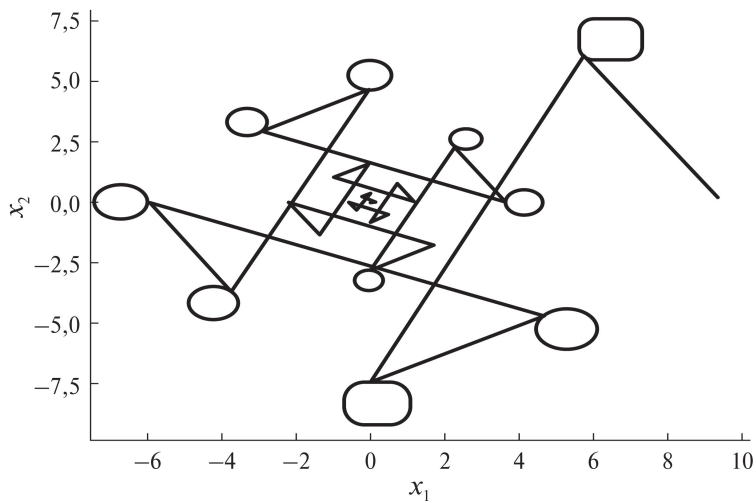


Рис. 5. Оптимальная траектория в примере 4.

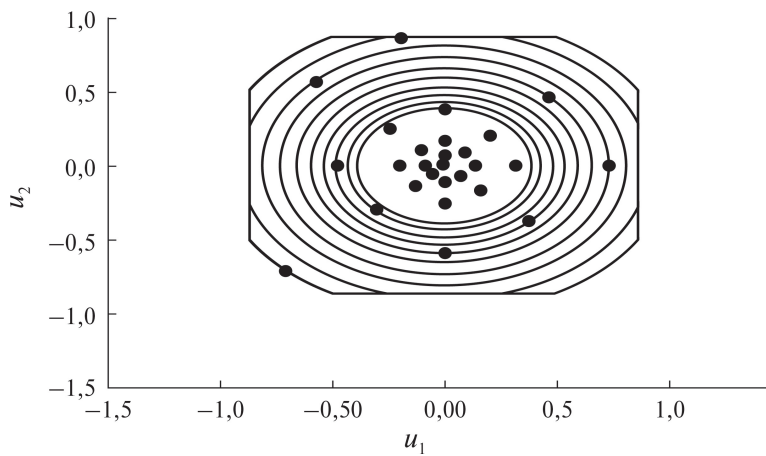


Рис. 6. Оптимальное управление в примере 4.

Значения x_0 и ε возьмем из примера 3. Применяя предложенный алгоритм, получим следующие результаты, представленные в табл. 3 и на рис. 5, 6.

Таблица 3. Сходимость алгоритма в примере 4

N	$l + 1$	$\ x(N)\ $	$\sqrt{E}$
1	1	8,33	8,33
2	1	7,46	7,46
3	1	6,65	6,65
4	1	5,92	5,92
5	1	5,27	5,27
...	...	...	...
24	1	0,16	0,16
25	1	0,08	0,08
26	1	0,1	0,1
27	1	10^{-5}	0

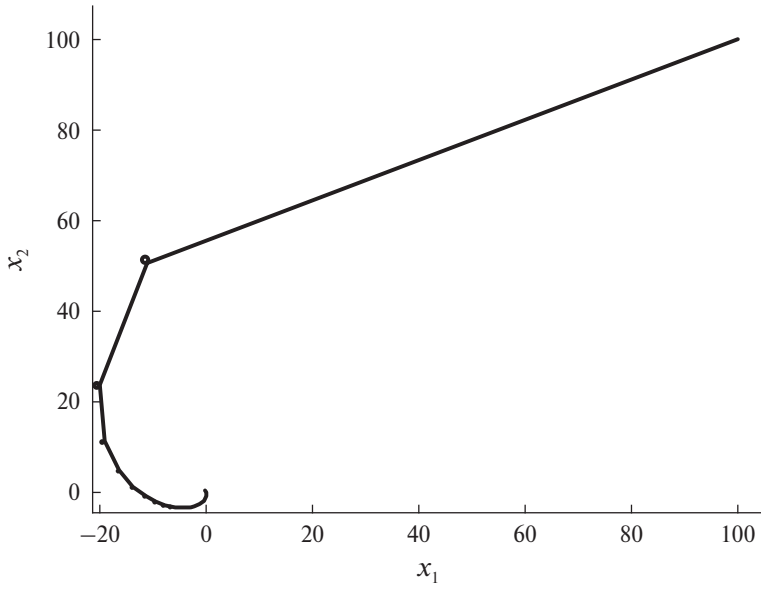


Рис. 7. Оптимальная траектория в примере 5.

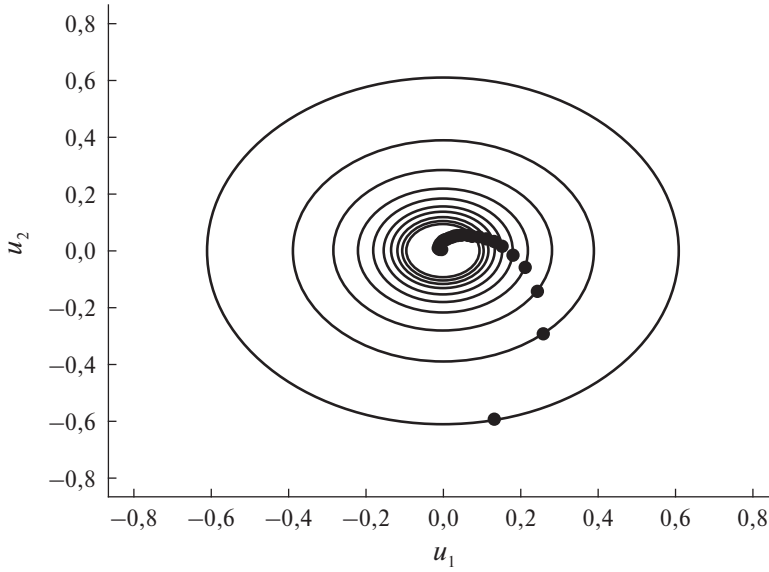


Рис. 8. Оптимальное управление в примере 5.

Пример 5. Рассмотрим следующий пример нестационарной системы (1)–(2). Пусть $n = 2$ и известно, что

$$A(k) = \begin{pmatrix} e^{-1/(k+1)} \cos(1/(k+1)) & -e^{-1/(k+1)} \sin(1/(k+1)) \\ e^{-1/(k+1)} \sin(1/(k+1)) & e^{-1/(k+1)} \cos(1/(k+1)) \end{pmatrix};$$

$$U(k) = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \mid 2v_1^2 + 2v_2^2 \leq 1 + e^{-2/(k+1)} - 2e^{-1/(k+1)} \cos(1/(k+1)) \right\};$$

$$x_0 = (100, 100); \quad \varepsilon = 0,0001.$$

Здесь матрицы $A(k)$ и множества $U(k)$ соответствуют системе вида (1)–(2), полученной путем дискретизации системы с непрерывным временем вида

$$\dot{z}(t) = A_c z(t) + w(t), \quad z(0) = x_0,$$

где $t \in [0; +\infty)$,

$$A_c = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

функция управления $w(t)$ удовлетворяет геометрическому ограничению $\|w(t)\| \leq 1$, $t \geq 0$, и является кусочно-постоянной на интервалах времени $[t_k; t_{k+1})$, $k = 0, 1, \dots$, причем $t_0 = 0$ и шаг дискретизации $\Delta_k := t_{k+1} - t_k$ не является постоянным, а изменяется по правилу $\Delta_k = 1/(k+1)$.

Применяя предложенный алгоритм, получим следующие результаты, представленные в табл. 4 и на рис. 7, 8.

Таблица 4. Сходимость алгоритма в примере 5

N	$l+1$	$\ x(N)\ $	$\sqrt{E}$
1	1	51,42	51,42
2	1	30,78	30,78
3	1	21,79	21,79
4	1	16,75	16,75
5	1	13,53	13,53
...	...	...	...
77	1	0,03	0,03
78	1	0,02	0,02
79	1	0,01	0,01
80	1	10^{-5}	0

9. Заключение

Разработанный в настоящей статье алгоритм представляет собой метод последовательного глобального улучшения программы управления в задаче быстрогодействия для линейной дискретной системы общего вида. В отсутствие дополнительных предположений о задаче и о свойствах ее решения установлена сходимость к оптимальному по быстродействию процессу. Следует подчеркнуть, что несмотря на присутствие в структуре алгоритма перебора моментов времени возможного окончания процесса, информация, полученная на более ранних этапах, не теряется при переходе к следующему моменту времени, а используется для построения нового приближения.

Примеры показывают, что существуют задачи, в которых такой подход является более эффективным в сравнении с классическим переборно-оптимизационным подходом. Однако на текущий момент не доказано, что

алгоритм будет работать настолько же эффективно в общем случае. Более того, вычислительная практика показывает, что скорость сходимости напрямую зависит как от способа программной реализации, так и от исходных данных задачи. В то же время различные дополнительные сведения, которые могут возникнуть при решении конкретных прикладных задач (например, какие-либо оценки времени быстроедействия и/или известное приближение к оптимальному процессу), естественным образом встраиваются в структуру алгоритма и могут быть использованы для увеличения скорости сходимости к решению. Теоретическое исследование свойств сходимости разработанной итерационной процедуры представляется актуальным направлением для дальнейших изысканий.

Отметим еще, что результаты настоящей работы могут быть без особого труда обобщены на более содержательный с практической точки зрения случай нестационарных линейных систем вида $x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k)$, где вектор $u(k)$ имеет размерность m , причем, вообще говоря, $m \neq n$, а матрицы $B(k) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ считаются известными.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Лемма 1. Пусть $\hat{u} \in \mathcal{U}_N$ – произвольное управление и $\hat{x} \in \mathcal{X}_N$ найдено из (5). Пусть также $\hat{\psi}, \hat{\xi} \in \mathcal{X}_N$ определены формулами (6) и (9) соответственно. Тогда при каждом $k \in \{0, \dots, N\}$ имеет место равенство

$$(П.1) \quad \hat{\psi}(k) = 2\mathcal{A}_N(k)^T \left(\hat{\xi}(k) - \mathcal{A}_N(k)\hat{x}(k) \right).$$

Доказательство. Действительно, при $k = N$ равенство (П.1) вытекает из начальных условий в правых частях формул (6) и (9), с учетом $\mathcal{A}_N(N) = I$. Предположим, что (П.1) выполняется для некоторого $k \in \{1, \dots, N\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(k-1) &\stackrel{(6)}{=} A(k-1)^T \hat{\psi}(k) \stackrel{(П.1)}{=} 2\mathcal{A}_N(k-1)^T \left(\hat{\xi}(k) - \mathcal{A}_N(k)\hat{x}(k) \right) \stackrel{(5)}{=} \\ &\stackrel{(5)}{=} 2\mathcal{A}_N(k-1)^T \left(\hat{\xi}(k) - \mathcal{A}_N(k-1)\hat{x}(k-1) - \mathcal{A}_N(k)\hat{u}(k-1) \right) \stackrel{(9)}{=} \\ &\stackrel{(9)}{=} 2\mathcal{A}_N(k-1)^T \left(\hat{\xi}(k-1) - \mathcal{A}_N(k-1)\hat{x}(k-1) \right). \end{aligned}$$

Следовательно, (П.1) имеет место при всех $k \in \{0, \dots, N\}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Поскольку соотношения (4)–(6) являются необходимым и достаточным условием оптимальности в задаче (1)–(3), то достаточно установить их эквивалентность соотношениям (5), (7) и (9). Соотношение (5) присутствует в обоих наборах. При этом для фиксированного $\hat{u} \in \mathcal{U}_N$ оно однозначно определяет траекторию $\hat{x}$, а соотношения (6) и (9) однозначно определяют значения двойственных переменных $\hat{\psi}(k)$ и $\hat{\xi}(k)$, которые связаны формулой (П.1) в силу леммы 1. Таким образом, остается проверить эквивалентность условий (4) и (7).

Условие (7) эквивалентно условию

$$\hat{u}(k) \in \text{Arg} \min_{u \in U(k)} \left(\|\mathcal{A}_N(k+1)u\|^2 + 2\langle \mathcal{A}_N(k+1)u, \mathcal{A}_N(k)\hat{x}(k) - \hat{\xi}(k+1) \rangle \right).$$

С учетом (5) это также эквивалентно

$$\begin{aligned} \hat{u}(k) \in \text{Arg} \min_{u \in U(k)} & \left(\|\mathcal{A}_N(k+1)u\|^2 + \right. \\ & \left. + 2\langle \mathcal{A}_N(k+1)u, \mathcal{A}_N(k+1)(\hat{x}(k+1) - \hat{u}(k)) - \hat{\xi}(k+1) \rangle \right), \end{aligned}$$

а в силу (П.1) эквивалентно

$$\hat{u}(k) \in \text{Arg} \min_{u \in U(k)} \left(\|\mathcal{A}_N(k+1)u\|^2 - \langle u, \hat{\psi}(k+1) + 2\mathcal{A}_N(k+1)^T \mathcal{A}_N(k+1)\hat{u}(k) \rangle \right).$$

Поэтому условие (7) эквивалентно условию

$$\begin{aligned} & \langle \hat{\psi}(k+1), \hat{u}(k) \rangle + \|\mathcal{A}_N(k+1)\hat{u}(k)\|^2 \geq \\ & \geq \langle \hat{\psi}(k+1), u \rangle + 2\langle \mathcal{A}_N(k+1)^T \mathcal{A}_N(k+1)\hat{u}(k), u \rangle - \|\mathcal{A}_N(k+1)u\|^2 \quad \forall u \in U(k) \end{aligned}$$

или, что то же самое,

$$\langle \hat{\psi}(k+1), \hat{u}(k) - u \rangle + \|\mathcal{A}_N(k+1)(\hat{u}(k) - u)\|^2 \geq 0 \quad \forall u \in U(k).$$

Ясно, что последнее выполняется, если имеет место (4). Предположим, что (4) не выполняется. Тогда существует $u' \in U(k)$, для которого

$$\langle \hat{\psi}(k+1), \hat{u}(k) - u' \rangle < 0.$$

Но тогда и для $v_\varepsilon = (1 - \varepsilon)\hat{u}(k) + \varepsilon u'$ при $\varepsilon > 0$ выполняется

$$\langle \hat{\psi}(k+1), \hat{u}(k) - v_\varepsilon \rangle = \varepsilon \langle \hat{\psi}(k+1), \hat{u}(k) - u' \rangle < 0.$$

При этом для значений $\varepsilon \in (0; 1]$ имеет место $v_\varepsilon \in U(k)$, поскольку множество $U(k)$ выпукло. Кроме того, $v_\varepsilon \rightarrow \hat{u}(k)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поскольку

$$\begin{aligned} & \langle \hat{\psi}(k+1), \hat{u}(k) - v_\varepsilon \rangle + \|\mathcal{A}_N(k+1)(\hat{u}(k) - v_\varepsilon)\|^2 = \\ & = \varepsilon \langle \hat{\psi}(k+1), \hat{u}(k) - u' \rangle + \varepsilon^2 \|\mathcal{A}_N(k+1)(\hat{u}(k) - u')\|^2 \leq \\ & \leq \varepsilon \left(\langle \hat{\psi}(k+1), \hat{u}(k) - u' \rangle + \varepsilon \|\mathcal{A}_N(k+1)\|^2 \|\hat{u}(k) - u'\|^2 \right), \end{aligned}$$

то отсюда следует, что при достаточно малом значении $\varepsilon > 0$ будет справедливо

$$\langle \hat{\psi}(k+1), \hat{u}(k) - v_\varepsilon \rangle + \|\mathcal{A}_N(k+1)(\hat{u}(k) - v_\varepsilon)\|^2 < 0,$$

где $v_\varepsilon \in U(k)$, так что условие (7) в этом случае также не выполняется. Окончательно устанавливаем, что условия (4) и (7) эквивалентны. Теорема доказана.

Для доказательства теорем 2, 3 и 5 понадобятся следующие конструкции (см. также [9, 10, 14]). Зафиксируем $\hat{u} \in \mathcal{U}_N$, определим значения $\hat{\xi}(k)$ из уравнения (9) и положим для произвольных $k \in \{0, \dots, N-1\}$ и $x, u \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(k, x) &= 2\langle \mathcal{A}_N(k)^T \hat{\xi}(k), x \rangle - \|\mathcal{A}_N(k)x\|^2, \\ \hat{R}(k, x, u) &= \hat{\varphi}(k+1, A(k)x + u) - \hat{\varphi}(k, x).\end{aligned}$$

Лемма 2. Пусть $\hat{u} \in \mathcal{U}_N$ – произвольное управление, а $\hat{x}, \hat{\xi} \in \mathcal{X}_N$ – соответствующие ему решения уравнений (5) и (9). Тогда условие (10) выполняется в том и только том случае, если

$$(П.2) \quad \hat{R}(k, \tilde{x}(k), \tilde{u}(k)) = \max_{u \in U(k)} \hat{R}(k, \tilde{x}(k), u) \quad \forall k \in \{0, \dots, N-1\},$$

где $\tilde{x}$ удовлетворяет (11). В частности, управление $\hat{u}$ оптимально в точности тогда, когда имеет место

$$(П.3) \quad \hat{R}(k, \hat{x}(k), \hat{u}(k)) = \max_{u \in U(k)} \hat{R}(k, \hat{x}(k), u) \quad \forall k \in \{0, \dots, N-1\}.$$

Доказательство. По определению имеем

$$\begin{aligned}\hat{R}(k, \tilde{x}(k), u) &= \hat{\varphi}(k+1, A(k)\tilde{x}(k) + u) - \hat{\varphi}(k, \tilde{x}(k)) = \\ &= 2\langle \mathcal{A}_N(k+1)^T \hat{\xi}(k+1), A(k)\tilde{x}(k) + u \rangle - \\ &\quad - \|\mathcal{A}_N(k+1)(A(k)\tilde{x}(k) + u)\|^2 - \hat{\varphi}(k, \tilde{x}(k)) = \\ &= -\|\mathcal{A}_N(k)\tilde{x}(k) + \mathcal{A}_N(k+1)u\|^2 + 2\langle \hat{\xi}(k+1), \mathcal{A}_N(k)\tilde{x}(k) + \mathcal{A}_N(k+1)u \rangle - \\ &\quad - \hat{\varphi}(k, \tilde{x}(k)) = \\ &= -\|\mathcal{A}_N(k)\tilde{x}(k) + \mathcal{A}_N(k+1)u - \hat{\xi}(k+1)\|^2 + \|\hat{\xi}(k+1)\|^2 - \hat{\varphi}(k, \tilde{x}(k)).\end{aligned}$$

Поскольку второе и третье из полученных слагаемых не зависят от u , приходим к первому из доказываемых утверждений. Второе утверждение непосредственно следует из первого и теоремы 1. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. В силу введенных обозначений имеем

$$\begin{aligned}J_N(\tilde{u}) &= -\hat{\varphi}(N, \tilde{x}(N)) = -\hat{\varphi}(0, x_0) + \hat{\varphi}(0, x_0) - \hat{\varphi}(N, \tilde{x}(N)) = \\ &= -\hat{\varphi}(0, x_0) - \sum_{k=0}^{N-1} \left(\hat{\varphi}(k+1, \tilde{x}(k+1)) - \hat{\varphi}(k, \tilde{x}(k)) \right) = \\ &= -\hat{\varphi}(0, x_0) - \sum_{k=0}^{N-1} \hat{R}(k, \tilde{x}(k), \tilde{u}(k))\end{aligned}$$

и, аналогично,

$$J_N(\hat{u}) = -\hat{\varphi}(0, x_0) - \sum_{k=0}^{N-1} \hat{R}(k, \hat{x}(k), \hat{u}(k)).$$

Поскольку согласно (9)

$$\begin{aligned}\hat{R}(k, x, \hat{u}(k)) &= \hat{\varphi}(k+1, A(k)x + \hat{u}(k)) - \hat{\varphi}(k, x) = \\ &= 2\langle \mathcal{A}_N(k+1)^T \hat{\xi}(k+1), A(k)x + \hat{u}(k) \rangle - \|\mathcal{A}_N(k+1)(A(k)x + \hat{u}(k))\|^2 - \\ &- 2\langle \mathcal{A}_N(k)^T \hat{\xi}(k), x \rangle + \|\mathcal{A}_N(k)x\|^2 \equiv 2\langle \mathcal{A}_N(k+1)^T \hat{\xi}(k), \hat{u}(k) \rangle + \|\mathcal{A}_N(k+1)\hat{u}(k)\|^2\end{aligned}$$

не зависит от x , то в силу (10) и леммы 2 при каждом $k \in \{0, \dots, N-1\}$ выполняется

$$(П.4) \quad \hat{R}(k, \tilde{x}(k), \tilde{u}(k)) \geq \hat{R}(k, \tilde{x}(k), \hat{u}(k)) = \hat{R}(k, \hat{x}(k), \hat{u}(k)).$$

Следовательно, $J_N(\tilde{u}) \leq J_N(\hat{u})$. Теорема доказана.

Проведем еще одно общее построение, используемое ниже при доказательстве теорем 3 и 5.

Рассмотрим вспомогательную систему

$$(П.5) \quad y(k+1) = y(k) + v(k), \quad k = 0, \dots, N-1, \quad y(0) = y_0 := \mathcal{A}_N(0)x_0$$

с геометрическими ограничениями $v(k) \in V(k) := \mathcal{A}_N(k+1)U(k)$. Ясно, что все множества $V(k)$ выпуклы, компактны и содержат начало координат. Пусть $\hat{u} \in \mathcal{U}_N$ задано. Положим в системе (П.5) $v(k) = \hat{v}(k) = \mathcal{A}_N(k+1)\hat{u}(k)$. Тогда поскольку $\hat{u}(k) \in U(k)$, то $\hat{v}(k) \in V(k)$ и решение $\hat{y}$ системы (П.5) удовлетворяет соотношению

$$\hat{y}(k) = \mathcal{A}_N(k)\hat{x}(k), \quad k = 0, \dots, N.$$

Запишем для системы (П.5) конструкции, аналогичные построенным выше. А именно, положим для $k \in \{0, \dots, N-1\}$ и $y, v \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(k, y) &= 2\langle \hat{\xi}(k), y \rangle - \|y\|^2, \\ \hat{\mathcal{R}}(k, y, v) &= \hat{\phi}(k+1, y+v) - \hat{\phi}(k, y),\end{aligned}$$

где значения $\hat{\xi}(k)$ найдены из (9). Тогда выполняется следующее соотношение:

$$(П.6) \quad \hat{\mathcal{R}}(k, \mathcal{A}_N(k)x, \mathcal{A}_N(k+1)u) = \hat{R}(k, x, u) \quad \forall x, u \in \mathbb{R}^n, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Действительно,

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{R}}(k, \mathcal{A}_N(k)x, \mathcal{A}_N(k+1)u) &= \\ &= \hat{\phi}(k+1, \mathcal{A}_N(k)x + \mathcal{A}_N(k+1)u) - \hat{\phi}(k, \mathcal{A}_N(k)x) = \\ &= 2\langle \hat{\xi}(k+1), \mathcal{A}_N(k)x + \mathcal{A}_N(k+1)u \rangle - \|(\mathcal{A}_N(k)x + \mathcal{A}_N(k+1)u)\|^2 - \\ &- 2\langle \hat{\xi}(k), \mathcal{A}_N(k)x \rangle + \|\mathcal{A}_N(k)x\|^2 = 2\langle \mathcal{A}_N(k+1)^T \hat{\xi}(k+1), A(k)x + u \rangle - \\ &- \|\mathcal{A}_N(k+1)(A(k)x + u)\|^2 - 2\langle \mathcal{A}_N(k)^T \hat{\xi}(k), x \rangle + \|\mathcal{A}_N(k)x\|^2 = \\ &= \hat{\varphi}(k+1, A(k)x + u) - \hat{\varphi}(k, x) = \hat{R}(k, x, u).\end{aligned}$$

Лемма 3. Пусть $\hat{u} \in \mathcal{U}_N$ и значения $\hat{\xi}(k)$ найдены из (9). Тогда существует единственная пара $(\tilde{y}, \tilde{v})$, удовлетворяющая условиям

$$(П.7) \quad \hat{\mathcal{R}}(k, \tilde{y}(k), \tilde{v}(k)) = \max_{v \in V(k)} \hat{\mathcal{R}}(k, \tilde{y}(k), v), \quad k = 0, \dots, N-1,$$

$$(П.8) \quad \tilde{y}(k+1) = \tilde{y}(k) + \tilde{v}(k), \quad k = 0, \dots, N-1, \quad \tilde{y}(0) = y_0.$$

При этом условие (П.7) эквивалентно условию

$$(П.9) \quad \tilde{v}(k) \in \text{Arg} \min_{v \in V(k)} \|v + \tilde{y}(k) - \hat{\xi}(k+1)\| \quad \forall k \in \{0, \dots, N-1\}$$

и для любой пары $(\tilde{x}, \tilde{u})$, удовлетворяющей соотношениям (10)–(11), выполняется

$$(П.10) \quad \begin{aligned} \tilde{y}(k) &= \mathcal{A}_N(k) \tilde{x}(k), \quad k = 0, \dots, N, \\ \tilde{v}(k) &= \mathcal{A}_N(k+1) \tilde{u}(k), \quad k = 0, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Доказательство. Рассмотрим условие (П.7). По определению имеем

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{R}}(k, \tilde{y}(k), v) &= \hat{\phi}(k+1, \tilde{y}(k) + v) - \hat{\phi}(k, \tilde{y}(k)) = \\ &= 2\langle \hat{\xi}(k+1), \tilde{y}(k) + v \rangle - \|(\tilde{y}(k) + v)\|^2 - \hat{\phi}(k, \tilde{y}(k)) = \\ &= -\|\tilde{y}(k) + v\|^2 + 2\langle \hat{\xi}(k+1), \tilde{y}(k) + v \rangle - \hat{\phi}(k, \tilde{y}(k)) = \\ &= -\|\tilde{y}(k) + v - \hat{\xi}(k+1)\|^2 + \|\hat{\xi}(k+1)\|^2 - \hat{\phi}(k, \tilde{y}(k)). \end{aligned}$$

Как и при доказательстве леммы 2, находим, что (П.7) эквивалентно (П.9). В случае $k=0$ условие (П.9) означает, что значение $\tilde{v}(0)$ находится путем решения экстремальной задачи

$$\|v + \mathcal{A}_N(0)x_0 - \hat{\xi}(1)\| \rightarrow \min_{v \in V(0)}.$$

Ясно, что для непустого выпуклого компактного множества $V(0)$ решение этой задачи существует и единственно. Кроме того, в силу (П.8) отсюда однозначно определено значение $\tilde{y}(1)$. В то же время любое $\tilde{u}(0)$, удовлетворяющее (10), является одним из решений задачи

$$\|\mathcal{A}_N(1)u + \mathcal{A}_N(0)x_0 - \hat{\xi}(1)\| \rightarrow \min_{u \in U(0)},$$

откуда $\tilde{v}(0) = \mathcal{A}_N(1)\tilde{u}(0)$, поскольку множества $U(0)$ и $V(0)$ связаны соотношением $V(0) = \mathcal{A}_N(1)U(0)$. Для $\tilde{x}(1)$ из (11) получаем $\tilde{y}(1) = \mathcal{A}_N(1)\tilde{x}(1)$, поскольку выполняется $y_0 = \mathcal{A}_N(0)x_0$.

Пусть для некоторого $k \in \{1, \dots, N-1\}$ значения $\tilde{v}(k-1)$ и $\tilde{y}(k)$ уже известны. Тогда $\tilde{v}(k)$ определяется как единственное решение задачи

$$\|v + \tilde{y}(k) - \hat{\xi}(k+1)\| \rightarrow \min_{v \in V(k)},$$

где $V(k)$ непусто, выпукло и компактно. При известных $\tilde{v}(k)$ и $\tilde{y}(k)$ значение $\tilde{y}(k+1)$ однозначно определяется из (П.8). Таким образом, пара $(\tilde{y}, \tilde{v})$, удовлетворяющая условиям (П.7) и (П.8), полностью определена единственным образом.

Проводя аналогичные приведенным выше сопоставления значений $\tilde{v}(k)$ и $\tilde{u}(k)$, $\tilde{y}(k+1)$ и $\tilde{x}(k+1)$ при $k=1, \dots, N-1$ с учетом $V(k) = \mathcal{A}_N(k+1)U(k)$, устанавливаем справедливость (П.10). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Предположим, что управление $\hat{u}$ не является оптимальным в задаче (1)–(3). Тогда в силу леммы 2 найдется $r \in \{0, \dots, N-1\}$ такое, что

$$\hat{R}(r, \hat{x}(r), \hat{u}(r)) < \max_{u \in U(r)} \hat{R}(r, \hat{x}(r), u).$$

Возьмем наименьшее такое r . Тогда в силу (П.6) для любого $k \in \{0, \dots, r-1\}$ выполняется

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{R}}(k, \hat{y}(k), \hat{v}(k)) &= \hat{R}(k, \hat{x}(k), \hat{u}(k)) = \\ &= \max_{u \in U(k)} \hat{R}(k, \hat{x}(k), u) = \max_{v \in V(k)} \hat{\mathcal{R}}(k, \hat{y}(k), v), \end{aligned}$$

где

$$\hat{y}(k) = \mathcal{A}_N(k)\hat{x}(k), \quad \hat{v}(k) = \mathcal{A}_N(k+1)\hat{u}(k).$$

Поскольку в силу леммы 3 существует единственная пара $(\tilde{y}, \tilde{v})$, удовлетворяющая условиям (П.7) и (П.8), то имеет место

$$\tilde{v}(k) = \hat{v}(k), \quad k = 0, \dots, r-1,$$

и, следовательно, $\tilde{y}(r) = \hat{y}(r)$. Отсюда в силу (П.6) и (П.10) для любой пары $(\tilde{x}, \tilde{u})$, удовлетворяющей (10)–(11), справедливо

$$\begin{aligned} \hat{R}(r, \hat{x}(r), \hat{u}(r)) &< \max_{u \in U(r)} \hat{R}(r, \hat{x}(r), u) = \max_{v \in V(r)} \hat{\mathcal{R}}(r, \hat{y}(r), v) = \\ &= \max_{v \in V(r)} \hat{\mathcal{R}}(r, \tilde{y}(r), v) = \max_{u \in U(r)} \hat{R}(r, \tilde{x}(r), u) = \hat{R}(r, \tilde{x}(r), \tilde{u}(r)). \end{aligned}$$

Возвращаясь теперь к доказательству теоремы 2, находим, что при $k=r$ неравенство в (П.4) является строгим и поэтому

$$J_N(\tilde{u}) < J_N(\hat{u}).$$

Если же управление $\hat{u}$ оптимально в задаче (1)–(3), то согласно лемме 2 и (П.6) при всех $k \in \{0, \dots, N-1\}$ имеет место

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{R}}(k, \hat{y}(k), \hat{v}(k)) &= \hat{R}(k, \hat{x}(k), \hat{u}(k)) = \\ &= \max_{u \in U(k)} \hat{R}(k, \hat{x}(k), u) = \max_{v \in V(k)} \hat{\mathcal{R}}(k, \hat{y}(k), v), \end{aligned}$$

а значит, пара $(\tilde{y}, \tilde{v}) = (\hat{y}, \hat{v})$ удовлетворяет условиям (П.7)–(П.8). Следовательно, в силу леммы 3 и (П.6) для произвольной пары $(\tilde{x}, \tilde{u})$, удовлетворяющей (10)–(11), выполняется

$$\hat{R}(k, \tilde{x}(k), \tilde{u}(k)) = \hat{\mathcal{R}}(k, \hat{y}(k), \hat{v}(k)) = \hat{R}(k, \hat{x}(k), \hat{u}(k)) \quad \forall k \in \{0, \dots, N-1\}.$$

Но тогда, возвращаясь к доказательству теоремы 2, находим, что все неравенства в (П.4) при значениях $k = 0, \dots, N-1$ выполняются в виде равенств и, следовательно, $J_N(\tilde{u}) = J_N(\hat{u})$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4. Пусть $\hat{u} \in \mathcal{U}_N$ – произвольное управление, а значения $\hat{x}(k)$ и $\hat{\psi}(k)$ определены из (5) и (6). Рассмотрим функцию $\hat{L} : \mathbb{R}^n \times \mathcal{U}_N \rightarrow \mathbb{R}$ вида

$$\hat{L}(x, u) = \|x\|^2 - 2\langle \hat{x}(N), x \rangle - \langle \hat{\psi}(0), x_0 \rangle - \sum_{k=0}^{N-1} \langle \hat{\psi}(k+1), u(k) \rangle.$$

Подчеркнем, что в этой записи x – вектор из $\mathbb{R}^n$, а u – элемент множества $\mathcal{U}_N$. Покажем, что для вектора $x(N)$, найденного из (1)–(2) при фиксированном $u \in \mathcal{U}_N$, выполняется

$$\hat{L}(x(N), u) = \|x(N)\|^2 = J_N(u).$$

Действительно, в силу (1) и (6) получаем

$$\begin{aligned} \hat{L}(x(N), u) &= \|x(N)\|^2 - 2\langle \hat{x}(N), x(N) \rangle - \langle \hat{\psi}(0), x_0 \rangle - \sum_{k=0}^{N-1} \langle \hat{\psi}(k+1), u(k) \rangle = \\ &= \|x(N)\|^2 + \langle \hat{\psi}(N), x(N) \rangle - \langle \hat{\psi}(0), x_0 \rangle - \\ &\quad - \sum_{k=0}^{N-1} \left(\langle \hat{\psi}(k+1), A(k)x(k) + u(k) \rangle - \langle \hat{\psi}(k+1), A(k)x(k) \rangle \right) = \\ &= \|x(N)\|^2 + \langle \hat{\psi}(N), x(N) \rangle - \langle \hat{\psi}(0), x_0 \rangle - \\ &\quad - \sum_{k=0}^{N-1} \left(\langle \hat{\psi}(k+1), x(k+1) \rangle - \langle \hat{\psi}(k), x(k) \rangle \right) = \|x(N)\|^2. \end{aligned}$$

В частности, для любого оптимального процесса (x^*, u^*) в задаче (3) имеет место

$$\hat{L}(x^*(N), u^*) = J_N^* := J_N(u^*).$$

С другой стороны, в точке своего глобального минимума функция $\hat{L}$ принимает значение

$$\hat{L}^* = \min_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ u \in \mathcal{U}_N}} \hat{L}(x, u) = -\|\hat{x}(N)\|^2 - \langle \hat{\psi}(0), x_0 \rangle - \sum_{k=0}^{N-1} \max_{u \in U(k)} \langle \hat{\psi}(k+1), u \rangle.$$

Следовательно, в силу (5) имеет место неравенство

$$\begin{aligned}
J_N^* = \hat{L}(x^*(N), u^*) &\geq \hat{L}^* = -\|\hat{x}(N)\|^2 - \langle \hat{\psi}(0), x_0 \rangle - \sum_{k=0}^{N-1} \max_{u \in U(k)} \langle \hat{\psi}(k+1), u \rangle = \\
&= \|\hat{x}(N)\|^2 - 2\|\hat{x}(N)\|^2 - \langle \hat{\psi}(0), x_0 \rangle - \\
&\quad - \sum_{k=0}^{N-1} \max_{u \in U(k)} \left(\langle \hat{\psi}(k+1), A(k)\hat{x}(k) + u \rangle - \langle \hat{\psi}(k+1), A(k)\hat{x}(k) \rangle \right) = \\
&= \|\hat{x}(N)\|^2 + \langle \hat{\psi}(N), \hat{x}(N) \rangle - \langle \hat{\psi}(0), x_0 \rangle - \\
&\quad - \sum_{k=0}^{N-1} \max_{u \in U(k)} \left(\langle \hat{\psi}(k+1), A(k)\hat{x}(k) + u \rangle - \langle \hat{\psi}(k), \hat{x}(k) \rangle \right) = \\
&= \|\hat{x}(N)\|^2 - \sum_{k=0}^{N-1} \max_{u \in U(k)} \left(\langle \hat{\psi}(k+1), A(k)\hat{x}(k) + u \rangle - \langle \hat{\psi}(k+1), \hat{x}(k+1) \rangle \right) = \\
&= \|\hat{x}(N)\|^2 - \sum_{k=0}^{N-1} \max_{u \in U(k)} \langle \hat{\psi}(k+1), u - \hat{u}(k) \rangle.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Сделаем еще одно построение, необходимое для доказательства теоремы 5. Пусть $N > 0$ задано. Для произвольного $\hat{u} \in \mathcal{U}_N$ определим два числа $f_I(\hat{u})$ и $f_E(\hat{u})$ следующим образом. Положим

$$f_I(\hat{u}) = \|\tilde{y}(N)\|^2,$$

где $\tilde{y}$ определяется условиями (П.9) и (П.8), в которых $\hat{\xi}$ найдено из (9). Кроме того, положим

$$f_E(\hat{u}) = \|\hat{x}(N)\|^2 - \sum_{k=0}^{N-1} \max_{u \in U(k)} \langle \hat{\psi}(k+1), u - \hat{u}(k) \rangle,$$

где $\hat{x}$ и $\hat{\psi}$ – решения уравнений (5) и (6).

Лемма 4. Функции $f_I, f_E : \mathcal{U}_N \rightarrow \mathbb{R}$ однозначно определены и непрерывны. При этом

$$f_I(\hat{u}) = J_N(\tilde{u})$$

для любого $\tilde{u}$, удовлетворяющего условиям (10)–(11), и каждое из двух равенств

$$f_I(\hat{u}) = J_N(\hat{u}) = f_E(\hat{u})$$

имеет место в точности тогда, когда $\hat{u}$ является оптимальным управлением в задаче (1)–(3).

Доказательство. Однозначная определенность функции f_I вытекает из леммы 3. Функция f_E корректно определена в силу компактности всех множеств $U(k)$.

Решение $\hat{\xi}$ уравнения (9) непрерывно зависит от параметров $\hat{u}(k)$, а решение $\tilde{y}$ уравнения (П.8) непрерывно зависит от параметров $\tilde{v}(k)$. Кроме того, при каждом $k \in \{0, \dots, N-1\}$ значение $\tilde{v}(k)$ определяется условием (П.9) как метрическая проекция точки $\hat{\xi}(k+1) - \tilde{y}(k)$ на непустое выпуклое компактное множество $V(k)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$. Как известно, оператор метрической проекции на выпуклое и замкнутое множество в конечномерном евклидовом пространстве однозначно определен и непрерывен. Следовательно, функция f_I непрерывна. Пусть $\tilde{u} \in \mathcal{U}_N$ и $\tilde{x} \in \mathcal{X}_N$ удовлетворяют условиям (10)–(11). Тогда в силу леммы 3 имеет место

$$f_I(\hat{u}) = \|\tilde{y}(N)\|^2 = \|\mathcal{A}_N(N)\tilde{x}(N)\|^2 = \|\tilde{x}(N)\|^2 = J_N(\tilde{u}).$$

В частности, согласно теореме 3 равенство $f_I(\hat{u}) = J_N(\hat{u})$ выполняется тогда и только тогда, когда $\hat{u}$ – оптимальное управление в задаче (1)–(3).

Решение уравнения (5) непрерывно зависит от параметров $\hat{u}(k)$, решение уравнения (6) непрерывно зависит от параметров $\hat{x}(k)$, а величина $\max_{u \in U(k)} \langle \hat{\psi}(k+1), u \rangle$ представляет собой значение опорной функции к непустому компактному множеству $U(k)$ в точке $\hat{\psi}(k+1)$, которая также непрерывна. Следовательно, функция f_E непрерывна. При этом, если $\hat{u}$ – оптимальное управление в задаче (1)–(3), то выполняется условие максимума (4), откуда

$$f_E(\hat{u}) = \|\hat{x}(N)\|^2 = J_N(\hat{u}).$$

Наконец, в силу теоремы 4 для произвольного управления $\hat{u} \in \mathcal{U}_N$ справедлива двусторонняя оценка

$$f_E(\hat{u}) \leq J_N^* \leq J_N(\hat{u}),$$

поэтому в случае равенства левой и правой частей управление $\hat{u}$ является оптимальным в задаче (1)–(3). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 5. Поскольку по условию задачи $0 \in U(k)$ при всех k , то при любом фиксированном $N > 0$ управление $u^{(0)}$, построенное по правилу

$$u^{(0)}(k) \in U(k), \quad k = 0, \dots, N-2, \quad u^{(0)}(N-1) = 0,$$

удовлетворяет геометрическим ограничениям, а шаг 1 алгоритма тем самым определен корректно. Шаги 3 и 6 корректно определены в силу компактности всех множеств $U(k)$.

Пусть $N > 0$ произвольно. Обозначим через J_N^* оптимальное значение функционала J_N в задаче (1)–(3), а через $\mathcal{U}_N^* \subset \mathcal{U}_N$ – множество всех оптимальных управлений в ней. Рассмотрим последовательность $\{u^{(l)}\} \subset \mathcal{U}_N$,

выстраиваемую алгоритмом на шагах 2–5. Согласно теореме 2 последовательность неотрицательных чисел $J_N(u^{(l)})$ монотонно не возрастает. Поэтому она имеет некоторый предел J^0 . В силу компактности множества $\mathcal{U}_N$ найдется подпоследовательность $\{u^{(l_m)}\}$ и элемент $u^* \in \mathcal{U}_N$ такие, что $u^{(l_m)} \rightarrow u^*$ при $m \rightarrow \infty$. Покажем, что $u^* \in \mathcal{U}_N^*$. Рассмотрим построенную выше функцию f_I . Для нее в силу леммы 4 имеет место равенство

$$f_I(u^{(l_m)}) = J_N(u^{(l_m+1)}),$$

причем функция f_I непрерывна. Переходя к пределу по $m \rightarrow \infty$, получаем

$$f_I(u^*) = J^0.$$

С другой стороны, функция J_N также непрерывна в силу непрерывности функции квадрата нормы и непрерывной зависимости решения уравнений (1)–(2) от параметров $u(k)$. Поэтому имеет место

$$J_N(u^*) = \lim_{m \rightarrow \infty} J_N(u^{(l_m)}) = J^0.$$

Согласно лемме 4 полученные равенства означают, что u^* – оптимальное управление в задаче (1)–(3). В частности, $J^0 = J_N(u^*) = J_N^*$.

Рассмотрим теперь функцию f_E , построенную выше, а также функцию $\text{dist}(\cdot, \mathcal{U}_N^*)$. Обе эти функции однозначно определены на $\mathcal{U}_N$. В силу леммы 4 функция f_E непрерывна и $f_E(u^*) = J_N^*$ для любого $u^* \in \mathcal{U}_N^*$. Функция $\text{dist}(\cdot, \mathcal{U}_N^*)$ непрерывна по определению и $\text{dist}(u^*, \mathcal{U}_N^*) = 0$ для любого $u^* \in \mathcal{U}_N^*$. Покажем, что последовательности чисел $f_E(u^{(l)})$ и $\text{dist}(u^{(l)}, \mathcal{U}_N^*)$ имеют пределы J_N^* и 0 соответственно. Пусть это не так и, для определенности, последовательность $\{f_E(u^{(l)})\}$ не стремится к J_N^* . Тогда для некоторого $\delta > 0$ найдется подпоследовательность $\{u^{(l_m)}\}$ такая, что $|f_E(u^{(l_m)}) - J_N^*| > \delta$ при всех m . Переходя еще раз к подпоследовательности, в силу компактности множества $\mathcal{U}_N \subset \mathbb{R}^{nN}$ можем считать, что найдется элемент $u^* \in \mathcal{U}_N$ такой, что $u^{(l_m)} \rightarrow u^*$ при $m \rightarrow \infty$. По доказанному выше имеет место включение $u^* \in \mathcal{U}_N^*$, т.е. $f_E(u^*) = J_N^*$ по лемме 4. Но в то же время функция f_E непрерывна, а значит, $|f_E(u^*) - J_N^*| \geq \delta > 0$. Полученное противоречие показывает, что для последовательности чисел $E_N^{(l)} = f_E(u^{(l)})$, построенной на шагах 2–5 алгоритма, имеет место сходимость

$$E_N^{(l)} \rightarrow J_N^*, \quad l \rightarrow \infty.$$

Аналогичные рассуждения приводят к тому, что

$$(II.11) \quad \text{dist}(u^{(l)}, \mathcal{U}_N^*) \rightarrow 0, \quad l \rightarrow \infty.$$

Поскольку $N > 0$ было выбрано произвольно, то последнее верно и для $N = N_{\min}$.

Итак, показано, что для любого $N > 0$ последовательность чисел $J_N(u^{(l)})$ монотонно сходится к J_N^* сверху и, кроме того, последовательность чисел $E_N^{(l)}$ сходится к J_N^* . При этом в силу теоремы 4 имеет место $E_N^{(l)} \leq J_N^*$ при всех l . Таким образом, доказано, что

$$(П.12) \quad J_N(u^{(l)}) \downarrow J_N^* \quad \text{и} \quad E_N^{(l)} \uparrow J_N^* \quad \text{при} \quad l \rightarrow \infty.$$

Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. Для любого $N < N_{\min}$ вне зависимости от значения ε имеем $J_N^* > 0$, и в силу (П.12) найдется такое $l' = l'(N)$, что $E_N^{(l')} > 0$. Поэтому для любого такого N через конечное число внутренних итераций оказывается выполнено условие останова на шаге 7 (если до этого не оказалось выполнено условие на шаге 4). Если же $N = N_{\min}$, то $J_N^* = 0$ и опять в силу (П.12) найдется l^* , для которого $J_N(u^{(l^*)}) < \varepsilon^2$, а значит, через конечное число итераций будет выполнено условие полной остановки, проверяемое на шаге 4. Следовательно, алгоритм гарантированно завершает свою работу за конечное совокупное число итераций.

Пусть алгоритм завершил работу с ответом $N_\varepsilon, u_\varepsilon$. Из предыдущего рассуждения вытекает, что $N_\varepsilon \leq N_{\min}$. Но если число ε выбрано настолько малым, что выполняется

$$0 < \varepsilon < \varepsilon^* := \min_{0 < N < N_{\min}} J_N^*,$$

то тогда строгое неравенство $N_\varepsilon < N_{\min}$ невозможно, а значит, $N_\varepsilon = N_{\min}$.

В силу (П.11) последовательность $u^{(l)}$, построенная на шагах 2–5 при $N = N_{\min}$, сходится ко множеству $\mathcal{U}_{N_{\min}}^* = \mathcal{U}^*$ в смысле расстояния dist . Более того, эта последовательность не меняется в зависимости от выбора значения $\varepsilon \in (0; \varepsilon^*)$, поскольку условие внутренней остановки на шаге 7 от ε не зависит. При этом значение номера $l^* = l^*(\varepsilon)$, для которого по результатам работы алгоритма имеет место $u_\varepsilon = u^{(l^*)}$, не убывает с уменьшением ε . В предположении, что существует l_0 такое, что $l^*(\varepsilon) = l_0$ при всех достаточно малых ε , получаем $J_{N_{\min}}(u^{(l_0)}) < \varepsilon^2$ при всех малых $\varepsilon > 0$, т.е. $J_{N_{\min}}(u^{(l_0)}) = 0$ и $u^{(l_0)} \in \mathcal{U}^*$. В противном случае $l^*(\varepsilon) \rightarrow \infty$ с уменьшением ε . В каждом из этих случаев $\text{dist}(u_\varepsilon, \mathcal{U}^*) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Теорема полностью доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Исходный код исполняемой программы.

```
import numpy as np
import cvxpy as cp
from tkinter import filedialog
import pathlib
import json
```

```
MAX_ITER_NUM = 200
```

```
MAX_NORM = 1e3
```

```

ex_file_path = filedialog.askopenfilename(
    initialdir = pathlib.Path(__file__).parent.resolve())

with open(ex_file_path, 'r') as file:
    ex_data = json.load(file)
n = ex_data['n']
A = ex_data['A']
x0 = np.array(ex_data['x0'])
epsilon = ex_data['epsilon']
U = ex_data['U']

Id = np.identity(n)
Zn = np.array([0] * n)

u = list()
A_ = list()
x = list()
xi = list()
psi = list()
v = cp.Variable(n)

N = 1
x.append(x0)
nrm = cp.norm(x0).value
E = 0
iter = 1

while nrm >= epsilon and nrm < MAX_NORM
    and iter < MAX_ITER_NUM:
        u.append(Zn)
        iter = 1

        A_.clear()
        A_.append(Id)
        for k in range(N):
            A_.insert(0, A_[0] @ np.array(eval(A.replace
                ('k', str(N-k-1)))))

        while iter < MAX_ITER_NUM:
            xi.clear()
            xi.append(Zn)
            for k in range(N):
                xi.insert(0, xi[0] - A_[N-k] @ u[N-k-1])

```

```

x.clear()
x.append(x0)
for k in range(N):
    prob = cp.Problem(cp.Minimize(
        cp.norm(A_[k+1]@v+A_[k]@x[k]-xi[k+1])),
        [eval(constr.replace('k',str(k)))
         for constr in U])
    prob.solve(solver=cp.SCS)
    u[k] = v.value
    x.append(np.array(eval(A.replace('k',str(k))))
              @x[k]+u[k])

nrm = cp.norm(x[N]).value
if nrm < epsilon: break

psi.clear()
psi.append(-2*x[N])
for k in range(N):
    psi.insert(0,np.array(eval(
        A.replace('k',str(N-k-1))))@psi[0])

E = nrm**2
for k in range(N):
    prob = cp.Problem(cp.Maximize(
        psi[k+1].T@(v-u[k])),
        [eval(constr.replace('k',str(k)))
         for constr in U])
    E -= prob.solve(solver=cp.CLARABEL)

print (N, iter, x[N], nrm, np.sqrt(np.max([E,0])))

if E > 0:
    N += 1
    break
    iter += 1

if nrm >= MAX_NORM:
    print ("No_convergence!_Try_another_example.")
elif iter >= MAX_ITER_NUM:
    print ("Too_many_inner_iterations!_Break.")
else :
    print (N, x[N], nrm)
    print ("Nmin=_", N)

```

```

ex_data[ 'Nmin' ] = N
ex_data[ 'u_opt' ] = [[u[k][j] for j in range(n)]
    for k in range(N)]
ex_data[ 'x_opt' ] = [[x[k+1][j] for j in range(n)]
    for k in range(N)]

with open(ex_file_path, 'w') as file:
    json.dump(ex_data, file, indent=4, sort_keys=True)

```

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Исходные данные для примера 1.

```

{
    "n": 1,
    "A": "[[1]]",
    "U": ["cp.norm(v) <= 1"],
    "x0": [2.5],
    "epsilon": 0.0001
}

```

Исходные данные для примера 2.

```

{
    "n": 2,
    "A": "[[4/5*(np.cos(1)+np.sin(1)), -8/5*np.sin(1)],
        [4/5*np.sin(1), 4/5*(np.cos(1)-np.sin(1))]]",
    "U": [
        "cp.quad_form(v, np.array([[2, 1], [1, 3]])) <= 1"
    ],
    "x0": [-37.79, -26.1],
    "epsilon": 0.0001
}

```

Исходные данные для примера 3.

```

{
    "n": 2,
    "A": "[[np.cos(np.pi/4), -np.sin(np.pi/4)],
        [np.sin(np.pi/4), np.cos(np.pi/4)]]",
    "U": [
        "cp.norm(v, \"inf\") <= 0.9**k*cp.sqrt(3)/2",
        "cp.norm(v) <= 3/4"
    ],
    "x0": [9.33, 0.2],
    "epsilon": 0.0001
}

```

Исходные данные для примера 4.

```
{
  "n": 2,
  "A": "[[(-1)**k*np.cos(np.pi/4),
           -(-1)**k*np.sin(np.pi/4)],
         [(-1)**k*np.sin(np.pi/4),
          (-1)**k*np.cos(np.pi/4)]]",
  "U": [
    "cp.norm(v, \"inf\") <= cp.sqrt(3)/2",
    "cp.norm(v) <= (0.9)**k"
  ],
  "x0": [9.33, 0.2],
  "epsilon": 0.0001
}
```

Исходные данные для примера 5.

```
{
  "n": 2,
  "A": "[[np.exp(-1/(k+1))*np.cos(1/(k+1)),
           -np.exp(-1/(k+1))*np.sin(1/(k+1))],
         [np.exp(-1/(k+1))*np.sin(1/(k+1)),
          np.exp(-1/(k+1))*np.cos(1/(k+1))]]",
  "U": [
    "cp.norm(v) <= np.sqrt((1+np.exp(-2*1/(k+1))
                           -2*np.exp(-1/(k+1))*np.cos(1/(k+1)))/2)"
  ],
  "x0": [100, 100],
  "epsilon": 0.0001
}
```

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Blanchini F.* Polyhedral Set Constrained Control for Discrete-Time Systems with Unknown Additive Disturbances // IFAC Proceedings Volumes. 1991. V. 24. No. 8. P. 95–100.
2. *Blanchini F., Ukovich W.* Linear Programming Approach to the Control of Discrete-Time Periodic Systems with Uncertain Inputs // Journal of Optimization Theory and Applications. 1993. V. 78. No. 3. P. 523–539.
3. *Keerthi S., Gilbert E.* Computation of Minimum-Time Feedback Control Laws for Discrete-Time Systems with State-Control Constraints // IEEE Transactions on Automatic Control. 1987. V. 32. No. 5. P. 432–435.
4. *Abdelhak A., Rachik M.* The Linear Quadratic Minimum-Time Problem for a Class of Discrete Systems // J. Math. Program. Oper. Res. 2010. V. 59. No. 4. P. 575–587.

5. *Amato F., Cosentino C., Tommasi G.D., Pironti A., Romano M.* Input-Output Finite-Time Stabilization of Linear Time-Varying Discrete-Time Systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2022. V. 67. No. 9. P. 4438–4450.
6. *Chen D., Bako L., Lecoeuche S.* The Minimum-Time Problem for Discrete-Time Linear Systems: A Non-Smooth Optimization Approach // Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications. 2012. P. 196–201.
7. *Lee J., Haddad W.M.* Fixed Time Stability and Optimal Stabilisation of Discrete Autonomous Systems // International Journal of Control. 2022. V. 96. No. 9. P. 2341–2355.
8. *Yang H., Xia Y., Geng Q.* Stabilization on Null Controllable Region / In: Analysis and Synthesis of Delta Operator Systems with Actuator Saturation. Studies in Systems, Decision and Control. 2019. V. 193. P. 39–65.
9. *Кротов В.Ф., Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.
10. *Коннов А.И., Кротов В.Ф.* О глобальных методах последовательного улучшения управляемых процессов // АиТ. 1999. № 10. С. 77–88.
11. *Пропой А.И.* Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973.
12. *Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.М., Тятюшкин А.И. и др.* Конструктивные методы оптимизации (в 5 частях). Минск: Университетское издание, 1984–1998.
13. *Срочко В.А.* Итерационные методы решения задач оптимального управления. М.: Физматлит, 2000.
14. *Ибрагимов Д.Н., Царьков К.А.* Об одном подходе к решению задачи быстродействия на основе метода Кротова // АиТ. 2024. № 11. С. 3–35.
15. *Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.М.* Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1981.
16. *Jia Z., Cai X., Han D.* Comparison of several fast algorithms for projection onto an ellipsoid // J. Comp. Appl. Math. 2017. V. 319. P. 320–337.
17. *Kitahara T., Sukegawa N.* A Simple Projection Algorithm for Linear Programming Problems // Algorithmica. 2018. V. 81. P. 167–178.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.В. Кузнецовым.

Поступила в редакцию 10.04.2025

После доработки 06.06.2025

Принята к публикации 21.07.2025