



А ВТОМАТИКА И ДАЛЕКМЕХАНИКА

AUTOMATION AND REMOTE CONTROL

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

10

октябрь

Москва

2025

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Галяев А.А.

Заместители главного редактора:

Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

Ответственный секретарь:

Самохин А.С.

Редакционный совет:

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кузнецов О.П., Кулешов А.П.,
Куржанский А.Б., Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Попков Ю.С.,
Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескеров Ф.Т., Арутюнов А.В., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В.,
Вишневский В.М., Воронцов К.В., Граничин О.Н., Жилякова Н.Ю.,
Каравай М.Ф., Кибзун А.И., Краснова С.А., Крищенко А.П., Кузнецов Н.В.,
Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И., Маликов А.И., Матасов А.И.,
Меерков С.М. (США), Мещеряков Р.В., Миллер Б.М., Михальский А.И.,
Моржин О.В., Мунасыпов Р.А., Назин А.В., Немировский А.С. (США),
Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е.,
Поляков А.Е. (Франция), Протасов В.Ю., Рапопорт Л.Б., Родионов И.В.,
Сельвесюк Н.И., Соболевский А.Н., Степанов О.А., Филимонюк Л.Ю.,
Фрадков А.Л., Хоров Е.М., Цыбаков А.Б. (Франция), Чеботарев П.Ю.,
Чхартишвили А.Г., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: 8 (495) 198-17-20, доб. 1443

Электронная почта: ait@pran.ru, redacsia@ipu.ru

Сайт: <https://aitras.ru>

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

ФГБУ «Издательство «Наука»

© 2025 г. В.Н. АФАНАСЬЕВ, д-р техн. наук (afanval@mail.ru)
(Институт проблем управления РАН им. В.А. Трапезникова;
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Москва)

ПСЕВДООПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ СО СВОБОДНЫМ ПРАВЫМ КОНЦОМ И ЗАДАНЫМ ВРЕМЕНЕМ ОКОНЧАНИЯ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА

Задача оптимального управления конечным состоянием системы в некотором смысле составляет ядро любой другой задачи оптимизации. Постановка подобных задач включает описание самого динамического объекта, ограничений, накладываемых на управления и состояния объекта, и функционал качества, в общем виде функционал Больца. Необходимые условия оптимальности в задаче синтеза соответствующих управлений записываются в виде канонической системы Эйлера–Лагранжа с заданием соответствующих краевых условий. Синтез соответствующих управлений сталкивается с проблемой необходимости поиска решений краевых задач, реализуемой, как правило, численными методами. В работе предлагается альтернативный подобным методам путь решения двухточечных краевых задач, основанный на предположении справедливости обратного принципа оптимальности Р. Беллмана, заключающийся в сохранении функциональной связи между компонентами двухточечной краевой задачи во всем интервале управления. Полученные теоретические результаты подтверждены моделированием системы управления с синтезированным управлением.

Ключевые слова: оптимальное управление, гамильтониан системы, каноническая система Эйлера–Лагранжа, краевые условия канонической системы.

DOI: 10.31857/S0005231025100014

1. Введение

Системы управления, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями, достаточно полно отражают многие реальные процессы и поэтому являются наиболее распространенными объектами, к которым применяются математические методы построения управлений. Задачей конструирования оптимальной динамической системы управления с полной информацией по отношению к множеству целей, функционалу качества, множеству допустимых управлений, множеству состояний и начальному состоянию объекта в момент начала управления является отыскание управления, принадлежащего допустимому множеству управлений, минимизирующего заданный

функционал качества на решениях уравнения объекта [1–5]. Решение поставленной задачи осуществляется с использованием вариационных методов [4–7].

Синтез оптимальной системы управления осуществляется с использованием необходимых и достаточных условий минимума функционала качества [2–5]. Следует отметить, что существование оптимального управления не является необходимым: во множестве допустимых управлений может вообще не оказаться управлений, переводящих объект из начального состояния в заданное множество целей.

Необходимые условия существования оптимального управления описываются двухточечной краевой задачей и условием выбора самого управления в виде некоторой функции, зависящей от поведения гамильтониана на оптимальной траектории. Основная проблема нахождения оптимального управления связана с поиском решения двухточечной краевой задачи. Подобные краевые задачи для систем дифференциальных уравнений редко решаются аналитически и требуют применения численных методов, которые разделяются на два типа – итерационные и неитерационные. Для линейных задач решение можно получить без использования итераций, при решении нелинейных задач без итерационных методов не обойтись [8–12]. К подобным методам относятся: метод Эйлера, метод линейной интерполяции, метод конечных разностей, метод стрельбы [10]. Суть метода стрельбы заключается в сведении краевой задачи к многократному решению задачи Коши. Некоторым развитием метода стрельбы является метод дифференциальной прогонки, в котором решаются вспомогательные задачи Коши не для исходного дифференциального уравнения, а для других уравнений меньшего порядка.

В целом проблема решения двухточечных задач актуальна, а методы ее решения предлагаются и сегодня, часть их основана на использовании нейронных сетей [13–19].

Одним из методов решения краевых задач является метод последовательных приближений. Этот метод, который до сих пор не получил широкого распространения, сводит исходную задачу к некоторой последовательности линейно-квадратичных задач. В [15] приведен метод синтеза оптимального управления с обратной связью одним классом нелинейных систем по квадратичному критерию. Данный метод базируется на специальном методе последовательных приближений, сходимость которого позволяет доказать существование оптимального управления и получить процедуру его построения. В работе рассмотрено аналитическое и численное исследование данного метода и его реализация в системе MathCloud.

Для решения вариационных задач с конца 20-го в. интенсивно развиваются два неклассических метода. Первый метод основан на методе дифференциального преобразования (Differential Transform Method, DTM), который ищет аналитическое решение в виде определенного функционального ряда [18–20]. Второй метод основан на нейронной сети, основанной на математических моделях естественных наук (Physics-Informed Neural Network, PINN), где ис-

кусственный интеллект в форме нейронной сети используется для решения дифференциального уравнения [19, 20].

Первый метод, ДТМ, характеризуется своей гибкостью как в форме дифференциального уравнения, так и в граничных условиях. Одной из его сильных сторон является его масштабируемость для обработки приближенных решений различных порядков, и иногда он даже позволяет предсказывать точное решение на основе формы найденных коэффициентов исходного уравнения. Недостатком этого метода является сложность автоматизации процесса решения заданной задачи.

Второй метод (PINN) использует нейронные сети для решения соответствующего дифференциального уравнения. Одним из преимуществ этого метода является его относительно простая реализация и гибкость. После обучения модели дифференциального уравнения она может предоставлять решения для различных сеток без повторного расчета задачи каждый раз.

В настоящей работе предлагается альтернативный численным методам путь решения двухточечных краевых задач, основанный на предположении справедливости обратного принципа оптимальности Р. Беллмана [21], заключающийся в сохранении функциональной связи между компонентами двухточечной краевой задачи во всем интервале управления.

2. Терминальная задача оптимального управления

2.1. Постановка задачи

В статье рассматривается объект, который описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= f(t, x(t)) + g(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0, \\ f, g : T \times \Omega_s &\rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, x) \rightarrow f(t, x), g(t). \end{aligned}$$

Здесь T – интервал управления $[t_0, t_f]$; $u \in \{u(t) \in \mathbb{R}^r \subset U, t \in [t_0, t_f]\}$ – управление, подлежащее нахождению, матрицы $f(t, x)$, $g(t)$ действительны и непрерывны; U – компактное множество допустимых управлений; Ω_s – множество траекторий $x(\cdot) : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$, которые удовлетворяют начальному условию $x(t_0) = x_0$ и дифференциальному включению $\{dx(t)/dt\} \in \text{co}\{[f(t, x(t)) + g(t)u(t)] : u \in U\}$.

Предполагается, что при всех (t, x) пара $\{f(t, x(t)), g(t)\}$ является управляемой. Кроме того, функции $f(t, x(t))$, $g(t)$ будем предполагать достаточно гладкими, чтобы через любые $(t_0, x_0) \in T \times X_0$ проходило одно и только одно решение (2.1) $x(t, t_0, x_0) \in \Omega_s$.

Множество целей в данной задаче задается в виде $S \in \mathbb{R}^n \times [t_0, t_f]$. Элементами множества целей являются пары (t, x) , состоящие из состояния X и точки t , где $t \in [t_0, t_f]$.

Рассматривая задачу синтеза закона управления, введем функционал Больца

$$(2.2) \quad J(x(\cdot), u(\cdot)) = K(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} \{L(t, x(t), u(t))\} dt.$$

Пусть $L(t, x(t), u(t))$ – непрерывная действительная функция, заданная на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times [t_0, t_f]$, и $K(x(t_f))$ – действительная функция на $\mathbb{R}^n \times t_f$.

Предположение 1. О свойствах функции $f(t, x)$ и лагранжиана $L(t, x, u)$ [2–4].

1. Функции $f(t, x)$, $L(t, x, u)$ и $K(x(t_f))$ являются непрерывными и удовлетворяют ограничениям

$$\|f(t, x)\| \leq (1 + \|x\|)R_f, \quad |L(t, x, u)| \leq (1 + \|x\|)R_L, \quad K(x(t)) \leq (1 + \|x\|)R_K$$

для всех $(t, x, u) \in [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^n \times U$ (здесь R_f, R_L, R_K – положительные числа).

2. Будем считать, что функции $f(t, x(t))$ и $L(t, x, u)$ отвечают условию Липшица по переменной x :

$$\|f(t, x + y) - f(t, x)\| + |L(t, x + y, u) - L(t, x, u)| \leq \lambda_{\text{ур}} \|y\|$$

для всех $(t, x) \in [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$.

3. Функции $f(t, x(t))$, $L(t, x(t), u(t))$ и их частные производные по t, x, u , т.е.

$$\begin{aligned} & f_i(t, x(t)), \quad \frac{\partial f_i(t, x(t))}{\partial t}, \quad \frac{\partial f_i(t, x(t))}{\partial x}, \quad i = 1, \dots, n, \\ & L(t, x(t), u(t)), \quad \frac{\partial L(t, x(t), u(t))}{\partial t}, \quad \frac{\partial L(t, x(t), u(t))}{\partial x}, \quad \frac{\partial L(t, x(t), u(t))}{\partial u}, \end{aligned}$$

непрерывны на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times [t_0, t_f]$.

Отметим, что для ряда задач не требуется существования непрерывных частных производных $L(t, x(t), u(t))$ по u .

4. Функция конечной стоимости $K(x(t_f))$, заданная на $\mathbb{R}^n \times t_f$, — действительная функция такая, что

$$K(x(t)), \quad \frac{\partial K(x(t))}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 K(x(t))}{\partial x^2}$$

непрерывны на $\mathbb{R}^n \times [t_0, t_f]$.

Дополнительные предположения о свойствах вектора $f(t, x(t))$ будут сделаны ниже (раздел 4).

Пусть элемент $\xi = (x(t), u(t), t_0, t_f)$, для которого выполнены все указанные условия и ограничения задачи, является допустимым управляемым процессом. Допустимыми элементами $\xi = (x(t), u(t), t_0, t_f)$ в поставленной задаче будем считать функции класса $x(\cdot) \in C^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$, $u(\cdot) \in C([t_0, t_f], \mathbb{R}^r)$.

Уточнение вида ограничений, накладываемых на управление, производится ниже.

Задача управления заключается в построении оптимальной стратегии, т.е. в нахождении допустимого управляемого процесса $\xi^0 = (x^0(t), u^0(t), t_f)$, минимизирующего функционал вида (2.2) на объекте (2.1), где цель управления задана в виде $S \in \mathbb{R}^n \times [t_0, t_f]$.

2.2. Необходимые условия оптимальности

Запишем гамильтониан системы $H(t, x(t), u(t), \lambda(t))$:

$$(2.3) \quad H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = L(t, x(t), u(t)) + \lambda^T(t)[f(t, x) + g(t)u(t)].$$

Здесь $\lambda(t)$ множитель Лагранжа.

Необходимые условия оптимальности имеют вид [1, 2, 7]

$$(2.4) \quad \frac{d}{dt}x(t) = \left\{ \frac{\partial H(t, x(t), u(t), \lambda(t))}{\partial \lambda} \right\}^T, \quad x(t_0) = x_0,$$

$$(2.5) \quad \frac{d}{dt}\lambda(t) = - \left\{ \frac{\partial H(t, x(t), u(t), \lambda(t))}{\partial x} \right\}^T, \quad \lambda(t_f) = \left\{ \frac{\partial K(x(t_f))}{\partial x} \right\}^T.$$

Известно [1–4], что оптимальное управление $u(t)$, синтез которого выполняется с использованием гамильтониана (2.3), приводит к необходимости решения двухточечной краевой задачи (2.4), (2.5). Однако при этом следует отметить, что гамильтониан не содержит какой-либо информации о функциональной связи процессов $x(t)$ и $\lambda(t)$.

В рассматриваемой задаче с учетом сделанных выше предположений, должно выполняться необходимое условие

$$(2.6) \quad H^0(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = \min_{u(t)} H(t, x(t), u(t), \lambda(t)), \quad t \in [t_0, t_f],$$

где $\lambda(t)$ – решение системы (2.5). В случае, когда множество допустимых управлений U совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$, т.е. $U = \mathbb{R}^n$, условие (2.6) может соблюдаться лишь в стационарной точке, т.е.

$$(2.7) \quad \frac{\partial H(t, x(t), u(t), \lambda(t))}{\partial u} = \frac{\partial L(t, x(t), u(t))}{\partial u} + g^T(t)\lambda(t) = 0, \quad t \in [t_0, t_f].$$

Однако если U – замкнутое множество и $U \neq \mathbb{R}^n$, то соотношение (2.7) в общем случае не выполняется и для синтеза оптимального управления следует применять принцип Понтрягина [2–4].

Предположим, что существует оптимальное управление, удовлетворяющее необходимым условиям (2.6) или (2.7), которое запишем в виде

$$(2.8) \quad u(t) = -\varphi(x(t))\lambda(t),$$

где матричная функция $\varphi(x(t)) \in \mathbb{R}^{r \times n}$ такая, что

$$(2.9) \quad g(t)\varphi(x(t)) \leq \Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Здесь Φ – параметрически заданная матрица, поэлементно определяющая множество возможных значений параметров матрицы $\varphi(x(t))$ при известной матрице $g(t)$; это означает, что ограничения, накладываемые на управление $u(t) \subset U$, конкретизируются в виде условия (2.9). Вопрос о связи установленных ограничений на параметры регулятора будет рассмотрен в четвертом разделе статьи при конкретизации вида функций $L(t, x(t), u(t))$ и $K(x(t_f))$ критерия качества (2.2).

Таким образом, синтез оптимального допустимого процесса $\xi = \{x(t), u(t), t_0, t_f\}$ заменяется на поиск матрицы $\varphi(x(t))$, при которой управление $u(t) = -\varphi(x(t))\lambda(t) \subset U$ обеспечивает выполнение условия (2.9) и минимизирует функционал (2.2).

Перепишем условия (2.4), (2.5) с учетом (2.8):

$$(2.10) \quad \frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t)) - g(t)\varphi(x(t))\lambda(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}\lambda(t) &= - \left\{ \frac{\partial f(t, x(t))}{\partial x} \right\}^T \lambda(t) - \left\{ \frac{\partial L(t, x(t), u(t))}{\partial x} \right\}^T, \\ \lambda(t_f) &= \left\{ \frac{\partial K(x(t_f))}{\partial x} \right\}^T. \end{aligned}$$

Таким образом, успешное решение задачи синтеза оптимального управления в виде $u(t) = -\varphi(x(t))\lambda(t)$ зависит от возможности успешного решения двухточечной краевой задачи (2.10), (2.11).

3. Псевдооптимальное решение задачи синтеза

Следует отметить, что представленные выше этапы построения оптимального управления основаны на использовании свойств гамильтониана (2.3), однако гамильтониан, как уже отмечалось выше, не содержит информации относительно краевых условий системы управления. Только условие $K(x(t_f))$ в функционале (2.2), т.е. $\lambda(t_f) = \{\partial K(x(t_f))/\partial x\}^T$ в краевом условии уравнения (2.11), может связать переменные $x(t)$ и $\lambda(t)$ в момент t_f . Кроме этого, следует заметить, что так как система (2.1) описывается нелинейным дифференциальным уравнением, то ограничение (2.9), накладываемое на оптимальное управление, в общем случае может не содержать управляющих воздействий, при которых достигается цель управления при заданных начальных условиях $x_0 \in X_0$ и, более того, доставляющих равномерную асимптотическую устойчивость системе [1–4].

Для обоснования предлагаемого метода решения задачи построения псевдооптимального управления используем обратный принцип оптимальности

Беллмана [4, 21], который предполагает, что оптимальное управление обладает тем свойством, что для любого начального состояния и используемого начального управления, на величину критерия на конечном интервале оказывает управление на этом интервале и значение фазового вектора в конце интервала. Для рассматриваемой в данной работе проблемы уточним это определение.

Определение 1 [обратный принцип оптимальности]. Для оптимальности допустимого процесса $\xi^0 = (x^0(t), u^0(t), t_0, t_f)$ в задаче (2.1), (2.2) необходимо, чтобы при любом из подынтервалов $[t_0, \tau] \subset [t_0, t_f]$, $\tau \leq t_f$ допустимый процесс, начинающийся в момент t_0 , был оптимален относительно управления на этом интервале и значения фазового вектора в конце интервала $x(\tau)$, определяющего значения функции вспомогательной переменной $\lambda(\tau)$, т.е. $\xi^0 = (x^0(t), u^0(t), t_0, \tau)$.

Основываясь на этом определении, сделаем следующее

Предположение 2. Отмечая, что условие, связывающее переменные $x(t)$ и $\lambda(t)$ в момент t_f , определяется как $\lambda(t_f) = \{\partial K(x(t_f))/\partial x\}^T$, будем считать, опираясь на обратный принцип оптимальности, что справедливо соотношение $\tilde{\lambda}(\tau) = \{\partial K(\tilde{x}(\tau))/\partial \tilde{x}\}^T$ для всех $\tau \in [t_0, t_f]$.

Выполнение предположения 2 означает, что для всех $t \in [t_0, t_f]$ переменная $\tilde{\lambda}(t)$ является функцией состояния $\tilde{x}(t)$.

Определение 2. Управление $\tilde{u}(t) = -\varphi(\tilde{x}(t))\tilde{\lambda}(t)$, синтез которого основан на принятии сделанного предположения 2, назовем псевдооптимальным управлением.

Перепишем уравнения (2.10), (2.11) с допустимым управлением $\tilde{u}(t) = -\varphi(\tilde{x}(t))\tilde{\lambda}(t)$ в виде

$$(3.1) \quad \frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = f(t, \tilde{x}(t)) - g(t)\varphi(\tilde{x}(t))\tilde{\lambda}(t), \quad \tilde{x}(t_0) = x_0,$$

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{\lambda}(t) &= -\left\{\frac{\partial f(t, \tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}}\right\}^T \tilde{\lambda}(t) - \left\{\frac{\partial L(t, \tilde{x}(t), u(t))}{\partial \tilde{x}}\right\}^T, \\ \tilde{\lambda}(t_f) &= \lambda(t_f) = \left\{\frac{\partial K(x(t_f))}{\partial x}\right\}^T. \end{aligned}$$

При выполнении сделанного предположения 2 первые полные производные основного и вспомогательного уравнений связаны соотношением

$$(3.3) \quad \frac{d}{dt}\tilde{\lambda}(t) = \left\{\frac{\partial^2 K(\tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}^2}\right\} \frac{d}{dt}\tilde{x}(t), \quad t \in [t_0, t_f].$$

Подставляя $dx(t)/dt$ и $d\lambda(t)/dt$, определенные в (3.1) и (3.2), будем иметь

$$\begin{aligned} & -\left\{\frac{\partial f(t, \tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}}\right\}^T \tilde{\lambda}(t) - \left\{\frac{\partial L(t, \tilde{x}(t), u(t))}{\partial \tilde{x}}\right\}^T = \\ & = \left\{\frac{\partial^2 K(\tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}^2}\right\} f(t, \tilde{x}(t)) - \left\{\frac{\partial^2 K(\tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}^2}\right\} g(t)\varphi(\tilde{x}(t))\tilde{\lambda}(t). \end{aligned}$$

Откуда, приведя подобные члены и учитывая (2.9), получим

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \tilde{\lambda}(t) = & \left[- \left\{ \frac{\partial f(t, \tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial^2 K(\tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}^2} \right\} \Phi \right]^{-1} \times \\ & \times \left[\left\{ \frac{\partial^2 K(\tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}^2} \right\} f(t, \tilde{x}(t)) + \left\{ \frac{\partial L(t, \tilde{x}(t), u(t))}{\partial \tilde{x}} \right\}^T \right]. \end{aligned}$$

Очевидно, что выражение $\left\{ \frac{\partial^2 K(\tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}^2} \right\} \Phi - \left\{ \frac{\partial f(t, \tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}} \right\}^T$ должно быть положительно определенным. Это условие, как будет показано в разделе 4, можно обеспечить выбором соответствующих элементов функции терминального штрафа функционала (2.2). Таким образом, матрица

$$\left[\left\{ \frac{\partial^2 K(\tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}^2} \right\} \Phi - \left\{ \frac{\partial f(t, \tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}} \right\}^T \right]^{-1}$$

положительно определенная, что будет учитываться при анализе устойчивости системы с синтезированным управлением.

Псевдооптимальное управление вида (2.8) будет определяться следующим выражением

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \tilde{u}(t) = & -\varphi(\tilde{x}(t)) \left[\left\{ \frac{\partial^2 K(\tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}^2} \right\} \Phi - \left\{ \frac{\partial f(t, \tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}} \right\}^T \right]^{-1} \times \\ & \times \left[\left\{ \frac{\partial^2 K(\tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}^2} \right\} f(t, \tilde{x}(t)) + \left\{ \frac{\partial L(t, \tilde{x}(t), u(t))}{\partial \tilde{x}} \right\}^T \right]. \end{aligned}$$

Для установления требований равномерной асимптотической устойчивости, которым должна отвечать система (3.1) с управлением (3.5), введем функцию Ляпунова

$$(3.6) \quad V_L(t) = \tilde{x}^T(t) \tilde{x}(t).$$

Полная производная функции Ляпунова (3.6) имеет вид

$$(3.7) \quad \frac{d}{dt} V_L(t) = f^T(t, \tilde{x}(t)) \tilde{x}(t) - \tilde{\lambda}^T(t) \Phi^T \tilde{x}(t) + \tilde{x}^T(t) f(t, \tilde{x}(t)) - \tilde{x}^T(t) \Phi \tilde{\lambda}(t) \leq 0,$$

где $\tilde{\lambda}(t)$ определяется уравнением (3.4). Таким образом, система (3.1) равномерно асимптотически устойчива, если выполняется условие

$$(3.8) \quad f^T(t, \tilde{x}(t)) \tilde{x}(t) + \tilde{x}^T(t) f(t, \tilde{x}(t)) \leq \tilde{\lambda}^T(t) \Phi^T \tilde{x}(t) + \tilde{x}^T(t) \Phi \tilde{\lambda}(t).$$

Можно заметить, что выполнение условия (3.8) зависит от матрицы Φ , ограничивающей возможности управления.

Обобщая полученный выше результат, формулируем теорему 1.

Теорема 1. Псевдооптимальное решение задачи управления нелинейным динамическим объектом (2.1) с функционалом (2.2) существует, если и только если

$$(3.9) \quad \left\{ \frac{\partial^2 K(\tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}^2} \right\} \Phi - \left\{ \frac{\partial f(t, \tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}} \right\}^T > 0, \quad \forall (t, \tilde{x}) \in [t_0, t_f] \times \Omega_x.$$

В этом случае траектория $\tilde{x}^0(t)$ системы (2.1), исходящая из $\tilde{x}(t_0) = x(t_0)$ и соответствующая псевдооптимальному управлению $\tilde{u}^0(t)$, является решением уравнения

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = f(t, \tilde{x}(t)) - g(t) \varphi(\tilde{x}(t)) & \left[\left\{ \frac{\partial^2 K(\tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}^2} \right\} \Phi - \left\{ \frac{\partial f(t, \tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}} \right\}^T \right]^{-1} \times \\ & \times \left[\left\{ \frac{\partial^2 K(\tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}^2} \right\} f(t, \tilde{x}(t)) + \left\{ \frac{\partial L(t, \tilde{x}(t), u(t))}{\partial \tilde{x}} \right\}^T \right]. \end{aligned}$$

Выполнение условия (3.9) с учетом наложенных на параметры управляющего воздействия ограничений (2.9) позволяет определить область начальных условий системы (3.10), при которых псевдооптимальное управление (3.5) обеспечит нелинейной системе равномерную асимптотическую устойчивость:

$$(3.11) \quad \left\{ \frac{\partial^2 K(\tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}^2} \right\}_{t=t_0} \Phi - \left\{ \frac{\partial f(t, \tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}} \right\}_{t=t_0}^T \succ 0.$$

4. Задача с квадратичным функционалом качества

Задача управления динамическими системами по квадратичному критерию является классической задачей современной теории управления. Для линейных систем эта задача полностью решена, и ее решение полно и подробно описано во многих книгах (см. например [1–3]). Для нелинейных систем одно из первых ее рассмотрений приведено в книге [4]. Здесь описана схема последовательных приближений, которая в некоторых случаях дает оптимальное управление в виде закона с обратной связью. Особенностью метода является то, что оператор системы меняется от итерации к итерации. Это затрудняет аналитическое исследование задачи и чрезвычайно усложняет вычислительную процедуру. Поэтому данный метод не нашел широкого применения. В [6–8] были рассмотрены различные аспекты задачи (от построения оптимального управления до доказательства существования ее решения). В [17] описана модифицированная схема последовательных приближений для задачи оптимального управления нелинейной системой по квадратичному функционалу качества. Данная схема дает решение задачи во многих важных случаях. Вместе с тем вопрос о сходимости метода на произвольном конечном горизонте пока остается открытым и является темой дальнейших исследований.

В данной статье рассматривается задача управления объектом вида (2.1)

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= f(t, x(t)) + g(t)u(t), \quad x(t_0) = x_s, \\ f, g : T \times \Omega_x &\rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, x) \rightarrow f(t, x), g(t), \end{aligned}$$

с функционалом

$$(4.2) \quad J(x(\cdot), u(\cdot)) = \frac{1}{2}x^T(t_f)Fx(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{x^T(t)C^TQCx(t) + u^T(t)Ru(t)\} dt.$$

Матрицы F, Q, R положительно определенные.

Задача управления заключается в построении оптимальной стратегии, т.е. в нахождении допустимого управляемого процесса $\xi^0 = (x^0(t), u^0(t), t_0, t_f)$, минимизирующего функционал вида (4.2) на объекте (4.1), где цель управления задана в виде $S \in \mathbb{R}^n \times [t_0, t_f]$.

Предположим, что существует оптимальное управление, удовлетворяющее необходимым условиям (2.6) или (2.7), которое запишем в виде

$$(4.3) \quad u(t) = -\varphi(x(t))\lambda(t),$$

где матричная функция $\varphi(x(t)) \in \mathbb{R}^{r \times n}$, с учетом (2.10), такая, что

$$(4.4) \quad g(t)R^{-1}g^T(t) = g(t)\varphi(x(t)) \leq \Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Здесь Φ – параметрически заданная матрица, поэлементно определяющая множество возможных значений параметров матрицы $\varphi(x(t))$ при известной матрице $g(t)$, что означает, что ограничения, накладываемые на управление $u(t) \subset U$, конкретизируются в виде условия (4.4).

Предположение 3. Назначением матриц штрафа F, Q, R функционала качества (4.2) можно при определении оптимального управления обеспечить выполнение условия (4.4).

Двухточечная краевая задача в данной подзадаче с учетом (4.4) имеет вид

$$(4.5) \quad \frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t)) - \Phi\lambda(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

$$(4.6) \quad \frac{d}{dt}\lambda(t) = - \left\{ \frac{\partial f(t, x(t))}{\partial \tilde{x}} \right\}^T \lambda(t) - C^TQCx(t), \quad \lambda(t_f) = Fx(t_f).$$

Таким образом, успешное решение задачи синтеза оптимального управления в виде $u(t) = -\varphi(x(t))\lambda(t)$ зависит от возможности успешного решения двухточечной краевой задачи (4.5), (4.6).

При выполнении сделанного выше предположения 2 в рассматриваемой задаче с квадратичным функционалом качества функции $\tilde{\lambda}(t)$ и $\tilde{x}(t)$ связаны линейно соотношением $\tilde{\lambda}(t) = F\tilde{x}(t)$. Таким образом, полные производные основного и вспомогательного уравнений имеют вид

$$(4.7) \quad \frac{d}{dt}\tilde{\lambda}(t) = F\frac{d}{dt}\tilde{x}(t), \quad t \in [t_0, t_f].$$

Подставляя $d\tilde{x}(t)/dt$ и $d\tilde{\lambda}(t)/dt$, определенные в (4.6), будем иметь

$$-\left\{\frac{\partial f(t, \tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}}\right\}^T \tilde{\lambda}(t) + F\Phi\tilde{\lambda}(t) = Ff(t, \tilde{x}(t)) + C^TQC\tilde{x}(t).$$

Откуда, приведя подобные члены, получим

$$(4.8) \quad \tilde{\lambda}(t) = \left[F\Phi - \left\{\frac{\partial f(t, \tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}}\right\}^T\right]^{-1} [Ff(t, \tilde{x}(t)) + C^TQC\tilde{x}(t)].$$

Здесь принимаем, что

$$(4.9) \quad F\Phi - \left\{\frac{\partial f(t, \tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}}\right\}^T > 0, \quad \forall(t, \tilde{x}) \in [t_0, t_f] \times \Omega_x.$$

Как можно заметить, выполнение условия (4.9) при заданных ограничениях (4.4) зависит от назначения матрицы F в функционале (4.2).

Управление (4.5) с учетом (4.8) принимает вид

$$(4.10) \quad \tilde{u}(t) = -\varphi(x(t)) \left[F\Phi - \left\{\frac{\partial f(t, \tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}}\right\}^T\right]^{-1} [Ff(t, \tilde{x}(t)) + C^TQC\tilde{x}(t)].$$

Запишем исходную систему (4.1) с управлением (4.10) (учитывая (4.3) и (4.4)):

$$(4.11) \quad \frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = f(t, \tilde{x}(t)) - \Phi \left[F\Phi - \left\{\frac{\partial f(t, \tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}}\right\}^T\right]^{-1} [Ff(t, \tilde{x}(t)) + C^TQC\tilde{x}(t)],$$

$$\tilde{x}(t_0) = x_0.$$

Для проверки устойчивости системы (4.11) предварительно введем некоторые обозначения: пусть

$$(4.12) \quad S(\tilde{x}(t)) = \left[F\Phi - \left\{\frac{\partial f(t, \tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}}\right\}^T\right]^{-1} > 0.$$

Перепишем (4.11) с учетом сделанного обозначения:

$$(4.13) \quad \frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = [I - \Phi S(\tilde{x}(t))F]f(t, \tilde{x}(t)) - \Phi S(\tilde{x}(t))C^TQC\tilde{x}(t), \quad \tilde{x}(t_0) = x_0.$$

Введем функцию Ляпунова [22] в виде

$$(4.14) \quad V_L \tilde{x}(t) = \tilde{x}^T(t) \tilde{x}(t).$$

Полная производная функции Ляпунова определяется выражением

$$(4.15) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} V_L \tilde{x}(t) &= f^T(t, \tilde{x}(t)) [I - \Phi S(\tilde{x}(t)) F]^T \tilde{x}(t) - \\ &- C^T Q C \tilde{x}(t) S^T(\tilde{x}(t)) \Phi^T \tilde{x}(t) + \tilde{x}^T(t) [I - \Phi S(\tilde{x}(t)) F] f(t, \tilde{x}(t)) - \\ &- \tilde{x}^T(t) \Phi S(\tilde{x}(t)) C^T Q C \tilde{x}(t) \leq 0. \end{aligned}$$

Назначая соответствующим образом матрицы Q и F в функционале (4.2) можно обеспечить выполнение неравенства (4.15), при котором система динамическая (4.11) обладает свойством равномерной асимптотической устойчивости.

Обобщая полученный выше результат, формулируем теорему 2.

Теорема 2. Псевдооптимальное решение задачи управления нелинейным динамическим объектом (4.1) с функционалом (4.2) существует, если и только если

$$(4.16) \quad F\Phi - \left\{ \frac{\partial f(t, \tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}} \right\}^T > 0, \quad \forall (t, \tilde{x}) \in [t_0, t_f] \times \Omega_x.$$

В этом случае траектория $\tilde{x}^0(t)$ системы (4.1), исходящая из $\tilde{x}(t_0) = x(t_0)$ и соответствующая псевдооптимальному управлению $\tilde{u}^0(t)$, является решением уравнения

$$(4.17) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{x}(t) &= f(t, \tilde{x}(t)) - \\ &- \Phi \left[F\Phi - \left\{ \frac{\partial f(t, \tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}} \right\}^T \right]^{-1} [Ff(t, \tilde{x}(t)) + C^T Q C \tilde{x}(t)]. \end{aligned}$$

Выполнение условия (4.9) позволяет определить область начальных условий системы (4.11), при которых псевдооптимальное управление (4.10) обеспечит нелинейной системе равномерную асимптотическую устойчивость:

$$(4.18) \quad \left\{ F\Phi - \left\{ \frac{\partial f(t, \tilde{x}(t))}{\partial \tilde{x}} \right\}^T \right\}_{t=t_0} \succ 0.$$

Результат, представленный выше, распространим на некоторый класс нелинейных систем, представленных с применением метода SDC-параметризации (State Dependent Coefficient, [23, 24]). Для этого сделаем ряд предположений.

Предположение 4. Вектор-функция $f = f(t, \tilde{x}(t))$ – непрерывная дифференцируемая по $x \in \Omega_x$, т.е. $f(\cdot) \in C^1(\Omega_x)$.

Предположение 5. Без потери общности положим, что условие $\tilde{x} = 0 \subset \Omega_x$ есть точка равновесия системы так, что $f(t, 0) = 0$.

Предположение 6. Положим [23], что

$$(4.19) \quad \frac{|f(t, \tilde{x}(t))|}{|\tilde{x}|} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow 0.$$

Учитывая предположения, сделанные относительно свойства $f(t, \tilde{x}(t))$, перейдем от описания исходной системы (4.1) к ее SDC-представлению [23]. Записав $f(t, \tilde{x}(t))$ в виде

$$(4.20) \quad f(t, \tilde{x}(t)) = [A(t) + A(\tilde{x}(t))]x(t) = A(t, \tilde{x})\tilde{x}(t),$$

будем иметь

$$(4.21) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{x}(t) &= A(t, \tilde{x})\tilde{x}(t) + g(t)u(t), \quad \tilde{x}(t_0) = x_0, \\ y(t) &= C\tilde{x}(t), \\ A(t, \tilde{x})\tilde{x}(t), g(t) &: T \times \Omega_x \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, x) \rightarrow f(t, x), g(t). \end{aligned}$$

Предположение 7. Положим, что пара $\{A(t, \tilde{x}), g(t)\}$ является управляемой, пара $\{A(t, \tilde{x}), C\}$ – наблюдаемой.

Управляемый объект (4.17) с учетом (4.11) принимает вид

$$(4.22) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= A(t, \tilde{x})x(t) - \\ &- \Phi \left[F\Phi - \left\{ \frac{\partial A(t, \tilde{x})\tilde{x}(t)}{\partial \tilde{x}} \right\}^T \right]^{-1} [FA(t, \tilde{x}) + C^TQC] \tilde{x}(t), \\ y(t) &= C\tilde{x}(t), \quad x(t_0) = x_0. \end{aligned}$$

Очевидно, что решение этого уравнения существует, если и только если выполняется условие, аналогичное условию (4.9),

$$(4.23) \quad F\Phi - \left\{ \frac{\partial A(t, \tilde{x})\tilde{x}(t)}{\partial \tilde{x}} \right\}^T > 0, \quad \forall (t, \tilde{x}) \in [t_0, t_f] \times \Omega_x.$$

Для проверки устойчивости системы (4.22) предварительно введем некоторые обозначения: пусть

$$(4.24) \quad S(\tilde{x}(t)) = \left[F\Phi - \left\{ \frac{\partial A(t, \tilde{x})\tilde{x}(t)}{\partial \tilde{x}} \right\}^T \right]^{-1} > 0,$$

т.е. управляемая система (4.22) с учетом сделанных обозначений принимает вид (4.13).

С учетом (4.23) и принимая во внимание (4.15), запишем полную производную функции Ляпунова

$$\begin{aligned}
 (4.25) \quad \frac{d}{dt}V_L(t, \tilde{x}) &= \tilde{x}^T(t)A^T(t, \tilde{x})[I - \Phi S(\tilde{x}(t))F]^T \tilde{x}(t) - \\
 &\quad - \tilde{x}^T(t)C^TQC\tilde{x}(t)S^T(\tilde{x}(t))\Phi^T\tilde{x}(t) + \\
 &\quad + \tilde{x}^T(t)[I - \Phi S(\tilde{x}(t))F]A(t, \tilde{x})\tilde{x}(t) - \tilde{x}^T(t)\Phi S(\tilde{x}(t))C^TQC\tilde{x}(t) \leq 0.
 \end{aligned}$$

Таким образом, асимптотическая устойчивость управляемой системы (4.22) должна обеспечиваться выполнением условия

$$\begin{aligned}
 (4.26) \quad A^T(t, \tilde{x})[I - \Phi S(\tilde{x}(t))F]^T &+ [I - \Phi S(\tilde{x}(t))F]A(t, \tilde{x}) \leq \\
 &\leq C^TQC S^T(\tilde{x}(t))\Phi^T + \Phi S(\tilde{x}(t))C^TQC.
 \end{aligned}$$

Выполнение условий (4.4) и (4.26) при заданной матрице Φ можно обеспечить соответствующим назначением матриц штрафов F, Q, R функционала качества (4.2).

5. Пример

Для иллюстрации полученных теоретических результатов рассмотрим пример [25] синтеза псевдооптимального управления для системы вида (4.1)

$$\begin{aligned}
 (5.1) \quad \frac{d}{dt}x_1(t) &= x_2(t) + [x_1^5(t) - x_1^3(t) - x_1(t) + x_1(t)x_2^4(t)] + x_1(t)u_1(t), \\
 \frac{d}{dt}x_2(t) &= -x_1(t) - x_2(t) + [x_2^5(t) - x_2^3(t) - x_2(t) + x_2(t)x_1^4(t)] + x_2(t)u_2(t).
 \end{aligned}$$

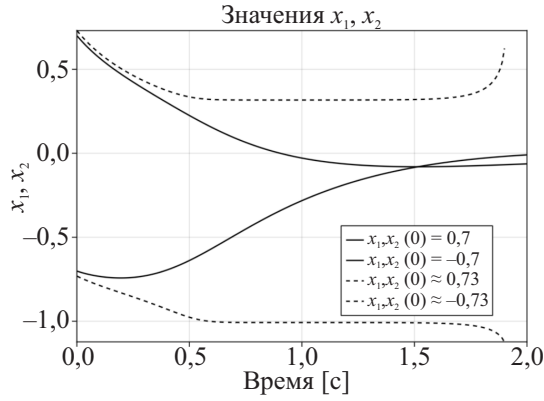
Здесь в соответствии с разделом 4 статьи

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f_1(x(t)) \\ f_2(x(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^5(t) - x_1^3(t) - x_1(t) + x_1(t)x_2^4(t) \\ x_2^5(t) - x_2^3(t) - x_2(t) + x_2(t)x_1^4(t) \end{pmatrix}, \\
 g(x(t))u(t) &= \begin{pmatrix} g_1(x(t))u_1(t) \\ g_2(x(t))u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t)u_1(t) \\ x_2(t)u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) & 0 \\ 0 & x_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Задан квадратичный функционал качества вида (4.2) с параметрами

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Интервал управления $[t_0, t_f] = [0, 2]$.



Результаты моделирования.

Ограничения, накладываемые на управления при заданной матрице F и

$$(5.2) \quad \Phi = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix},$$

определяются следующим образом:

$$(5.3) \quad g(x(t))R^{-1}g^T(x(t)) = \begin{pmatrix} x_1^2(t) & 0 \\ 0 & x_2^2(t) \end{pmatrix} \leq \Phi.$$

Синтезированное псевдооптимальное управление, согласно (4.10), имеет вид

$$(5.4) \quad \tilde{u}(t) = -\varphi(x(t)) \left[F\Phi - \left\{ \frac{\partial f(t, x(t))}{\partial x} \right\}^T \right]^{-1} [Ff(t, x(t)) + C^T Q C x(t)],$$

где матрица $\varphi(x(t))$ удовлетворяет условию (5.2), а $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Для проверки устойчивости системы с синтезированным управлением (5.4) запишем систему (5.1) с учетом (5.4):

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= [Ax(t) + f(t, x(t))] - \\ &- \Phi \left[F\Phi - \left\{ \frac{\partial f(t, x(t))}{\partial x} \right\}^T \right]^{-1} [F(Ax(t) + f(t, x(t))) + Qx(t)], \\ x(0) &= \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Численное моделирование системы (5.5) с начальными условиями $x_1(0) = 0,5$, $x_2(0) = 0,5$, представленное на рисунке, показывает, что траектории $x_1(t)$ и $x_2(t)$ стремятся к нулю при $t \rightarrow t_f$, что подтверждает равномерную асимптотическую устойчивость системы при заданных параметрах. Это согласуется с выводами теоремы 2 ((4.16)) и условием (4.18).

6. Заключение

Каноническая система Эйлера–Лагранжа с заданием соответствующих краевых условий является основой необходимых условий оптимальности в задаче синтеза оптимальных управлений динамическим объектом, сам же синтез этих управлений проводится на основе анализа поведения гамильтониана на оптимальной траектории. Однако гамильтониан не содержит какой-либо информации о соотношении процессов, входящих в каноническую систему. Успех синтеза оптимального управления в целом зависит от возможности решения канонической системы с заданными краевыми условиями. Следует отметить, что функциональная связь между процессами двухточечной краевой задачи имеется только в частной производной по x первого слагаемого функционала качества Больца. В настоящей работе предложен альтернативный численным методам путь решения двухточечных краевых задач, основанный на предположении справедливости обратного принципа оптимальности Р. Беллмана, заключающийся в сохранении функциональной связи между компонентами двухточечной краевой задачи во всем интервале управления.

В результате исследований задачи синтеза управления для нелинейной динамической системы, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением и функционалом Больца, получено аналитическое выражение для псевдооптимального управления, сформулирована теорема о необходимых условиях оптимальности этого управления. Для задачи с квадратичным функционалом качества, SDC-представлением нелинейного динамического объекта и соответствующим псевдооптимальным управлением доказана теорема об асимптотической устойчивости системы управления. Получены условия, которым должны отвечать матрицы штрафов функционала качества, при которых обеспечивается требуемое качество переходных процессов управляемой нелинейной системы при выполнении установленных ограничений на управление.

Полученные теоретические результаты подтверждены моделированием системы управления с синтезированным управлением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Физматлит, 2009. 385 с.
2. *Афанасьев В.Н.* Математическая теория управления непрерывными динамическими системами. М.: КРАСАНД, 2021. 480 с.
3. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 2003. 615 с.
4. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. Т. 1. Гл.2, 6. М.: МЦИМО, 2011. 620 с.
5. *Болдырев Ю.Я.* Вариационное исчисление и методы оптимизации. М.: Серия Университеты России, 2021. 240 с.

6. Галеев Э.М., Зеликин М.И. и др. Оптимальное управление / Под ред. Н.П. Осмоловского и В.М. Тихомирова. М.: Изд. МЦИМО, 2008. 320 с.
7. *Struwe M.* Variational Methods: Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems. Springer-Verlag, 2008. 302 p.
8. Гурьянов А.В. Некоторые аспекты численного решения двухточечной краевой задачи методом ортогонального переноса граничных условий // Журн. кристаллы и их практическое использование. 2014. Т. 14. № 3. С. 75–79.
9. Барсегян В.Р. Задача оптимального управления колебаниями струны с перераспределенными условиями на функции состояния в заданные промежуточные моменты времени // АнТ. 2020. № 2. С. 36–47.
10. Квитко А.Н. Об одном методе решения локальной краевой задачи для нелинейной управляемой системы // АнТ. 2020. № 2. С. 48–61.
11. Rao A.V. Survey of Numerical Methods of Optimal Control // Advances in the Astronautical Sciences. 2010. Vol. 135 (1). P. 497–528.
12. Terekhoff S.A., Fedonova N.N. Cascade Neural Networks in Variational Methods for Boundary Value Problems // Proceedings IJCNN'99. 1999.
<https://doi.org/10.1109/IJCNN.1999.832592>
13. Васильев А.Н., Терехов Д.А. Нейросетевые подходы к решению краевых задач многомерных сетевых областей // Изв. ТРТУ. Таганрог, 2004. С. 60–89.
14. Brociek R., Pleszczynski M. Differential Transform Method and Neural Network for Solving Variational Calculus Problem // Mathematics. 2024. Vol. 12. P. 2182.
<https://doi.org/10.3390/math12142182>
15. Афанасьев А.П., Дзюба С.М., Емельянова Е.И. Исследование задачи оптимального управления нелинейной системой по квадратичному критерию в среде MathLout // Сборник НСКФ, ИПС им. А.А. Самарского РАН. 2015.
16. Ayaz F. On the two-dimensional differential transform method // Applied Mathematics and Computation. 2003. Vol. 143. P. 361–374.
[https://doi.org/10.1016/S0096-3003\(02\)00368-3](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(02)00368-3)
17. Kanth A.S.V.R., Aruna K. Differential transform method for solving linear and non-linear systems of partial differential equations // Physics Letters A. 2008.
<https://doi.org/10.1016/j.physleta.2008.10.008>
18. Eivazi H., Wang Y., Vinuesa R. Physics-informed deep-learning applications to experimental fluid mechanics // Measurement Science and Technology. 2024.
<https://doi.org/10.48550/arXiv.2203.15402>
19. Cuomo S., Schiano Di Cola V., Giampaolo F., Rozza G., Raissi M., Piccialli F. Scientific Machine Learning Through Physics-Informed Neural Networks: Where we are and What's Next // J. Sci. Comput. 2022. V. 92. No. 3.
<https://doi.org/10.1007/s10915-022-01939-z>
20. Абрамов А.А. О численной устойчивости оценок метода переноса граничных условий // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. Т. 46. № 3. С. 404–406.
21. Габасов Р., Кирилова Ф.М. Основы динамического программирования. Минск: Изд-во БГУ, 1975. 265 с.
22. Малкин И.Г. Теория устойчивого движения. 2-е изд. М.: Едиториал УРСС, 2004. 432 с.

23. *Cimen T.D.* State-Dependent Riccati Equation Control: A Survey // Proceedings of the 17th World Congress IFAC. Seoul, Korea, 2008. P. 3771–3775.
24. *Афанасьев В.Н.* Управление нелинейными неопределенными динамическими объектами. М.: ЛЕНАРД, 2015.
25. *Leong Y.P., Horowitz M.B., Burdick J.* Linearly Solvable Stochastic Control Lyapunov Functions // J. Control Optim. Math. 2016. No. 54.
<https://doi.org/10.1137/16M105767X>

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.В. Пакиным.

Поступила в редакцию 02.12.2024

После доработки 13.05.2025

Принята к публикации 20.05.2025

Нелинейные системы

© 2025 г. А.Р. ГАЙДУК, д-р техн. наук (gaiduk_2003@mail.ru)
(Институт радиотехнических систем и управления
Южного федерального университета, Таганрог)

СИНТЕЗ ГИБРИДНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПОДХОДА¹

Разработан метод синтеза гибридных нелинейных систем управления объектами с дифференцируемыми нелинейностями и измеряемым вектором состояния на основе непрерывных квазилинейных моделей, с применением квазилинейной дискретизации. Гибридная система синтезируется с повышенным периодом дискретизации управления и нулевой статической ошибкой по задающему воздействию. Решение задачи синтеза существует, если нелинейный объект удовлетворяет условиям критериев управляемости по состоянию, критерия управляемости выхода и некоторым другим условиям. Устойчивость гибридной системы доказывается с применением «технического» подхода, предложенного М.А. Айзерманом и Е.С. Пятницким, а также метода функций Ляпунова. Эффективность предложенного метода синтеза гибридных систем управления иллюстрируется численным примером. Предложенный метод может применяться для создания гибридных систем управления нелинейными объектами различного назначения.

Ключевые слова: дифференцируемая нелинейность, квазилинейная модель, критерий управляемости по состоянию, критерий управляемости выхода, квазилинейная дискретизация, гибридная система, устойчивость, статическая ошибка.

DOI: 10.31857/S0005231025100027

1. Введение

В последнее время значительное внимание уделяется разработке методов синтеза гибридных нелинейных систем управления, которые характеризуются наличием непрерывной и дискретной нелинейной динамики, что обуславливает необходимость применения дифференциальных и разностных уравнений [1–3]. В действительности такие системы представляют совокупность непрерывных (аппаратных) и цифровых (программируемых) элементов [4]. В известных публикациях к гибридным относят весьма разнообразные системы.

¹ Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда, (грант № 24-19-00063), «Теоретические основы и методы группового управления безэкипажными подводными аппаратами», <https://rscf.ru/project/24-19-00063/>, выполняемый в Южном федеральном университете.

Гибридные системы первого класса включают либо один нелинейный объект, работающий в переключаемых режимах, либо несколько объектов, которые должны включаться в той или иной последовательности. В этом случае разностные уравнения описывают цифровую часть, которая обеспечивает переключение элементов непрерывной части [1, 5–8]. Для создания гибридных нелинейных систем оптимального управления, в [1] используется необходимый принцип гибридности (Hybrid Necessary Principle), который позволяет учесть ограничения, обусловленные стратегией переключения. В [5] эта же цель достигается применением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана и спектрального метода Галеркина.

Гибридность системы управления, рассматриваемой в [6], обусловлена переключениями нескольких непрерывных подсистем, а создаваемой в [7] системы – переключениями режимов ее работы. В [8] рассматривается квадрокоптер с переключаемой в полете морфологией. Его гибридная система управления включает нелинейный ПИД-регулятор и дискретный регулятор, которые обеспечивают устойчивость системы управления при всех возможных конфигурациях квадрокоптера.

Второй класс гибридных систем, представляется более определенным [2, 3]. Здесь непрерывный объект управления снабжается дискретным (цифровым) регулятором. Основная проблема – обеспечение стабильного функционирования гибридной системы при относительно большом периоде работы цифрового контроллера. Эта необходимость возникает при создании систем управления инерционными объектами, такими как хлебопекарные печи, инкубаторы, теплицы и т.п., а также объектами, функционирующими в жестких температурных условиях, когда затруднено охлаждение контроллера. Из-за большого периода оказываются невыполненными условия теоремы Котельникова, что исключает возможность сохранения устойчивости системы, которая имеет место в классических случаях при достаточно малом периоде дискретизации. Поэтому для создания гибридных систем управления данного класса привлекаются различные методы [2, 3, 9–12]. В [2] для этой цели применяется прогнозирующее управление на основе квадратичного и целочисленного программирования. Эффективность подхода иллюстрируется примером синтеза гибридной системы управления объектом, включающим три сферических резервуара.

Метод гибридного терминального управления с использованием идентифицированной модели объекта управления разработан в [3]. Здесь для идентификации нелинейных объектов предложено использовать искусственную двухслойную нейронную сеть. Для синтеза гибридных систем управления нелинейными объектами с запаздыванием и параметрической неопределенностью в [9–11] применяются критерий гиперустойчивости, условие L-диссипативности и фильтр-корректор. Дискретное управление здесь является результатом дискретизации непрерывного. В [12] рассматривается задача отслеживания заданной траектории квадрокоптером в условиях неопределен-

ности. В системе слежения применяется гибридный автопилот, реализующий прогнозирующее и нечеткое управление.

В данной работе разработан новый метод синтеза гибридных нелинейных систем управления односвязными объектами с дифференцируемыми нелинейностями и измеряемым вектором состояния. При этом используются квазилинейные модели нелинейных объектов, а также метод квазилинейной дискретизации [13–17]. Предполагается, что объект удовлетворяет критериям управляемости по состоянию, управляемости выхода и некоторым дополнительным условиям. Синтезируются гибридные системы второго класса с увеличенным периодом дискретизации, что позволяет существенно снизить требования к быстродействию вычислительных средств. Основным ограничением разработанного метода является дифференцируемость нелинейностей объекта управления. Если вектор состояния не измеряется, то может использоваться наблюдатель состояния.

2. Постановка задачи

Рассматриваются односвязные аффинные по управлению нелинейные объекты, уравнения которых в отклонениях имеют вид

$$(1) \quad \dot{x} = \varphi(x, u, f), \quad y = \xi(x, u),$$

где $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ – вектор переменных состояния; $u, f, y \in \mathbb{R}$ – скалярные управление, возмущение и выходная управляемая переменная; $\varphi(x, u, f)$ – нелинейная n -вектор-функция, $\xi(x, u)$ – скалярная нелинейная функция. Эти функции являются ограниченными, дифференцируемыми по всем аргументам; причем $\varphi(0, 0, 0) = 0$, $\xi(0, 0) = 0$. Вектор состояния x и выходная величина y или отклонение $\varepsilon = g - y$ измеряются. Здесь $0 \in \mathbb{R}^n$ – нулевой вектор, $g = g(t) \in \mathbb{R}$ и $f = f(t) \in \mathbb{R}$ – ограниченные по модулю задающее воздействие и возмущение, являющиеся произвольными функциями времени, причем $f(t)$ не измеряется.

Так как нелинейности $\varphi(x, u, f)$ и $\xi(x, u)$ в (1) являются дифференцируемыми, то методом, представленным в [15, 16], можно получить квазилинейную модель (КЛМ) вида

$$(2) \quad \dot{x} = A(x)x + b(x)u + h(x)f, \quad y = c^T(x)x + d(x)u,$$

где $A(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $b(x), h(x), c(x) \in \mathbb{R}^n$ – функциональные матрица и векторы, все элементы которых, а также $d(x) \in \mathbb{R}$ – известные ограниченные дифференцируемые нелинейные функции или числа. Подчеркнем, что КЛМ описывают соответствующие объекты с дифференцируемыми нелинейностями с той же точностью, что и уравнения (1), т.е. свойства уравнений (2) полностью соответствуют свойствам уравнений (1). Различные методы построения КЛМ известны достаточно давно. Например, уравнение $\dot{x} = D(x)x$ использовалось Н.Н. Красовским и др. для построения функций Ляпунова нелинейных систем еще в середине прошлого века, см. [18].

Предполагается, что КЛМ (2) удовлетворяет критерию управляемости по состоянию:

$$(3) \quad \det U_s(x) = \det[b(x) \ A(x)b(x) \ \dots \ A^{n-1}(x)b(x)] \neq 0, \ \forall x \in \Omega_{U_s},$$

а также критерию управляемости выхода:

$$(4) \quad \gamma_{об}(x) \neq 0, \ \forall x \in \Omega_{U_o},$$

где $\gamma_{об}(x)$ – показатель управляемости выхода объекта (1), определяемый выражением

$$(5) \quad \gamma_{об}(x) = d(x) \det A(x) - c^T(x) \operatorname{adj} A(x) b(x).$$

В (3)–(5) $\Omega_{U_s} = \{x \in \mathbb{R}^n : \det U_s(x) \neq 0\}$; $\Omega_{U_o} = \{x \in \mathbb{R}^n : \gamma_{об}(x) \neq 0\}$; $\operatorname{adj} A(x)$ – присоединенная к $A(x)$ матрица [19]; $\Omega_{U_u} = \Omega_{U_o} \cap \Omega_{U_s}$ – множество векторов $x \in \mathbb{R}^n$, при которых выполняются условия (3), (4); кроме этого, и Ω_{U_s} , и Ω_{U_o} включают вектор $x = \mathbf{0}$.

Целью данной работы является разработка метода синтеза гибридных систем второго класса для управления нелинейными объектами типа (1). Периоды дискретизации этих систем должны быть существенно большими тех периодов, которые имеют дискретные системы управления, созданные с применением традиционных методов. Для решения этой задачи используется кусочно-постоянное управление, получаемое методом квазилинейной дискретизации нелинейных объектов [17].

3. Метод квазилинейной дискретизации

В этом методе подвергаются дискретизации не уравнения нелинейных объектов, а их квазилинейные модели, с применением метода трапеций. Возможность этого обусловлена ограниченностью правых частей уравнений КЛМ (2) при ограниченных x , u , g и f .

Пусть T – некоторый период дискретизации решений $x = x(t) \in \Omega_{U_u}$ дифференциального уравнения (2). Каждому моменту времени $t = kT$, $k = 0, 1, 2, \dots$ соответствует дискретное значение $x_k = x(kT)$ этого решения. Точное значение $x_{k+1} = x(kT + T)$ можно определить выражением

$$(6) \quad x_{k+1} = x_k + \int_{kT}^{kT+T} F(t) dt,$$

где $F(t) = A(x)x + b(x)u + h(x)f(t) \big|_{x=x(t)}$ – правая часть первого уравнения (2). Примем, что управление $u = u_k$ является ограниченным и кусочно-постоянным. В настоящее время точные методы вычисления интегралов (6) неизвестны, поэтому на основе модифицированного метода трапеций подынтегральное выражение в (6) заменяется следующим:

$$\bar{F} = 0,5[A_k x_k + A_k x_{k+1} + 2b_k u_k + 2h_k f_k] + \Delta_k,$$

где $\Delta_k = 0,5[(A_{k+1} - A_k)x_{k+1} + b_{k+1}u_{k+1} - b_k u_k + h_{k+1}f_{k+1} - h_k f_k]$. Здесь для краткости записи введены обозначения: $A_k = A(x_k)$, $b_k = b(x_k)$, $h_k = h(x_k)$. Заменяя в (6) $F(t)$ на $\bar{F}$ при $\Delta_k = \mathbf{0}$ и интегрируя, получим разностное уравнение

$$(7) \quad [E - 0,5TA(x_k)]x_{k+1} = [E + 0,5TA(x_k)]x_k + Tb(x_k)u_k + Th(x_k)f_k, \quad x_k \in \Omega_{U_u}.$$

Отметим, что модификация метода трапеций состоит в добавлении и вычитании суммы $A_k x_{k+1} + b_k u_k + h_k f_k$ при выводе выражения $\bar{F}(kT)$ из $F(t)$.

Уравнение (7) может быть разрешено относительно x_{k+1} , если матрица $[E - 0,5TA(x_k)]$ имеет обратную, т.е. если выполняется следующее условие на выбор периода T :

$$(8) \quad \det[E - 0,5TA(x)] \neq 0, \quad x \in \Omega_{U_u}.$$

Чтобы найти T , ищутся корни η_i вспомогательного уравнения $\det[E - 0,5\eta A(x)] = 0$. Пусть это уравнение при $x \in \Omega_{U_u}$ имеет $0 < m(x) \leq n$ [20, с. 37] вещественных, положительных корней, причем из них $m_1(x)$ не зависят от x , а $m_2(x) = m(x) - m_1(x)$ зависят от x . Тогда

$$(9) \quad 0 < T < \min\{\eta_{\min,1}, \eta_{\min,2}\},$$

где $\eta_{\min,1} = \min\{\eta_i, i = \overline{1, m_1(x)}, x \in \Omega_{U_u}\}$; $\eta_{\min,2} = \inf\{\eta > 0 : \eta_i = \eta_i(x), i = \overline{1, m_2(x)}, x \in \Omega_{U_u}\}$.

Если же $m(x) \equiv 0$, т.е. уравнение $\det[E - 0,5\eta A(x)] = 0$ не имеет вещественных, положительных корней η_i , то из условия на матрицу $[E - 0,5TA(x_k)]$ ограничений на T не следует.

В этом случае значение T в (8) принимается произвольным, исходя из конструктивных ограничений, причем в дальнейшем значение T может быть уточнено.

Если период T выбран согласно (8), то из (7) и второго уравнения (2) следуют выражения:

$$(10) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= A_d(x_k)x_k + b_d(x_k)u_k + h_d(x_k)f_k, \\ y_k &= c^T(x_k)x_k + d(x_k)u_k, \quad x_k \in \Omega_{U_u}, \end{aligned}$$

где

$$(11) \quad A_d(x_k) = [E - 0,5TA(x_k)]^{-1}[E + 0,5TA(x_k)],$$

$$(12) \quad \begin{aligned} b_d(x_k) &= [E - 0,5TA(x_k)]^{-1}Tb(x_k), \\ h_d(x_k) &= [E - 0,5TA(x_k)]^{-1}Th(x_k). \end{aligned}$$

Соотношения (6)–(12) представляют метод квазилинейной дискретизации, а выражения (10)–(12) являются дискретной квазилинейной моделью

(ДКЛМ) объекта (1) [17]. В отличие от точной КЛМ (2) эта модель является приближенной. Однако, как будет показано ниже, если некоторое управление u_k обеспечивает устойчивость положения равновесия ДКЛМ (10), то это же управление, при некоторых условиях, обеспечивает устойчивость и положения равновесия системы управления объектом (1). В этом смысле квазилинейная дискретизация аналогична классической линеаризации в непрерывном случае, при которой управление, построенное по уравнениям первого приближения, стабилизирует в малом положение равновесия нелинейной системы.

Применение ДКЛМ (10)–(12) позволяет придать гибридным системам значительно больший период дискретизации по сравнению с традиционными подходами, тем самым существенно снижая требования по быстродействию к контроллерам систем управления.

4. Стабилизирующее управление

Построение этого управления осуществляется алгебраическим полиномиально-матричным (АПМ) методом [21, 22]. Будем считать, что период T выбран таким, что выполнено условие (8) и получена ДКЛМ (10)–(12), которая удовлетворяет критерию управляемости по состоянию² нелинейных дискретных объектов:

$$(13) \quad \det U_d(x_k) = \det[b_d(x_k) \ A_d(x_k)b_d(x_k) \ \dots \ A_d^{n-1}(x_k)b_d(x_k)] \neq 0, \quad x_k \in \Omega_{Ud},$$

где $\Omega_{Ud} = \{x_k \in \Omega_{Uu} : \det U_d(x_k) \neq 0\}$, т.е. $\Omega_{Ud} \subset \Omega_{Uu}$ – область, в которой выполнены условия (3), (4), (8), (13) и содержится точка $x = \mathbf{0}$.

При этом дискретное управление, стабилизирующее систему (10)–(12), имеет вид

$$(14) \quad u_k(x_k) = -l^T(x_k)x_k = -[l_1(x_k) \ l_2(x_k) \ \dots \ l_n(x_k)]x_k.$$

Коэффициенты $l_i(x_k)$ определяются по следующему алгоритму [21]:

1) по (11), (12) находятся функциональные полиномы:

$$(15) \quad \begin{aligned} A_d(z, x_k) &= \det[zE - A_d(x_k)] = \\ &= z^n + \alpha_{n-1}(x_k)z^{n-1} + \dots + \alpha_1(x_k)z + \alpha_0(x_k), \end{aligned}$$

$$(16) \quad \begin{aligned} V_{d,i}(z, x_k) &= e_i^T \text{adj}[zE - A_d(x_k)]b_d(x_k) = \\ &= v_{i,n-1}(x_k)z^{n-1} + v_{i,n-2}(x_k)z^{n-2} + \dots + v_{i,0}(x_k), \end{aligned}$$

где e_i – i -й столбец единичной $n \times n$ -матрицы E ; $\alpha_j(x_k)$, $v_{i,j}(x_k)$ – функциональные или числовые коэффициенты, $i = 1, \dots, n$; $j = 0, 1, \dots, n-1$.

² Вопрос о том, выполняется ли условие (13), если выполнены условия (3) и (8), является открытым.

2) формируется полином

$$(17) \quad D^*(z) = \prod_{i=1}^n (z - \sigma_i^*) = z^n + \delta_{n-1}^* z^{n-1} + \dots + \delta_1^* z + \delta_0^*,$$

где σ_i^* – вещественные числа, для которых найдутся не зависящие от i и κ величины $0 < \varsigma_1 < 1$ и $0 < \varsigma_2$, удовлетворяющие условиям:

$$(18) \quad |\sigma_i^*| \leq 1 - \varsigma_1, \quad \varsigma_2 < |\sigma_i^* - \sigma_\kappa^*|, \quad i \neq \kappa, \quad i, \kappa = 1, \dots, n.$$

3) определяются коэффициенты разности

$$(19) \quad D^*(z) - A_d(z, x_k) = \rho_{n-1}(x_k) z^{n-1} + \dots + \rho_1(x_k) z + \rho_0(x_k),$$

где $\rho_j(x_k) = \delta_j^* - \alpha_j(x_k)$, $j = 0, 1, \dots, n-1$. Далее, коэффициенты суммы произведений полиномов $V_{d,i}(z, x_k)$ (16) на коэффициенты $l_i(x_k)$ из (14), $i = 1, \dots, n$, приравниваются коэффициентам полинома (19) при одинаковых степенях z . Полученные уравнения, записанные в векторно-матричной форме, образуют систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$(20) \quad \begin{bmatrix} v_{10}(x_k) & v_{20}(x_k) & \cdots & v_{n0}(x_k) \\ v_{11}(x_k) & v_{21}(x_k) & \cdots & v_{n1}(x_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1,n-1}(x_k) & v_{2,n-1}(x_k) & \cdots & v_{n,n-1}(x_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1(x_k) \\ l_2(x_k) \\ \vdots \\ l_n(x_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_0(x_k) \\ \rho_1(x_k) \\ \vdots \\ \rho_{n-1}(x_k) \end{bmatrix}.$$

СЛАУ (20) имеет единственное решение в силу условия (13). Вектор $l(x_k)$ – решение этой системы подставляется в управление (14), а полученное управление u_k – в уравнение ДКЛМ (10), что приводит к следующему уравнению виртуальной дискретной системы:

$$(21) \quad x_{k+1} = D_d(x_k) x_k + h_d(x_k) f_k, \quad x_k \in \Omega_{Ud}, \quad = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$(22) \quad D_d(x_k) = A_d(x_k) - b_d(x_k) l^\Gamma(x_k).$$

Следующая лемма устанавливает эффективность АПМ метода.

Лемма 1. Если выполнено условие (13), то СЛАУ (20) имеет единственное решение $l(x_k)$. При этом для любого $x_k \in \Omega_{Ud}$ собственные значения матрицы $D_d(x_k)$ (22) совпадают с корнями полинома $D^(z)$ (17), т.е. не зависят от x_k , являются вещественными, различными и по модулю меньшими единицы.*

Доказательство леммы 1 приведено в Приложении. Подчеркнем, что соотношения (8)–(22) могут использоваться для синтеза дискретных нелинейных систем управления [17, 22].

5. Синтез гибридной системы

Переходя к решению этой задачи, введем матрицу

$$(23) \quad \tilde{D}(x) = [E - 0,5Tb(x)l^T(x)]H_g(x),$$

где $H_g(x) = [D_d(x) - E][D_d(x) + E]^{-1}$; $D_d(x)$ – матрица (22), а вектор $l(x) = l(x_k)$ при $x_k = x$.

Пусть $\lambda_i^{\tilde{D}(x)}$ – собственные значения матрицы $\tilde{D}(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Предположим, в (10)–(20) и (23) период T такой, что выполнены условия (8), (13) и неравенства

$$(24) \quad \operatorname{Re} \lambda_i^{\tilde{D}(x)} < 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad x \in \Omega_{sys},$$

где $\Omega_{sys} = \{x \in \Omega_{Ud} : \operatorname{Re} \lambda_i^{\tilde{D}(x)} < 0, i = 1, \dots, n\}$, т.е. предполагается, что собственные значения матрицы $\tilde{D}(x)$ могут быть как действительными, так и комплексно-сопряженными, но с отрицательными вещественными частями, т.е. матрица $\tilde{D}(x)$ является гурвицевой в области Ω_{sys} . Отметим, что выбор значения T может быть итерационным: если при выбранном периоде T условие (24) не выполняется, то в (8)–(20) и (23) период T уменьшается.

Если условия (3), (4), (8), (13) и (24) выполнены, то в качестве управления гибридной системы принимается дискретная, кусочно-постоянная функция следующего вида:

$$(25) \quad u = u_T(x_k, g_k) = l_g(x_k)g_k - l^T(x_k)x_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $x_k \in \Omega_{sys}$, $g_k = g(t)|_{t=kT}$ – значения задающего воздействия $g(t)$; коэффициент

$$(26) \quad l_g(x) = \det D_r(x) / \gamma_{об}(x),$$

а матрица $D_r(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ определяется выражением

$$(27) \quad D_r(x) = A(x) - b(x)l^T(x).$$

Здесь и ниже вектор $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ – решение системы (1), (25) или (2), (25).

Из выражений (2) и (25) вытекают следующие уравнения КЛМ гибридной системы:

$$(28) \quad \dot{x} = A(x)x - b(x)l^T(x_k)x_k + b(x)l_g(x_k)g_k + h(x)f, \quad kT \leq t < (k+1)T,$$

$$(29) \quad y = c^T(x)x - d(x)l^T(x_k)x_k + d(x)l_g(x_k)g_k, \\ kT \leq t < (k+1)T, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

В соответствии с определением (25) на поверхностях $\varphi(t, x) = t - kT = 0$, $k = 1, 2, 3, \dots$ управление $u = u(t)$ претерпевает разрывы первого рода, т.е. мгновенно изменяет свое значение [23]. Такие мгновенно изменяющие свои значения управления используются как допустимые в [24–26]. В данном слу-

чае указанные поверхности разрыва при каждом $k \geq 1$ образуют по два сектора непрерывности как управления и (25), так и правой части уравнения (28) [23]. По формуле (25) в левых секторах непрерывности $kT - T < t < kT$ управление определяется выражением $u^-(t) = l_g(x_{k-1})g_{k-1} - l^T(x_{k-1})x_{k-1}$, а в правых секторах $kT < t < kT + T$ — выражением $u^+(t) = l_g(x_k)g_k - l^T(x_k)x_k$. Здесь x_k — значения решения дифференциальной системы (28) на поверхностях разрыва, т.е. при $t = kT$, $k = 1, 2, 3, \dots$. При этом, как и в [24, с. 15] или в [25, с. 22], предполагается существование правого и левого конечных пределов в каждом секторе непрерывности.

Однако в классическом смысле значения x_k дифференциальной системой (28) не определяются из-за разрывов ее правой части. Известно несколько подходов к преодолению этой проблемы [26]. Одним из них является «техническое» [23] («физическое» [26]) направление. Его авторы М.А. Айзерман и Е.С. Пятницкий предложили учитывать физический смысл задачи, пользуясь «дополнительной информацией об «исходной системе», чтобы сузить область возможных решений» на поверхностях разрыва [23, с. 39]. Учитывая, что x_0 задано, а в гибридной системе рассматриваемого типа последующие значения x_k , $k = 1, 2, 3, \dots$ измеряются, примем, что в левых секторах непрерывности решение уравнения (28) определяется выражением

$$(30) \quad x^-(t) = x_{k-1} + \int_{kT-T}^t [A(x(\tau))x(\tau) - b(x(\tau))l^T(x_{k-1})x_{k-1} + v^-(\tau)]d\tau, \\ kT - T \leq t < kT, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

где $x_0 = x(0)$, $v^-(\tau) = b(x(\tau))l_g(x_{k-1})g_{k-1} + h(x(\tau))f(\tau)$, а интеграл является интегралом Лебега [23]. При этом измеряемые значения, следуя [24, с. 15], удобно определить выражением $x_k = \lim_{t \rightarrow T} x^-(t)$. Заменяя в равенстве (30) индекс k на $k + 1$, получим выражение для $x(t)$ в правых секторах непрерывности:

$$(31) \quad x^+(t) = x_k + \int_{kT}^t [A(x(\tau))x(\tau) - b(x(\tau))l^T(x_k)x_k + v^+(\tau)]d\tau, \\ kT \leq t < kT + T, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

где $v^+(\tau) = b(x(\tau))l_g(x_k)g_k + h(x(\tau))f(\tau)$.

Из предположения о существовании правого и левого пределов в каждом секторе непрерывности следует, что оба выражения (30) и (31) дают одно и то же значение $x_k = \lim_{t \rightarrow T} x^-(t) = \lim_{t \rightarrow 0} x^+(t)$. Таким образом, подход Айзермана–Пятницкого позволяет определить для всех t значения непрерывного решения $x(t)$ дифференциальной системы (28) при кусочно-постоянном управлении (25) путем учета дополнительной информации о свойствах гибридной системы.

Сформулируем теорему о свойствах системы (1), (25).

Теорема. Если выполняются условия (3), (4), (8), (13), (18) и (24), а вектор $l(x_k)$ в (25) определяется решением СЛАУ (20), то при $g(t) = f(t) \equiv 0$ и всех $t \geq 0$ существует множество решений $x(t, x_0)$ уравнения (28) таких, что

$$(32) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = \mathbf{0}, \quad x \in \Omega_{sys}.$$

Если коэффициент $l_g(x_k)$ в (25) определяется выражением (26), то статическая ошибка системы (1), (25) по воздействию $g(t)$ равна нулю, т.е. при $g(t) = g_0 1(t)$ и $f(t) \equiv 0$

$$(33) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_g(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [g(t) - y_g(t)] = 0.$$

Здесь $1(t)$ – единичная ступенчатая функция (функция Хэвисайда); $y_g(t)$ – реакция системы (28), (29), т.е. (1), (25), при $f(t) \equiv 0$ на воздействие $g(t) = g_0 1(t)$ при некоторых $x_0 = x(0)$ и g_0 таких, что $x(t, x_0, g_0) \in \Omega_{sys}$, $t \geq 0$.

Доказательство теоремы дается в Приложении. Следующая лемма устанавливает, что из управляемости объекта следует «управляемость» замкнутой системы, т.е. возможность обеспечения необходимого изменения выхода системы соответствующим задающим воздействием.

Лемма 2. Если матрицы $U_s(x)$ и $D_r(x)$ определены выражениями (3) и (27), то выполняется равенство

$$(34) \quad \begin{aligned} \det Q_r(x) &= \det[b(x) \ D_r(x)b(x) \ \dots \ D_r^{n-1}(x)b(x)] = \\ &= \det U_s(x), \quad x \in \Omega_{sys}. \end{aligned}$$

Доказательство леммы 2 приведено в Приложении. Соотношения (2), (5), (9)–(20), (22), (23), (25)–(29) являются математическим обеспечением предлагаемого метода синтеза гибридных нелинейных систем управления, а неравенства (3), (4), (8), (13), (18) и (24) составляют условия разрешимости задачи синтеза этим методом. Эффективность разработанного метода иллюстрируется численным модельным примером.

6. Пример

Синтезировать гибридную систему управления дифферентом (ГСУД) автономного необитаемого подводного аппарата (АНПА). Управление дифферентом осуществляется с применением носовой и кормовой емкостей изменяемого объема [27] и описывается системой уравнений:

$$(35) \quad \ddot{\psi} = \alpha_1 U_\psi \cos \psi - \alpha_2 U_a \sin \psi - \beta \left| \dot{\psi} \right| \dot{\psi}, \quad \dot{U}_\psi = -k_v U_\psi + k_u u, \quad y = \psi,$$

где ψ и $\dot{\psi}$ – угол дифферента и скорость его изменения, U_ψ – разность объемов носовой и кормовой емкостей, U_a – водоизмещение АНПА; α_1 , α_2 – гидродинамические коэффициенты; β – коэффициент сопротивления изменению дифферента; k_v и k_u – параметры устройства, изменяющего U_ψ ; u – управление этого устройства; y – управляемая выходная переменная ГСУД

АНПА; ψ , $\dot{\psi}$ и U_ψ – измеряемые величины. ГСУД должна иметь нулевую ошибку по дифференту, а также длительность переходного процесса не более 5 с при нулевых начальных условиях и желаемом дифференте $g(t) = \psi^*(t) = -0,5236 \times 1(t)$ рад.

Решение. Полагая $\mathfrak{x}_1 = \psi$, $\mathfrak{x}_2 = \dot{\psi}$ и $\mathfrak{x}_3 = U_\psi$, запишем уравнения (35) в форме Коши:

$$(36) \quad \begin{aligned} \dot{\mathfrak{x}}_1 &= \mathfrak{x}_2, \\ \dot{\mathfrak{x}}_2 &= \alpha_1 \mathfrak{x}_3 \cos \mathfrak{x}_1 - \alpha_2 U_a \sin \mathfrak{x}_1 - \beta |\mathfrak{x}_2| \mathfrak{x}_2, \\ \dot{\mathfrak{x}}_3 &= -k_v \mathfrak{x}_3 + k_u u, y = \mathfrak{x}_1. \end{aligned}$$

Так как $\sin \mathfrak{x}_1 = \omega(\mathfrak{x}_1)\mathfrak{x}_1$, где $\omega(\mathfrak{x}_1) = (\sin \mathfrak{x}_1)/\mathfrak{x}_1$ – КЛМ функции $\sin \mathfrak{x}_1$ [16], то КЛМ нелинейной системы уравнений (36) имеет вид (2), где

$$(37) \quad \begin{aligned} A(x) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a_{21}(x) & -a_{22}(x) & a_{23}(x) \\ 0 & 0 & -a_{33}(x) \end{bmatrix}; \\ b(x) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_u \end{bmatrix}; \quad c(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad h(x) = \mathbf{0}; \quad d(x) = 0. \end{aligned}$$

Здесь $x = [\mathfrak{x}_1 \ \mathfrak{x}_2 \ \mathfrak{x}_3]^T$, $a_{21}(x) = \alpha_2 U_a \omega(\mathfrak{x}_1)$, $a_{22}(x) = \beta |\mathfrak{x}_2|$, $a_{23}(x) = \alpha_1 \cos \mathfrak{x}_1$, $a_{33}(x) = k_v$.

Рассмотрим решение задачи синтеза ГСУД при $g(t) = \psi^*(t)$ и следующих модельных значениях коэффициентов в (37): $a_{21}(x) = 7,044\omega(\mathfrak{x}_1)$; $a_{22}(x) = 1,192 |\mathfrak{x}_2|$; $a_{23}(x) = 6,48 \cos \mathfrak{x}_1$; $a_{33}(x) = 1,326$; $k_v = k_u = 0,12$. В данном случае условия (3) и (4) с учетом (5) и (37) имеют вид $\det U_s(x) = 0,0933(\cos \mathfrak{x}_1)^2 \neq 0$ и $\gamma_{об}(x) = 0,7776 \cos \mathfrak{x}_1 \neq 0$, т.е. область Ω_{U_u} ограничена условиями: $|\mathfrak{x}_1| < \pi/2$, $|\mathfrak{x}_2| \leq \mathfrak{x}_{2,\max}$; $|\mathfrak{x}_3| \leq \mathfrak{x}_{3,\max}$, где $\mathfrak{x}_{2,\max}, \mathfrak{x}_{3,\max}$ – некоторые конструктивные ограничения. Пусть $\mathfrak{x}_{2,\max} = 3,5$ рад/с; $L(\eta, x) = [E - 0,5\eta A(x)]$, тогда с учетом (37) имеем уравнение

$$(38) \quad \det L(\eta, x) = (1 + 0,663\eta) [1 + 0,596 |\mathfrak{x}_2| \eta + 3,522\omega(\mathfrak{x}_1)\eta^2] = 0.$$

Уравнение (38) в области Ω_{U_u} не имеет вещественных, положительных корней η_i , т.е. из условия (8) на матрицу $[E - 0,5T A(x_k)]$ не следуют ограничения на период T . Поэтому примем $T_1 = 0,6$ с и $T_2 = 0,8$ с исходя из конструктивных ограничений. Переходя к определению управления, по (11), (12) и (37) находятся матрица $A_d(x_k)$ и вектор $b_d(x_k)$; численным методом устанавливается выполнение условия (13) в области $\Omega_{U_d} = \Omega_{U_u}$; по (15), (16) находятся полиномы $A_d(z, x_k)$ и $V_{d,i}(z, x_k)$, $i = 1, 2, 3$.

Полином $D^*(z)$, найденный по (17) и (18), позволяет по (19) найти коэффициенты $\rho_j(x_k)$, $j = 0, 1, 2$, и составить СЛАУ (20), решение которой определяет трехмерный вектор $l(x_k)$. Далее по (22) находится матрица $D_d(x_k)$, а по (23) – матрица $\tilde{D}(x)$. Численным путем устанавливается, что условие (24)

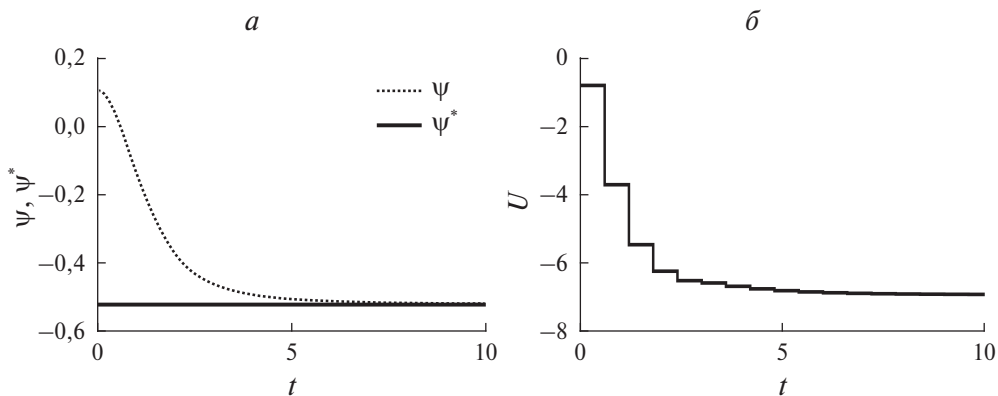


Рис. 1. Графики переменных при $T = 0,6$ с: a – углы дифферента; b – управление.

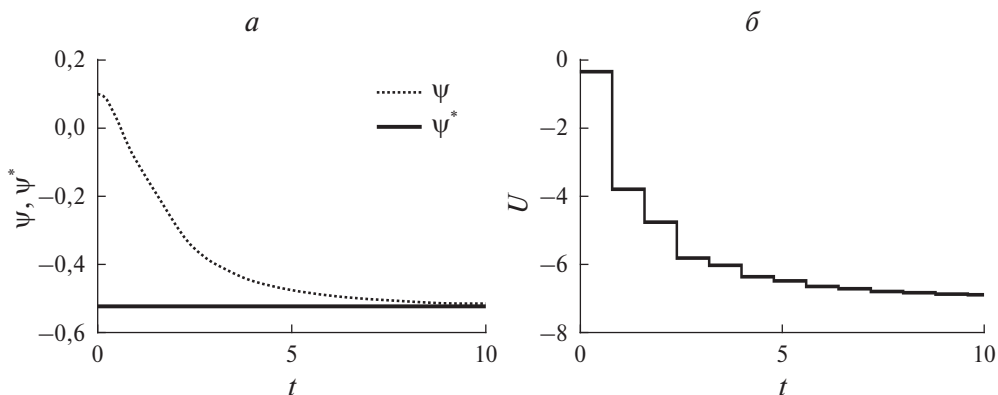


Рис. 2. Графики переменных при $T = 0,8$ с: a – углы дифферента; b – управление.

как при $T = 0,6$ с, так и при $T = 0,8$ с выполняется в области $\Omega_{sys} = \Omega_{Uu}$. Наконец, по формулам (27), (26) и (25) определяются $D_r(x)$, $l_g(x)$ и $u_r(x_k, g_k)$.

Подчеркнем, что при работе ГСУД все операции, кроме формирования полинома $D^*(z)$, начиная с вычисления матрицы $A(x)$ и вектора $b(x)$ (37), затем $A_d(x_k)$, $b_d(x_k)$ и заканчивая определением управления $u_r(x_k, g_k)$, выполняются цифровым устройством управления при всех $k = 0, 1, 2, \dots$ с периодом T . Этот факт обусловлен нелинейным характером объекта (35).

Исследование синтезированной ГСУД. С этой целью в MATLAB при каждом $t = kT$ вычисляются, как описано выше, значения дискретного управления $u_r(x_k, g_k)$, а на каждом интервале времени $kT \leq t < (k+1)T$ с применением функции ode45 интегрируется система уравнений (36) при $u = u_r(x_k, g_k)$ с начальными условиями $x_{0,k} = x(kT)$ и $\psi^*(t) = \psi_0 1(t)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. На рис. 1 и 2 приведены переходные процессы синтезированной ГСУД АНПА при $D^*(z) = z^3 - 0,8z^2 + 0,2032z - 0,01613$; $x_{0,0} = [0,1 \ 0,01 \ 0]^T$ и $\psi_0 = -0,5236$ рад.

Как видно, переменные объекта управления являются непрерывными функциями, хотя управление изменяется со значительным периодом, что характерно для гибридных систем. Аналогичными являются переходные процессы и при других условиях. При этом незначительное увеличение периода дискретизации приводит лишь к небольшому увеличению длительности переходного процесса.

В таблице приведены собственные значения $\lambda_i(x)$, $i = 1, 2, 3$ матрицы $D_{\Gamma}(x_k)$ ГСУД АНПА при двух значениях периода T и некоторых значениях k .

Таблица

k	$T = 0,6$		$T = 0,8$	
	λ_1	$\lambda_{2,3}$	λ_1	$\lambda_{2,3}$
0	-1,3463	$-0,7002 \pm 1,5983i$	-1,3250	$-0,2280 \pm 1,3446i$
1	-1,3484	$-0,8130 \pm 1,6057i$	-1,3249	$-0,3112 \pm 1,3637i$
5	-1,3468	$-0,7261 \pm 1,5810i$	-1,3249	$-0,2556 \pm 1,3322i$
10	-1,3466	$-0,7138 \pm 1,5753i$	-1,3249	$-0,2487 \pm 1,3249i$

Из таблицы следует, что собственные значения матрицы $D_{\Gamma}(x)$ имеют отрицательные вещественные части, причем с увеличением периода T эти части уменьшаются по модулю, что и приводит к потере устойчивости при значительном увеличении T . Представляется существенным, что в течение переходного процесса гибридной системы вещественные части собственных значений указанной матрицы изменяются незначительно.

7. Заключение

В работе предложен метод синтеза гибридных нелинейных систем управления непрерывными объектами с дифференцируемыми нелинейностями и измеряемым вектором состояния. Решение задачи получено с применением непрерывных и дискретных квазилинейных моделей, алгебраического полиномиально-матричного метода синтеза нелинейных систем, а также подхода Айзермана–Пятницкого к решению дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. Предложенный метод может применяться, если непрерывная и дискретная квазилинейные модели нелинейного объекта являются управляемыми по состоянию, выполняются условие критерия управляемости его выхода и некоторые дополнительные условия. Эффективность метода иллюстрируется численным примером синтеза гибридной нелинейной системы управления дифферентом автономного необитаемого подводного аппарата. Предложенный метод может применяться для создания гибридных систем управления нелинейными объектами производственного, социального и специального назначения с применением вычислительных средств автоматизации невысокого быстродействия.

Доказательство леммы 1. Из выражений (6.3) и (6.55) [28, с. 145 и с. 169] следует, что условия управляемости систем в непрерывном и дискретном случаях по форме совпадают. Поэтому для доказательства леммы 1, сформулированной по отношению к дискретной системе, здесь используется теорема о свойствах управляемых непрерывных систем. С учетом этого замечания из теорем 1.1 и 1.2 [29, с. 29, 31, 32] следует утверждение: если выполнено неравенство (13), то задача определения вектора $l^T(x_k)$ для управления $u_k = -l^T(x_k)x_k$ (14), при котором собственные числа матрицы замкнутой дискретной системы (21) расположены на комплексной плоскости z заданным образом, имеет единственное решение.

Матрицей указанной замкнутой дискретной системы (21) является матрица $D_d(x_k) = A_d(x_k) - b_d(x_k)l^T(x_k)$ (22) с характеристическим полиномом:

$$(П.1) \quad D_d(z, x_k) = \det[zE - A_d(x_k) + b_d(x_k)l^T(x_k)], \quad x_k \in \Omega_{Ud}.$$

Таким образом, при заданном полиноме $D_d(z, x_k)$, т.е. при $D_d(z, x_k) = D^*(z)$, выражение (П.1) является уравнением относительно вектора $l^T(x_k)$, и именно оно в соответствии с указанными теоремами 1.1 и 1.2 из [29] при выполнении условия (13) имеет единственное решение. Применяя к (П.1) равенство (П.25) из [30, с. 233] при $\mu = 1$, вытекающее, в частности, из формул (I) и (II) [19, с. 55], получим:

$$D_d(z, x_k) = \det[zE - A_d(x_k)] + l^T(x_k)\text{adj}[zE - A_d(x_k)]b_d(x_k).$$

Отсюда с учетом обозначений (15), (16) и вектора $l^T(x_k) = [l_1(x_k) \ l_2(x_k) \ \dots \ l_n(x_k)]$ выводим, следуя [14, 15], эквивалентное представление того же полинома (П.1):

$$(П.2) \quad D_d(z, x_k) = A_d(z, x_k) + \sum_{i=1}^n l_i(x_k)V_{d,i}(z, x_k).$$

При этом, по построению, система (20) эквивалентна полиномиальному уравнению

$$\sum_{i=1}^n l_i(x_k)V_{d,i}(z, x_k) = \rho_{n-1}(x_k)z^{n-1} + \dots + \rho_1(x_k)z + \rho_0(x_k),$$

которое с учетом обозначения (19) записывается следующим образом:

$$(П.3) \quad \sum_{i=1}^n l_i(x_k)V_{d,i}(z, x_k) = D^*(z) - A_d(z, x_k), \quad x_k \in \Omega_{Ud}.$$

По (17) корнями полинома $D^*(z)$ являются числа σ_i^* , т.е. $D^*(\sigma_i^*) = 0$. Тогда согласно (П.3) $A_d(\sigma_i^*, x_k) + \sum_{i=1}^n l_i(x_k)V_{d,i}(\sigma_i^*, x_k) = 0$. Отсюда в силу (П.2)

следует равенство $D_d(\sigma_i^*, x_k) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, что соответствует утверждению леммы 1. Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Для этой цели воспользуемся известным свойством определителя, которое заключается в том, что если к одному столбцу матрицы определителя прибавить или вычесть другой ее столбец, умноженный на *число*, то значение определителя не изменится [31, с. 143]. Для краткости записей опустим аргументы матриц $A(x)$, $D_\Gamma(x)$, $Q_\Gamma(x)$ и векторов $b(x)$, $l(x)$ из (3), (27), (34) и подчеркнем, что $D_\Gamma = A - bl^T$, а $\det Q_\Gamma = \det[b \ D_\Gamma b \ \dots \ D_\Gamma^{n-1}b]$ при всех n . Докажем лемму 2 методом математической индукции, показав сначала, что она верна при $n = 1$ и $n = 2$.

Пусть $n = 1$, тогда $A = a_1$, $b = b_1$, $l = l_1$ и $\det U_s = b_1$ по (3). При этом $D_\Gamma = a_1 - b_1 l_1$, а $\det Q_\Gamma = b_1$; очевидно, $\det Q_\Gamma = \det U_s$. Положим $n = 2$. В этом случае по (3) $\det U_s = \det[b \ Ab]$, а по (34) $\det Q_\Gamma = \det[b \ D_\Gamma b] = \det[b \ Ab - \check{\beta}b]$, где $\check{\beta} = l^T b$ – скаляр, т.е. число, так как при каждом конкретном значении x векторы $l(x)$ и $b(x)$ являются числовыми. Отсюда по указанному свойству определителя $\det Q_\Gamma = \det \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix}$, т.е. $\det Q_\Gamma = \det U_s$. Итак, при $n = 1$ и $n = 2$ лемма 2 верна.

Предположим, лемма 2 верна при $n = \mu$, т.е. если $\det U_s = \det[b \ Ab \ \dots \ A^{\mu-1}b]$ и $\det Q_\Gamma = \det[b \ D_\Gamma b \ \dots \ D_\Gamma^{\mu-1}b] = \det U_s$, то покажем, что она верна и при $n = \mu + 1$. С этой целью запишем левую часть выражения (34) при $n = \mu + 1$ в более развернутой форме:

$$(П.4) \quad \det Q_\Gamma = \det[b \ D_\Gamma b \ D_\Gamma^2 b \ \dots \ D_\Gamma^{\mu-3} b \ D_\Gamma^{\mu-2} b \ D_\Gamma^{\mu-1} b \ D_\Gamma^\mu b].$$

Далее, будем преобразовывать по шагам столбцы матрицы определителя (П.4), начиная с $D_\Gamma^\mu b$ с учетом указанного свойства определителя и того, что матрица $D_\Gamma = A - bl^T$.

Шаг 1.1. $D_\Gamma^\mu b = D_\Gamma^{\mu-1}(A - bl^T)b = D_\Gamma^{\mu-1}Ab + \beta_0 D_\Gamma^{\mu-1}b \succ D_\Gamma^{\mu-1}Ab$, так как $\beta_0 = -l^T b$ – скаляр, а столбец $\beta_0 D_\Gamma^{\mu-1}b$ равен столбцу $D_\Gamma^{\mu-1}b$ матрицы определителя (П.4), умноженному на β_0 . Здесь и далее « $\succ$ » – это знак соответствия, в том смысле, что при замене в матрице определителя (П.4) столбца $D_\Gamma^\mu b$ столбцом $D_\Gamma^{\mu-1}Ab$ значение определителя (П.4) не изменится.

Шаг 1.2. $D_\Gamma^\mu b \succ D_\Gamma^{\mu-1}Ab = D_\Gamma^{\mu-2}(A - bl^T)Ab = D_\Gamma^{\mu-2}A^2b + \beta_1 D_\Gamma^{\mu-2}b \succ D_\Gamma^{\mu-2}A^2b$ в силу указанного свойства определителя, так как $\beta_1 = -l^T Ab$ – скаляр, а столбец $\beta_1 D_\Gamma^{\mu-2}b$ равен столбцу $D_\Gamma^{\mu-2}b$ матрицы определителя (П.4), умноженному на β_1 , т.е. столбец $\beta_1 D_\Gamma^{\mu-2}b$ пропорционален столбцу $D_\Gamma^{\mu-2}b$.

Шаг 1.3. $D_\Gamma^\mu b \succ D_\Gamma^{\mu-2}A^2b = D_\Gamma^{\mu-3}(A - bl^T)A^2b = D_\Gamma^{\mu-3}A^3b + \beta_2 D_\Gamma^{\mu-3}b \succ D_\Gamma^{\mu-3}A^3b$ в силу указанного свойства определителя, так как $\beta_2 = -l^T A^2b$ – скаляр, а столбец $\beta_2 D_\Gamma^{\mu-3}b$ пропорционален столбцу $D_\Gamma^{\mu-3}b$ матрицы определителя (П.4). Продолжая этот процесс на шаге 1. μ получим $D_\Gamma^\mu b \succ D_\Gamma^{\mu-\mu}A^\mu b = A^\mu b$.

Перейдем к преобразованию столбца $D_\Gamma^{\mu-1}b$ матрицы определителя (П.4).

Шаг 2.1. $D_\Gamma^{\mu-1}b = D_\Gamma^{\mu-2}(A - bl^T)b = D_\Gamma^{\mu-2}Ab + \beta_0 D_\Gamma^{\mu-2}b \succ D_\Gamma^{\mu-2}Ab$.

Шаг 2.2. $D_{\Gamma}^{\mu-1}b \succ D_{\Gamma}^{\mu-2}Ab = D_{\Gamma}^{\mu-3}(A - bl^T)Ab = D_{\Gamma}^{\mu-3}A^2b + \beta_1 D_{\Gamma}^{\mu-3}b \succ D_{\Gamma}^{\mu-3}A^2b$.

Продолжая преобразование, на шаге 2. $(\mu - 1)$ получим $D_{\Gamma}^{\mu-1}b \succ A^{\mu-1}b$. Очевидно, результатом применяемого преобразования каждого столбца $D_{\Gamma}^j b$ матрицы определителя (П.4) является столбец $A^j b$, $j = 1, \dots, \mu$. Так как это преобразование в силу указанного свойства определителя не изменяет значения (П.4), то отсюда следует, что $\det Q_{\Gamma} = \det U_s$ и при $n = \mu + 1$.

Итак, лемма 2 верна при $n = 1, 2$. Если она верна при $n = \mu$, то она верна и при $n = \mu + 1$. Тогда она верна для любого целого положительного n . Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы. Как показано выше, непрерывное решение уравнения (28) определено при всех $t \geq 0$ и $x \in \Omega_{sys}$. При этом его правая часть зависит от времени t , помимо вектора $x(t)$, что проявляется в дополнительных выражениях: $kT \leq t < kT + T$ и $k = 0, 1, 2, \dots$. С тем, чтобы зависимость от t сделать более явной и исключить k , заменим обозначение $x_k = x(kT)$ на $x(T \lfloor t/T \rfloor)$, где $\lfloor t/T \rfloor$ – операция взятия целой части от отношения t/T . В результате уравнение состояния (28) гибридной системы (1), (25) или, что тоже самое, (2), (25) примет вид:

$$(П.5) \quad \dot{x}(t) = D_{\Gamma}(x)x + \Upsilon_1(t, x) + b(x)l_g(x(T \lfloor t/T \rfloor))g(T \lfloor t/T \rfloor) + h(x)f(t),$$

$$(П.6) \quad \Upsilon_1(t, x) = b(x)[l^T(x)x - l^T(x(T \lfloor t/T \rfloor))x(T \lfloor t/T \rfloor)],$$

где $D_{\Gamma}(x)$ – матрица, определяемая выражением (27), и по-прежнему $x = x(t)$.

Для доказательства теоремы прежде всего покажем, что собственные значения матрицы $D_{\Gamma}(x)$ имеют отрицательные вещественные части. С этой целью, учитывая (11), (12) и заменяя (для краткости) x_k на x , запишем равенство (22) следующим образом:

$$(П.7) \quad \begin{aligned} & -^1[E + 0,5TA(x)] - \\ & - [E - 0,5TA(x)]^{-1}Tb(x)l^T(x) = D_d(x). \end{aligned}$$

Умножив обе части равенства (П.7) на матрицу $[E - 0,5TA(x)]$ слева, раскроем квадратные скобки и перенесем слагаемые с матрицей $A(x)$ в левую часть. Это дает выражение

$$(П.8) \quad 0,5TA(x)[D_d(x) + E] = D_d(x) - E + Tb(x)l^T(x).$$

По лемме 1 все собственные значения σ_i^* матрицы $D_d(x)$ такие, что $\sigma_i^* \neq \sigma_{\kappa}^*$, $i \neq \kappa$ и $|\sigma_i^*| < 1$. Поэтому существует матрица $[D_d(x) + E]^{-1}$, и из (П.8) следует равенство

$$(П.9) \quad A(x) = 2T^{-1}[D_d(x) - E + Tb(x)l^T(x)][D_d(x) + E]^{-1}.$$

Добавляя величину $-b(x)l^T(x)$ в обеих частях (П.9) и снова вынося матрицу $[D_d(x) + E]^{-1}$ вправо, получим с учетом обозначения (27) выражение

$$D_r(x) = \left\{ 2T^{-1} [D_d(x) - E + Tb(x)l^T(x)] - b(x)l^T(x)[D_d(x) + E] \right\} [D_d(x) + E]^{-1}.$$

Раскрыв в фигурных скобках обе квадратные скобки и приведя подобные, вынесем матрицу $[D_d(x) - E]$ за фигурные скобки вправо, а величину $2T^{-1}$ влево. Это дает равенство

$$(П.10) \quad D_r(x) = 2T^{-1} [E - 0,5Tb(x)l^T(x)] H_g(x), \quad x \in \Omega_{sys},$$

где $H_g(x) = [D_d(x) - E][D_d(x) + E]^{-1}$. Матрица $H_g(x)$ в условиях теоремы гурвицевая и имеет различные собственные значения. В этом легко убедиться, поскольку матрица $D_d(x)$ имеет различные собственные значения, т.е. она подобна диагональной матрице [20, с. 84].

Сравнивая (П.10) с (23), заключаем: матрица $D_r(x) = 2T^{-1}\tilde{D}(x)$, поэтому в соответствии с 2.15.8 из [20, с. 39] и условием (24) собственные значения матрицы $D_r(x)$ из (П.5) в условиях теоремы имеют отрицательные вещественные части при $x \in \Omega_{sys}$.

Далее, рассмотрим сначала свободное движение гибридной системы (28), (29), полагая $g(t) = f(t) \equiv 0$. Кроме того, имея ввиду теорему Ляпунова [32, с. 257], представим уравнение (П.5) с учетом (П.6) при $t \geq 0$ следующим образом:

$$(П.11) \quad \dot{x} = D_{r,0}x + \Upsilon(t, x),$$

где $D_{r,0} = D_r(0)$, $\Upsilon(t, x) = \Upsilon_1(t, x) + \Upsilon_2(x)$; $\Upsilon_2(x) = [D_r(x) - D_{r,0}]x$; вектор $\Upsilon_1(t, x)$ определен (П.6).

По доказанному выше матрица $D_r(x)$ при $\forall x \in \Omega_{sys}$ является гурвицевой; следовательно, в (П.11) постоянная матрица $D_{r,0}$ тоже гурвицевая. Покажем, что в условиях доказываемой теоремы вектор-функция $\Upsilon(t, x) = o(\|x\|)$ равномерно по t [32, с. 257]. С этой целью найдем пределы отношений $\Upsilon_1(x)/\|x\|^2$ и $\Upsilon_2(x)/\|x\|^2$ при $x(t) \rightarrow 0$. Достаточно очевидно, что при $\forall t \geq 0$

$$(П.12) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\Upsilon_2(x)/\|x\|^2) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^T P [D_r(x) - D_{r,0}] x / \|x\|^2) = 0.$$

Рассматривая предел отношения $\Upsilon_1(t, x)/\|x\|^2$, примем во внимание, что при всех t согласно (31) и (32), если $x \rightarrow 0$, то и $x(T \lfloor t/T \rfloor) \rightarrow 0$ тоже. Поэтому с учетом (П.6) имеем

$$(П.13) \quad \begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} (\Upsilon_2(t, x)/\|x\|^2) = \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \left(b(x) \left[l^T(x)x - l^T(x(T \lfloor t/T \rfloor))x(T \lfloor t/T \rfloor) \right] / \|x(t)\|^2 \right) = 0, \end{aligned}$$

так как при всех t оба вектора и $l^T(x)$, и $l^T(x(T|t/T))$ в этом выражении умножаются на векторы, стремящиеся к нулю. Таким образом, из (П.12) и (П.13) следует, что вектор-функция $\Upsilon(t, x) = o(\|x\|)$ равномерно по t , т.е.

$$(П.14) \quad \frac{\Upsilon(t, x)}{\|x\|} \xrightarrow[t]{} 0 \text{ при } x \rightarrow 0.$$

Матрица $D_{r,0}$ является гурвицевой, поэтому из (П.14) следует, что дифференциальная система (П.11) удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова [32, с. 257], в соответствии с которой решение $x = 0$ этой системы асимптотически устойчиво, т.е. выполнено условие (32) в области Ω_{sys} . Причем согласно [32, с. 258–260] существует функция Ляпунова $V(x) = x^T S_L x > 0$, которая имеет $\dot{V}(x) < 0$ в силу этой системы. Здесь S_L – действительная симметричная матрица.

С другой стороны, уравнение (П.11) соответствует уравнению (70.1), а уравнение (П.5) – уравнению (70.3) из монографии [33, с. 301]. Причем по И.Г. Малкину (П.11) является уравнением возмущенного движения рассматриваемой гурвицевой системы (1), (25) и (28), (29), а слагаемое $b(x)l_g(x(T|t/T))g(T|t/T) + h(x)f(t)$ в (П.5) характеризует постоянно действующие возмущения этой системы. При этом для дифференциальной системы (П.11) существует определенно-положительная функция $V(x) = x^T S_L x$, полная производная которой по времени, составленная в силу этой системы, является определенно-отрицательной. В области $t \geq 0$, $x \in \Omega_{sys}$ частные производные $(\partial V(x)/\partial x_i) = 2S_{Li}x$, где S_{Li} – i -я строка матрицы S_L , $i = 1, \dots, n$, очевидно ограничены. Поэтому по теореме И.Г. Малкина [33, с. 302] невозмущенное движение гибридной системы, описываемой уравнениями (П.5) и (28), устойчиво при постоянно действующих возмущениях. Другими словами, при достаточно малых начальных условиях и внешних воздействиях $g(t)$ и $f(t)$ таких, что $x(t) \in \Omega_{sys}$ в системе (П.5) или, что то же самое, в системе (1), (25), КЛМ которой имеет вид (28), (29), возникает установившийся режим.

Рассмотрим этот режим при $f(t) \equiv 0$, $g(t) = g_0 1(t)$ и достаточно малых $\|x_0\|$ и $|g_0|$. В этом режиме при $t \rightarrow \infty$ имеют место следующие процессы: $\dot{x}(t) \rightarrow 0$, $x(t) \rightarrow x^\circ$, $x(T|t/T) \rightarrow x^\circ$, $y_g(t) \rightarrow y_g^\circ$, где x°, y_g° – установившиеся значения переменных $x(t)$, $x(T|t/T)$, $y_g(t)$, обусловленные (в соответствии с леммой 2) воздействием $g_0 1(t)$. При этом уравнения (28) и (29) принимают следующий вид:

$$(П.15) \quad \begin{aligned} 0 &= D_r(x^\circ)x^\circ + b(x^\circ)l_g(x^\circ)g_0, \\ y_g^\circ &= [c^T(x^\circ) - d(x^\circ)l^T(x^\circ)]x^\circ + d(x^\circ)l_g(x^\circ)g_0, \end{aligned}$$

где матрица $D_r(x^\circ)$ определяется выражением (27) при $x = x^\circ$.

Поскольку матрица $D_r(x)$ гурвицевая при $x \in \Omega_{sys}$, то существует матрица $D_r^{-1}(x^\circ)$, поэтому из (П.15) следуют равенства $x^\circ = -D_r^{-1}(x^\circ)b(x^\circ)l_g(x^\circ)g_0$ и

$$(П.16) \quad y_g^\circ = \{[d(x^\circ)l^T(x^\circ) - c^T(x^\circ)]D_r^{-1}(x^\circ)b(x^\circ) + d(x^\circ)\}l_g(x^\circ)g_0.$$

Равенство (33) теоремы очевидно будет выполнено, если $y_g^\circ = g_0$, поэтому из (П.16) следует необходимое и достаточное для этого условие: $\{[d(x^\circ)l^T(x^\circ) - c^T(x^\circ)]D_\Gamma^{-1}(x^\circ)b(x^\circ) + d(x^\circ)\}l_g(x^\circ) = 1$. Однако значение x° заранее неизвестно, поэтому это условие заменяется, с учетом формулы $D_\Gamma^{-1}(x) = \text{adj}D_\Gamma(x)/\det D_\Gamma(x)$, равенством

$$(П.17) \quad \{[d(x)l^T(x) - c^T(x)]\text{adj}D_\Gamma(x)b(x) + d(x)\det D_\Gamma(x)\}l_g(x) = \det D_\Gamma(x).$$

Равенство $y_g^\circ = g_0$ следует из (П.17) и (П.16) в силу указанной выше теоремы И.Г. Малкина. Из определения (27) по формулам (П.25) и (П.26) из [30, с. 233] следуют равенства

$$\begin{aligned} \text{adj}D_\Gamma(x)b(x) &= \text{adj}[A(x) - b(x)l^T(x)]b(x) = \text{adj}A(x)b(x) \text{ и} \\ \det D_\Gamma(x) &= \det[A(x) - b(x)l^T(x)] = \det A(x) - l^T(x)\text{adj}A(x)b(x). \end{aligned}$$

Подставив эти равенства в (П.17) и упростив, получим

$$\{d(x)\det A(x) - c^T(x)\text{adj}A(x)b(x)\}l_g(x) = \det D_\Gamma(x).$$

С учетом обозначения (5) отсюда следует справедливость равенства (33) при выполнении условия (4) и определении коэффициента $l_g(x)$ по (26). Теорема доказана полностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Garavello M., Piccoli B.* Hybrid Necessary Principle // 44th IEEE Conference on Decision and Control, European Control Conference. Seville, Spain, December 12–15, 2005. P. 723–728.
2. *Nandola N.N., Bhartiya S.* Predictive Control of Nonlinear Hybrid Systems Using Generalized Outer Approximation // 17th World Congress International Federation of Automatic Control Seoul, Korea, July 6–11, 2008. P. 3623–3628. <https://doi.org/10.3182/20080706-5-KR-1001.2056>
3. *Безуглая А.Е., Тимофеева Т.И., Шушлягин Е.А.* Управление нелинейными гибридными системами на основе идентифицированных моделей // X Международная конференция «Идентификация систем и задачи управления», SICPRO-15 Москва, 26–29 января 2015. С. 619–633.
4. *Закирзянов Р.М.* Критерии выбора оптимальной структуры распределенной системы управления технологическими процессами крупных промышленных предприятий // Математические методы в технологиях и технике. 2024. № 10. С. 17–23.
5. *Sharifi E., Damaren C.J.* A numerical approach to hybrid nonlinear optimal control // International Journal of Control. 2020. P. 1–14. <https://doi.org/10.1080/00207179.2020.1763471>
6. *Christofides P.D., El-Farra N.H.* Control of Hybrid Nonlinear Systems // Control of Nonlinear and Hybrid Process Systems. Lect. Notes Control. 2005. V. 324. P. 225–275. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/11376316_7

7. *Alessandri A., Bedouhene F., Bouhadjra D., Zemouche A., Bagnerini P.* Observer-based control for a class of hybrid linear and nonlinear systems // *Discrete and Continuous Dynamical Systems*. 2021. V. 14. I. 4. P. 1213–1231.
<https://doi.org/10.3934/dcdss.2020376>
8. *Ghane R.G., Hassan M.Y.* Advanced hybrid nonlinear control for morphing quadrotors // *Mathematical Modelling of Engineering Problems*, 2023. V. 10. No. 4. P. 1216–1224. <https://doi.org/10.18280/mmep.100414>
9. *Кван Н.В., Семичевская Н.П.* Гибридные системы робастного управления нелинейными объектами // *Вестник Амурского государственного университета*. 2010. Выпуск 51: Серия: Естественные и экономические науки. С. 33–37.
10. *Годяев А.И., Ерёмин Е.Л., Шеленок Е.А.* Имитационная модель системы периодического управления электродинамическим вибростендом // *Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники*. 2012. № 1(25). Часть 2. С. 257–261.
11. *Ерёмин Е.Л., Шеленок Е.А.* Гибридная система нелинейного управления неаффинным объектом с запаздыванием по состоянию в периодических режимах // *Информатика и системы управления*. 2019. № 4(62). С. 120–131.
<https://doi.org/10.22250/isu.2019.62.120-131>
12. *Santoso F., Garratt M.A., Anavatti S.G., Petersen I.* Robust Hybrid Nonlinear Control Systems for the Dynamics of a Quadcopter Drone // *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*. V. 50. No. 8. Aug. 2020. P. 3059–3071.
<https://doi.org/10.1109/TSMC.2018.2836922>
13. *Гайдук А.Р.* Алгебраический синтез нелинейных стабилизирующих управлений // *Синтез алгоритмов сложных систем*. Вып. 7. Таганрог: ТРТИ. 1989. С. 15–19.
14. *Gaiduk A.R., Stojković N.M.* Analytical design of quasilinear control systems // *FACTA UNIVERSITATIS. Series: Automatic Control and Robotics*. 2014. V. 13. No. 2. P. 73–84.
15. *Gaiduk A.R.* Nonlinear control systems design by transformation method // *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*. 2018. V. 19. No. 12. P. 755–761.
<https://doi.org/10.17587.19.755-761>
16. *Гайдук А.Р.* Численный метод синтеза квазилинейных моделей нелинейных объектов // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2021. Том 22. № 6. С. 283–290. <https://doi.org/10.17587/mau.22.283-290>
17. *Гайдук А.Р.* Метод квазилинейной дискретизации уравнений нелинейных систем [Электронный ресурс]. Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ-24): труды, Москва, 17–21 июня 2024. М.: ИПУ РАН, 2024. С. 167–171.
18. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.
19. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. 4-е изд. М.: Наука, 1988. 553 с.
20. *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972. 232 с.
21. *Гайдук А.Р., Плаксиенко В.С., Кабалам А.Е.А.* Алгебраический полиномиально-матричный метод синтеза нелинейных астатических систем // *Математические методы в технологиях и технике*. 2022. № 1. С. 41–45.
https://doi.org/10.52348/2712-8873_MMТТ_2022_1_41

22. *Гайдук А.Р., Плаксиенко В.С., Капустян С.Г.* Синтез нелинейных дискретных систем управления методом квазилинейной дискретизации // Математические методы в технологиях и технике. 2023. № 2. С. 7–11.
https://doi.org/10.52348/2712-8873_MMTT_2023_2_07
23. *Айзерман М.А., Пятницкий Е.С.* Основы теории разрывных систем. I // *АиТ*. 1974. № 7. С. 33–47. <https://www.mathnet.ru/at8429>
24. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматлит, 1961. 392 с.
25. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1969. С. 408.
26. *Финогенко И.А.* О дифференциальных уравнениях с разрывной правой частью // *Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика»*. 2010. Т. 3. № 2. С. 88–102.
27. *Инзарцев А.В., Кисилёв Л.В., Костенко В.В., и др.* Подводные робототехнические комплексы: системы, технологии, применение. Под ред. Л.В. Кисилёва. Владивосток: ФГБУН Институт проблем морских технологий ДВО РАН. 2018. 368 с. ISBN 978-5-7311-0486-9
28. *Chen C-T.* Linear system theory and design. New York: Oxford University Press, 1999. 334 p. ISBN 0-19-511777-8
29. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы: Учеб. пособие. М.: Физматлит, 2004. 464 с. ISBN 5-9221-0534-5
30. *Гайдук А.Р.* Непрерывные и дискретные динамические системы. М.: УМ и ИЦ «Учебная литература», 2004. 252 с.
31. *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учеб. для вузов. 11-е изд., испр. М.: Физматлит, 2006. 312 с.
32. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
33. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. 2-изд., испр. М.: Наука, 1966. 530 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.

Поступила в редакцию 17.03.2025

После доработки 10.08.2025

Принята к публикации 12.08.2025

© 2025 г. В.Л. ХАЦКЕВИЧ, д-р техн. наук (vlkhats@mail.ru)
(Военно-воздушная академия им. профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина,
Воронеж)

МЕТОД ФУНКЦИЙ ГРИНА В ЗАДАЧЕ О ПРЕОБРАЗОВАНИИ НЕЧЕТКОГО СИГНАЛА ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

Задача о преобразовании нечеткого сигнала линейной динамической системой в данной работе сводится к изучению задачи об ограниченных решениях для линейного дифференциального уравнения высокого порядка с постоянными коэффициентами и нечеткозначной неоднородностью в правой части. Для решения последней разработана модификация метода функций Грина на случай нечетких задач. Выделен класс уравнений, обладающих положительными коэффициентами и неотрицательной функцией Грина, для которых установлены результаты о существовании и гладкости нечеткозначного, ограниченного на всей оси решения. Показано, что в случае правой части треугольного вида, такого же вида будет и решение. Рассмотрены приложения для радиотехнических цепей с нечеткозначными входными сигналами. Установлена взаимосвязь между модальными значениями входных и выходных нечеткозначных сигналов для линейной динамической системы.

Ключевые слова: нечеткие числа, динамические системы с постоянными коэффициентами и нечеткозначными входными сигналами, метод функций Грина.

DOI: 10.31857/S0005231025100035

1. Введение

Динамические модели многих прикладных процессов характеризуются неопределенностью входных данных. В случае, когда можно оценить вероятностные характеристики входного сигнала при моделировании, используется теория случайных процессов [1].

С другой стороны, в последние десятилетия широко применяется интервальный подход, когда с помощью экспертных оценок можно указать границы интервалов изменения входных переменных [2].

Наряду с интервальным подходом исследователями активно используются методы нечеткой математики [3, 4]. А именно, если предварительно неизвестно формальное распределение вероятностей, но все же удастся указать некоторые возможностные оценки, то часто используются методы «нечеткости»,

которые характеризуются довольно простым аппаратом, дающим интуитивно понятный результат. При этом подходы, основанные на методах «нечеткости», позволяют трансформировать оценку возможности исходных данных в оценку возможностей результатов.

При нечетком подходе используется функция принадлежности (возможности) нечеткого числа, которая характеризует возможность принять нечеткому числу заданное вещественное значение. Так что нечеткий подход содержит больше информации об имеющейся неопределенности, чем интервальный. Соответственно нечеткое моделирование дает более содержательный результат, чем интервальное. Практически для построения функций принадлежности используются экспертные оценки.

В данной работе рассматриваются «нечеткие» динамические системы, описываемые линейными дифференциальными уравнениями n -го порядка с постоянными коэффициентами и нечеткозначными правыми частями. Такие системы встречаются в теории автоматического регулирования, в задачах обработки сигналов (в радиотехнике) и других приложениях.

Основы теории нечетких дифференциальных уравнений заложены в работах [5–7] и получили дальнейшее развитие в [8–11]. Различные приложения отражены в [12, 13]. Из последних работ отметим [14–17].

В литературе рассматриваются различные определения дифференцируемости нечеткозначных функций. В настоящей работе применяется «классическое» определение производной по Хукухаре [5] и связанной с ним производной по Сеиккала [7].

Обычно [18] при решении линейных нечетких дифференциальных уравнений выписывают систему уравнений для соответствующих α -индексов и решают ее. Затем проверяют, определяют ли производные полученных α -индексов производную нечеткозначной функции. Как показывают примеры [18, 19], это не всегда так. Отметим, что в [19] развит так называемый «операторный метод», когда дифференциальные уравнения для α -индексов сводятся к интегральным уравнениям, которые затем решаются.

В последние годы широкое распространение для решения линейных нечетких дифференциальных уравнений высокого порядка получил метод нечеткого преобразования Лапласа [20–22]. Однако он не представляет возможности предварительно определить, будут ли полученные функции гладкими и, соответственно, решениями.

В отличие от известных подходов предлагаемый в данной работе подход опирается на развитие метода функции Грина, широко распространенного в теории обыкновенных дифференциальных уравнений [23, гл. 1, 2; 24], на случай нечетких дифференциальных уравнений.

Метод функций Грина полезен тем, что он дает формулы для α -индексов нечетких решений. А это позволяет привести условия, при которых производные α -индексов определяют производную нечеткозначного решения по Сеиккала. В данной работе это условие на положительность коэффициентов ди-

намической системы, неотрицательность соответствующей функции Грина, а также дифференцируемость по Сеиккала входного нечеткого сигнала. Эти условия естественны для ряда прикладных задач. В частности, положительность коэффициентов является необходимым условием устойчивости соответствующего характеристического многочлена, соответствующего линейной динамической системе. Условия неотрицательности функции Грина широко известны (см., например, [23]). Они изучены в связи с различными прикладными задачами.

Уточним, что в данной статье используется понятие ультраслабого нечеткого решения как нечеткозначной функции, α -индексы которой удовлетворяют уравнениям для α -индексов, вытекающих из заданного нечеткого дифференциального уравнения. Отметим установленный в данной работе факт, состоящий в том, что j -кратная дифференцируемость по Сеиккала нечеткозначной неоднородности влечет j -кратную дифференцируемость ультраслабого нечеткозначного решения по Сеиккала.

Кроме того, важным является вопрос о виде выходного нечеткого сигнала линейной динамической системы, когда на вход подается нечеткий сигнал определенного типа, например треугольный. В настоящей работе показано, что при определенных условиях (положительность коэффициентов системы и неотрицательность соответствующей функции Грина) на выходе также наблюдается нечеткий сигнал треугольного вида.

Добавим, что рядом авторов в последнее время исследованы нечеткие дифференциальные уравнения с обобщенными (по Беду-Гелу) производными [10, 18–22]. Развитый в настоящей статье подход допускает применение и к этому случаю.

В качестве приложений в настоящей работе рассмотрены модели радиотехнических цепей с нечеткими входными сигналами. Рассмотрена взаимосвязь модальных значений входного и выходного нечетких треугольных сигналов линейной динамической системы. Введено и использовано понятие доверительного возможностного интервала.

2. Нечеткие числа и нечеткозначные функции

Пусть $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел. Нечетким числом $\tilde{u}$ называют подмножество из $\mathbb{R}$, определенное с помощью своей функции принадлежности (возможности) $\mu_{\tilde{u}} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ (см., напр., [3, гл. 5; 4, гл. 2, 3]), которое ставит в соответствие каждому числу $x \in \mathbb{R}$ число $\mu_{\tilde{u}}(x)$ из интервала $[0, 1]$, характеризующее степень принадлежности элемента x множеству $\tilde{u}$. При этом 0 и 1 представляют собой соответственно низшую и высшую степень принадлежности элемента данному множеству. Таким образом, нечеткое число $\tilde{u}$ можно трактовать как пару $\{x, \mu_{\tilde{u}}(x) : x \in \mathbb{R}\}$.

Отметим, что введение понятия функции принадлежности связано с недостаточностью вероятностного подхода для описания проблем неопределенности. В частности, во многих прикладных задачах сложно определить апри-

орное распределение вероятностей. При этом функция принадлежности есть некоторый аналог распределения вероятностей случайной величины в теории вероятностей. Уточним, что число $\mu_{\tilde{u}}(x)$ трактуется как возможность принять значение x . Подчеркнем, что, как правило, для построения функций принадлежности используются экспертные оценки.

Отметим еще, что функция принадлежности нечеткого числа является обобщением понятия характеристической функции множества, которая может принимать только два значения: 0 и 1 (0, когда элемент не принадлежит множеству и 1, когда элемент принадлежит множеству).

Число x_M , для которого $\mu(x_M) = \max_{x \in \mathbb{R}} \mu(x)$, называют модальным значением или модой нечеткого числа. Оно трактуется как наиболее возможное значение.

Как правило, предполагают, что носитель нечеткого числа $\tilde{u}$ (т.е. множество $\{x : \mu_{\tilde{u}}(x) > 0\}$) ограничен, а функция принадлежности выпукла, непрерывна сверху и нормальна (т.е. $\sup_x \mu_{\tilde{u}}(x) = 1$). Множество таких нечетких чисел обозначим через J .

Ниже будет рассматриваться интервальное представление нечетких чисел.

Как известно [3, гл. 5], интервалы α -уровня (α -уровни) нечеткого числа $\tilde{u} \in J$ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{u}}(x)$ определяются соотношениями

$$u_{\alpha} = \{x | \mu_{\tilde{u}}(x) \geq \alpha\}, \quad (\alpha \in (0, 1]), \quad z_0 = cl\{x | \mu_{\tilde{u}}(x) > 0\},$$

где cl обозначает замыкание множества. Согласно принятым предположениям все α -уровни нечеткого числа – замкнутые и ограниченные интервалы вещественной оси.

Обозначим левую границу α -интервала через u_{α}^{-} , а правую через u_{α}^{+} . Таким образом, $u_{\alpha} = [u_{\alpha}^{-}, u_{\alpha}^{+}]$. Выражения u_{α}^{-} и u_{α}^{+} называют соответственно левым и правым α -индексами (индексами) нечеткого числа.

Для нечеткого числа $\tilde{u} \in J$ выполнены следующие условия на α -индексы:

1. $u_{\alpha}^{-} \leq u_{\alpha}^{+}$, $\forall \alpha \in [0, 1]$.
2. Функция u_{α}^{-} ограничена, не убывает, непрерывна слева на промежутке $(0, 1]$ и непрерывна справа в точке 0.
3. Функция u_{α}^{+} ограничена, не возрастает, непрерывна слева на промежутке $(0, 1]$ и непрерывна справа в точке 0.

Обратно, пара функций на промежутке $[0, 1]$, для которых выполняются условия 1–3, задают нечеткое число, α -интервал которого имеет вид $[u_{\alpha}^{-}, u_{\alpha}^{+}]$.

Ниже под суммой нечетких чисел с индексами u_{α}^{-} , u_{α}^{+} и v_{α}^{-} , v_{α}^{+} понимается нечеткое число с интервалами α -уровня $[u_{\alpha}^{-} + v_{\alpha}^{-}, u_{\alpha}^{+} + v_{\alpha}^{+}]$. Умножение на положительное число c характеризуется интервалами α -уровня $[cu_{\alpha}^{-}, cu_{\alpha}^{+}]$, а умножение на отрицательное число c – интервалами α -уровня $[cu_{\alpha}^{+}, cu_{\alpha}^{-}]$. Равенство нечетких чисел понимается как равенство всех соответствующих α -индексов при $\forall \alpha \in [0, 1]$.

В приложениях широко используются треугольные числа, для которых графики функций принадлежности имеют треугольный вид.

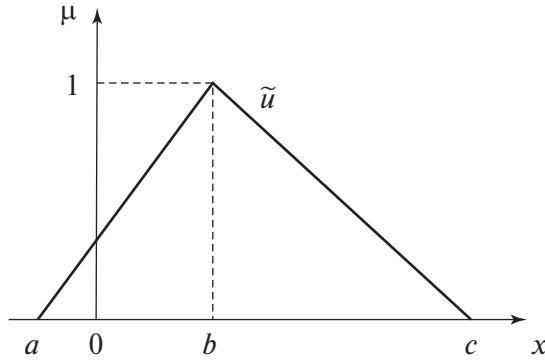


Рис. 1. Треугольное нечеткое число.

Пример 1. Нечеткое треугольное число $\tilde{u}$, характеризуемое тройкой вещественных чисел (a, b, c) при $a < b < c$, определяется функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{u}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } x \in [a, b]; \\ \frac{x-c}{b-c}, & \text{если } x \in [b, c]; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Ее график порождает треугольник, изображенный на рис. 1.

Отметим, что число b является модальным значением (или модой) рассматриваемого нечеткого числа. Для него $\mu_{\tilde{u}}(b) = 1$. Нечеткое треугольное число, изображенное на рис. 1, трактуется как около b .

Как известно, в случае треугольного числа нижняя и, соответственно, верхняя границы α -интервала имеют вид:

$$u_{\alpha}^{-} = (b-a)\alpha + a, \quad u_{\alpha}^{+} = -(c-b)\alpha + c.$$

На множестве нечетких чисел можно по-разному ввести определения расстояний между ними. При интервальном подходе часто используют расстояние Хаусдорфа между множествами α -уровня нечетких чисел. А именно, для нечетких чисел $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ с α -уровнями u_{α} и v_{α} задают метрику [25]

$$(1) \quad \rho(\tilde{u}, \tilde{v}) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \max\{|u_{\alpha}^{-} - v_{\alpha}^{-}|, |u_{\alpha}^{+} - v_{\alpha}^{+}|\}.$$

Здесь $[u_{\alpha}^{-}, u_{\alpha}^{+}]$ и $[v_{\alpha}^{-}, v_{\alpha}^{+}]$ — интервалы α -уровней нечетких чисел $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ соответственно.

Отметим, что условие $\rho(\tilde{u}, \tilde{v}) = 0$ в силу (1) эквивалентно определению равенства нечетких чисел $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$, данному выше.

Фиксируем промежуток T числовой оси. Отображение $\tilde{z} : T \rightarrow J$ будем называть нечеткозначной функцией.

Пусть нечеткозначная функция $\tilde{z}(t)$ при $\forall t \in T$ характеризуется функцией принадлежности $\mu_{\tilde{z}(t)}(x)$. При фиксированном $\alpha \in (0, 1]$ рассмотрим α -интервал $z_\alpha(t) = \{x \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde{z}(t)}(x) \geq \alpha\}$ и $z_0(\alpha) = cl\{x \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde{z}(t)}(x) > 0\}$. Обозначим через $z_\alpha^-(t)$ и $z_\alpha^+(t)$ левую и соответственно правую границы α -интервала. Так что $z_\alpha(t) = [z_\alpha^-(t), z_\alpha^+(t)]$.

Непрерывность функции $\tilde{z}(t)$ по t будем понимать по метрике (1), а ограниченность в следующем смысле: найдется постоянная $C > 0$, такая что при всех $t \in T$ выполнено неравенство

$$\rho(\tilde{z}(t), \tilde{0}) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \max\{|z_\alpha^-(t)|, |z_\alpha^+(t)|\} \leq C.$$

Здесь $\tilde{0}$ – нечеткое число, у которого α -индексы $0_\alpha^\pm = 0$ при $\forall \alpha \in [0, 1]$.

Замечание 1. Индексы $z_\alpha^-(t)$ и $z_\alpha^+(t)$ непрерывной нечеткозначной функции $\tilde{z}(t)$ непрерывны по t при любом $\alpha \in [0, 1]$. А если $\tilde{z}(t)$ ограничена при $t \in T$, то это влечет ограниченность $z_\alpha^\pm(t)$ по $t \in T$ при любом $\alpha \in [0, 1]$.

Интегралом по промежутку T от непрерывного нечеткозначной функции $\tilde{z}(t)$ называют [6] нечеткое число $\tilde{g}$, такое что его интервалы α -уровня при любом $\alpha \in [0, 1]$ имеют вид $g_\alpha = \int_T z_\alpha(t) dt$. Интеграл обозначают как $\int_T \tilde{z}(t) dt$.

По существу, это интеграл Аумана [26] от многозначного отображения $z_\alpha(t)$. Фактически, имеет место интервальное представление [27]

$$\int_T \tilde{z}(t) dt = \left[\int_T z_\alpha^-(t) dt, \int_T z_\alpha^+(t) dt \right].$$

Перейдем к рассмотрению производных от нечеткозначных функций. В литературе используются различные определения. Одно из наиболее распространенных опирается на определение разности Хукухары [28]. А именно, для множеств A, B множество C называют разностью Хукухары, если $A = B + C$, и обозначают как $A \ominus B$.

Функцию $\tilde{z} : T \rightarrow J$ называют H -дифференцируемой (или дифференцируемой по Хукухаре) в точке $t \in T$ [5], если для всех достаточно малых $h > 0$ существуют разности Хукухары $\tilde{z}(t+h) \ominus \tilde{z}(t)$, $\tilde{z}(t) \ominus \tilde{z}(t-h)$ и элемент $\tilde{z}'(t) \in J$ такие, что

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \rho \left(\frac{\tilde{z}(t+h) \ominus \tilde{z}(t)}{h}, \tilde{z}'(t) \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \rho \left(\frac{\tilde{z}(t) \ominus \tilde{z}(t-h)}{h}, \tilde{z}'(t) \right) = 0,$$

где расстояние ρ определяется формулой (1). В этом случае элемент $\tilde{z}'(t)$ называют H -производной в точке t .

Нечеткозначную функцию $\tilde{z} : T \rightarrow J$ называют S -дифференцируемой или дифференцируемой по Сеиккала в точке $t \in T$ [7], если ее α -индексы $z_\alpha^-(t)$ и $z_\alpha^+(t)$ дифференцируемы и их производные $(z_\alpha^-)'(t)$ и $(z_\alpha^+)'(t)$ при $\forall \alpha \in [0, 1]$ образуют нечеткое число с α -интервалом $[\tilde{z}'(t)]_\alpha = [(z_\alpha^-)'(t), (z_\alpha^+)'(t)]$.

Утверждение 1 [8]. Пусть нечеткозначная функция $\tilde{z}(t)$ H -дифференцируема в точке $t \in T$. Тогда она S -дифференцируема в точке $t \in T$.

Например, нечеткозначная функция $\tilde{z}(t)$ вида $\tilde{z}(t) = g(t)\tilde{r}$, где $g(t)$ – вещественнозначная дифференцируемая функция, а $\tilde{r} \in J$ – заданное нечеткое число, будет H -дифференцируемой (а значит, и S -дифференцируемой) в точке t при условии $g(t) \cdot g'(t) \geq 0$ [9].

Замечание 2. По определению нечеткая S -производная является аддитивной и положительно однородной, т.е. для нечеткозначных S -дифференцируемых функций $\tilde{z}(t)$ и $\tilde{w}(t)$ имеем $(\tilde{z}(t) + \tilde{w}(t))' = \tilde{z}'(t) + \tilde{w}'(t)$ и $(c\tilde{z}(t))' = c\tilde{z}'(t)$ для любой вещественной постоянной $c \geq 0$.

Вторая производная по Сеиккала $\tilde{z}''(t)$ в точке $t \in T$ определяется как S -производная от первой производной, т.е. как нечеткое число $\tilde{z}''(t)$, имеющее левый α -индекс $(z_{\alpha}^{-})''(t)$ и правый α -индекс $(z_{\alpha}^{+})''(t)$ при $\forall \alpha \in [0, 1]$.

Аналогично определяются последующие S -производные.

3. Преобразование непрерывного нечеткого сигнала линейной динамической системой

Устройство называют линейной динамической системой, если связь между входом и выходом описывается дифференциальным уравнением n -го порядка с постоянными коэффициентами. Если на входе и выходе наблюдаются нечеткие сигналы $\tilde{f}(t)$ и $\tilde{z}(t)$ соответственно, то линейная динамическая система описывается «нечетким» дифференциальным уравнением ($t \in T$)

$$(2) \quad a_n \tilde{z}^{(n)}(t) + a_{n-1} \tilde{z}^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \tilde{z}'(t) + a_0 \tilde{z}(t) = \tilde{f}(t).$$

Здесь коэффициенты a_i ($i = 0, \dots, n$) – вещественные числа, $\tilde{f}(t)$ – входная нечеткозначная функция, производные от нечеткозначной функции $\tilde{z}(t)$ понимаются как S -производные.

Ниже в качестве промежутка T рассматривается $T = (-\infty, \infty)$.

Рассмотрим задачу об ограниченных решениях для вещественного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами при $t \in (-\infty, \infty)$

$$(3) \quad a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t).$$

Функцию $G(t)$ называют функцией Грина задачи об ограниченных решениях уравнения (3), если она удовлетворяет следующим условиям (см., например, [23, гл. 1, § 4; 24]):

1) $G(t)$ непрерывно дифференцируема $(n-2)$ раза при всех t , а n -я и $(n-1)$ -я производные непрерывно дифференцируемы при всех t , кроме $t = 0$, причем

$$G^{(n-1)}(+0) - G^{(n-1)}(-0) = \frac{1}{a_n};$$

2) во всех точках, кроме $t = 0$, функция $G(t)$ удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению, соответствующему (3) (при $f(t) \equiv 0$);

3) функция Грина и ее производные подчинены оценке

$$|G^{(i)}(t)| \leq M e^{-\gamma|t|} \quad (i = 0, 1, \dots, n, \quad -\infty < t < +\infty),$$

где M и γ – некоторые положительные постоянные.

Утверждение 2 [23, гл. 1, 24]. Пусть корни характеристического уравнения $a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$ не содержат точек мнимой оси. Тогда для любой непрерывной ограниченной на всей числовой оси функции $f(t)$ уравнение (3) имеет ограниченное на всей числовой оси решение, причем единственное. Оно дается формулой

$$(4) \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)f(s) ds,$$

где $G(t)$ – функция Грина задачи об ограниченных решениях уравнения (3).

При этом

$$x^{(j)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_t^{(j)}(t-s)f(s) ds, \quad j = (0, 1, \dots, n-1),$$

$$x^{(n)}(t) = f(t) + \int_{-\infty}^{\infty} G_t^{(n)}(t-s)f(s) ds.$$

Подчеркнем, что сходимость несобственного интеграла (4) и соответствующих интегралов для производных обеспечивается экспоненциальными оценками на функцию Грина и ее производные, а также непрерывностью и ограниченностью функции $f(t)$ на всей числовой оси.

Отметим, что общий вид функции Грина задачи об ограниченных решениях уравнения (3) известен (см., например, [23, гл. 2, §8]).

Утверждение 3 [23, гл. 2]. Пусть в условиях утверждения 2 все корни характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости ($\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, $i = 1, \dots, n$). Тогда ограниченное решение уравнения (3) асимптотически устойчиво по Ляпунову. При этом решение (4) приобретает вид

$$(5) \quad x(t) = \int_{-\infty}^t G(t-s)f(s) ds.$$

Здесь функция Грина $G(\sigma) = \begin{cases} K(\sigma) & \text{при } \sigma \geq 0 \\ 0 & \text{при } \sigma < 0 \end{cases}$, а $K(\sigma)$ – функция Коши, являющаяся решением однородного дифференциального уравнения, соответствующего уравнению (3) (при $f(t) \equiv 0$), и удовлетворяющая начальным условиям

$$K^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-2, \quad K^{(n-1)}(0) = 1.$$

Обратимся к случаю входных и выходных нечетких сигналов. В некоторых случаях, используя представление (4), удастся выписать α -индексы нечеткого сигнала на выходе динамической системы (2) в явном виде.

Сильным решением нечеткого дифференциального уравнения (2) будем называть n раз непрерывно S -дифференцируемую нечеткозначную функцию, удовлетворяющую (2) на соответствующем промежутке.

Лемма 1. Пусть коэффициенты нечеткого дифференциального уравнения (2) положительны $a_i > 0$, $i = 0, \dots, n$. Если нечеткозначная функция $\tilde{z}(t)$ есть сильное решение уравнения (2) на промежутке T , то соответствующие α -индексы $z_\alpha^\pm(t)$ при $\forall \alpha \in [0, 1]$ и $t \in T$ удовлетворяют следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$(6) \quad a_n(z_\alpha^-)^{(n)}(t) + a_{n-1}(z_\alpha^-)^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(z_\alpha^-)'(t) + a_0 z_\alpha^-(t) = f_\alpha^-(t),$$

$$(7) \quad a_n(z_\alpha^+)^{(n)}(t) + a_{n-1}(z_\alpha^+)^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(z_\alpha^+)'(t) + a_0 z_\alpha^+(t) = f_\alpha^+(t).$$

Действительно, подставим сильное решение $\tilde{z}(t)$ нечеткого дифференциального уравнения в (2). Поскольку равенство нечетких чисел означает равенство всех соответствующих α -индексов, то согласно правилам интервальной арифметики с учетом положительности коэффициентов a_i и в силу определения нечеткой производной по Сеиккала, а также замечания 2 получим, что уравнение (2) влечет при $\forall \alpha \in [0, 1]$ и $t \in (-\infty, \infty)$ выполнение равенств (6), (7).

Лемма 2. Пусть коэффициенты нечеткого дифференциального уравнения (2) положительны ($a_i > 0$, $i = 0, \dots, n$), а корни характеристического уравнения $a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$ не содержат точек мнимой оси. Пусть нечеткозначная функция $\tilde{f}(t)$, стоящая в правой части уравнения (2), непрерывна и ограничена по метрике (1) при $t \in (-\infty, \infty)$. Тогда при $\forall \alpha \in [0, 1]$ существует, причем единственное, ограниченное на всей числовой оси решение каждого из уравнений (6), (7), и они могут быть представлены в виде

$$(8) \quad z_\alpha^-(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s) f_\alpha^-(s) ds, \quad z_\alpha^+(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s) f_\alpha^+(s) ds.$$

Действительно, по условию и согласно замечанию 1 при $\forall \alpha \in [0, 1]$ функции $f_\alpha^\pm(t)$ непрерывны и ограничены на всей числовой оси. Тогда в силу утверждения 2 при $\forall \alpha \in [0, 1]$ решения уравнений (6), (7) существуют, единственны и выполнены равенства (8).

Лемма 3. Пусть выполнены условия леммы 2 и дополнительно функция Грина G задачи (3) неотрицательна. Тогда выражения (8) при $\forall t \in (-\infty, \infty)$ удовлетворяют условиям 1–3 раздела 2 на индексы нечетких чисел.

Доказательство. Фиксируем $t \in (-\infty, \infty)$. По предположению имеем $f_\alpha^-(s) \leq f_\alpha^+(s)$ при $\forall s \in (-\infty, \infty)$. Тогда в силу неотрицательности функции

Грина

$$G(t-s)f_{\alpha}^{-}(s) \leq G(t-s)f_{\alpha}^{+}(s).$$

Поэтому на основании (8) и в силу монотонности интеграла получим, что $z_{\alpha}^{-}(t) \leq z_{\alpha}^{+}(t)$. То есть при $\forall t \in (-\infty, \infty)$ для выражений (8) выполнено условие 1 раздела 2 для α -индексов нечетких чисел.

Фиксируем произвольное $t \in (-\infty, \infty)$ и покажем, что функция $z_{\alpha}^{-}(t)$ не убывает по α . Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$ и $\alpha_1 < \alpha_2$. По условию при $\forall s \in (-\infty, \infty)$ выполнено условие $f_{\alpha_1}^{-}(s) \leq f_{\alpha_2}^{-}(s)$. Тогда в силу неотрицательности функции Грина $G(t-s)f_{\alpha_1}^{-}(s) \leq G(t-s)f_{\alpha_2}^{-}(s)$. Следовательно, в силу свойства монотонности интеграла имеем $z_{\alpha_1}^{-}(t) \leq z_{\alpha_2}^{-}(t)$, т.е. функция $z_{\alpha}^{-}(t)$ монотонно не убывает по α . Аналогично показывается, что функция $z_{\alpha}^{+}(t)$ монотонно не возрастает по α .

По предположению функция $\tilde{f}(t)$ ограничена по t при $t \in (-\infty, \infty)$ в метрике (1). Это означает, что найдется постоянная $C > 0$ такая, что $\rho(\tilde{f}(t), \tilde{0}) \leq C$ при любых $t \in (-\infty, \infty)$. Следовательно, $\sup_{0 \leq \alpha \leq 1} |f_{\alpha}^{\pm}(t)| \leq C$. Тогда согласно (8) при фиксированном t и $\forall \alpha \in [0, 1]$ имеем

$$|z_{\alpha}^{\pm}(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |G(t-s)| |f_{\alpha}^{\pm}(s)| ds \leq C \int_{-\infty}^{\infty} |G(t-s)| ds,$$

а это гарантирует при каждом $t \in (-\infty, \infty)$ ограниченность по $\alpha \in [0, 1]$ выражений (8).

Непрерывность слева функций $z_{\alpha}^{\pm}(t)$ при фиксированном t по $\alpha \in (0, 1]$ вытекает из следующего соображения. Фиксируем $\alpha_0 \in [0, 1]$ и рассмотрим равенство

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0 - 0} z_{\alpha}^{\pm}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s) \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0 - 0} f_{\alpha}^{\pm}(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s) f_{\alpha_0}^{\pm}(s) ds = z_{\alpha_0}^{\pm}(t).$$

Здесь используется представление (8), возможность предельного перехода под знаком абсолютно сходящегося несобственного интеграла и непрерывность слева по $\alpha \in (0, 1]$ при произвольном $s \in (-\infty, \infty)$ α -индексов $f_{\alpha}^{\pm}(s)$ нечеткозначной функции $\tilde{f}(s)$. Аналогично проверяется непрерывность справа функций $z_{\alpha}^{\pm}(t)$ по α при $\alpha = 0$. Следовательно, для $z_{\alpha}^{\pm}(t)$ выполнены условия 2, 3 раздела 2.

Таким образом, для выражений $z_{\alpha}^{\pm}(t)$, определяемых в (8), выполнены все условия раздела 2 на α -индексы нечетких чисел.

Подчеркнем значимость леммы 3. Как показывают примеры [18, 19], решения систем для α -индексов линейных нечетких дифференциальных уравнений не всегда являются α -индексами некоторой нечеткозначной функции.

Теорема 1. Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда нечеткозначная функция, порождаемая при $\forall t \in (-\infty, \infty)$ α -индексами (8), характеризуется

представлением

$$(9) \quad \tilde{z}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)\tilde{f}(s)ds.$$

Действительно, согласно леммам 1–3 и определению интеграла от нечеткозначной функции при $\forall \alpha \in [0, 1]$ имеют место соотношения для α -индексов

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)\tilde{f}(s)ds \right)_{\alpha}^{-} &= \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)f_{\alpha}^{-}(s)ds, \\ \left(\int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)\tilde{f}(s)ds \right)_{\alpha}^{+} &= \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)f_{\alpha}^{+}(s)ds, \end{aligned}$$

которые в силу (8) влекут представление (9).

Теорема 2. В условиях теоремы 1 нечеткозначная функция $\tilde{z}(t)$, определенная формулой (9), непрерывна и ограничена по t на всей числовой оси.

Доказательство. Фиксируем вещественные числа t_1, t_2 . Тогда согласно (8)

$$z_{\alpha}^{\pm}(t_1) - z_{\alpha}^{\pm}(t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} (G(t_1-s) - G(t_2-s))f_{\alpha}^{\pm}(s)ds.$$

Следовательно,

$$|z_{\alpha}^{\pm}(t_1) - z_{\alpha}^{\pm}(t_2)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |G(t_1-s) - G(t_2-s)| |f_{\alpha}^{\pm}(s)| ds.$$

Заметим, что $G(t_1-s) - G(t_2-s) = G'_t(\tau-s)(t_1-t_2)$, где $\tau \in ((1-\theta)t_1 + \theta t_2)$, а $\theta \in (0, 1)$. Поэтому в силу предыдущего

$$\begin{aligned} |z_{\alpha}^{\pm}(t_1) - z_{\alpha}^{\pm}(t_2)| &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |G'_t(\tau-s)| |f_{\alpha}^{\pm}(s)| ds \right) |t_1 - t_2| \leq \\ &\leq C |t_1 - t_2| \int_{-\infty}^{\infty} |G'_t(\tau-s)| ds, \end{aligned}$$

где постоянная $C > 0$ характеризует условие ограниченности: $\rho(\tilde{f}(t), \tilde{0}) \leq C$ при $\forall t \in (-\infty, \infty)$.

Воспользуемся теперь оценками производной функции Грина $|G'_t(t)| \leq M e^{-\gamma|t|}$ (см. п. 3) свойств функции Грина в разделе 3. Тогда

$$|z_\alpha^\pm(t_1) - z_\alpha^\pm(t_2)| \leq MC|t_1 - t_2| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|\tau-s|} ds = 2 \frac{MC}{\gamma} |t_1 - t_2|.$$

Отсюда по определению метрики (1) получим $\rho(z_\alpha^\pm(t_1), z_\alpha^\pm(t_2)) \leq 2 \frac{MC}{\gamma} |t_1 - t_2|$, что влечет непрерывность нечеткозначной функции $\tilde{z}(t)$, определенной формулой (9).

Покажем ограниченность нечеткозначной функции $\tilde{z}(t)$, представимой формулой (9), при $t \in (-\infty, \infty)$. По определению

$$\rho(\tilde{z}(t), \tilde{0}) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} |z_\alpha^\pm(t)|.$$

При этом согласно (8)

$$\begin{aligned} |z_\alpha^\pm(t)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |G(t-s)| |f_\alpha^\pm(s)| ds \leq \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |G(t-s)| ds \right) \rho(\tilde{f}(t), \tilde{0}) \leq 2 \frac{M\rho(\tilde{f}(t), \tilde{0})}{\gamma}. \end{aligned}$$

Здесь опять используется экспоненциальная оценка на функцию Грина. Таким образом, $\rho(\tilde{z}(t), \tilde{0}) \leq 2 \frac{M\rho(\tilde{f}(t), \tilde{0})}{\gamma} \leq 2 \frac{MC}{\gamma} \ (\forall t \in (-\infty, \infty))$.

Непрерывную нечеткозначную функцию $\tilde{z}(t)$ назовем ультраслабым решением нечеткого дифференциального уравнения (2), если ее α -индексы $z_\alpha^\pm(t)$ при $\forall \alpha \in [0, 1]$ n раз непрерывно дифференцируемы по t и удовлетворяют уравнениям (6) и (7) на соответствующем промежутке времени. При этом слабым решением нечеткого дифференциального уравнения (2) будем называть нечеткозначную функцию, удовлетворяющую соответствующему (2) интегро-дифференциальному или интегральному нечеткому уравнению (см., например, [19]). Такие решения в настоящей работе рассматриваться не будут. Имеет место

Теорема 3. В условиях теоремы 1 ультраслабое решение нечеткого дифференциального уравнения (2), ограниченное на всей числовой оси, существует и единственно.

Существование следует из теорем 1, 2. Покажем единственность. Предположим противное. Пусть $\tilde{z}(t)$ и $\tilde{w}(t)$ – два различных ультраслабых решения уравнения (2), ограниченных на всей числовой оси. Тогда индексы $z_\alpha^-(t)$ и $w_\alpha^-(t)$ являются ограниченными решениями уравнения (6). Поэтому

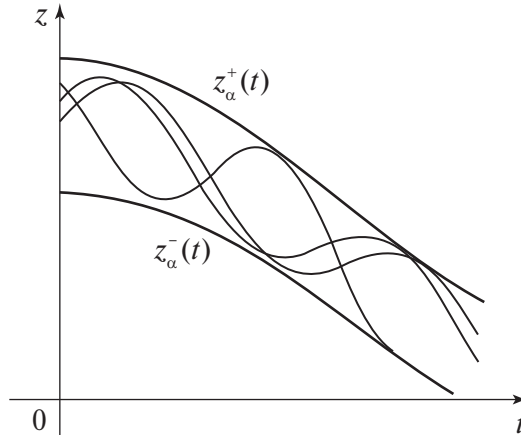


Рис. 2. Графическое представление ультраслабого нечеткозначного решения в интервальной форме.

в силу утверждения 2 $z_{\alpha}^{-}(t) = w_{\alpha}^{-}(t)$ при $\forall \alpha \in [0, 1]$ и $t \in (-\infty, \infty)$. Аналогично $z_{\alpha}^{+}(t) = w_{\alpha}^{+}(t)$ при $\forall \alpha \in [0, 1]$ и $t \in (-\infty, \infty)$. Но тогда, согласно признаку равенства нечетких чисел, $\tilde{z}(t) = \tilde{w}(t)$ при $\forall t \in (-\infty, \infty)$. Полученное противоречие доказывает высказанное утверждение.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 1 и дополнительно все корни характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости. Тогда ультраслабое ограниченное на всей числовой оси решение нечеткого дифференциального уравнения (2) существует, единственно и имеет следующий вид:

$$(10) \quad \tilde{z}(t) = \int_{-\infty}^t G(t-s) \tilde{f}(s) ds.$$

Это вытекает из теоремы 1 с учетом утверждения 3.

В качестве геометрической иллюстрации нечеткозначного решения приведем рис. 2.

Нечеткозначную функцию $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow J$ назовем треугольной, или треугольного типа $(a(t), b(t), c(t))$, если найдутся непрерывные на всей числовой оси вещественные функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ такие, что $a(t) < b(t) < c(t)$ при $\forall t \in \mathbb{R}$ и функции принадлежности $\mu_{\tilde{f}(t)}(x)$ при $\forall t \in \mathbb{R}$ имеют треугольный вид (см. пример 1)

$$\mu_{\tilde{f}(t)}(x) = \begin{cases} \frac{x - a(t)}{b(t) - a(t)}, & \text{если } x \in [a(t), b(t)]; \\ \frac{x - c(t)}{b(t) - c(t)}, & \text{если } x \in [b(t), c(t)]; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В частности, нечеткозначная функция вида $\tilde{f}(t) = g(t)\tilde{r}$, где $g(t)$ – вещественнозначная, непрерывная, неотрицательная функция, а $\tilde{r} \in J$ – заданное нечеткое треугольное число, будет треугольной.

Рассмотрим специальный случай, когда на вход динамической системы, описываемой уравнением (2), поступает нечеткий сигнал треугольного типа. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 1 и дополнительно правая часть уравнения (2) – нечеткозначная функция $\tilde{f}(t)$ при $\forall t \in (-\infty, \infty)$ – имеет треугольный вид $(a(t), b(t), c(t))$. Тогда ультраслабое ограниченное на всей числовой оси решение уравнения (2), определяемое формулой (9), при $\forall t \in (-\infty, \infty)$ имеет треугольный тип $(\int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)a(s)ds, \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)b(s)ds, \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)c(s)ds)$.

Действительно, по условию $\tilde{f}(t)$ порождается тройкой непрерывных и ограниченных на всей оси вещественных функций $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, причем $a(t) < b(t) < c(t)$ при $\forall t \in (-\infty, \infty)$. Тогда согласно примеру 1 при $\forall \alpha \in [0, 1]$ и $t \in (-\infty, \infty)$ имеем

$$f_{\alpha}^{-}(t) = (b(t) - a(t))\alpha + a(t), \quad f_{\alpha}^{+}(t) = (b(t) - c(t))\alpha + c(t).$$

Поэтому в силу (8) будет:

$$z_{\alpha}^{-}(t) = (B(t) - A(t))\alpha + A(t), \quad z_{\alpha}^{+}(t) = (B(t) - C(t))\alpha + C(t).$$

Здесь использовано обозначение

$$A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)a(s)ds, \quad B(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)b(s)ds, \quad C(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)c(s)ds.$$

Таким образом, $\tilde{z}(t)$ при $\forall t \in (-\infty, \infty)$ есть нечеткое треугольное число типа $(A(t), B(t), C(t))$.

Аналогичный результат справедлив для нечеткозначных функций $\tilde{f}(t)$ трапецидального типа [3, гл. 5]. Тогда решение $\tilde{z}(t)$ также имеет трапецидальный тип.

Выясним условия, при которых ультраслабое ограниченное решение (10) нечеткого дифференциального уравнения (2) будет S -дифференцируемо по t .

Ниже используется следующее представление для ограниченного решения скалярного дифференциального уравнения (3) в предположениях утверждения 3:

$$(11) \quad x(t) = \int_0^{\infty} G(\sigma)f(t-\sigma)d\sigma,$$

которое получено из (5) заменой $t-s=\sigma$.

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 4 и дополнительно нечеткозначная функция $\tilde{f}(t)$ дифференцируема при $\forall t \in (-\infty, \infty)$ по Сеиккала, причем S -производная $\tilde{f}'(t)$ непрерывна и ограничена при $t \in (-\infty, \infty)$. Тогда ультраслабое ограниченное решение (10) нечеткого дифференциального уравнения (2) будет S -дифференцируемо при $t \in (-\infty, \infty)$ и выполнено равенство

$$(12) \quad \tilde{z}'(t) = \int_0^{\infty} G(\sigma) \tilde{f}'_t(t - \sigma) d\sigma.$$

Действительно, согласно (6), (7) и в силу (11) для α -индексов ультраслабого решения $\tilde{z}(t)$ нечеткого дифференциального уравнения (2) можем записать

$$(13) \quad z_{\alpha}^{\pm}(t) = \int_0^{\infty} G(\sigma) f_{\alpha}^{\pm}(t - \sigma) d\sigma.$$

Аналогично лемме 3 они порождают нечеткозначную функцию

$$(14) \quad \tilde{z}(t) = \int_0^{\infty} G(\sigma) \tilde{f}(t - \sigma) d\sigma.$$

По условию α -индексы $f_{\alpha}^{\pm}(t)$ при $\forall \alpha \in [0, 1]$ дифференцируемы по $t \in (-\infty, \infty)$, причем производные $(f_{\alpha}^{\pm})'_t(t)$ являются непрерывными и ограниченными на всей числовой оси скалярными функциями. Тогда вследствие (13) для производных α -индексов $z_{\alpha}^{\pm}(t)$ по t имеем

$$(15) \quad (z_{\alpha}^{\pm})'(t) = \int_0^{\infty} G(\sigma) (f_{\alpha}^{\pm})'_t(t - \sigma) d\sigma.$$

Здесь учтена возможность дифференцирования по параметру под знаком абсолютно сходящегося интеграла.

В силу неотрицательности функции Грина (аналогично доказательству леммы 3) при каждом t выражения (15) являются α -индексами S -производной $\tilde{z}'(t)$. Поэтому из (14), (15) с учетом теоремы 1 следует (12).

Тогда в силу теоремы 3 о единственности ультраслабого ограниченного на всей числовой оси решения уравнения (2) и согласно (10), (14) получим, что

$$\left(\int_{-\infty}^t G(t-s) \tilde{f}(s) ds \right)'_t = \left(\int_0^{\infty} G(\sigma) \tilde{f}(t - \sigma) d\sigma \right)'_t = \int_0^{\infty} G(\sigma) \tilde{f}'_t(t - \sigma) d\sigma.$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

Следствие 1. В условиях теоремы 6 нечеткая производная (12) непрерывна и ограничена при $t \in (-\infty, \infty)$.

Это доказывается аналогично теореме 2.

Утверждение 4. Пусть выполнены условия теоремы 4 и дополнительно нечеткозначная функция $\tilde{f}(t)$ дважды S -дифференцируема, причем первая и вторая S -производные $f'_t(t)$ и $f''_t(t)$ непрерывны и ограничены при $t \in (-\infty, \infty)$. Тогда ультраслабое ограниченное на всей числовой оси решение $\tilde{z}(t)$, определяемое формулой (14), является дважды S -дифференцируемым при $t \in (-\infty, \infty)$.

Действительно, при $\forall \alpha \in [0, 1]$ для α -индексов $z^\pm_\alpha(t)$ в соответствии с равенством (15) можно записать

$$(z^\pm_\alpha)''(t) = \left(\int_0^\infty G(\sigma)(f^\pm_\alpha)'_t(t - \sigma) d\sigma \right)' = \int_0^\infty G(\sigma)(f^\pm_\alpha)''_t(t - \sigma) d\sigma.$$

Отсюда на основании неотрицательности функции Грина выводим, что при $\forall t \in (-\infty, \infty)$ интегралы в правой части порождают нечеткое число $\tilde{z}''(t)$ – вторую S -производную $\tilde{z}(t)$.

Следствие 2. В условиях утверждения 4 производные $\tilde{z}'(t)$ и $\tilde{z}''(t)$ непрерывны и ограничены при $t \in (-\infty, \infty)$.

Следствие 3. Пусть в условиях теоремы 4 нечеткозначная функция $\tilde{f}(t)$ непрерывно S -дифференцируема порядка $j > 2$, причем все производные до порядка j ограничены на всей числовой оси. Тогда ультраслабое ограниченное решение (14) нечеткого дифференциального уравнения (2) является нечеткозначной функцией, непрерывно S -дифференцируемой j раз.

Замечание 3. Согласно утверждению 2 для производных α -индексов $z^\pm_\alpha(t)$, определяемых формулами (8), справедливы представления

$$(z^\pm_\alpha)^{(j)}_t(t) = \int_{-\infty}^\infty G_t^{(j)}(t - s) f^\pm_\alpha(s) ds \quad (j = 1, \dots, n - 1).$$

Однако, как показывают приведенные ниже примеры 2, 3, производные $G_t^{(j)}(t - s)$ функции Грина не сохраняют знак. Так что для доказательства S -дифференцируемости нечеткозначного решения более удобным оказалось представление (13).

Во многих прикладных задачах важно, чтобы нечеткозначное решение $\tilde{z}(t)$ было неотрицательно, что означает $z^-_\alpha(t) \geq 0$ ($\forall \alpha \in [0, 1], \forall t \geq 0$). В условиях теоремы 1 имеет место

Следствие 4. Пусть выполнены условия теоремы 1 и дополнительно нечеткозначная неоднородность уравнения (2) $\tilde{f}(t)$ неотрицательна, т.е. $f^-_\alpha(t) \geq 0$ для $\forall \alpha \in [0, 1]$ и $\forall t \in (-\infty, \infty)$. Тогда ультраслабое ограниченное на всей оси решение уравнения (2) неотрицательно.

Это вытекает из представления (9) в силу предположения о неотрицательности функции Грина $G(t-s)$ и $f_{\alpha}^{-}(s)$.

В частности, для треугольного нечеткого числа (a, b, c) неотрицательность означает, что $a \geq 0$.

4. Примеры радиотехнических цепей с нечеткозначными входными сигналами

В настоящем разделе рассмотрены приложения результатов раздела 3 к простейшим радиотехническим цепям (см., например, [29]) с нечеткими входными сигналами.

Пример 2. Рассмотрим RC-фильтр, т.е. радиотехническую цепь, характеризующую схемой, изображенной на рис. 3, где R – сопротивление, C – емкость.

На вход RC-фильтра, т.е. динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением первого порядка с постоянными коэффициентами

$$(16) \quad \tilde{z}'(t) + \beta \tilde{z}(t) = \tilde{y}(t), \quad \beta = \frac{1}{RC} > 0,$$

поступает нечеткий непрерывный и ограниченный на всей числовой оси сигнал $\tilde{y}(t)$.

Укажем характеристики выходного нечеткого ограниченного сигнала $\tilde{z}(t)$ в случае RC-фильтра. Заметим, что функция Грина задачи об ограниченных решениях скалярного уравнения $x' + \beta x = y(t)$ при $\beta > 0$ представима формулой

$$G_1(t) = \begin{cases} e^{-\beta t} & \text{при } t \geq 0; \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

При этом $G_1(t) \geq 0$ при $\forall t \in (-\infty, \infty)$.

Утверждение 5. Пусть коэффициент β нечеткого дифференциального уравнения (16) положителен, а правая часть $\tilde{y}(t)$ – непрерывная, ограниченная при $t \in (-\infty, \infty)$ нечеткозначная функция. Тогда нечеткий непрерывный

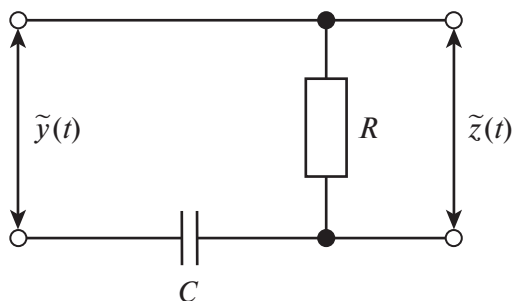


Рис. 3. RC-фильтр.

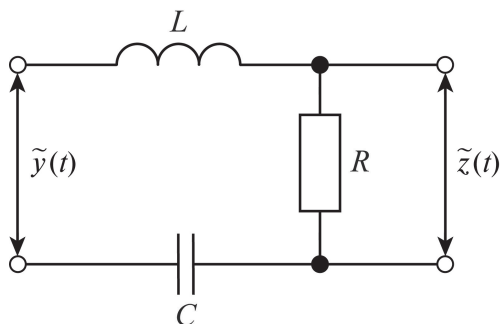


Рис. 4. Последовательный колебательный контур.

и ограниченный на всей числовой оси ультраслабый сигнал на выходе динамической системы (16) имеет вид

$$(17) \quad \tilde{z}(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-s)} \tilde{y}(s) ds.$$

Это следует из теоремы 4.

Утверждение 6. Пусть выполнены условия утверждения 5 и дополнительно нечеткозначная функция $\tilde{y}(t)$, стоящая в правой части уравнения (16), имеет треугольный тип при $t \geq 0$. Тогда решение (17) также имеет треугольный тип при $\forall t \geq 0$.

Это вытекает из представления (17) согласно теореме 5.

В [9] рассмотрен случай, когда правая часть уравнения (16) имеет вид $\tilde{y}(t) = \tilde{r}f(t)$, где $\tilde{r} \in J$ – нечеткое число, а функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ почти периодична и $f(t) \geq 0$ для $\forall t \in \mathbb{R}$. В этом случае приведено следующее условие, обеспечивающее H -дифференцируемость решения (17) нечеткого дифференциального уравнения (16): $f(t) > \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-s)} f(s) ds$.

Это условие накладывает дополнительное ограничение либо на область изменения t , либо на взаимосвязь параметров β и $f(t)$ уравнения (16).

Ниже приведено утверждение, обеспечивающее S -дифференцируемость нечеткозначного решения уравнения (16), вытекающее из теоремы 6.

Утверждение 7. Пусть выполнены условия утверждения 5 и дополнительно нечеткозначная правая часть уравнения (16) $\tilde{y}(t)$ непрерывно S -дифференцируема при $\forall t \in (-\infty, \infty)$, причем S -производная $\tilde{y}'(t)$ ограничена на всей числовой оси. Тогда ультраслабое ограниченное решение (17) непрерывно S -дифференцируемо при $\forall t \in (-\infty, \infty)$ и удовлетворяет нечеткому дифференциальному уравнению (16) при $\forall t \in (-\infty, \infty)$.

Таким образом, в условиях утверждения 7 формула (17) дает сильное ограниченное решение нечеткого уравнения (16).

Пример 3. Рассмотрим последовательный колебательный контур, т.е. радиотехническую цепь, характеризуемую схемой, изображенной на рис. 4, где R – сопротивление, C – емкость, L – индуктивность.

На вход последовательного колебательного контура, описываемого дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами

$$(18) \quad a_2 \ddot{z}(t) + a_1 \dot{z}(t) + a_0 z(t) = \tilde{y}(t), \quad a_2 = L \geq 0, \quad a_1 = R > 0, \quad a_0 = \frac{1}{RC} > 0,$$

поступает непрерывный нечеткий ограниченный на всей числовой оси сигнал $\tilde{y}(t)$ (см. рис. 4).

Укажем характеристики выходного нечеткого ограниченного сигнала $\tilde{z}(t)$.

Теорема 7. Пусть коэффициенты нечеткого дифференциального уравнения (18) удовлетворяют условиям $a_i > 0$ ($i = 0, 1, 2$) и $a_1^2 - 4a_0a_2 > 0$. Пусть входной сигнал $\tilde{y}(t)$ является непрерывной ограниченной при $t \in (-\infty, \infty)$ нечеткозначной функцией. Тогда для нечеткого ультраслабого сигнала $\tilde{z}(t)$ на выходе динамической системы (18) справедливо представление

$$(19) \quad \tilde{z}(t) = \int_{-\infty}^t G_2(t-s) \tilde{y}(s) ds.$$

Здесь $G_2(t)$ – функция Грина задачи об ограниченных решениях для вещественного дифференциального уравнения $a_2 x'' + a_1 x' + a_0 x = f(t)$ с непрерывной и ограниченной на всей числовой оси вещественнозначной функцией $f(t)$, имеющая вид

$$G_2(t) = \begin{cases} (e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t})(\lambda_2 - \lambda_1)^{-1} & \text{при } t \geq 0; \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

При этом λ_1, λ_2 – вещественные, различные и отрицательные корни характеристического уравнения $a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$ ($\lambda_1 < \lambda_2 < 0$).

Действительно, заметим, что $G_2(t) \geq 0$ при $\forall t \in (-\infty, \infty)$. Тогда в соответствии с теоремой 4 для нечеткозначного сигнала $\tilde{z}(t)$ на выходе справедливо равенство (19).

При этом выражение (19) является ультраслабым решением нечеткого дифференциального уравнения (18).

Утверждение 8. Пусть выполнены условия теоремы 7. Если дополнительно правая часть (18) $\tilde{y}(t)$ при $\forall t \in (-\infty, \infty)$ – треугольное нечеткое число, то ультраслабое ограниченное на всей числовой оси решение (19) нечеткого дифференциального уравнения (18) при $t \in (-\infty, \infty)$ – также треугольное нечеткое число.

Это вытекает из представления (19) и теоремы 5.

Выясним, когда ультраслабое ограниченное решение (19) нечеткого дифференциального уравнения (18) является S -дифференцируемой нечеткозначной функцией.

Теорема 8. Пусть выполнены условия теоремы 7 и дополнительно нечеткозначная функция $\tilde{y}(t)$ непрерывно S -дифференцируема при $\forall t \in (-\infty, \infty)$, причем S -производная $\tilde{y}'(t)$ ограничена при $t \in (-\infty, \infty)$. Тогда ультраслабое ограниченное решение $\tilde{z}(t)$ нечеткого дифференциального уравнения (18), определяемое формулой (19), S -дифференцируемо при $\forall t \in (-\infty, \infty)$.

Это вытекает из теоремы 6.

Кроме того справедлива

Теорема 9. Пусть выполнены условия теоремы 7 и дополнительно правая часть уравнения (18) $\tilde{y}(s)$ дважды непрерывно S -дифференцируема, причем S -производные $\tilde{y}'(t)$ и $\tilde{y}''(t)$ ограничены при $t \in (-\infty, \infty)$. Тогда ультраслабое ограниченное решение $\tilde{z}(t)$, определяемое формулой (19), также дважды непрерывно S -дифференцируемо и удовлетворяет нечеткому дифференциальному уравнению (18).

Это вытекает из утверждения 4.

Таким образом, в условиях теоремы 9 формула (19) дает сильное ограниченное решение нечеткого уравнения (18).

5. О взаимосвязи модальных значений входного и выходного нечетких сигналов

Специфика рассмотрения нечетких входных сигналов в радиотехнике (когда неизвестно априорное распределение вероятностей входного сигнала) состоит в выделении наиболее возможного входного сигнала. После этого с учетом параметров системы делаются выводы и для характеристик наиболее возможного выходного нечеткого сигнала.

В теории вероятностей для соответствующей задачи слово «возможное» надо было бы заменить на слово «вероятное». Особенно это наглядно для входного и выходного нечетких сигналов треугольного типа (см. пример 1). А именно, пусть, например, на вход радиотехнической цепи, описываемой нечетким дифференциальным уравнением (2), поступает нечеткий входной сигнал треугольного типа $(a(t), b(t), c(t))$. Для него при каждом t согласно примеру 1 $b(t)$ есть модальное значение. Тогда согласно теореме 5 справедливо

Утверждение 9. В условиях теоремы 5 модальное значение нечеткого треугольного сигнала на выходе линейной динамической системы (2) определяется по модальному значению $b(t)$ входного нечеткого треугольного сигнала $(a(t), b(t), c(t))$ формулой $B(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)b(s)ds$, где использованы обозначения теоремы 5.

Важным разделом математической статистики является теория доверительных интервалов (см., например, [30, гл. 2]). По аналогии обсудим задачу о доверительных возможностных интервалах значений входных и выходных нечетких сигналов.

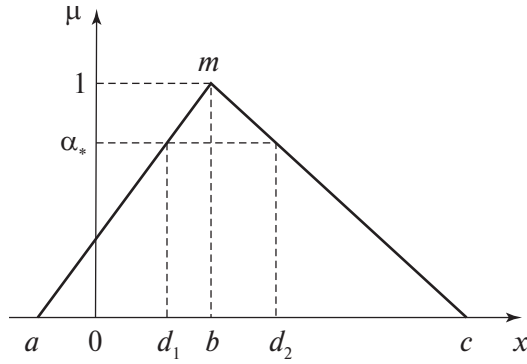


Рис. 5. Доверительный возможностный интервал модального значения входного нечеткого сигнала.

Допустим, что эксперты смоделировали входной нечеткий сигнал с уровнем доверительной возможности $\alpha_* \in [0,7; 1)$ при произвольном $t \geq 0$ как треугольный с функцией принадлежности $\mu_t(x)$, обладающей носителем $(a(t), c(t))$. Кроме того, предположим, что модальное значение при заданном $t \geq 0$ лежит в доверительном возможностном интервале $[d_1(t), d_2(t)]$ с уровнем доверительной возможности α_* , причем $[d_1(t), d_2(t)] \subset (a(t), c(t))$ (см. рис. 5).

Замечание 4. В указанных предположениях модальное значение нечеткого треугольного сигнала с уровнем доверительной возможности α_* имеет вид

$$b(t) = \frac{1}{\alpha_*}(d_1(t) - (1 - \alpha_*)a(t)).$$

Это вытекает из того, что, согласно рис. 5 точка m с координатами $(b, 1)$ лежит на прямой, проходящей через точки с координатами $(a, 0)$ и (d_1, α_*) и, следовательно, описываемой уравнением $\frac{\mu}{\alpha_*} = \frac{x-a}{d_1-a}$.

Рассмотрим вопрос о доверительном возможностном интервале модального значения выходного нечеткого сигнала с этим же уровнем доверительной возможности α_* .

Утверждение 10. Пусть выполнены условия теоремы 5, причем на вход динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением (2), с доверительной возможностью α_* поступает нечеткий сигнал треугольного типа с носителем $(a(t), c(t))$, модальное значение которого при произвольном $t \geq 0$ и заданном уровне доверительной возможности $\alpha_* \in [0,7; 1)$, лежит в доверительном возможностном интервале $[d_1(t), d_2(t)]$. Тогда доверительный возможностный интервал для модального значения выходного нечеткого сигнала имеет вид $[D_1(t), D_2(t)]$. Здесь $D_1(t) = (1 - \alpha_*)A(t) + \alpha_*B(t)$ и $D_2(t) = \alpha_*B(t) + (1 - \alpha_*)C(t)$, где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ определены в теореме 5. При этом в качестве $b(t)$ для определения модального значения $B(t)$ используется значение, приведенное в замечании 4.

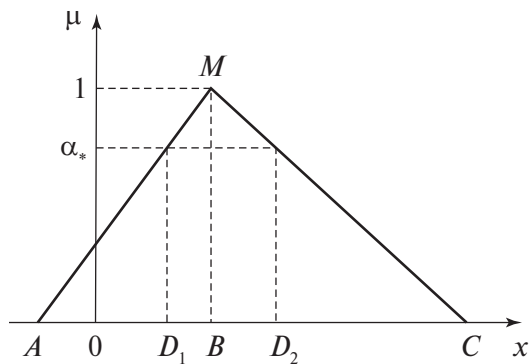


Рис. 6. Доверительный возможностный интервал модального значения выходного нечеткого сигнала.

Действительно, по теореме 5 и с учетом замечания 4 выходной нечеткий сигнал есть сигнал треугольного типа $(A(t), B(t), C(t))$. Тогда согласно рис. 6 получим доверительный возможностный интервал $[D_1(t), D_2(t)]$ для модального значения выходного нечеткого сигнала при фиксированном $t > 0$ с уровнем доверительной возможности α_* .

При этом согласно рис. 6 $D_1 = (1 - \alpha_*)A + \alpha_*B$ определяется как абсцисса точки пересечения прямой $[A, M]$, характеризуемой уравнением (см. пример 1) $\mu = (x - A)(B - A)^{-1}$ и прямой $\mu = \alpha_*$. А точка $D_2 = \alpha_*B + (1 - \alpha_*)C$ есть абсцисса точки пересечения прямой $[M, C]$, определяемой уравнением $\mu = (x - C)(B - C)^{-1}$ и прямой $\mu = \alpha_*$.

Отметим, что при практическом применении результатов разделов 4, 5 удобно моделировать входной нечетких сигнал формулой $\tilde{y}(t) = \tilde{r}g(t)$, где $\tilde{r} \in J$ – нечеткое треугольное число, а $g(t)$ – вещественная функция; либо моделировать $\tilde{y}(t)$ при $t \geq 0$ и полагать $\tilde{y}(t) = \tilde{y}(0)$ при $t \leq 0$.

6. Заключение

Основные результаты данной работы относятся к «нечетким» динамическим системам, описываемым линейными дифференциальными уравнениями n -го порядка с постоянными коэффициентами, в предположении непрерывности и ограниченности входного нечеткого сигнала (раздел 3). Они опираются на развитие метода функций Грина на случай нечетких дифференциальных уравнений. Важное место в работе уделяется выяснению вопроса о гладкости полученных решений. Отметим еще результат о треугольном типе нечеткого сигнала на выходе динамической системы, если таков нечеткий сигнал на входе.

Приложения, приведенные в разделе 4 статьи, демонстрируют возможности применения установленных общих положений к радиотехническим цепям с нечеткими входными сигналами. Они уточняют некоторые результаты раздела 3 на случай динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями первого и второго порядков. Существенную роль играет

раздел 5, в котором введено и использовано понятие доверительного возможностного интервала по аналогии с доверительным интервалом, используемым в математической статистике.

Подход, представленный в настоящей статье, является альтернативой стандартному подходу к исследованию линейных динамических систем с постоянными коэффициентами, связанному с частотной характеристикой, прямым и обратным преобразованием Фурье, а также преобразованию Лапласа.

Отметим, что развитый подход допускает распространение на случай периодических и почти периодических сигналов, а также может быть полезен при исследовании краевых задач для нечетких дифференциальных уравнений.

Многие результаты могут быть модифицированы на случай обобщенных нечетких производных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. М.: КноРус, 2014.
2. *Алефельд Г., Херицбергер Ю.* Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987.
3. *Аверкин А.Н.* Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. М.: Наука, 1986.
4. *Пегат А.* Нечеткое моделирование и управление. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.
5. *Puri M.L., Ralescu D.A.* Differential of fuzzy functions // J. Math. Anal. Appl. 1983. V. 91. P. 552–558.
6. *Kaleva O.* Fuzzy differential equations // Fuzzy sets and systems. 1987. V. 24. No. 3. P. 301–317.
7. *Seikkala S.* On the fuzzy initial value problem // Fuzzy Sets and Systems. 1987. V. 24. No. 3. P. 319–330.
8. *Jong Yeoul Park, Han H.* Existence and uniqueness theorem for a solution of fuzzy differential equations // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 1996. P. 271–280.
9. *Barnab'as Bede, Sorin G. Gal.* Almost periodic fuzzy-number-valued functions // Fuzzy Sets and Systems. 2004. V. 151. P. 385–403.
10. *Barnab'as Bede, Sorin G. Gal.* Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. 2005. V. 147. P. 581–599.
11. *Liu H.K.* Comparison result of two-point fuzzy boundary value problems // World Academy of Science. Engineering and Technology. 2011. V. 51. P. 697–703.
12. *Мочалов И.А., Хрисат М.С., Шихаб Еддин М.Я.* Нечеткие дифференциальные уравнения в задачах управления. Часть II. // Информационные технологии. 2015. Т. 21. № 4. С. 243–250.
13. *Деменков Н.П., Микрин Е.А., Мочалов И.А.* Нечеткое оптимальное управление линейными системами. Позиционное управление. Часть 1. // Информационные технологии. 2019. Т. 25. № 5. С. 259–270.

14. *Esmi E., Sanchez D.E., Wasques V.F., de Barros L.C.* Solutions of higher order linear fuzzy differential equations with interactive fuzzy values // *Fuzzy Sets and Systems*. 2021. V. 419. P. 122–140.
15. *Liang Cao, Deyin Yao, Hongyi Li, Wei Meng, Renquan Lu.* Fuzzy-based dynamic event triggering formation control for nonstrict-feedback nonlinear MASs // *Fuzzy Sets and Systems*. 2023. V. 452. P. 1–22.
16. *Rong Zhao, Lu Liu, Gang Feng.* Asynchronous fault detection filtering design for continuous-time T-S fuzzy affine dynamic systems in finite-frequency domain // *Fuzzy Sets and Systems*. 2023. V. 452. P. 168–190.
17. *Rui Dai, Minghao Chen.* On the structural stability for two-point boundary value problems of undamped fuzzy differential equations // *Fuzzy Sets and Systems*. 2023. V. 453. P. 95–114.
18. *Khastan A., Bahrami F., Ivaz K.* New Results on Multiple Solutions for Nth-Order Fuzzy Differential Equations under Generalized Differentiability // *Boundary Value Problems*. 2009. No. 7. P. 1–13.
19. *Allahviranloo T., Abbasbandy S., Salahshour S., Hakimzadeh A.* A new method for solving fuzzy linear differential equations // *Soft Computing*. 2011. V. 92. P. 181–197.
20. *Salahshour S., Allahviranloo T.* Applications of fuzzy Laplace Transforms // *Soft Computing*. 2013. V. 17. No. 1. P. 145–158.
21. *Ahmad L., Farooq M., Abdullah S.* Solving nth order fuzzy differential equation by fuzzy Laplace transform // *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2014. P. 1–20.
22. *Elhassan ElJaoui, Said Melliani, L. Saadia Chadli.* Solving second-order fuzzy differential equations by the fuzzy Laplace transform method // *Advances in Difference Equations*. February 2015. P. 1–14.
23. *Красносельский М.А., Бузд В.Ш., Колесов Ю.С.* Нелинейные почти периодические колебания. М.: Наука, 1970. 351 с.
24. *Перов А.И.* Об ограниченных решениях обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений n -го порядка // *Дифференциальные уравнения*. 2010. Т. 46. № 9. С. 1228–1244.
25. *Kaleva O., Seikkala S.* On fuzzy metric spaces // *Fuzzy Sets and Systems*. 1984. V. 12. P. 215–229.
26. *Aumann R.J.* Integrals of set-valued functions // *J. Math. Anal. Appl.* 1965. No. 12. P. 1–12.
27. *Hsien-Chung Wu.* The fuzzy Riemann integral and its numerical integration // *Fuzzy Sets and Systems*. 2000. V. 110(1). P. 1–25.
28. *Hukuhara M.* Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe // *Func. Ekvacioj*. 1967. No. 11. P.205–223.
29. *Баскаков С.И.* Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высш. школа, 1988. 448 с.
30. *Ивченко Г.И., Медведев Ю.И.* Математическая статистика. М.: Книжный дом «Либроком», 2019. 352 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Матасовым.

Поступила в редакцию 15.12.2023

После доработки 10.07.2025

Принята к публикации 11.07.2025

Стохастические системы

© 2025 г. И.Р. БЕЛОВ, канд. физ.-мат. наук (ivbelov93@ipu.ru),
А.Ю. КУСТОВ, канд. физ.-мат. наук (arkadiykustov@yandex.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ АНИЗОТРОПИЙНОГО РЕГУЛЯТОРА В ФОРМЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО ВЫХОДУ ПРИ МАЛЫХ ЗНАЧЕНИЯХ СРЕДНЕЙ АНИЗОТРОПИИ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ¹

Получено асимптотическое представление оптимального анизотропийного регулятора для линейных дискретных стационарных систем и анизотропийной нормы системы, замкнутой подобным регулятором. Определен максимальный порог средней анизотропии внешнего возмущения, при котором с заданной точностью оптимальный анизотропийный регулятор аппроксимируется $\mathcal{H}_2$ -оптимальным регулятором.

Ключевые слова: анизотропийная теория, линейные системы, оптимальный регулятор, асимптотическое поведение.

DOI: 10.31857/S0005231025100044

1. Введение

Одной из наиболее актуальных в теории управления является задача оптимального управления. Она заключается в поиске закона управления, при котором достигается экстремальное значение некоторой функции от параметров системы и самого закона управления, называемой критерием качества системы. Критерий качества системы выбирается в зависимости от целей управления и условий функционирования самой системы. Одним из известных законов управления является регулятор в форме динамической обратной связи по выходу системы. Значения сигнала управления на выходе этого регулятора зависят от измерений текущих параметров системы, которые и составляют ее измеряемый выход. Для реальных систем практически всегда в данных измерениях (равно как и в динамике самой системы) присутствуют случайные шумы, статистические параметры которых могут быть известными или нет. Если известно, что внешние случайные шумы, действующие на линейную систему, являются гауссовскими белыми шумами и используются квадратические критерии качества, то соответствующая задача управления называется линейно-квадратично-гауссовской (ЛКГ) задачей. Для подобной

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 24-21-20055).

постановки задачи управления существует огромное количество опубликованных работ для различных объектов [1–4]. Однако в случае реальных систем внешние шумы крайне редко являются аддитивными белыми шумами, для которых ЛКГ-регулятор наиболее эффективен в смысле среднеквадратичных критериев качества системы.

Позднее были разработаны методы теории $\mathcal{H}_\infty$ -оптимального управления для решения задач управления [5–8]. Суть данной теории заключается в синтезе оптимального регулятора на основе предположения, что на систему действует интегрируемое с квадратом внешнее возмущение и используется L_2 -индуцированная операторная норма системы. Однако методы теории $\mathcal{H}_\infty$ -управления приводят к консервативным (излишне перестраховочным) законам управления, с большими энергетическими затратами при функционировании получающихся регуляторов.

В середине 1990-х гг. И.Г. Владимировым была разработана анизотропийная теория управления как попытка объединения подходов $\mathcal{H}_2$ - и $\mathcal{H}_\infty$ -теорий [9] к описанию внешних возмущений. В рамках данной теории были введены такие фундаментальные понятия, как анизотропия случайного вектора, средняя анизотропия последовательности векторов и анизотропийная норма системы [10, 11]. Анизотропия вектора была введена как мера отклонения (в смысле относительной энтропии) распределения его направления от равномерного распределения на единичной сфере, а впоследствии [12] – для определения отклонения распределения самого вектора от изотропных гауссовских распределений. Впоследствии аппарат анизотропийной теории был применен для решения задач анализа, оптимального управления и фильтрации [13–16].

В [17] была рассмотрена задача асимптотического представления анизотропийной нормы фиксированной системы (с описанием в частотной области) при стремлении параметра средней анизотропии к нулю (так называемая левая асимптотика) и к бесконечности (соответственно, правая асимптотика). На основе упомянутой работы в [18] было получено асимптотическое представление оптимального анизотропийного фильтра (с описанием в пространстве состояний) в терминах отклонения от $\mathcal{H}_2$ -оптимального фильтра при малых значениях средней анизотропии. В той же работе представлено решение задачи определения максимального порога анизотропии, при которой $\mathcal{H}_2$ -фильтр с заданной точностью аппроксимирует анизотропийный фильтр. Впоследствии в [19] было представлено решение для частного случая аналогичной задачи анизотропийного управления. Полученные ранее результаты решения задач по левой асимптотике анизотропийных фильтра и регулятора являются основой научных результатов, представленных в настоящей статье.

В данной работе представлено решение общего случая задачи асимптотического представления оптимального анизотропийного регулятора для линейных дискретных детерминированных стационарных систем со случайны-

ми входными возмущениями. В первом разделе приведены краткие сведения об объекте исследования, об анизотропной теории управления, а также о методах синтеза оптимальных $\mathcal{H}_2$ - и анизотропного регуляторов. Во втором разделе представлено решение общего случая задачи оптимального анизотропного управления. Третий раздел статьи посвящен решению задачи асимптотического представления анизотропного регулятора в общем виде на основе результатов, описанных во втором разделе.

2. Предварительные сведения

2.1. Сокращения и обозначения

В данной работе используются следующие обозначения: $\mathbb{R}^n$ – множество n -мерных вещественных векторов; $\mathbb{R}^{n \times m}$ – множество $(n \times m)$ -мерных вещественных матриц; $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел; $\mathbb{L}_2^n$ – множество n -мерных вещественно-значных интегрируемых с квадратом случайных векторов; $\mathcal{H}_\infty^{p \times m}$ – пространство Харди $(p \times m)$ -мерных комплексно-значных матричных функций, аналитических внутри единичного круга $\mathbb{C}_\odot = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и имеющих ограниченную $\mathcal{H}_\infty$ -норму, определенную для $F \in \mathcal{H}_\infty^{p \times m}$ как $\|F\|_\infty = \sup_{|z| < 1} \bar{\sigma}(F(z))$; $\bar{\sigma}(X) = \sqrt{\lambda_{\max}(X^*X)}$ – максимальное сингулярное число матрицы X ; $\lambda_{\max}(X)$ – наибольшее собственное число эрмитовой матрицы X ; $X^* = \overline{X}^T$ – эрмитово сопряжение; $\mathcal{H}_2^{p \times m}$ – пространство Харди аналитических для всех $z \in \mathbb{C}_\odot$ матричных функций $F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k z^k$ с ограниченной $\mathcal{H}_2$ -нормой, квадрат которой определяется выражением $\|F\|_2^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \text{tr}(f_k f_k^T)$, где f_k – вещественные матрицы.

2.2. Класс рассматриваемых систем

Объектом исследования являются линейные дискретные стационарные системы F вида

$$(1) \quad x_{k+1} = Ax_k + B_w w_k + B_u u_k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $x_k \in \mathbb{L}_2^{n_x}$ – вектор состояния, $x_0 = 0$; $w_k \in \mathbb{L}_2^{n_w}$ – вектор внешнего возмущения; $u_k \in \mathbb{L}_2^{n_u}$ – вектор управления. Регулируемый выход системы (1) в виде вектора $z_k \in \mathbb{L}_2^{n_z}$ определяется выражением

$$(2) \quad z_k = C_z x_k + D_z u_k.$$

В качестве данных для определения управляющего входа u_k системы F используют данные измерений с датчиков на объекте. Эти данные представляются в виде последовательности векторов $y_k \in \mathbb{L}_2^{n_y}$ измеряемого выхода

$$(3) \quad y_k = C_y x_k + D_y w_k.$$

Матрицы $A, B_w, B_u, C_z, D_z, C_y, D_y$ являются известными вещественными матрицами соответствующих размеров. Системе уравнений ви-

да (1), (2), (3) ставятся в соответствие передаточные функции: $T_{yw}(z) = D_y + C_y(zI_{n_x} - A)^{-1}B_w$, определяемая четверкой матриц

$$(4) \quad T_{yw} \sim (A, B_w, C_y, D_y),$$

и $T_{zu}(z) = D_z + C_z(zI_{n_x} - A)^{-1}B_u$ с четверкой матриц

$$(5) \quad T_{zu} \sim (A, B_u, C_z, D_z).$$

Общая постановка задачи управления: необходимо построить регулятор K вида

$$(6) \quad K \sim \begin{cases} h_{k+1} = \hat{A}h_k + \hat{B}y_k, \\ u_k = \hat{C}h_k + \hat{D}y_k \end{cases}$$

с состоянием $h_k \in \mathbb{L}_2^{n_x}$, входом $y_k \in \mathbb{L}_2^{n_y}$ и выходом $u_k \in \mathbb{L}_2^{n_u}$, чтобы обеспечить выполнение некоторого критерия качества. В (6) определению подлежат матрицы $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ и $\hat{D}$. Далее представлены основные сведения о двух типах регуляторов в зависимости от критерия качества: о $\mathcal{H}_2$ -регуляторе с критерием качества в виде подлежащего минимизации следа ковариационной матрицы состояния или регулируемого выхода замкнутой системы и о анизотропийном регуляторе, для которого критерием качества является анизотропийная норма линейного оператора, связывающего регулируемый выход замкнутой системы с внешним возмущением.

2.3. $\mathcal{H}_2$ -оптимальное управление

Для удобства дальнейшего изложения введем матрицы

$$(7) \quad U_L = (D_z^T D_z + B_u^T \hat{P}_* B_u)^{-1}, \quad U_R = -(D_z^T C_z + B_u^T \hat{P}_* A), \quad U_* = U_L U_R,$$

$$(8) \quad V_L = -(A \hat{Q}_* C_y^T + B_w D_y^T), \quad V_R = (D_y D_y^T + C_y \hat{Q}_* C_y^T)^{-1}, \quad V_* = V_L V_R.$$

Задача оптимального $\mathcal{H}_2$ -управления заключается в поиске регулятора, доставляющего минимум $\mathcal{H}_2$ -норме системы, замкнутой этим регулятором. Рассмотрим линейную дискретную стационарную систему с уравнением динамики вида (1), уравнением управляемого выхода (2) и уравнением измеряемого выхода (3) с внешним случайным возмущением в виде последовательности случайных независимых векторов w_k со стандартным нормальным распределением, т.е. гауссовским распределением с нулевым средним $\mathbf{E}[w_k] = 0$ и единичной ковариационной матрицей $\mathbf{E}[w_k w_k^T] = I_{n_w}$. Пусть ищется $\mathcal{H}_2$ -оптимальный регулятор вида (6). Тогда имеем следующее решение поставленной задачи синтеза оптимального $\mathcal{H}_2$ -оптимального регулятора с учетом [2]:

$$\hat{A}_* = A + B_u U_* + V_* C_y - B_u \hat{D}_* C_y,$$

$$\hat{B}_* = B_u \hat{D}_* - V_*,$$

$$\hat{C}_* = U_* - \hat{D}_* C_y,$$

$$\hat{D}_* = -U_L (D_z^T C_z \hat{Q}_* C_y^T + B_u^T \hat{P}_* A \hat{Q}_* C_y^T + B_u^T \hat{P}_* B_w D_y^T) V_R,$$

где $\hat{P}_\star$ и $\hat{Q}_\star$ – стабилизирующие решения алгебраических уравнений Риккати (управления и фильтрации соответственно):

$$\begin{aligned}\hat{P}_\star &= A^T \hat{P}_\star A + C_z^T C_z - U_R^T U_\star, \\ \hat{Q}_\star &= A \hat{Q}_\star A^T + B_w B_w^T - V_\star V_L^T.\end{aligned}$$

Матрица $V_\star$ связана с матрицей коэффициентов фильтра Калмана (как части $\mathcal{H}_2$ -регулятора) по отношению к обновляющей последовательности, в то время как $U_\star$ отвечает за формирование управляющего воздействия по оценке этим фильтром текущего состояния объекта управления (в силу структуры принципа разделения фильтрации и управления, которой обладает ЛКГ-регулятор).

Далее рассмотрим основные понятия и принципы анизотропийной теории, на которых базируется решение поставленной в статье задачи.

2.4. Анизотропийная норма

В постановке задачи синтеза $\mathcal{H}_2$ -оптимального регулятора предполагается, что на вход рассматриваемой системы в качестве внешнего возмущения подается гауссовский белый шум. В реальных задачах чаще всего внешними возмущениями для систем выступают окрашенные (и не обязательно гауссовские) шумы, и не всегда точно известны статистические характеристики этих шумов. Предположим, что на вход рассматриваемой системы (1) поступает случайное возмущение в виде стационарной последовательности случайных независимых в совокупности векторов $W = (w_k)_{0 \leq k < +\infty}$, $w_k \in \mathbb{L}_2^{n_w}$, свойства которых отличаются от стандартного нормального распределения. Для характеристики отклонения распределения случайного вектора от нормального распределения будут использоваться понятия анизотропии случайного вектора и средней анизотропии последовательности случайных векторов.

Определение 1 [12]. Анизотропией $\mathbf{A}(w)$ n_w -мерного случайного вектора w называется неотрицательная величина, определенная по формуле

$$\mathbf{A}(w) = \min_{\lambda > 0} \mathbf{D}(f \| p_{n_w, \lambda}),$$

где $\mathbf{D}(f \| p_{n_w, \lambda})$ – относительная энтропия плотности распределения вероятности f вектора w относительно плотности нормального распределения вероятности $p_{n_w, \lambda}$ с нулевым математическим ожиданием и скалярной ковариационной матрицей λI_{n_w} , $\lambda > 0$.

Для характеристики последовательности случайных векторов использование анизотропии согласно приведенному выше определению не представляется возможным ввиду стремления ее к бесконечности по мере увеличения количества элементов последовательности. Поэтому было введено понятие средней анизотропии последовательности случайных векторов.

Определение 2 [12]. *Средней анизотропией (стационарной эргодической) последовательности $W = (w_k)_{0 \leq k < +\infty}$ называют предел*

$$\overline{\mathbf{A}}(W) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{A}(W_{0:N-1})}{N},$$

где $W_{s:t} = (w_s^T, w_{s+1}^T, \dots, w_t^T)^T$ – вектор, образованный векторами фрагмента последовательности $(w_k)_{s \leq k \leq t}$.

Как известно [20], векторы стационарной гауссовской последовательности случайного возмущения $W = (w_k)_{0 \leq k < +\infty}$ могут быть представлены в виде

$$w_j = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k v_{j-k},$$

где $V = (v_k)_{0 \leq k < +\infty}$ – последовательность независимых n_w -мерных случайных векторов со стандартным нормальным распределением; g_k – импульсная переходная характеристика генерирующего фильтра, $G(z) \in \mathcal{H}_2^{n_w \times n_w}$ – передаточная функция генерирующего фильтра с последовательностью векторов V на входе и последовательностью W на выходе. Поскольку последовательность векторов W генерируется фильтром G , для средней анизотропии последовательности $\overline{\mathbf{A}}(W)$ может быть использовано обозначение $\overline{\mathbf{A}}(G)$. Показано (см. [11, формула (4) и Лемма 1]), что средняя анизотропия $\overline{\mathbf{A}}(G)$ последовательности случайных векторов W , генерируемой формирующим фильтром G , может быть вычислена по следующей формуле:

$$\overline{\mathbf{A}}(G) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det \left(\frac{n_w}{\|G\|_2^2} \hat{G}(w)(\hat{G}(w))^* \right) dw,$$

где

$$\hat{G}(w) = \lim_{r \rightarrow 1-0} G(re^{iw}), \quad w \in [-\pi, \pi), \quad i^2 = -1.$$

Одной из мер отклика системы F вида (4) на входное возмущение в виде последовательности векторов W со средней анизотропией $\overline{\mathbf{A}}(G) \leq a$ является анизотропийная норма системы [11], которая определяется следующим образом:

$$(9) \quad \|F\|_a = \sup_{G \in \mathbf{G}_a} \frac{\|FG\|_2}{\|G\|_2},$$

где $\mathbf{G}_a = \{G \in \mathcal{H}_2^{n_w \times n_w} : \overline{\mathbf{A}}(G) \leq a\}$ – множество формирующих фильтров с ограниченной числом a средней анизотропией последовательности W .

Для вычисления анизотропийной нормы необходимо определить параметры формирующего фильтра G , при котором достигается супремум в выражении (9). Этот фильтр называется наихудшим формирующим фильтром и

имеет представление [11, формулы (32), (33)]

$$(10) \quad G \sim \left[\frac{A + BL}{L} \middle| \frac{B\Sigma^{1/2}}{\Sigma^{1/2}} \right]$$

с состоянием x_k , входом v_k и выходом w_k . Приведем формулировку леммы о вычислении анизотропийной нормы для линейной дискретной стационарной системы.

Лемма 1 [11, Лемма 3]. *Дана устойчивая линейная дискретная стационарная система F вида (4), определяемая четверкой матриц A, B, C, D . Для любого $a > 0$ существует, причем единственная, пара (q, R) , где $q \in (0, \|F\|_\infty^{-2})$ – скалярный параметр, удовлетворяющий уравнению*

$$(11) \quad -\frac{1}{2} \ln \det \frac{n_w \Sigma}{\text{tr}(LPL^T + \Sigma)} = a,$$

а $R \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ – матрица, являющаяся стабилизирующим решением уравнения Риккати

$$\begin{aligned} R &= A^T R A + q C^T C + L^T \Sigma^{-1} L, \\ \Sigma &= (I_{n_w} - q D^T D - B^T R B)^{-1}, \\ L &= \Sigma (B^T R A + q D^T C). \end{aligned}$$

Причем анизотропийная норма системы F вычисляется как

$$(12) \quad \|F\|_a = \left(\frac{1}{q} \left(1 - \frac{n_w}{\text{tr}(LPL^T + \Sigma)} \right) \right)^{1/2},$$

где матрица $P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ удовлетворяет уравнению Ляпунова

$$(13) \quad P = (A + BL)P(A + BL)^T + B\Sigma B^T.$$

Приведенные выше понятия и принципы анизотропийной теории управления будут использоваться далее при решении задач определения асимптотического представления анизотропийного регулятора в общем виде и максимального порога анизотропии, при котором анизотропийный регулятор аппроксимируется $\mathcal{H}_2$ -регулятором с заданной точностью.

3. Оптимальный анизотропийный регулятор

Рассматривается задача синтеза оптимального анизотропийного регулятора вида (6) для линейной дискретной стационарной системы (5) с измеряемым выходом (3). В [19] приведено решение задачи асимптотического представления при близких к нулю значениях средней анизотропии a для статического регулятора по состоянию $u_k = Kx_k$. Решим по аналогии задачу асимптотического представления для динамического анизотропийного регулятора по выходу.

Для начала запишем представление исходной системы с динамическим регулятором как результат подстановки выражения регулятора (6) в систему (1)–(3):

$$(14) \quad \mathcal{L}(F, K) \sim \left[\frac{\overline{A} | \overline{B}}{\overline{C} | \overline{D}} \right],$$

где матрицы $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ и $\overline{D}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \begin{pmatrix} A + B_u \hat{D} C_y & B_u \hat{C} \\ \hat{B} C_y & \hat{A} \end{pmatrix}, \quad \overline{B} = \begin{pmatrix} B_w + B_u \hat{D} D_y \\ \hat{B} D_y \end{pmatrix}, \\ \overline{C} &= \begin{pmatrix} C_z + D_z \hat{D} C_y & D_z \hat{C} \end{pmatrix}, \quad \overline{D} = D_z \hat{D} D_y. \end{aligned}$$

Предполагается, что векторы w_k входного возмущения рассматриваемой системы являются выходом наихудшего формирующего фильтра вида (10) и представимы в виде

$$w_k = L_x x_k + L_h h_k + \Sigma^{1/2} v_k.$$

Уравнение Риккати из условия леммы о вычислении анизотропийной нормы (11)–(13) для системы (14) имеет вид

$$(15) \quad R = \overline{A}^T R \overline{A} + q \overline{C}^T \overline{C} + L^T \Sigma^{-1} L,$$

$$(16) \quad \Sigma = (I_{n_w} - q \overline{D}^T \overline{D} - \overline{B}^T R \overline{B})^{-1},$$

$$(17) \quad L = (L_x \quad L_h) = \Sigma (\overline{B}^T R \overline{A} + q \overline{D}^T \overline{C}).$$

Таким образом, поставленная задача управления разделяется на две подзадачи – определение наихудшего формирующего фильтра для замкнутой системы (14) и синтез оптимального динамического анизотропийного регулятора в виде ЛКГ-регулятора, минимизирующего след ковариационной матрицы регулируемого выхода замкнутой системы (14), когда на ее вход поступает наиболее неблагоприятный шум. В [16] представлено решение подобной задачи управления для случая $\hat{D} = 0$. Если провести аналогичным образом рассуждения для случая регулятора (6), то получим, что матрицы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ удовлетворяют формулам

$$(18) \quad \hat{A} = A + B_w M + B_u \hat{C} + (B_u \hat{D} - \Lambda)(C_y + D_y M), \quad \hat{B} = \Lambda,$$

где

$$(19) \quad M = L_x + L_h,$$

$$(20) \quad \begin{aligned} S &= (A + B_w L_x + B_u \hat{D} D_y L_x) S (A + B_w L_x + B_u \hat{D} D_y L_x)^T + \\ &\quad + (B_w + B_u \hat{D} D_y) \Sigma (B_w + B_u \hat{D} D_y)^T - \Lambda \Theta \Lambda^T, \end{aligned}$$

$$(21) \quad \Theta = (C_y + D_y L_x) S (C_y + D_y L_x)^T + D_y \Sigma D_y^T,$$

$$(22) \quad \begin{aligned} \Lambda &= ((A + B_w L_x + B_u \hat{D} C_y + B_u \hat{D} D_y L_x) S (C_y + D_y L_x) + \\ &\quad + (B_w + B_u \hat{D} D_y) \Sigma D_y^T) \Theta^{-1}. \end{aligned}$$

Для определения неизвестных матриц $\widehat{C}$ и $\widehat{D}$ регулятора воспользуемся методологией решения задач синтеза динамических $\mathcal{H}_2$ -оптимальных регуляторов по выходу, представленной в [2]. Для этого необходимо записать исходную систему (1)–(3) с динамическим регулятором (6) и наихудшим формирующим фильтром (10) в виде

$$(23) \quad \begin{cases} \tilde{x}_{k+1} = \tilde{A}\tilde{x}_k + \tilde{B}_w v_k + \tilde{B}_u u_k, \\ \tilde{z}_k = \tilde{C}_z \tilde{x}_k + \tilde{D}_z u_k, \\ \tilde{y}_k = \tilde{C}_y \tilde{x}_k + \tilde{D}_y v_k, \end{cases}$$

где вектор состояния $\tilde{x}$ включает в себя вектор состояния x_k исходной системы (1) и вектор состояния h_k регулятора (6), т.е. $\tilde{x} = (x_k^T \ h_k^T)^T$, $\tilde{z}_k = z_k$, $\tilde{y} = (y_k^T \ h_k^T)^T$, а матрицы системы имеют вид

$$(24) \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} A + B_w L_x & B_w L_h \\ \widehat{B} C_y + \widehat{B} D_y L_x & \widehat{A} + \widehat{B} D_y L_h \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_w = \begin{pmatrix} B_w \Sigma^{1/2} \\ \widehat{B} D_y \Sigma^{1/2} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_u = \begin{pmatrix} B_u \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(25) \quad \tilde{C}_z = (C_z \ 0), \quad \tilde{D}_z = D_z,$$

$$(26) \quad \tilde{C}_y = \begin{pmatrix} C_y + D_y L_x & D_y L_h \\ 0 & I_{n_x} \end{pmatrix}, \quad \tilde{D}_y = \begin{pmatrix} D_y \Sigma^{1/2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В итоге получаем, что искомое управление u_k определяется по формуле

$$u_k = \tilde{N} \tilde{y}_k,$$

где $\tilde{N} = (\widehat{D} \ \widehat{C})$.

Применив представленный в [2] метод решения задачи $\mathcal{H}_2$ -оптимального управления для системы (23), получим

$$(27) \quad \tilde{N} = -\tilde{U}_L (\tilde{D}_z^T \tilde{C}_z Q_\star \tilde{C}_y^T + \tilde{B}_u^T P_\star \tilde{A} Q_\star \tilde{C}_y^T + \tilde{B}_u^T P_\star \tilde{B}_w \tilde{D}_y^T) \tilde{V}_R,$$

где матрицы $\tilde{U}_L$ и $\tilde{V}_R$ введены по аналогии с (7) и (8) путем замены соответствующих матриц на аналогичные с волнистой чертой и матриц $\widehat{P}_\star$, $\widehat{Q}_\star$ на $P_\star$, $Q_\star$ соответственно, а сами матрицы $P_\star$ и $Q_\star$ являются решениями уравнений

$$(28) \quad P_\star = \tilde{A}^T P_\star \tilde{A} + \tilde{C}_z^T \tilde{C}_z - \tilde{U}_R^T \tilde{U}_\star,$$

$$(29) \quad Q_\star = \tilde{A} Q_\star \tilde{A}^T + \tilde{B}_w \tilde{B}_w^T - \tilde{V}_\star \tilde{V}_L^T.$$

Из (27) следует, что для определения матриц $\widehat{C}$ и $\widehat{D}$ необходимо сделать следующие преобразования:

$$\widehat{C} = \tilde{N} \begin{pmatrix} 0 \\ I_{n_x} \end{pmatrix}, \quad \widehat{D} = \tilde{N} \begin{pmatrix} I_{n_y} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрицы $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ и $\hat{D}$ искомого динамического анизотропийного регулятора по выходу однозначно определяются системой уравнений (18), (27)–(29).

В следующем разделе приведено решение задачи поиска асимптотического представления для полученного оптимального анизотропийного регулятора при $a \rightarrow 0 + 0$.

4. Асимптотическое представление регулятора

Следующим шагом решения поставленной задачи является вывод формул асимптотического представления полученного анизотропийного динамического регулятора. Для этого необходимо определить компоненты разложения матриц регулятора, системы (23) и всех сопутствующих матриц. Запишем формулы разложения в матричные ряды для матриц системы (23):

$$(30) \quad X(a) = \sum_{k=0}^n X_k a^{k/2} + o(a^{n/2}), \quad a \rightarrow 0 + 0,$$

где под X понимается *любая* из переменных, кроме матриц A , B_w , B_u , C_z , C_y , D_z , D_y исходной системы, которые не зависят от a по постановке задачи (для примера, матрица Σ зависит от a , поэтому для нее справедливо представление (30), т.е. $\Sigma(a) = \Sigma_0 + \Sigma_1 \sqrt{a} + \Sigma_2 a + o(a)$, если положить $n = 2$). Отметим, что $\tilde{X}(\sqrt{a}) \doteq X(a)$ является достаточно гладкой функцией своего аргумента $\sqrt{a}$. Соответственно, подобное разложение будут иметь и все матрицы, полученные в результате сумм и произведений отдельных матриц, представимых в виде (30).

По аналогии с решением задачи синтеза статического регулятора для определения нулевых компонент разложений матричных функций необходимо определить значения функций при $a = 0$ – этому случаю соответствуют матрицы $\mathcal{H}_2$ -регулятора. Для удобства введем вспомогательную матрицу $\Upsilon = -\tilde{U}_L^{-1} \tilde{N} \tilde{V}_R^{-1}$. Все переменные X_0 , соответствующие случаю $a = 0$, здесь не приводятся, так как получаются тривиально путем подстановки величин $q = 0$, $L = 0$ и $\Sigma = I_{n_w}$ во все необходимые формулы.

Используя приведенные в [18, 19] результаты, запишем вторые слагаемые разложений матричных функций $R(a)$, $\Sigma(a)$, $L(a)$ и $q(a)$ следующим образом:

$$(31) \quad q_1^2 = 4n_w / \left(2n_w \text{tr}(\bar{B}_0^T \mathcal{Q} \bar{A}_0 \bar{P}_0 \bar{A}_0^T \mathcal{Q} \bar{B}_0) + n_w (\bar{B}_0^T \mathcal{Q} \bar{B}_0)^2 - \text{tr}^2(\bar{B}_0^T \mathcal{Q} \bar{B}_0) \right),$$

$$R_1 = q_1 \mathcal{Q}, \quad \Sigma_1 = \bar{B}_0^T R_1 \bar{B}_0, \quad L_1 = \bar{B}_0^T R_1 \bar{A}_0,$$

где матрицы $\mathcal{Q}$ и $\bar{P}_0$ удовлетворяют уравнениям

$$\mathcal{Q} = \bar{A}_0^T \mathcal{Q} \bar{A}_0 + \bar{C}_0^T \bar{C}_0, \quad \bar{P}_0 = \bar{A}_0 \bar{P}_0 \bar{A}_0^T + \bar{B}_0 \bar{B}_0^T.$$

Сделав все необходимые преобразования, получим следующие выражения первых компонент для ненулевых (остальные будут нулевыми) матриц замкнутой системы (можно обратить внимание на зависимость этих матриц одновременно от различных X_0 и X_1):

$$\begin{aligned}\tilde{A}_1 &= \begin{pmatrix} B_w L_{x,1} & B_w L_{h,1} \\ \hat{B}_1 C_y + \hat{B}_0 D_y L_{x,1} & \hat{B}_0 D_y L_{h,1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_{w,1} = \begin{pmatrix} B_w \Sigma_1^{1/2} \\ \hat{B}_1 D_y + \hat{B}_0 D_y \Sigma_1^{1/2} \end{pmatrix}, \\ \tilde{C}_{y,1} &= \begin{pmatrix} D_y L_{x,1} & D_y L_{h,1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{D}_{y,1} = \begin{pmatrix} D_y \Sigma_1^{1/2} \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Проведя аналогичные выкладки для матриц анизотропийного регулятора, получим уравнения для первых компонент матриц анизотропийного регулятора:

$$\begin{aligned}\hat{A}_1 &= B_w M_1 + B_u \hat{C}_1 + B_u \hat{D}_1 C_y - \Lambda_1 C_y + (B_u \hat{D}_0 - \Lambda_0) D_y M_1, \quad \hat{B}_1 = \Lambda_1, \\ \hat{C}_1 &= \tilde{N}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ I_{n_x} \end{pmatrix}, \quad \hat{D}_1 = \tilde{N}_1 \begin{pmatrix} I_{n_y} \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Хотя выражения для вторых слагаемых разложения (30) различных матриц-переменных устроены достаточно сложно, все они получаются одинаковым способом и устроены очень похоже, поэтому для экономии места приведем лишь общий принцип их вывода на примере матрицы Υ . Согласно введенным обозначениям,

$$(32) \quad \Upsilon = \tilde{D}_z^T \tilde{C}_z Q_{\star} \tilde{C}_y^T + \tilde{B}_u^T P_{\star} \tilde{A} Q_{\star} \tilde{C}_y^T + \tilde{B}_u^T P_{\star} \tilde{B}_w \tilde{D}_y^T,$$

где все матрицы, формирующие ее, зависят от a . Значит, для первого слагаемого ее разложения по формуле (30) справедливо представление

$$(33) \quad \Upsilon_0 = \tilde{D}_{z,0}^T \tilde{C}_{z,0} Q_{\star,0} \tilde{C}_{y,0}^T + \tilde{B}_{u,0}^T P_{\star,0} \tilde{A}_0 Q_{\star,0} \tilde{C}_{y,0}^T + \tilde{B}_{u,0}^T P_{\star,0} \tilde{B}_{w,0} \tilde{D}_{y,0}^T,$$

а для второго – представление

$$\begin{aligned}(34) \quad \Upsilon_1 &= \sum_{\substack{i,j,k,l \geq 0 \\ i+j+k+l=1}} \tilde{D}_{z,i}^T \tilde{C}_{z,j} Q_{\star,k} \tilde{C}_{y,l}^T + \\ &+ \sum_{\substack{i,j,k,l,m \geq 0 \\ i+j+k+l+m=1}} \tilde{B}_{u,i}^T P_{\star,j} \tilde{A}_k Q_{\star,l} \tilde{C}_{y,m}^T + \sum_{\substack{i,j,k,l \geq 0 \\ i+j+k+l=1}} \tilde{B}_{u,i}^T P_{\star,j} \tilde{B}_{w,k} \tilde{D}_{y,l}^T.\end{aligned}$$

Несложно заметить общий принцип формирования матрицы Υ_1 : из всех возможных индексов формирующих ее матриц в каждом из матричных произведений лишь один принимает значение, равное 1. По аналогии, для того, чтобы выписать третье слагаемое Υ_2 , понадобится рассмотреть всевозможные комбинации индексов, сумма которых равна 2 (общее число слагаемых

в этом случае будет равно 35). Таким образом, можно считать, что все необходимые матрицы в представлении (30) выписаны, т.е. с заданной точностью определено асимптотическое представление динамического анизотропийного регулятора при $a \rightarrow 0+0$. Полученные результаты запишем в виде следующего утверждения.

Теорема 1. Даны линейная стационарная система вида (1)–(3) и динамический регулятор вида (6) в форме обратной связи по выходу. При малых значениях средней анизотропии $a \rightarrow 0+0$ входных возмущений для матриц $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ и $\bar{D}$ регулятора справедливы асимптотические разложения, заданные формулой (30), где слагаемые ряда определяются по аналогии с формулами (32)–(34) для матрицы Υ , а зависимость их от числа a задается формулой (11).

В следующем разделе представлено решение задачи нахождения асимптотического представления анизотропийной нормы для замкнутой найденным регулятором системы.

5. Асимптотическое представление анизотропийной нормы

Следующим этапом решения задачи является получение асимптотического представления анизотропийной нормы системы, замкнутой полученным регулятором, и определение максимального уровня средней анизотропии $a_{\max}$, при котором соответствующий оптимальный анизотропийный регулятор аппроксимируется $\mathcal{H}_2$ -оптимальным регулятором с заданным уровнем точности ε . Для этого необходимо определить первые компоненты матриц $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ и $\bar{D}$. Определив частные производные этих матричных функций по $\sqrt{a}$ и подставив в них значение $a = 0$, легко получаем нужные первые компоненты разложения матриц $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ и $\bar{D}$.

Для асимптотического представления анизотропийной нормы необходимо определить вторые компоненты матричных функций $R(a)$ и $\Sigma(a)$. Определив вторые частные производные матриц (15)–(17) по $\sqrt{a}$ и подставив в них нулевое значение средней анизотропии a , имеем

$$\begin{aligned} R_2 &= \bar{A}_0^T R_2 \bar{A}_0 + Y_{R_2} + Y_{R_2}^T, \\ \Sigma_2 &= \bar{B}_0^T R_2 \bar{B}_0 + Y_{\Sigma_2} + Y_{\Sigma_2}^T, \end{aligned} \quad (35)$$

где $Y_{R_2} = q_1 (\bar{A}_1^T \mathcal{Q} \bar{A}_0 + \bar{C}_1^T \bar{C}_0)$, $Y_{\Sigma_2} = q_1 (\bar{B}_1^T \mathcal{Q} \bar{B}_0 + \bar{D}_1^T \bar{D}_0)$. Подставив полученные разложения в ряд матричных функций R , Σ , L и P в формулу (12) анизотропийной нормы, получим асимптотическое представление анизотропийной нормы системы (14) при $a \rightarrow 0+$ следующего вида:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}(F, K_\star)\|_a &= \\ (36) \quad &= \frac{\|\mathcal{L}(F, K_{\star,0})\|_2}{\sqrt{n_w}} \left(1 + \left(\sqrt{\frac{\Xi}{n_w}} + \frac{\text{tr}(\Sigma_2)}{2q_1 \|\mathcal{L}(F, K_{\star,0})\|_2^2} \right) \sqrt{a} \right) + o(\sqrt{a}), \end{aligned}$$

где $\mathcal{L}(F, K_{*,0})$ представляет собой систему вида (14), замкнутую оптимальным регулятором при уровне средней анизотропии $a = 0$, а Ξ имеет вид

$$(37) \quad \Xi = \frac{n_w \|\mathcal{L}(F, K_{*,0})\|_4^4 - \|\mathcal{L}(F, K_{*,0})\|_2^4}{\|\mathcal{L}(F, K_{*,0})\|_2^4}.$$

Формулы для $\|\cdot\|_4^4$ и $\|\cdot\|_2^4$ известны и могут быть найдены в [17].

Последним шагом будет определение максимального уровня средней анизотропии для заданного уровня точности $\varepsilon = \overline{\sigma}(\|\mathcal{L}(F, K_{*,0})\|_2)$, с которым $\mathcal{H}_2$ -оптимальный регулятор аппроксимирует анизотропийный регулятор. Это условие имеет вид $a \leq a_{\max}$, где $a_{\max}$ удовлетворяет неравенству

$$(38) \quad \left| \|\mathcal{L}(F, K_*)\|_{a_{\max}} - \frac{\|\mathcal{L}(F, K_{*,0})\|_2}{\sqrt{n_w}} \right| < \varepsilon \frac{\|\mathcal{L}(F, K_{*,0})\|_2}{\sqrt{n_w}}.$$

Подставив формулу (36) асимптотического представления анизотропийной нормы в неравенство (38), имеем

$$(39) \quad a \leq a_{\max} = \varepsilon^2 \left(\sqrt{\frac{\Xi}{n_w}} + \frac{\text{tr}(\Sigma_2)}{2q_1 \|\mathcal{L}(F, K_{*,0})\|_2^2} \right)^{-2}.$$

Приведенные выше результаты решения задачи асимптотического представления анизотропийной нормы запишем в виде следующей теоремы.

Теорема 2. Дана линейная стационарная система вида (1)–(3) и динамический регулятор вида (6) в форме обратной связи по выходу. При малых значениях средней анизотропии $a \rightarrow 0 + 0$ входных возмущений анизотропийная норма системы, замкнутой регулятором (6), имеет асимптотическое представление (36), а максимальный уровень средней анизотропии, при котором относительное отклонение анизотропийной нормы $\|\mathcal{L}(F, K_)\|_a$ от масштабированной $\mathcal{H}_2$ -нормы замкнутой системы не превышает заданного порогового числа ε , определяется по формуле (39), где q_1 , Σ_2 и Ξ задаются в соответствии с формулами (31), (35) и (37).*

Очевидно, что максимальный уровень средней анизотропии определяется матрицами исходной системы. В более ранних работах по левой асимптотике анизотропийного фильтра [18] и статического анизотропийного регулятора [19] было наглядно показано, что их $\mathcal{H}_2$ -оптимальные аналоги достаточно эффективно аппроксимируют соответственно анизотропийные фильтр и регулятор при малых значениях средней анизотропии входного возмущения.

6. Заключение

В данной статье рассмотрены задача синтеза динамического оптимального анизотропийного регулятора для линейных дискретных стационарных систем и задача определения максимального порога средней анизотропии,

при котором с заданным уровнем точности анизотропийный регулятор может быть аппроксимирован $\mathcal{H}_2$ -оптимальным регулятором. В процессе решения поставленных задач были получены асимптотические представления всех матриц анизотропийного регулятора, матриц замкнутой системы и ее анизотропийной нормы при малых значениях средней анизотропии. Дальнейшие исследования могут быть посвящены аналогичной задаче анизотропийного управления для правой асимптотики, получению асимптотического представления анизотропийного регулятора и нормы замкнутой системы при средней анизотропии, стремящейся к бесконечности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kwakernaak H., Sivan R. Linear optimal control systems. New York, Wiley, 1972.
2. Trentelman H.L., Stoorvogel A.A. Sampled-data and discrete-time $\mathcal{H}_2$ -optimal control // Proc. 32nd IEEE Conf. Decision and Control. 1993. V. 1. P. 331–336.
3. Saberi A., Sannuti P., Stoorvogel A.A. $\mathcal{H}_2$ -optimal controllers with measurement feedback for discrete-time systems: flexibility in closed-loop pole placement // Proc. 35th IEEE Conf. Decision and Control. 1996. V. 2. P. 2330–2335.
4. Dragan V., Toader M., Stoica A.-M. $\mathcal{H}_2$ -optimal control for linear stochastic systems // Automatica. 2004. V. 40(7). P. 1103–1113.
5. Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A. State-space solutions to standard $\mathcal{H}_2$ - and $\mathcal{H}_\infty$ -control problems // IEEE Trans. AC. 1989. V. 34. P. 831–847.
6. Green M., Limebeer D.J.N. Linear robust control. Englewood Cliffs. N.J: Prentice Hall, 1995.
7. Iglesias P.A., Glover K. State-space approach to discrete-time $\mathcal{H}_\infty$ -control // Int. J. Control. 1991. V. 54. P. 1031–1073.
8. Yaesh I., Shaked U. A transfer function approach to the problems of discrete-time systems: $\mathcal{H}_\infty$ -optimal linear control and filtering // IEEE Trans. Autom. Control. 1991. V. 36. P. 1264–1271.
9. Semyonov A.V., Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P. Stochastic approach to $\mathcal{H}_\infty$ -optimization // Proc. 33rd Conf. Decision and Control. 1994. V. 3. P. 2249–2250.
10. Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В. Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем // ДАН. 1994. Т. 342. № 5. С. 583–585.
11. Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V. On computing the anisotropic norm of linear discrete-time-invariant systems // Proc. 13 IFAC World Congress. 1996. P. 179–184.
12. Владимиров И.Г., Даймонд Ф., Клоеден П.Е. Анизотропийный анализ робастного качества линейных нестационарных дискретных систем на конечном временном интервале // АиТ. 2006. № 8. С. 92–111.
13. Diamond P., Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V. Anisotropy-based performance analysis of linear discrete time invariant control systems // Int. J. Control. 2001. V. 74. No. 1. P. 28–42.
14. Timin V.N., Kurdjukov A.P. Synthesis of a robust control system for airplane landing under wind shear conditions // J. Comput. Syst. Sci. Int. 1995. V. 33. P. 146–154.

15. *Tchaikovsky M.M.* Static Output Feedback Anisotropic Controller Design by LMI-Based Approach: General and Special Cases // American Control Conference. 2012. P. 5208–5213.
16. *Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V.* State-space solution to anisotropy-based stochastic $\mathcal{H}_\infty$ -optimization problem // Proc. 13th IFAC World Congress. 1996. V. H, Paper IFAC-3d-01.6. P. 427–432.
17. *Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В.* Асимптотика анизотропийной нормы линейных стационарных систем // АиТ. 1999. № 3. С. 78–87.
18. *Belov I.R., Kustov A.Yu.* On the application of Kalman filter in the estimation problem in slightly coloured noise conditions // Large-scale Syst. Control. 2023. V. 103. P. 94–120.
19. *Belov I.R.* On the approximation of anisotropic controller by $\mathcal{H}_2$ -optimal controller // Proc. 32th Mediterranean Conf. Control and Automation. IEEE Xplore. 2024. P. 891–895.
20. *Розанов Ю.А.* Стационарные случайные процессы. М.: Наука, 1990.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 18.12.2024

После доработки 13.06.2025

Принята к публикации 26.06.2025

Стохастические системы

© 2025 г. А.В. БОСОВ, д-р техн. наук (ABosov@frccsc.ru)
(Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН,
Москва)

ПРИМЕНЕНИЕ ФИЛЬТРА ЛИНЕЙНЫХ ПСЕВДОНАБЛЮДЕНИЙ В ЗАДАЧАХ СЛЕЖЕНИЯ И ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ СО СЛУЧАЙНЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ¹

Исследуется возможность адаптации и результативность применения фильтра линейных псевдонаблюдений в модели стохастической системы наблюдения со случайными временными задержками между поступающими наблюдениями и фактическим состоянием движущегося объекта. Метод псевдонаблюдений модифицируется для объединения результатов наблюдений, выполняемых несколькими измерительными комплексами, расположенными на разных расстояниях до объекта и имеющими отличающиеся временные задержки. Фильтр реализуется в модели, учитывающей измерения углов направления и дальности. Экспериментальные расчеты выполнены для модельного примера, описывающего движение автономного подводного аппарата, использующего для позиционирования два стационарных акустических маяка.

Ключевые слова: стохастическая система со случайными временными задержками наблюдений, линейные псевдонаблюдения, расширенный фильтр Калмана, позиционирование, слежение за целью, сонары.

DOI: 10.31857/S0005231025100058

1. Введение

Методы фильтрации состояний в стохастических динамических системах находят применение в разнообразных приложениях, в числе которых управление автономными подводными аппаратами (ПА) [1]. Наряду с беспилотными летательными аппаратами [2] и беспилотными автомобилями [3], эта область в настоящее время является актуальным источником исследовательских задач. Сама по себе водная среда имеет особенности, учитывать которые в задачах, связанных с движением на поверхности, не приходится. Это, например, такие факторы, как изменяющаяся температура, соленость и давление воды [4], довольно интересны течения [5]. Помимо влияния на движущийся объект, даже большие особенности создает вода для измерительных

¹ Работа выполнена при поддержке проекта № 075-15-2024-544 Министерства науки и высшего образования РФ. Работа выполнена с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования «Высокопроизводительные вычисления и большие данные» (ЦКП «Информатика» ФИЦ ИУ РАН, Москва).

средств. Если не касаться акселерометров и гироскопов, функционирующих на борту ПА, а рассматривать только внешних наблюдателей, то все доступные измерительные средства строятся на общих физических законах, используют акустический сигнал, т.е. относятся к акустическим сенсорам или сонарам [6]. Принципиальной особенностью таких устройств является значимое влияние на точность измерений случайной временной задержки поступления данных о состоянии наблюдаемого ПА. Этот эффект имеет место и в измерителях, использующих электромагнитное излучение. Так, локаатор, наблюдающий за объектом на расстоянии в 1 км, получит его координаты с задержкой порядка 10^{-7} с. Такими значениями можно пренебречь. Если используется сонар, то при скорости звука в воде 1500 м/с задержка в определении координат объекта на расстоянии 1 км составит около 0,7 с, на расстоянии 10 км – уже 7 с. Даже если объект движется не слишком быстро, пренебрегать такими значениями нельзя. Тем более этот эффект надо учитывать в моделях, связанных с движением скоростных ПА.

Модель стохастической динамической системы наблюдения, которая учитывает фактор временной задержки акустического сигнала, предложена в [7, 8], расширена на задачу идентификации неизвестных параметров модели движения в [9, 10]. Для оценки состояния и параметров записаны соотношения оптимальной байесовской фильтрации [11].

Как и в большинстве приложений, ни универсальные методы фильтрации, типа расширенного фильтра Калмана (РФК) [12], фильтров частиц [13] и различных вариантов сигма-точечных фильтров [14], ни условно-оптимальные и минимаксные фильтры Пугачева–Панкова [15, 16] типовой структуры, ни тем более оптимальные байесовские фильтры применять на практике не удастся: либо чрезмерно вычислительно затратной оказывается реализация, либо проявляется склонность субоптимальных алгоритмов к расходимости. Исключением мог бы стать метод линейных псевдонаблюдений, занимающий промежуточное место между универсальными методами, применимыми к любой модели, и специализированными, т.е. предназначенными исключительно для конкретной модели. Хотя идея этого метода достаточно универсальна, применяться он должен к вполне конкретным измерениям, линеаризуя их. В задачах подводной навигации применяются разнообразные сенсоры, несущие косвенную информацию о положении объекта. В их числе измерители углов направления и расстояний занимают значимое место [17].

Сама идея псевдоизмерений известна достаточно давно и представляется логичным дополнением или развитием наиболее известного метода субоптимальной фильтрации – РФК [12]. Как известно, РФК воспроизводит структуру линейного фильтра Калмана [18], оптимального в задаче фильтрации состояния в линейно-гауссовской системе наблюдения, а также обладающего целой серией выдающихся свойств в различных задачах робастного и адаптивного оценивания и управления. Формальное следование структуре линейного фильтра означает линеаризацию. В случае РФК – это линеаризация около прогноза состояния для получения эвристических оценок ковариаций

прогноза состояния и оценки фильтрации. Усовершенствованная за счет некоторых функциональных преобразований линеаризация наблюдений, которая делает комбинации наблюдений более похожими на линейные, по-видимому, впервые продемонстрирована для измерений углов направлений в [19]. Более современный практический взгляд – в [20]. Новое качество фильтру псевдо-наблюдений придала серия работ, начатая в [21], за счет обновления модели.

Цель данной статьи состоит в адаптации метода РФК на основе линейных псевдонаблюдений для модели с временными задержками. Для этого в разделе 2 предложена более универсальная модель псевдонаблюдений, развивающая классический метод [19, 20]. Далее, в разделе 3 эта модель использована для записи уравнений фильтрации на основе РФК для модели стохастической системы наблюдения с временными задержками. Раздел 4 статьи посвящен вычислительному эксперименту, который описывает слежение за движением к заданной цели ПА, наблюдаемого двумя стационарными акустическими маяками. В заключение подведены итоги, в т.ч. указаны возможные недостатки метода линейных псевдонаблюдений на основе РФК и пути их устранения.

2. Фильтрация по методу линейных псевдонаблюдений

2.1. Модель системы и определение псевдонаблюдений

Используются обозначения $E\{X\}$ – математическое ожидание случайного вектора X , $\text{cov}(X, Y)$ – ковариация X и Y , X' – операция транспонирования X .

Предполагается, что движение автономного ПА (A – AUV, autonomous underwater vehicle) описывается в системе координат $Oxyz$ такой, что плоскость Oxy совпадает с поверхностью моря, а ось Oz направлена вниз и соответствует глубине (рис. 1).

Вектор координат A в некоторый фиксированный, например начальный, момент времени обозначим $(X_A, Y_A, Z_A)'$, координаты в зависимости от времени – $(X(t), Y(t), Z(t))'$.

Сначала будем считать, что за движением наблюдает один измерительный комплекс (M – meter), имеющий координаты (X_M, Y_M, Z_M) . Это может быть пассивное акустическое устройство для оценки направления движения [22], позволяющее выполнять измерение на борту ПА, или активный гидроакустический буй [23], формирующий измерения для внешнего наблюдателя.

Тип измерительного устройства зависит от того, какая навигационная задача решается. Если ПА взаимодействует с измерителем (кооперативный сценарий), то на борту ПА решается задача позиционирования. Если преследуются противоположные интересы, то внешним комплексом решается задача слежения за целью.

Вне зависимости от задачи выполняется измерение угла φ направления на источник акустического сигнала (азимут или пеленг) в плоскости Oxy , угла возвышения λ – наклона акустического луча по отношению к прямой Oz ,

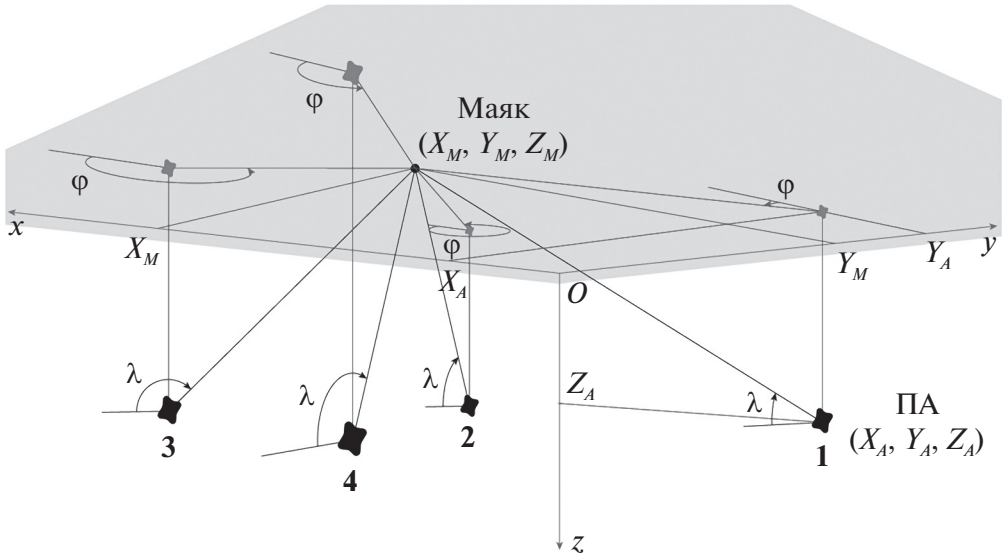


Рис. 1. Взаимное расположение ПА и наблюдателя.

и дальности r – расстояния между A и M . Варианты взаимного расположения ПА и наблюдателя и правила отсчета углов показаны на рис. 1.

Предлагаемый вариант формирования из измерений φ , λ и r линейных псевдонаблюдений комбинирует идею классического фильтра [19] и модель с наблюдением тангенсов [20].

Первым рассмотрим измерение $y_\varphi = \varphi + v_\varphi$, пеленга φ , где ошибка v_φ имеет распределение с нулевым средним $E\{v_\varphi\} = 0$ и средним отклонением σ_φ : $\text{cov}(v_\varphi, v_\varphi) = \sigma_\varphi^2$. Если считать, что погрешность сонаров при измерении углов составляет порядка 1° – 2° , то, представляя измерения в радианах, величину σ_φ можно положить равной $\sigma_\varphi = \frac{\pi}{180} \approx 0,0175$. Таким образом, $v_\varphi \ll 1$.

Для измерения y_φ запишем синус и косинус и аппроксимируем их соответствующими линейными частями разложения Тейлора для малых v_φ :

$$y_\varphi^{\sin} = \sin(y_\varphi) = \sin(\varphi + v_\varphi) \approx \sin(\varphi) + \cos(\varphi)v_\varphi,$$

$$y_\varphi^{\cos} = \cos(y_\varphi) = \cos(\varphi + v_\varphi) \approx \cos(\varphi) - \sin(\varphi)v_\varphi.$$

Далее, исходя из предположения, что для распределения v_φ заданы только моменты $E\{v_\varphi\} = 0$ и $E\{v_\varphi^2\} = \sigma_\varphi^2$, а величины φ и v_φ независимы, имеем $E\{(\cos(\varphi)v_\varphi)^2\} \leq \sigma_\varphi^2$ и $E\{(\sin(\varphi)v_\varphi)^2\} \leq \sigma_\varphi^2$. Кроме того, $E\{\cos(\varphi)v_\varphi \sin(\varphi)v_\varphi\} = \frac{1}{2}\sigma_\varphi^2 E\{\sin(2\varphi)\} = 0$, если φ имеет симметричное относительно нуля распределение. Учитывая физический смысл φ , последнее предположение является вполне реалистичным. Остается сослаться на известное минимаксное свойство нормального распределения, максимизирующего дисперсию на классе распределений с известным математическим ожиданием и ограниченной дис-

персией [24], и сформировать аппроксимацию вида:

$$y_{\varphi}^{\sin} \approx \sin(\varphi) + v_1, \quad y_{\varphi}^{\cos} \approx \cos(\varphi) + v_2,$$

где v_1 и v_2 – независимые гауссовские случайные величины, $E\{v_1\} = E\{v_2\} = 0$ и $E\{v_1^2\} = E\{v_2^2\} = \sigma_{\varphi}^2$. Ошибка измерения $(v_1, v_2)'$ при этом интерпретируется как наихудшая.

Можно предположить, что такая интерпретация окажется излишне грубой, что часто свойственно минимаксным оценкам, поэтому имеет смысл ориентироваться на другой вариант аппроксимации $E\{(\cos(\varphi)v_{\varphi})^2\}$ и $E\{(\sin(\varphi)v_{\varphi})^2\}$. Вычислить эти моменты, не зная распределение φ , нельзя. Но можно предполагать, что φ принимает любые значения с одинаковой вероятностью, т.е. имеет «близкое» к равномерному распределение. Это отражает предположение, что цель может появиться в любом месте. Тогда можно считать

$$E\{(\cos(\varphi)v_{\varphi})^2\} = E\{(\sin(\varphi)v_{\varphi})^2\} \approx \frac{1}{4}\sigma_{\varphi}^2.$$

Проверить, какой из вариантов $E\{v_{1,2}^2\} = \sigma_{\varphi}^2$ или $E\{v_{1,2}^2\} = \frac{1}{4}\sigma_{\varphi}^2$ лучше, возможно экспериментально.

Продолжая выкладки далее, получаем

$$\sin(\varphi) \approx y_{\varphi}^{\sin} - v_1, \quad \cos(\varphi) \approx y_{\varphi}^{\cos} - v_2,$$

$$\tan(\varphi) = \frac{Y_{\mathcal{A}} - Y_{\mathcal{M}}}{X_{\mathcal{A}} - X_{\mathcal{M}}} \approx \frac{y_{\varphi}^{\sin} - v_1}{y_{\varphi}^{\cos} - v_2},$$

$$(Y_{\mathcal{A}} - Y_{\mathcal{M}})y_{\varphi}^{\cos} - (X_{\mathcal{A}} - X_{\mathcal{M}})y_{\varphi}^{\sin} \approx (Y_{\mathcal{A}} - Y_{\mathcal{M}})v_2 - (X_{\mathcal{A}} - X_{\mathcal{M}})v_1.$$

Если в последнем выражении вместо точных координат $(X_{\mathcal{A}}, Y_{\mathcal{A}})$ подставлять их оценки, то получится невязка псевдонаблюдений, фигурирующая в уравнениях фильтрации. Сами псевдонаблюдения можно записать в виде

$$\begin{aligned} & -Y_{\mathcal{M}}y_{\varphi}^{\cos} + X_{\mathcal{M}}y_{\varphi}^{\sin} \approx \\ & \approx (y_{\varphi}^{\sin}, -y_{\varphi}^{\cos}) \begin{pmatrix} X_{\mathcal{A}} \\ Y_{\mathcal{A}} \end{pmatrix} + (Y_{\mathcal{A}} - Y_{\mathcal{M}})v_2 - (X_{\mathcal{A}} - X_{\mathcal{M}})v_1, \end{aligned}$$

что объясняет смысл выполненных преобразований: псевдонаблюдения $-Y_{\mathcal{M}}y_{\varphi}^{\cos} + X_{\mathcal{M}}y_{\varphi}^{\sin}$ аппроксимируют измерения линейной комбинации оцениваемых координат $(X_{\mathcal{A}}, Y_{\mathcal{A}})$ на фоне аддитивного шума с известной ковариацией.

Итак, для измерения $y_{\varphi} = \varphi + v_{\varphi}$ пеленга φ формируется псевдонаблюдение Y_{φ} :

$$(1) \quad Y_{\varphi} = -Y_{\mathcal{M}}y_{\varphi}^{\cos} + X_{\mathcal{M}}y_{\varphi}^{\sin}, \quad y_{\varphi}^{\sin} = \sin(y_{\varphi}), \quad y_{\varphi}^{\cos} = \cos(y_{\varphi}),$$

и алгоритм фильтрации использует модель наблюдения вида:

$$(2) \quad Y_\varphi = (y_\varphi^{\sin}, -y_\varphi^{\cos}) \begin{pmatrix} X_{\mathcal{A}} \\ Y_{\mathcal{A}} \end{pmatrix} + (X_{\mathcal{M}} - X_{\mathcal{A}}, Y_{\mathcal{A}} - Y_{\mathcal{M}}) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Следующее измерение $y_\lambda = \lambda + v_\lambda$ для угла возвышения λ . Аналогично пеленгу, аппроксимируем синус и косинус, исходя из таких же предположений об ошибке измерения v_λ

$$\begin{aligned} y_\lambda^{\sin} &= \sin(y_\lambda) \approx \sin(\lambda) + \cos(\lambda)v_\lambda \approx \sin(\lambda) + v_3, \\ y_\lambda^{\cos} &= \cos(y_\lambda) \approx \cos(\lambda) - \sin(\lambda)v_\lambda \approx \cos(\lambda) + v_4 \end{aligned}$$

с независимыми гауссовскими v_3 и v_4 , $E\{v_3\} = E\{v_4\} = 0$ и $E\{v_3^2\} = E\{v_4^2\} = \sigma_\lambda^2$ (в альтернативной версии $E\{v_{3,4}^2\} = \frac{1}{4}\sigma_\lambda^2$). Отсюда

$$\begin{aligned} \sin(\lambda) &\approx y_\lambda^{\sin} - v_3, \quad \cos(\lambda) \approx y_\lambda^{\cos} - v_4, \\ \tan(\lambda) &= \frac{Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}}}{|X_{\mathcal{A}} - X_{\mathcal{M}}|} \cos(\varphi) \approx \frac{y_\lambda^{\sin} - v_3}{y_\lambda^{\cos} - v_4}. \end{aligned}$$

Для упрощения манипуляций с измерением λ будем предполагать, что взаимное расположение $\mathcal{A}$ и $\mathcal{M}$ учтено при выборе системы координат так, чтобы выполнялось $X_{\mathcal{A}} > X_{\mathcal{M}}$, а далее при движении $X(t) > X_{\mathcal{M}}$. Используя имеющуюся аппроксимацию пеленга, заменим $\cos(\varphi)$ на $y_\varphi^{\cos} - v_2$ и получим

$$\begin{aligned} &y_\varphi^{\cos} y_\lambda^{\cos} (Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}}) - y_\lambda^{\sin} (X_{\mathcal{A}} - X_{\mathcal{M}}) \approx \\ &\approx (Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}}) y_\lambda^{\cos} v_2 - (X_{\mathcal{A}} - X_{\mathcal{M}}) v_3 + (Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}}) y_\varphi^{\cos} v_4 - (Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}}) v_2 v_4. \end{aligned}$$

Поскольку все v_i предполагались независимыми и центрированными, то дисперсия правой части полученного выражения (ошибки псевдонаблюдений) имеет вид

$$\begin{aligned} &E\left\{((Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}}) y_\lambda^{\cos} v_2 - (X_{\mathcal{A}} - X_{\mathcal{M}}) v_3 + \right. \\ &\quad \left. + (Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}}) y_\varphi^{\cos} v_4 - (Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}}) v_2 v_4)^2\right\} = \\ &= E\{(Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}})^2 (y_\lambda^{\cos})^2\} \sigma_\varphi^2 + E\{(X_{\mathcal{A}} - X_{\mathcal{M}})^2\} \sigma_\lambda^2 + \\ &+ E\{(Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}})^2 (y_\varphi^{\cos})^2\} \sigma_\lambda^2 + E\{(Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}})^2\} \sigma_\varphi^2 \sigma_\lambda^2. \end{aligned}$$

Апеллируя к тем же положениям о малых значениях v_i , σ_φ и σ_λ , пренебрежем последним слагаемым и представим невязку псевдонаблюдений (когда вместо точных координат $(X_{\mathcal{A}}, Y_{\mathcal{A}}, Z_{\mathcal{A}})$ будут подставлены их оценки) как

$$\begin{aligned} &y_\varphi^{\cos} y_\lambda^{\cos} (Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}}) - y_\lambda^{\sin} (X_{\mathcal{A}} - X_{\mathcal{M}}) \approx \\ &\approx (Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}}) y_\lambda^{\cos} v_2 - (X_{\mathcal{A}} - X_{\mathcal{M}}) v_3 + (Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}}) y_\varphi^{\cos} v_4, \end{aligned}$$

а сами псевдонаблюдения запишем в виде

$$\begin{aligned} & -y_\varphi^{\cos} y_\lambda^{\cos} Z_{\mathcal{M}} + y_\lambda^{\sin} X_{\mathcal{M}} \approx \\ & \approx -y_\varphi^{\cos} y_\lambda^{\cos} Z_{\mathcal{A}} + y_\lambda^{\sin} X_{\mathcal{A}} + (Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}}) y_\lambda^{\cos} v_2 - (X_{\mathcal{A}} - X_{\mathcal{M}}) v_3 + (Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}}) y_\varphi^{\cos} v_4. \end{aligned}$$

Итак, для измерения $y_\lambda = \lambda + v_\lambda$ угла возвышения λ формируется псевдонаблюдение Y_λ

$$(3) \quad \begin{aligned} Y_\lambda &= -y_\varphi^{\cos} y_\lambda^{\cos} Z_{\mathcal{M}} + y_\lambda^{\sin} X_{\mathcal{M}}, \\ y_\lambda^{\sin} &= \sin(y_\lambda), \quad y_\lambda^{\cos} = \cos(y_\lambda), \quad y_\varphi^{\cos} = \cos(y_\varphi), \end{aligned}$$

и алгоритм фильтрации использует модель наблюдения вида

$$(4) \quad \begin{aligned} Y_\lambda &= (y_\lambda^{\sin}, -y_\varphi^{\cos} y_\lambda^{\cos}) \begin{pmatrix} X_{\mathcal{A}} \\ Z_{\mathcal{A}} \end{pmatrix} + \\ &+ ((Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}}) y_\lambda^{\cos}, X_{\mathcal{M}} - X_{\mathcal{A}}, (Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}}) y_\varphi^{\cos}) \begin{pmatrix} v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Последним рассмотрим измерение $y_r = r + v_5$ дальности r с независимой от предыдущих v_i ошибкой v_5 : $\mathbf{E}\{v_5\} = 0$, $\mathbf{E}\{v_5^2\} = \sigma_r^2$. Используя измерение угла возвышения λ и аппроксимацию $\sin(\lambda) \approx y_\lambda^{\sin} - v_3$, запишем

$$r = \frac{Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}}}{\sin(\lambda)} \Rightarrow y_r - v_5 \approx \frac{Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}}}{y_\lambda^{\sin} - v_3}.$$

Поступая аналогично преобразованиям углов, получаем

$$Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}} - y_r y_\lambda^{\sin} \approx -y_r v_3 - y_\lambda^{\sin} v_5 + v_3 v_5.$$

Записанная справа центрированная ошибка имеет дисперсию

$$\mathbf{E}\{(-y_r v_3 - y_\lambda^{\sin} v_5 + v_3 v_5)^2\} = \mathbf{E}\{y_r^2\} \sigma_\lambda^2 + \mathbf{E}\{(y_\lambda^{\sin})^2\} \sigma_r^2 + \sigma_\lambda^2 \sigma_r^2.$$

Здесь третьим слагаемым в сравнении с первыми двумя можно пренебречь и представить невязку псевдонаблюдений (когда вместо точной координаты $Z_{\mathcal{A}}$ будет подставлена ее оценка) как

$$Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}} - y_r y_\lambda^{\sin} \approx -y_r v_3 - y_\lambda^{\sin} v_5.$$

Сами псевдонаблюдения запишем в виде

$$Z_{\mathcal{M}} + y_r y_\lambda^{\sin} \approx Z_{\mathcal{A}} + y_r v_3 + y_\lambda^{\sin} v_5.$$

Итак, для измерения $y_r = d + v_5$ дальности формируется псевдонаблюдение Y_r :

$$(5) \quad Y_r = Z_{\mathcal{M}} + y_r y_\lambda^{\sin}, \quad y_\lambda^{\sin} = \sin(y_\lambda),$$

и алгоритм фильтрации использует модель наблюдения вида

$$(6) \quad Y_r = Z_A + (y_r, y_\lambda^{\sin}) \begin{pmatrix} v_3 \\ v_5 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно объединить все три модели (2), (4), (6) в один вектор наблюдений $Y = (Y_\varphi, Y_\lambda, Y_r)'$ вида

$$(7) \quad Y = \begin{pmatrix} y_\varphi^{\sin} & -y_\varphi^{\cos} & 0 \\ y_\lambda^{\sin} & 0 & -y_\varphi^{\cos} y_\lambda^{\cos} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X + \\ + \begin{pmatrix} X_M - X_A & Y_A - Y_M & 0 \\ 0 & (Z_A - Z_M) y_\lambda^{\cos} & X_M - X_A \\ 0 & 0 & y_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ (Z_A - Z_M) y_\varphi^{\cos} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_\lambda^{\sin} \end{pmatrix} V,$$

где $X = (X_A, Y_A, Z_A)'$, $V = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)'$.

2.2. Применение расширенного фильтра Калмана

Будем предполагать, что из измерений $y_\varphi, y_\lambda, y_r$ в момент времени t формируется вектор наблюдений $y_t \in \mathbb{R}^{q_y}$ за движущимся объектом (для одного наблюдателя $q_y = 3$), имеющим вектор состояния $X_t \in \mathbb{R}^{p_x}$. Не ограничивая общности, можно считать, что состояние X_t определяется координатами ПА в системе $Oxyz$, которые обозначим $X_t = (X(t), Y(t), Z(t))'$, $p_x = 3$. Ниже в модель движения будут добавлены переменные, но целью останется оценка положения.

Оценивание X_t начинается в момент времени $t = 0$ и выполняется в дискретные моменты времени $1, 2, \dots, t, \dots$, отвечающие разбиению интервала наблюдения с шагом δ : $\delta, 2\delta, \dots, t\delta, \dots$. Начальное положение ПА определяется вектором $X_0 = \eta = (\eta_x, \eta_y, \eta_z)' = (X(0), Y(0), Z(0))'$.

X_t и y_t описываются дискретной стохастической динамической системой общего вида:

$$(8) \quad X_t = \Phi_t^{(1)}(X_{t-1}) + \Phi_t^{(2)}(X_{t-1})W_t, \quad t = 1, 2, \dots, \quad X_0 = \eta, \\ y_t = \psi_t^{(1)}(X_t) + \psi_t^{(2)}(X_t)v_t.$$

Предполагается, что случайные последовательности X_t и y_t имеют конечные ковариации, возмущения $W_t \in \mathbb{R}^{p_w}$ и ошибки измерений $v_t \in \mathbb{R}^{q_v}$ – независимые дискретные белые шумы второго порядка; вектор начальных условий $\eta \in \mathbb{R}^{p_x}$ не зависит от W_t и v_t и имеет конечную ковариацию. Соответствующие центральные моменты обозначаются, например для W_t , как $m_W(t), D_W(t)$.

Дополним систему (8) уравнением для псевдонаблюдений $Y_t \in \mathbb{R}^{q_y}$ (поскольку во всех имеющихся примерах для одного измерения формируется

ровно одно псевдонаблюдение, то $q_Y = q_y = 3$, но в общем случае размерности могут отличаться):

$$(9) \quad Y_t = \Psi_t^{(1)}(X_t, y_t) + \Psi_t^{(2)}(X_t, y_t)V_t.$$

Здесь матричные функции $\Psi_t^{(1)}(X, y)$ и $\Psi_t^{(2)}(X, y)$ определены полученным выше выражением (7), линейность которого дает $\Psi_t^{(1)}(X, y) = \Psi_t^{(1)}(y)X$.

Фильтрация по методу линейных псевдонаблюдений [19] состоит в применении РФК [12] к системе (8), в которой наблюдения y_t заменены на псевдонаблюдения (9). В используемых обозначениях такой фильтр имеет вид:

$$(10) \quad \begin{aligned} \tilde{X}_t &= \Phi_t^{(1)}(\hat{X}_{t-1}) + \Phi_t^{(2)}(\hat{X}_{t-1})m_W(t), \\ \tilde{K}_t &= \tilde{\Phi}_t^{(1)}\hat{K}_{t-1}\left(\tilde{\Phi}_t^{(1)}\right)' + \tilde{\Phi}_t^{(2)}D_W(t)\left(\tilde{\Phi}_t^{(2)}\right)', \\ \tilde{\Phi}_t^{(1)} &= \left.\frac{\partial\Phi_t^{(1)}(X)}{\partial X}\right|_{X=\tilde{X}_t}, \quad \tilde{\Phi}_t^{(2)} = \Phi_t^{(2)}(\tilde{X}_t), \\ \hat{X}_t &= \tilde{X}_t + K_t\left(Y_t - \Psi_t^{(1)}(\tilde{X}_t, y_t) - \Psi_t^{(2)}(\tilde{X}_t, y_t)m_V(t)\right), \\ K_t &= \tilde{K}_t\left(\tilde{\Psi}_t^{(1)}\right)'\left(\tilde{\Psi}_t^{(1)}\tilde{K}_t\left(\tilde{\Psi}_t^{(1)}\right)' + \tilde{\Psi}_t^{(2)}D_V(t)\left(\tilde{\Psi}_t^{(2)}\right)'\right)^{-1}, \\ \tilde{\Psi}_t^{(1)} &= \left.\frac{\partial\Psi_t^{(1)}(X, y_t)}{\partial X}\right|_{X=\tilde{X}_t} = \Psi_t^{(1)}(y_t), \quad \tilde{\Psi}_t^{(2)} = \Psi_t^{(2)}(\tilde{X}_t, y_t), \\ \hat{K}_t &= \tilde{K}_t - K_t\tilde{\Psi}_t^{(1)}\tilde{K}_t. \end{aligned}$$

Отличие от классического РФК здесь состоит в обязательной линейности функции $\Psi_t^{(1)}$ по оцениваемому состоянию, так что $\frac{\partial\Psi_t^{(1)}(X, y_t)}{\partial X} = \Psi_t^{(1)}(y_t)$, что определяется самим уравнением псевдонаблюдений (7). Все остальное – как в обычном РФК: прогноз $\tilde{X}_t$ в силу системы, эвристическая ковариация ошибки прогноза $\tilde{K}_t$ – результат линеаризации уравнения состояния около прогноза, коррекция – невязка наблюдений и калмановский коэффициент усиления K_t , эвристическая ковариация ошибки оценки $\hat{K}_t$ – результат линеаризации уравнения наблюдения. Также особенность РФК по методу линейных псевдонаблюдений – это зависимость $\tilde{\Psi}_t^{(1)}$ и $\tilde{\Psi}_t^{(2)}$ от «настоящих» наблюдений y_t . Действительно, согласно (7) величины y_t используются не только для вычисления псевдонаблюдений (1), (3), (5), но и для матриц приближенной модели $\Psi_t^{(1)}$ и $\Psi_t^{(2)}$.

2.3. Псевдонаблюдения с временной задержкой

Зависимость в (8) наблюдений y_t и в (9) псевдонаблюдений Y_t от состояния X_t меняется принципиально, если временем обмена информацией между

наблюдаемым объектом и наблюдателем нельзя пренебречь. Такова ситуация с сонарами, о чем упомянуто выше. Соответственно, измерения оказываются выполненными для положения A , имевшего место в некоторый момент времени $s < t$. Определяется этот момент следующим образом.

Пусть известна $v_s = \text{const}$ – скорость звука в воде. Вне зависимости от типа сонара и места выполнения измерений (на борту ПА или внешним комплексом), есть разница между временем, когда измерение получено наблюдателем M , и временем, когда A имел «измеренное» положение. Эта разница – время, затрачиваемое акустическим сигналом на прохождение расстояния между A и M , т.е. $\tau = t - s = r/(\delta v_s)$. Это случайное значение, следуя идее псевдонаблюдений, можно аппроксимировать величиной $\tilde{\tau} = y_r/(\delta v_s)$. Учитывая, что типовое значение $v_s = 5400$ км/ч (1500 м/с), вносимой погрешностью можно пренебречь и модель псевдонаблюдений (7) дополнить соотношением

$$(11) \quad X = (X(t - \tilde{\tau}), Y(t - \tilde{\tau}), Z(t - \tilde{\tau}))', \quad \tilde{\tau} = y_r/\delta v_s.$$

Общий вид системы наблюдения–псевдонаблюдения

$$(12) \quad \begin{aligned} X_t &= \Phi_t^{(1)}(X_{t-1}) + \Phi_t^{(2)}(X_{t-1})W_t, \quad t = -T, -T+1, \dots, 1, 2, \dots, \quad X_{-T-1} = \eta, \\ y_t &= \psi_t^{(1)}(X_{t-\tau_t}) + \psi_t^{(2)}(X_{t-\tau_t})v_t, \quad \tau_t = \tau_t(X_t), \\ Y_t &= \Psi_t^{(1)}(y_t)X_{t-\tilde{\tau}_t} + \Psi_t^{(2)}(X_{t-\tilde{\tau}_t}, y_t)V_t, \quad \tilde{\tau}_t = \tilde{\tau}_t(y_t). \end{aligned}$$

В этой модели предполагается, что известна величина $T\delta > 0$ – максимально возможная временная задержка наблюдений (фактически, максимальная дальность обнаружения движущегося объекта) и движение A начинается в момент времени $-T\delta$, т.е. $t = -T$, чтобы в момент $t = 0$ наблюдатель M гарантированно мог реализовать измерение. Начальное положение A определяется вектором $\eta = (\eta_X, \eta_Y, \eta_Z)' = (X(-T-1), Y(-T-1), Z(-T-1))'$. Временная задержка τ_t является функцией состояния X_t – временем, которое требуется звуковой волне на преодоление расстояния между A и M (именно из этого соображения в псевдонаблюдения (11) включена оценка $\tilde{\tau}$).

Функции $\tau_t(X)$ и $\tilde{\tau}_t(y)$ в (12) должны принимать целые значения из множества $\{0, 1, \dots, T\}$. Для «настоящих» состояний и наблюдений они имеют вид

$$(13) \quad \begin{aligned} \tau_t &= \min \left\{ T, \left\lceil \frac{\sqrt{(X(t) - X_M)^2 + (Y(t) - Y_M)^2 + (Z(t) - Z_M)^2}}{\delta v_s} \right\rceil \right\}, \\ \tilde{\tau}_t &= \min \left\{ T, \left\lceil \frac{y_r}{\delta v_s} \right\rceil \right\}, \end{aligned}$$

где через $\lceil \cdot \rceil$ обозначена целая часть числа.

2.4. Фильтрация в модели с несколькими наблюдателями

Пусть теперь вектор наблюдений y_t в (12) комбинирует измерения углов и дальности, поступающие от q наблюдателей, т.е. $y_t = (y_{\varphi_t}^{(1)}, y_{\lambda_t}^{(1)}, y_{r_t}^{(1)}, \dots, y_{\varphi_t}^{(q)}, y_{\lambda_t}^{(q)}, y_{r_t}^{(q)})'$. Поскольку $y_t \in \mathbb{R}^{qy}$, получается $qy = 3q$. Для каждого i -го наблюдателя определим временную задержку $\tau_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, q$, со значениями во множестве $\{0, 1, \dots, T\}$. Величины $\tau_t^{(i)}$ объединены в вектор $\tau_t = (\tau_t^{(1)}, \dots, \tau_t^{(q)})' \in \mathbb{R}^q$, который является функцией X_t так же, как τ_t в (12). Таким образом, измерения $y_{\varphi_t}^{(i)}, y_{\lambda_t}^{(i)}, y_{r_t}^{(i)}$ в каждой группе могут быть представлены как функции положения $X_{t-\tau_t^{(i)}}$. В итоге система наблюдения принимает вид

$$\begin{aligned}
 X_t &= \Phi_t^{(1)}(X_{t-1}) + \Phi_t^{(2)}(X_{t-1})W_t, \\
 t &= -T, -T+1, \dots, 0, 1, \dots, \quad X_{-T-1} = \eta, \\
 (14) \quad y_t^{(i)} &= \psi_t^{(i,1)}(X_{t-\tau_t^{(i)}}) + \psi_t^{(i,2)}(X_{t-\tau_t^{(i)}})v_t^{(i)}, \quad i = 1, \dots, q, \\
 Y_t^{(i)} &= \Psi_t^{(i,1)}(y_t^{(i)})X_{t-\tilde{\tau}_t^{(i)}} + \Psi_t^{(i,2)}(X_{t-\tilde{\tau}_t^{(i)}}, y_t^{(i)})V_t^{(i)}.
 \end{aligned}$$

Чтобы (14) корректно отражало сделанные предположения и превращалось в (8), (9) при исчезновении временных задержек, т.е. при $T = 0$, нужно обозначать:

$y_t = ((y_t^{(1)})', \dots, (y_t^{(q)})')'$ – вектор наблюдений, составленный из q групп измерений $y_t^{(i)} = (y_{\varphi_t}^{(i)}, y_{\lambda_t}^{(i)}, y_{r_t}^{(i)})'$,

$v_t^{(i)}$ – вектор ошибок измерений в этой группе;

$Y_t = ((Y_t^{(1)})', \dots, (Y_t^{(q)})')'$ – вектор q групп псевдонаблюдений,

$Y_t^{(i)} = (Y_t^{(i)}, Y_t^{(i)}, Y_t^{(i)})'$, отвечает соответствующей группе $y_t^{(i)}$, $V_t^{(i)}$ – вектор ошибок измерений в этой группе;

вектор-функции $\psi_t^{(i,1)}$ и матрицы $\psi_t^{(i,2)}$, $\Psi_t^{(i,1)}$, $\Psi_t^{(i,2)}$, $i = 1, \dots, q$, определяются для каждой группы наблюдений–псевдонаблюдений, их наличие означает независимость каждого наблюдателя, формирующего измерения группы, т.е.

$$\begin{aligned}
 \psi_t^{(1)} &= ((\psi_t^{(1,1)})', \dots, (\psi_t^{(q,1)})')', \quad \psi_t^{(2)} = \text{diag}(\psi_t^{(1,2)}, \dots, \psi_t^{(q,2)}), \\
 \Psi_t^{(1)} &= \begin{pmatrix} \Psi_t^{(1,1)} \\ \vdots \\ \Psi_t^{(q,1)} \end{pmatrix}, \quad \Psi_t^{(2)} = \text{diag}(\Psi_t^{(1,2)}, \dots, \Psi_t^{(q,2)}).
 \end{aligned}$$

Базовые уравнения РФК (10) теперь можно уточнить для модели с временными задержками (14), записав:

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_t &= \Phi_t^{(1)}(\hat{X}_{t-1}) + \Phi_t^{(2)}(\hat{X}_{t-1})m_W(t), \\
\tilde{K}_t &= \tilde{\Phi}_t^{(1)}\hat{K}_{t-1}(\tilde{\Phi}_t^{(1)})' + \tilde{\Phi}_t^{(2)}D_W(t)(\tilde{\Phi}_t^{(2)})', \\
\tilde{\Phi}_t^{(1)} &= \left. \frac{\partial \Phi_t^{(1)}(X)}{\partial X} \right|_{X=\tilde{X}_t}, \quad \tilde{\Phi}_t^{(2)} = \Phi_t^{(2)}(\tilde{X}_t), \\
\hat{X}_t &= \tilde{X}_t + K_t \Delta \tilde{Y}_t, \\
\Delta \tilde{Y}_t &= \left(Y_t^{(1)} - \Psi_t^{(1,1)}(y_t^{(1)})\tilde{X}_{t-\tilde{\tau}_t^{(1)}}, \dots, Y_t^{(q)} - \Psi_t^{(q,1)}(y_t^{(q)})\tilde{X}_{t-\tilde{\tau}_t^{(q)}} \right), \\
K_t &= \tilde{K}_t(\Psi_t^{(1)})' \left(\Psi_t^{(1)}\tilde{K}_t(\Psi_t^{(1)})' + \tilde{\Psi}_t^{(2)}D_V(t)(\tilde{\Psi}_t^{(2)})' \right)^{-1}, \\
\Psi_t^{(1)} &= \Psi_t^{(1)}(y_t), \tilde{\Psi}_t^{(2)} = \text{diag} \left\{ \Psi_t^{(1,2)}(\tilde{X}_{t-\tilde{\tau}_t^{(1)}}, y_t), \dots, \Psi_t^{(q,2)}(\tilde{X}_{t-\tilde{\tau}_t^{(q)}}, y_t) \right\}, \\
\hat{K}_t &= \tilde{K}_t - K_t \Psi_t^{(1)} \tilde{K}_t.
\end{aligned}
\tag{15}$$

По сути, в запись фильтра (15) в сравнении с фильтром (10) просто имплементированы оценки $\tilde{\tau}_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, q$, временных задержек. Невязка наблюдений $\Delta \tilde{Y}_t$ и матрица отклонений ошибок измерений $\tilde{\Psi}_t^{(2)}$ составлены из значений прогнозов положения $\tilde{X}_{t-\tilde{\tau}_t^{(i)}}$, отвечающих тем моментам времени, для которых выполнены текущие наблюдения y_t и составлены псевдонаблюдения Y_t . Для этого использованы прогнозы положения, сдвинутые относительно текущего времени на величину оценки $\tilde{\tau}_t^{(i)}$ временной задержки $\tau_t^{(i)}$ для соответствующего i -го наблюдателя.

3. Слежение за приближением ПА по измерениям акустических маяков

3.1. Модель системы наблюдения

Для применения алгоритма фильтрации (15) воспользуемся той же моделью, что в [9, 10] изучалась для идентификации параметров, немного изменив ее, чтобы придать смысл задачи слежения за приближающимся неизвестным объектом. Следуя рис. 1, будем считать, что начало O системы координат $Oxyz$ определяет находящийся на поверхности моря в неподвижном положении объект ($\mathcal{O}$, object), к которому приближается ПА. $\mathcal{A}$ обнаруживается в начальном положении $\eta = (\eta_X, \eta_Y, \eta_Z)'$, элементы которого независимы и имеют равномерное распределение: $\eta_X \sim R[10, 20]$, $\eta_Y \sim R[10, 20]$, $\eta_Z \sim R[0, 5; 1, 5]$. Таким образом, начальное положение $\mathcal{A}$ характеризуется математическим ожиданием $E\{\eta\} = (15, 15, 1)'$ и ковариацией $\text{cov}(\eta, \eta) \approx \text{diag} \{2, 9^2; 2, 9^2; 0, 29^2\}$. Все расстояния даны в километрах (км). Предполагается, что обнаруженный ПА движется в направлении $\mathcal{O}$, совершая хаотические маневры, но сохраняя среднюю постоянную скорость ≈ 21 км/ч.

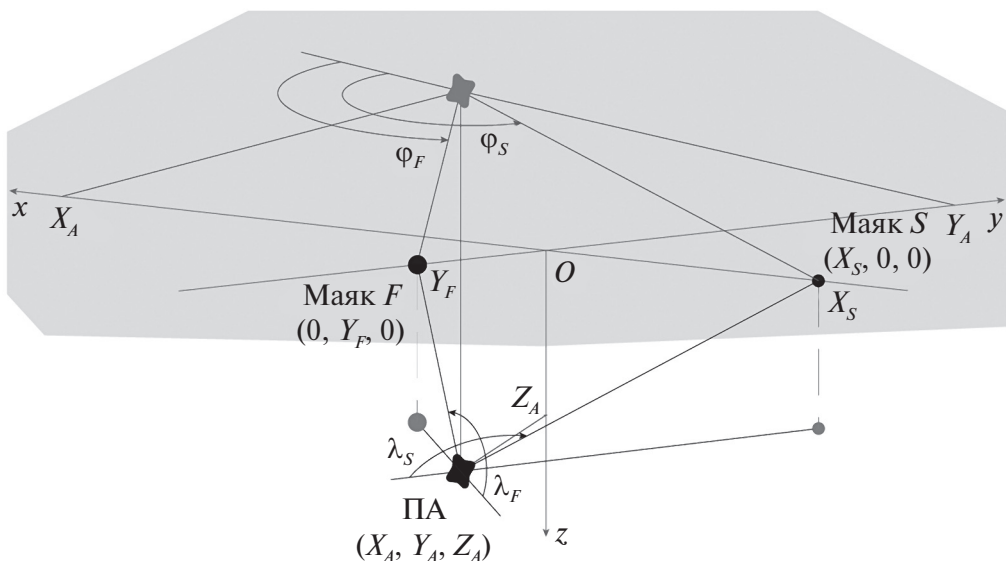


Рис. 2. Схема расположения наблюдателей в эксперименте.

Для наблюдения за ПА имеется два комплекса ($\mathcal{F}$, first) и ($\mathcal{S}$, second). Система координат $Oxyz$ ориентирована так, что ось z направлена вниз вертикально к поверхности воды (как на рис. 1) и соответствует глубине ПА, ось y – по направлению от объекта на первого наблюдателя ($\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{F}$), ось x – по направлению $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{S}$. Моделируемые наблюдатели считаются расположенными неподвижно на поверхности воды, т.е. на нулевой глубине. Таким образом, координаты наблюдателей: $\mathcal{F}(X_{\mathcal{F}}, Y_{\mathcal{F}}, Z_{\mathcal{F}}) = (0, Y_{\mathcal{F}}, 0)$ и $\mathcal{S}(X_{\mathcal{S}}, Y_{\mathcal{S}}, Z_{\mathcal{S}}) = (X_{\mathcal{S}}, 0, 0)$, $X_{\mathcal{S}} = -2$ км и $Y_{\mathcal{F}} = -1$ км. Кроме того, будем предполагать, что на протяжении всего времени наблюдения координаты $\mathcal{A}(X(t), Y(t), Z(t))$ таковы, что ПА остается на глубине и не всплывает на поверхность, т.е. $Z(t) > 0$, и для обоих наблюдателей выполнены условия $X(t) > X_{\mathcal{M}}$, использованные для псевдонаблюдения (3), т.е. $X(t) > 0$. Пересечение траектории движения оси Ox на псевдонаблюдения не влияет, а возможное пересечение оси Oy нетрудно учесть, используя для псевдонаблюдений (3) котангенс вместо тангенса. Схематически эксперимент проиллюстрирован на рис. 2.

Вектор $(X(t), Y(t), Z(t))'$ моделирует положение $\mathcal{A}$ в дискретные моменты времени $t = 0, \dots, 1000$, которые отвечают разбиению интервала времени наблюдения с шагом дискретизации $\delta = 0,0001$ ч. Навигационная задача с учетом максимальной временной задержки T , таким образом, решается в течение $0,1$ ч = 6 мин. В те же моменты времени выполняются измерения, т.е. в секунду выполняется порядка трех измерений каждым комплексом. При абсолютной постоянной средней скорости 21 км/ч за это время ПА в среднем перемещается на расстояние порядка 2,1 км, приближаясь к $\mathcal{O}$. Максимальное расстояние от $\mathcal{A}$ до $\mathcal{O}$ и до $\mathcal{F}$ или $\mathcal{S}$ составляет соответственно ≈ 28 и ≈ 30 км.

Минимальные расстояния – ≈ 14 и ≈ 16 км. Соответственно, величина максимальной временной задержки, возможной в момент обнаружения ПА, $T = 56$, т.е. составляет 0,0056 ч или ≈ 20 с.

Предполагается, что движения ПА происходит с постоянной средней скоростью $(s_x, s_y, s_z)'$, отклонения от которой описываются вектором аддитивных возмущений $(w_x(t), w_y(t), w_z(t))'$:

$$(16) \quad \begin{aligned} X(t) &= X(t-1) + \delta S_x(t), & S_x(t) &= s_x + \sigma_{s_x} w_x(t), \\ Y(t) &= Y(t-1) + \delta S_y(t), & S_y(t) &= s_y + \sigma_{s_y} w_y(t), \\ Z(t) &= Z(t-1) + \delta S_z(t), & S_z(t) &= s_z + \sigma_{s_z} w_z(t). \end{aligned}$$

Средняя скорость $(s_x, s_y, s_z)'$ задается на каждой траектории случайным вектором, элементы которого независимы и имеют равномерное распределение: $s_x \sim R[-20, -10]$, $s_y \sim R[-20, -10]$, $s_z \sim R[-2, 0]$. Таким образом, средняя скорость движения $\mathcal{A}$ характеризуется математическим ожиданием $E\{S(t)\} = (-15, -15, -1)'$ (отсюда абсолютное значение средней скорости ≈ 21 км/ч и направление движения на $\mathcal{O}(0, 0, 0)$) и ковариацией $\text{diag}\{D_{s_x}; D_{s_y}; D_{s_z}\} \approx \text{diag}\{2,9^2; 2,9^2; 0,4^2\}$. Стандартные отклонения вектора аддитивных возмущений скорости $W_t = (w_x(t), w_y(t), w_z(t))'$ составляют: $\sigma_{s_x} = 15$, $\sigma_{s_y} = 15$, $\sigma_{s_z} = 1$. В итоге ковариация скорости $\text{cov}(S(t), S(t)) \approx \text{diag}\{15,3^2; 15,3^2; 1,1^2\}$.

В дополнение к (16) моделировалась ситуация скачкообразного изменения средней скорости. Пусть имеется не зависящий от положения $\mathcal{A}$ стандартный пуассоновский процесс $P(u)$ и известна интенсивность λ_u изменения постоянной средней скорости ПА (известно среднее время между скачками скорости). Дискретное время t связано с непрерывным u шагом дискретизации: $u = t\delta$, вектор состояния $X_t \in \mathbb{R}^{p_X}$ можно расширить $(p_X + 1)$ -м элементом, так что $X_{(p_X+1)t} = P(\lambda_{t\delta} t\delta)$.

Постоянную, точнее кусочно-постоянную, среднюю скорость моделирует последовательность $(s_x^p(t), s_y^p(t), s_z^p(t))'$, сечение которой в момент $t = 0$ имеет то же распределение, что $(s_x, s_y, s_z)'$. Модель движения имеет, таким образом, вид

$$(17) \quad \begin{aligned} X(t) &= X(t-1) + \delta S_x(t), & S_x(t) &= s_x^p(t) + \sigma_{s_x} w_x(t), \\ Y(t) &= Y(t-1) + \delta S_y(t), & S_y(t) &= s_y^p(t) + \sigma_{s_y} w_y(t), \\ Z(t) &= Z(t-1) + \delta S_z(t), & S_z(t) &= s_z^p(t) + \sigma_{s_z} w_z(t). \end{aligned}$$

Для определения последовательности $s^p(t) = (s_x^p(t), s_y^p(t), s_z^p(t))'$ при $t > 0$ зададим $p(t) = X_{(p_X+1)t} - X_{(p_X+1)t-1}$ – индикатор скачков процесса $P(\lambda_{t\delta} t\delta)$ на текущем интервале дискретизации. Будем предполагать, что $s^p(t) = s^p(t-1)$, если $p(t) = 0$, т.е. сохранять постоянную среднюю скорость, если скачка нет. При $p(t) = 1$ $s^p(t)$ принимает новое случайное значение. Для определения его распределения воспользуемся той же идеей, что и для распределения начального значения скорости $(s_x, s_y, s_z)'$, смысл которого был в

том, чтобы в среднем двигаться в сторону объекта $\mathcal{O}$, т.е. начала координат, сохраняя дисперсию. Для этого новое значение средней скорости $s^p(t)$ моделируется равномерным распределением со средним $-X_t$ и той же ковариацией, что в предыдущей модели. Именно, если обозначить $s_x \sim R[a_x, b_x]$, то $s_x^p(t) \sim R[a_x, b_x] - (a_x + b_x)/2 - X(t-1)$, т.е. условное относительно $X(t-1)$ распределение $s_x^p(t)$ имеет среднее $-X(t-1)$ (сохраняет в среднем направление движения $\mathcal{A}$ на объект $\mathcal{O}$) и дисперсию $D[s_x^p(t) | X(t-1)] = D_{s_x}$. Аналогичные выражения описывают $s_y^p(t)$ и $s_z^p(t)$.

Используемый в эксперименте процесс $P(u)$ имеет интенсивность $\lambda_u = \frac{3}{6 \text{ мин}}$, т.е. за время наблюдения в среднем происходят три изменения постоянной средней скорости $(s_x, s_y, s_z)'$ или среднее время между скачками равно 2 мин. В остальном модель (17) сохраняет те же параметры.

Остаются параметры наблюдателей. Поскольку выше уже сказано, что их два, и выбраны координаты, остается задать параметры точности измерений y_t . Используемые значения можно представить как

$$(18) \quad \begin{aligned} \text{cov}(v_t^F, v_t^F) &= \text{cov}(v_t^S, v_t^S) = \text{diag} \{ \sigma_\varphi, \sigma_\lambda, \sigma_r \}, \\ \sigma_\varphi &= \sigma_\lambda = \frac{\pi}{180} \text{ рад } (1^\circ), \quad \sigma_r = 0,1 \text{ км } (100 \text{ м}). \end{aligned}$$

Распределение ошибок v_t^F, v_t^S нормальное.

3.2. Численные эксперименты

Посредством компьютерного моделирования $N = 10\,000$ траекторий движения (16) и (17) и наблюдений $y_t^{(F)} = (y_{\varphi_t}^{(F)}, y_{\lambda_t}^{(F)}, y_{r_t}^{(F)})'$ и $y_t^{(S)} = (y_{\varphi_t}^{(S)}, y_{\lambda_t}^{(S)}, y_{r_t}^{(S)})'$ вычислялись оценки положения $\hat{X}_t = (\hat{X}(t), \hat{Y}(t), \hat{Z}(t))'$ по формулам (15) для вариантов наблюдений с временными задержками ($T = 56$) и без ($T = 0$), для параметров аппроксимации угловых псевдонаблюдений $E\{v_i^2\} = \sigma_{\varphi, \lambda}^2$ и $E\{v_i^2\} = 1/4 \sigma_{\varphi, \lambda}^2$. Точность оценивания определялась средними квадратическими отклонениями $\sigma_{\hat{X}}(t), \sigma_{\hat{Y}}(t), \sigma_{\hat{Z}}(t)$ (на рисунках указываются в метрах), вычисленными путем осреднения ошибок оценок на смоделированном пучке.

На рис. 3 эксперимент иллюстрируется примером характерной траектории положения ПА: на рис. 3,а изображена траектория в координатах $X(t), Y(t)$ и соответствующие оценки $\hat{X}(t), \hat{Y}(t)$, на рис. 3,б показаны скорости $S_x(t), S_y(t)$. Этот пример взят из расчета для модели (17) и $E\{v_i^2\} = 1/4 \sigma_{\varphi, \lambda}^2$. Траектории с движением (16) отличаются более прямолинейным видом, так как отсутствуют смены направления и величины скорости, динамика по глубине $Z(t)$ на порядок более гладкая. Обращает внимание, что при весьма хаотических величинах скорости общее направление движения $\mathcal{A}$ в сторону $\mathcal{O}$ сохраняется как в целом на траектории, так и при смене характера скорости (при изменении направления). Для изображенной траектории временные задержки менялись в диапазоне от 35 до 32, среди всех смоделированных траекторий – от 55 до 25.

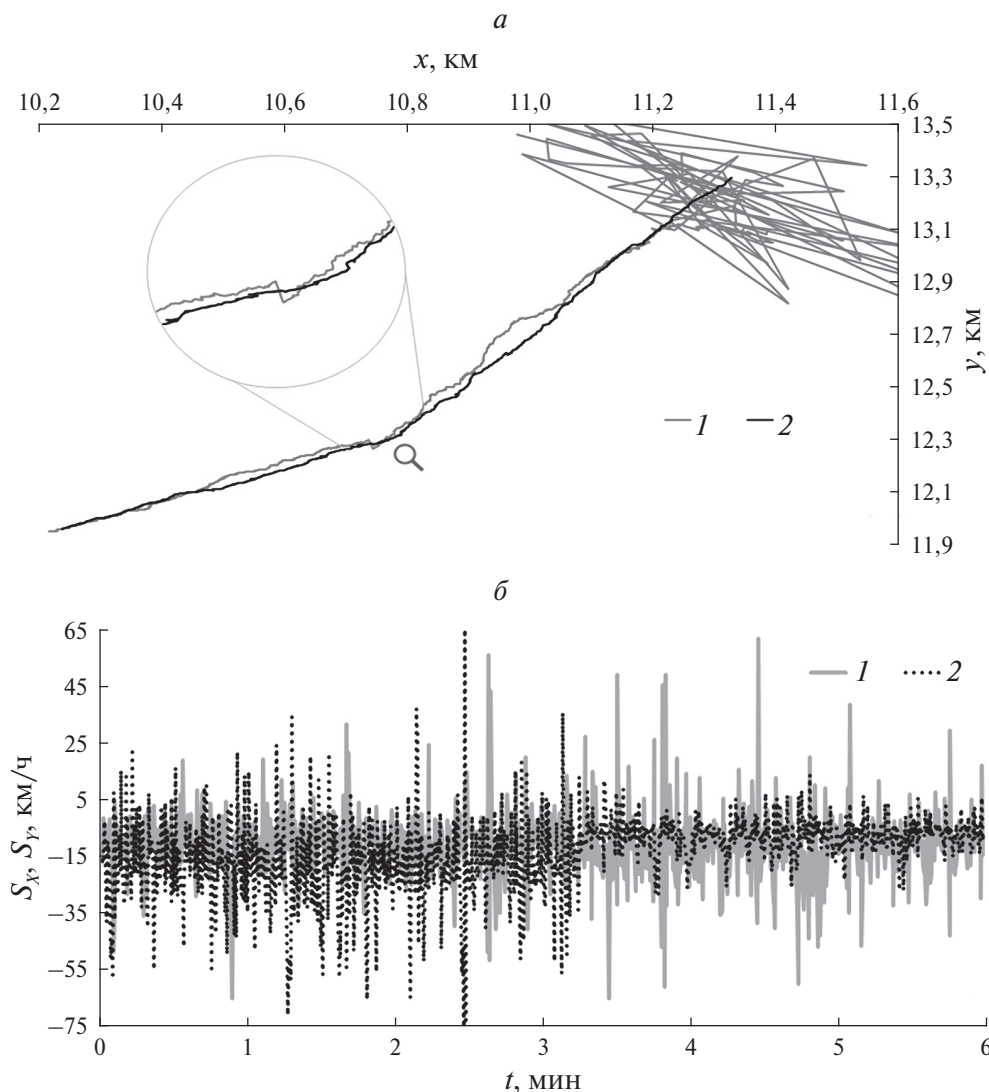


Рис. 3. Типовая таректория ПА: а – положение 1 – $X(t)$, $Y(t)$, 2 – оценки $\hat{X}(t)$, $\hat{Y}(t)$; б – скорости 1 – $S_x(t)$, 2 – $S_y(t)$.

Заметим, что на рис. 3,а начало движения сопровождается группой неточных оценок. Это период первых 56 шагов, когда согласно алгоритму (15) оценивание РФК не выполняется. На этих шагах вычислялась оценка прямых измерений: в предположении, что два имеющихся измерения $y_t^{(F)}$ и $y_t^{(S)}$ не содержат ошибок, из каждого набора углов и дальности вычислялись координаты, а итоговая оценка положения – как среднее значение. Далее, средние квадратические отклонения этой оценки обозначены $\Sigma_{\hat{X}}(t)$, $\Sigma_{\hat{Y}}(t)$, $\Sigma_{\hat{Z}}(t)$. Иллюстрация точности оценивания дана на рис. 4. Обратим внимание на начальный период, когда $\sigma_{\hat{X}}(t) = \Sigma_{\hat{X}}(t)$, $\sigma_{\hat{Y}}(t) = \Sigma_{\hat{Y}}(t)$, $\sigma_{\hat{Z}}(t) = \Sigma_{\hat{Z}}(t)$. Оценка РФК рассчитывается, начиная с $t = 57$.

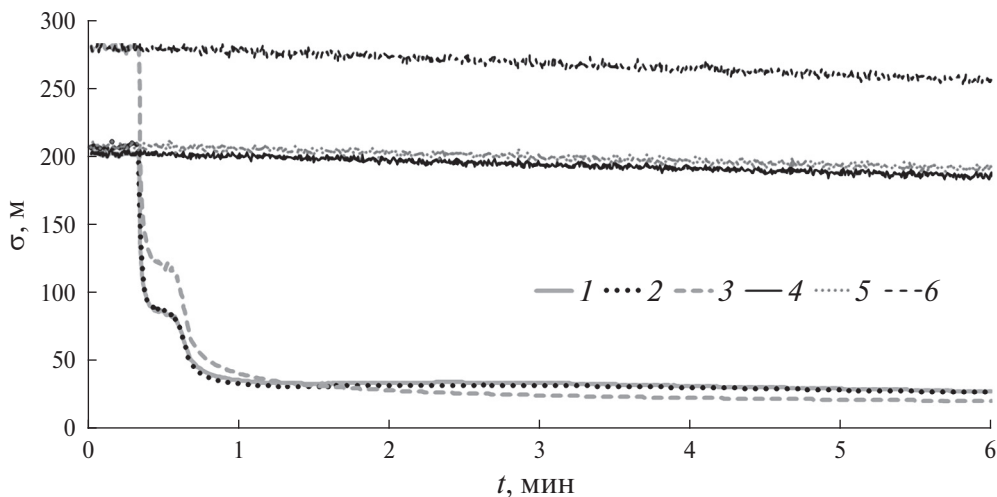


Рис. 4. Среднеквадратические отклонения: 1 – $\sigma_{\hat{X}}(t)$, 2 – $\sigma_{\hat{Y}}(t)$, 3 – $\sigma_{\hat{Z}}(t)$, 4 – $\Sigma_{\hat{X}}(t)$, 5 – $\Sigma_{\hat{Y}}(t)$, 6 – $\Sigma_{\hat{Z}}(t)$.

Другие варианты выполненных расчетов (для модели движения (16), без временных задержек ($T = 0$) и для параметров аппроксимации угловых псевдонаблюдений $E\{v_i^2\} = \sigma_{\varphi, \lambda}^2$) имеют некоторые отличия. Так, модель (16) дает более прямолинейную траекторию, наблюдения с $T = 0$ – отсутствие переходного периода с фильтром прямых измерений, параметры шумов псевдонаблюдений меняют точность оценок. Приведенные иллюстрации показывают качественную картину результативности предложенного фильтра в самой сложной модели. Формальное сравнение во всех моделях приведено в ниже-следующей таблице. Для характеристики точности среднеквадратические отклонения ошибок оценок усреднены по траекториям, т.е. например для $\hat{X}(t)$ вычислены величины $\hat{\sigma}_{\hat{X}} = \frac{1}{1000} \sum_{t=1}^{1000} \sigma_{\hat{X}}(t)$ и $\hat{\Sigma}_{\hat{X}} = \frac{1}{1000} \sum_{t=1}^{1000} \Sigma_{\hat{X}}(t)$, и т.д. Все отклонения приведены в метрах.

Сравнение качества оценивания

Модель	$\hat{\sigma}_{\hat{X}}$	$\hat{\sigma}_{\hat{Y}}$	$\hat{\sigma}_{\hat{Z}}$	$\hat{\Sigma}_{\hat{X}}$	$\hat{\Sigma}_{\hat{Y}}$	$\hat{\Sigma}_{\hat{Z}}$
(16), $T = 0$, $E\{v_i^2\} = \sigma_{\varphi, \lambda}^2$	24,01	22,33	27,04	192,54	198,35	266,86
(16), $T = 0$, $E\{v_i^2\} = \frac{1}{4}\sigma_{\varphi, \lambda}^2$	21,96	22,07	22,69			
(16), $T = 56$, $E\{v_i^2\} = \sigma_{\varphi, \lambda}^2$	37,82	37,09	44,76	193,42	199,23	267,89
(16), $T = 56$, $E\{v_i^2\} = \frac{1}{4}\sigma_{\varphi, \lambda}^2$	36,47	37,32	41,31			
(17), $T = 0$, $E\{v_i^2\} = \sigma_{\varphi, \lambda}^2$	24,78	23,34	26,55	193,04	198,56	267,44
(17), $T = 0$, $E\{v_i^2\} = \frac{1}{4}\sigma_{\varphi, \lambda}^2$	22,73	22,72	24,55			
(17), $T = 56$, $E\{v_i^2\} = \sigma_{\varphi, \lambda}^2$	50,46	47,37	49,23	193,95	199,48	268,49
(17), $T = 56$, $E\{v_i^2\} = \frac{1}{4}\sigma_{\varphi, \lambda}^2$	44,46	43,37	45,63			

4. Заключение

Эксперимент подтвердил способность представленного фильтра линейных псевдонаблюдений решать задачу фильтрации состояния в модели с временными запаздываниями. Результаты в сравнении с прямой оценкой показывают, что фильтр работает, что временные задержки приводят к двукратному ухудшению качества оценивания в сравнении с их отсутствием. В отношении абсолютных значений погрешностей в десятки метров надо отметить экстремальные для оценивания условия: удаленность объекта и внешние возмущения той же мощности, что и скорость объекта. Кроме того, с точки зрения задачи слежения ошибка порядка десятков метров при удаленности объекта более 10 км – вполне удовлетворительна. Более точные результаты нужны, когда решается задача позиционирования на борту ПА. Но в этом случае, помимо внешних наблюдателей, можно рассчитывать на измерения на борту, например, скорости. Это дает значительный прирост точности [25].

Далее можно отметить, что превосходство имеет фильтр с параметрами $E\{v_i^2\} = \frac{1}{4}\sigma_{\varphi,\lambda}^2$, т.е. модель с более мягкими предположениями относительно ошибки в псевдонаблюдениях. Наибольшее преимущество этот параметр дает в последней, самой сложной модели, в остальных разница невелика. Здесь нужно упомянуть результаты, не вошедшие в таблицу, а именно эксперименты с другими значениями $E\{v_i^2\}$. Приведенные в таблице результаты наводят на мысль о нечувствительности фильтра к этой величине, поскольку оценка качества фильтрации при разных $E\{v_i^2\}$ меняется мало. Однако это обстоятельство имеет место только для значений $E\{v_i^2\}$ в диапазоне $[\frac{1}{4}, 1]\sigma_{\varphi,\lambda}^2$. Не вошедшие в таблицу дополнительные расчеты показывают, что если $E\{v_i^2\}$ выходит в любую сторону из этого отрезка, то оценка фильтрации ухудшается значительно.

Так же надо отметить, что результаты хорошо согласуются с расчетами, выполненными для других похожих моделей. Так, в [7–10] такая же модель движения использовалась совместно с наблюдениями тангенсов углов направлений, а для оценивания применялся метод условно-минимаксной нелинейной фильтрации [15, 16].

Наконец, крайне важным является то, что в представленных здесь экспериментах предполагалось известным значение единственного параметра модели движения – постоянной средней скорости, в том числе в модели с ее скачкообразными изменениями. Из-за этого, в частности, не слишком ухудшается точность оценки прямых измерений при переходе от модели $T = 0$ к модели $T = 56$. Основанием к этому является показанная ранее возможность идентификации этого параметра.

Перечисляя положительные результаты, нельзя оставить без внимания и некоторые отрицательные моменты. Несмотря на продемонстрированную эффективность методологии линейных псевдонаблюдений, РФК сохранил свои худшие черты, прежде всего тенденцию к расходимости. Такой эффект проявлялся, когда модель движения была нелинейной (за счет неизвестного па-

раметра), когда не применялись прямые измерения для задания начального условия оценке РФК, когда увеличивалась скорость и траектории могли приближаться к координатным плоскостям. Из этого следует, что хотя методика линейных псевдонаблюдений очень хороша, но стараться применять ее надо не только в РФК, но и в других, более надежных, более устойчивых схемах фильтрации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ehlers F. (Ed.) Autonomous Underwater Vehicles: Design and Practice (Radar, Sonar & Navigation)*. London, UK: SciTech Publishing, 2020.
2. *Mohsan S.A.H., Khan M.A., Noor F., Ullah I., Alsharif M.H.* Towards the unmanned aerial vehicles (UAVs): A comprehensive review // *Drones*. 2022. V. 6. No. 6 (147).
3. *Burns L.D., Shulgan C.* *Autonomy: The quest to build the driverless car-and how it will reshape our world*. HarperCollins, 2018. 368 p.
4. *Christ R.D., Wernli R.L.* *The ROV Manual: A User Guide for Remotely Operated Vehicles*. 2nd Edition. Oxford, UK: Butterworth-Heinemann, 2013.
5. *Zhu Z., Hu S.-L.J., Li H.* Effect on Kalman based underwater tracking due to ocean current uncertainty // *Proc. 2016 IEEE/OES Autonomous Underwater Vehicles*, Tokyo, Japan, 6–9 November 2016. P. 131–137.
6. *Kebkal K.G., Mashoshin A.I.* AUV acoustic positioning methods // *Gyroscopy Navig.* 2017. V. 8. P. 80–89.
7. *Босов А.В.* Фильтрация состояния нелинейной динамической системы по наблюдениям со случайными запаздываниями // *АиТ*. 2023. № 6. С. 49–66.
Bosov A.V. Observation-Based Filtering of State of a Nonlinear Dynamical System with Random Delays // *Autom. Remote Control*. 2023. V. 84. No. 6. P. 594–605.
8. *Bosov A.* Tracking a Maneuvering Object by Indirect Observations with Random Delays // *Drones*. 2023. No. 7 (468).
9. *Босов А.В.* Позиционирование и идентификация параметров движения подводного аппарата по наблюдениям со случайными запаздываниями // *АиТ*. 2024. № 12. С. 23–48.
Bosov A.V. AUV Positioning and Motion Parameter Identification Based on Observations with Random Delays // *Autom. Remote Control*. 2024. V. 85. No. 12. P. 1149–1167 (1024–1040).
10. *Bosov A.* Maneuvering Object Tracking and Movement Parameters Identification by Indirect Observations with Random Delays // *Axioms*. 2024. No. 13 (668).
11. *Босов А.В.* Оптимальная фильтрация состояния нелинейной динамической системы по наблюдениям со случайными запаздываниями // *Информатика и ее применения*. 2023. Т. 17. Вып. 3. С. 8–17.
12. *Bernstein I., Friedland B.* Estimation of the State of a Nonlinear Process in the Presence of Nongaussian Noise and Disturbances // *J. Franklin Instit.* 1966. V. 281. No. 6. P. 455–480.
13. *Arulampalam S., Maskell S., Gordon N.J., Clapp T.* A Tutorial on Particle Filters for On-line Non-linear/Non-Gaussian Bayesian Tracking // *IEEE Trans. Signal Processing*. 2002. V. 50. No. 2. P. 174–188.

14. *Julier S.J., Uhlmann J.K., Durrant-Whyte H.F.* A new approach for filtering nonlinear systems // Proc. IEEE Amer. Control Conf. (ACC'95), 1995. P. 1628–1632.
15. *Пугачев В.С.* Оценивание переменных и параметров в дискретных нелинейных системах // АиТ. 1979. № 6. С. 63–79.
Pugachev V.S. Estimation of variables and parameters in discrete-time nonlinear systems // Autom. Remote Control. 1979. V. 40. No. 4. P. 39–50.
16. *Pankov A.R., Bosov A.V.* Conditionally minimax algorithm for nonlinear system state estimation // IEEE Trans. Autom. Control. 1994. V. 39. No. 8. P. 1617–1620.
17. *Su X., Ullah I., Liu X., Choi D.* A Review of Underwater Localization Techniques, Algorithms, and Challenges // J. Sens. 2020. No. 1 (6403161).
18. *Kalman R.E.* A new approach to linear filtering and prediction problems // J. Basic Eng. – T. ASME. 1960. V. 82. No. 1. P. 35–45.
19. *Lingren A., Gong K.* Position and Velocity Estimation Via Bearing Observations // IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst. 1978. No. AES-14. P. 564–577.
20. *Lin X., Kirubarajan T., Bar-Shalom Y., Maskell S.* Comparison of EKF, pseudomeasurement, and particle filters for a bearing-only target tracking problem // Signal and Data Processing of Small Targets 2002, Proceedings of the AEROSENSE 2002, Orlando, FL, USA, 1–5 April 2002; Drummond, O.E., Ed.; International Society for Optics and Photonics, SPIE: Bellingham, WA, USA, 2002. V. 4728. P. 240–250.
21. *Konovalenko I., Kuznetsova E., Miller A., et.al.* New Approaches to the Integration of Navigation Systems for Autonomous Unmanned Vehicles (UAV) // Sensors. 2018. No. 18 (3010).
22. *Hodges R.* Underwater Acoustics: Analysis, Design and Performance of Sonar. N.Y.: Wiley, USA, 2011.
23. *Holler R.A.* The evolution of the sonobuoy from World War II to the Cold War // US Navy J. Underwater Acoust. 2014. V. 25. No. 1. P. 322–346.
24. *Morris J.* The Kalman filter: A robust estimator for some classes of linear quadratic problems // IEEE Trans. Inf. Theory. 1976. V. 22. No. 5. P. 526–534.
25. *Босов А.В.* Анализ использования доплеровских измерений для идентификации параметров движения по наблюдениям со случайными запаздываниями // Информатика и ее применения. 2025. Т. 19. Вып. 1. С. 34–44.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 02.04.2025

После доработки 11.07.2025

Принята к публикации 17.07.2025

Стохастические системы

© 2025 г. Б.Я. ЛИХТЦИНДЕР, д-р техн. наук (b.lihtcinder@psuti.ru)
(Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики,
Самара),

А.Ю. ПРИВАЛОВ, д-р техн. наук (privalov1967@gmail.com)
(Самарский национальный исследовательский университет им. С.П.Королева;
Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики)

ГРУППОВЫЕ КВАЗИПУАССОНОВСКИЕ МОДЕЛИ В АНАЛИЗЕ ОЧЕРЕДЕЙ ПАЧЕЧНОГО ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОГО ТРАФИКА¹

Предложен новый тип входного потока для системы массового обслуживания, родственный групповому пуассоновскому потоку. Показано, что предлагаемый поток является более адекватной моделью современного трафика, чем групповой пуассоновский поток при определении зависимости средней очереди в приемном буфере от загрузки исходящего канала передачи данных (на примере трафика видеокodeка стандарта H264). Предложена аналитическая формула для размера средней очереди в СМО G/D/1 с таким входным потоком, что позволяет оценивать параметры модели для приближения средней очереди реального трафика методом наименьших квадратов. Также показана возможность использовать для оценки параметров модели нейросеть.

Ключевые слова: неординарный входной поток, система массового обслуживания, телекоммуникационный трафик, имитационное моделирование, нейронная сеть.

DOI: 10.31857/S0005231025100068

1. Введение

Одна из самых распространенных задач анализа и моделирования трафика сетей телекоммуникаций – это определение характеристик очереди, создаваемой этим трафиком в приемном буфере сетевого узла. При этом совпадение статистических характеристик самого модельного трафика с его реальным прототипом не так важно, как совпадение статистических характеристик соответствующих очередей.

Для сетей передачи данных с коммутацией пакетов классические пуассоновские модели потоков не являются адекватными. В то же время описание сложных коррелированных потоков с использованием самоподобных процессов, привлекавшее в последние два десятилетия большое внимание научного сообщества, позволяет отразить сложные корреляционные свойства самого трафика, но неудобно при анализе характеристик очередей.

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке из средств государственного задания в сфере научной деятельности (проект FSSS-2024-0014).

Хорошо зарекомендовавшей себя альтернативой такому подходу является класс моделей потоков, управляемых цепью Маркова и близких к ним. Этапы развития указанных моделей представлены в обзоре [1]. От «разносторонних (versatile) потоков», через «N-потоки» (потоки Ньютса) [2] они эволюционировали до марковских входных потоков (МАР – Markov Arrival Process) и их обобщения – групповых марковских входных потоков (ВМАР – Batch Markov Arrival Process) (см., например, [3–5]).

В данной работе, на основе модели группового пуассоновского потока, который может рассматриваться как модель, родственная к ВМАР, предлагается обобщение группового пуассоновского потока, а именно квазипуассоновский поток, у которого полученная в имитационном эксперименте зависимость средней очереди в приемном буфере от загрузки прибора хорошо аппроксимирует эту зависимость у трафика видеокодека H264.

При этом для определения параметров предложенной модели будет использоваться обобщение формулы Поллачека–Хинчина для системы массового обслуживания (СМО) G/D/1, полученное с помощью интервального метода [6]. Для предлагаемого квазипуассоновского потока с использованием этой формулы будет выведена полуэмпирическая формула для зависимости средней очереди в СМО G/D/1 от загрузки прибора, хорошо согласующаяся с результатами имитационного моделирования.

Также будет показана возможность определения параметров такого квазипуассоновского потока с помощью нейросети.

2. Постановка задачи и краткое описание полученных ранее результатов

Сформулируем полученные авторами ранее результаты, которые будут использоваться далее.

Рассмотрим пуассоновский поток событий с параметром λ , в котором каждое событие представляет собой одновременное прибытие нескольких заявок на обслуживание (пачки заявок). Количество заявок в каждой пачке являются независимыми одинаково распределенными дискретными случайными величинами. Такой поток называется *групповым (неординарным) пуассоновским потоком* ([7]). Он очевидно обладает свойством стационарности и отсутствия последействия, но не обладает свойством ординарности.

Обозначим величину k -й пачки заявок через B_k , и будем считать, что нам задано ее распределение:

$$Pr\{B_k = n\} = b_n \forall k.$$

Рассмотрим случайный интервал на оси времени длиной τ . Дальнейшей задачей будет найти моменты случайной величины $m(\tau)$, равной количеству заявок группового пуассоновского потока, приходящих в таком интервале. Для решения задачи найдем производящую функцию случайной величины $m(\tau)$. Если производящая функция количества заявок в пач-

ке есть $G_B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, то для производящей функции $G_{m(\tau)}(z)$ имеем (подробнее см. [8]):

$$G_{m(\tau)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda\tau} \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} (G_B(z))^k = e^{\lambda\tau(G_B(z)-1)},$$

откуда для математического ожидания и дисперсии $m(\tau)$ несложно получить

$$M(m(\tau)) = \lambda\tau\overline{B}, \quad D(m(\tau)) = \lambda\tau\overline{B^2}.$$

Для случая, когда пакеты имеют одинаковый размер B (этот случай далее понадобится), получаем:

$$M(m(\tau)) = \lambda\tau B, \quad D(m(\tau)) = \lambda\tau B^2.$$

Пусть теперь этот групповой пуассоновский поток является входным в СМО G/D/1 со временем обслуживания заявки τ_S . Найти моменты очереди (в принципе – любого порядка) в такой СМО можно с помощью интервального метода (см. [8], где представлен вывод формул для первого и второго порядка, а в [9] представлено обобщение на случай, когда время обслуживания заявки в СМО является дискретной случайной величиной с конечным числом значений). Но здесь понадобится только формула для математического ожидания при детерминированном времени обслуживания, которая задается обобщенной формулой Поллачека–Хинчина и имеет вид

$$(1) \quad \overline{Q}(\rho) = \frac{D(m(\tau_S)) + 2R(Q_i, m_{i+1}(\tau_S))}{2(1 - \rho)} - \frac{\rho}{2},$$

где ρ – загрузка прибора, $D(m(\tau_S))$ – дисперсия количества заявок, приходящих за время обслуживания одной заявки, $R(Q_i, m_{i+1}(\tau_S))$ – корреляционный момент между длиной очереди в момент окончания обслуживания некоторой заявки и количеством заявок, приходящим на следующем интервале обслуживания (значения всех величин берутся для данного ρ).

В общем случае использование данной формулы затруднительно из-за необходимости вычислять $R(Q_i, m_{i+1}(\tau_S))$, но для некоторых важных частных случаев это возможно. В частности, для группового пуассоновского потока $R(Q_i, m_{i+1}(\tau_S)) = 0$ из-за отсутствия последействия и с использованием того, что для пакетов постоянного размера имеем

$$M(m(\tau_S)) = \lambda\tau_S B = \rho, \quad D(m(\tau_S)) = \lambda\tau_S B^2 = \rho B,$$

получаем

$$(2) \quad \overline{Q}(\rho) = \frac{\rho B}{2(1 - \rho)} - \frac{\rho}{2} = \frac{\rho B - \rho(1 - \rho)}{2(1 - \rho)}.$$

Нетрудно видеть, что для $B = 1$ получается классическая формула Поллачека–Хинчина для СМО M/D/1.

В [10] групповой пуассоновский поток был использован для аппроксимации методом наименьших квадратов двух первых статистических моментов очереди трафика видеокodeка стандарта H264 и показал результаты лучше, чем ординарный пуассоновский поток. Однако все-таки это приближение (полученное методом наименьших квадратов относительно размера пачки как параметра модели) нельзя признать достаточно хорошим. Поэтому в данной работе рассмотрим новую модель потока, которую будем использовать для той же цели.

Рассмотрим следующий поток заявок: заявки прибывают пачками, количество заявок в каждой пачке являются независимыми одинаково распределенными дискретными случайными величинами B_k . Интервалы времени между моментами прибытия последовательных пачек равны сумме некоторой постоянной величины T и независимой экспоненциально распределенной случайной величины с параметром λ . Будем называть такой поток *квазипуассоновским потоком с одинаковыми паузами продолжительностью T* (для краткости – просто *квазипуассоновским потоком*).

Задача будет состоять в том, чтобы, используя этот поток как входной в СМО G/D/1, приблизить среднюю очередь, создаваемую реальным трафиком (в качестве которого будем по-прежнему использовать трафик видеокodeка стандарта H264).

Так как нас будет интересовать зависимость средней очереди от загрузки прибора, а временной масштаб не важен, будем характеризовать квазипуассоновский поток двумя параметрами: параметром B – постоянным размером пачки и параметром $\alpha = T\lambda$, т.е. отношением длины постоянной части интервала между прибытиями (паузы) к средней длине экспоненциально-распределенной части этого интервала. Эти параметры подбираются таким образом, чтобы при одинаковых загрузках прибора различие между средней очередью реального трафика и средней очередью квазипуассоновского потока было как можно меньше.

Точного решения этой задачи получить не удалось, но в следующем разделе представим приближенную формулу для средней очереди такого потока.

3. Приближение для средней очереди квазипуассоновского потока

Прежде всего отметим следующее установленное эмпирически свойство квазипуассоновского потока: при любом конечном α и постоянном размере пачки B выборочная дисперсия количества заявок, приходящих на случайном интервале τ , близка к выборочной дисперсии группового пуассоновского потока с тем же B при условии, что они создают одну и ту же загрузку прибора ρ в СМО G/D/1.

При установлении этого свойства (а также и в других имитационных экспериментах в данной работе) использовалась программная имитационная модель указанных потоков, которая генерировала последовательность моментов прибытия пачек заявок согласно определению соответствующего потока.

В дальнейших экспериментах этот поток пачек заявок будет входным для имитационной модели СМО G/D/1. Здесь же нужно было только для имеющегося потока определить постоянное время обслуживания заявки такое, чтобы загрузка прибора имела бы заданное значение (использовались значения из диапазона $[0,1\ 0,9]$, наиболее на практике интересного).

В экспериментах, где наблюдался указанный выше факт близости выборочных дисперсий у групповых пуассоновского и квазипуассоновских потоков, бралось $\tau = \tau_S$ – т.е. интервал, за который определялось количество приходящих заявок, брался равным времени обслуживания одной заявки в СМО G/D/1 при заданном ρ . Эти интервалы плотно покрывали всю временную ось, и по полученной выборке количества пришедших в них заявок вычислялась выборочная дисперсия $\hat{D}(\rho)$ по формуле

$$\hat{D}(\rho) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \hat{m}_n^2(\tau_S) - \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \hat{m}_n(\tau_S) \right)^2,$$

где элемент выборки $\hat{m}_n(\tau_S)$, $n = 1, \dots, N$, – это количество заявок, пришедших в n -м интервале τ_S при прогоне имитационной модели.

В таблице для примера приведены полученные с помощью имитационного моделирования значения выборочных дисперсий количества заявок, приходящих за время обслуживания одной заявки для группового пуассоновского и групповых квазипуассоновских потоков с разными α .

Выборочные дисперсии приходов для различных групповых потоков. Для всех $B = 20$

Загрузка	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Пуассон	2,00	4,00	6,00	8,00	10,03	12,05	14,05	16,06	17,96
Квази $\alpha = 0,5$	1,99	3,97	5,91	7,84	9,75	11,64	13,51	15,36	17,19
Квази $\alpha = 1$	1,99	3,96	5,91	7,84	9,74	11,63	13,50	15,35	17,18
Квази $\alpha = 2$	1,99	3,96	5,91	7,84	9,749	11,64	13,51	15,36	17,19

Причину наблюдаемой близости можно указать с помощью следующих (нестрогих) рассуждений: из определения квазипуассоновского потока следует, что интервал между последовательными приходами пачек всегда больше, чем величина паузы T , и если из каждого из этих интервалов вычитать T , то остатками будут независимые экспоненциально-распределенные величины. То есть поток, в котором интервалами между приходами пачек будут эти остатки, будет групповым пуассоновским потоком. Назовем его *вложенным потоком*. А исходный квазипуассоновский поток, таким образом, получается из вложенного, если после прибытия каждой пачки вставить *паузу* – интервал постоянной длины T , во время которого заявки не приходят.

На любом достаточно большом интервале времени вложенный пуассоновский поток в среднем будет занимать только $(1/(1 + \alpha))$ часть этого интерва-

ла, а остальную часть будут занимать паузы. Поэтому для того, чтобы вложенный поток создавал такую же загрузку прибора на всем интервале, какую создает групповой пуассоновский поток с тем же размером пачки, интенсивность приходов пачек во вложенном потоке должна быть в соответствующее число раз больше.

Для пуассоновского потока увеличение интенсивности означает и увеличение дисперсии количества приходящих пачек на некотором интервале времени во столько же раз. А чередование кусков реализации вложенного потока с интервалами пауз, как показал эксперимент, не вносит больших различий в выборочную дисперсию.

На основании близости значений этих выборочных дисперсий будем считать и теоретические дисперсии количества заявок, приходящих на интервале обслуживания одной заявки в СМО G/D/1 для пуассоновского и квазипуассоновского потоков, создающих одинаковую загрузку прибора, равными.

Далее оценим размер средней очереди от квазипуассоновского потока в СМО G/D/1 при малых нагрузках прибора. Что такое *малая нагрузка*, определим следующим образом: каждая пачка в квазипуассоновском потоке приходит перед началом интервала паузы длиной T и, если прибор свободен, начинает обслуживание в этом интервале. Будем называть нагрузку ρ малой, если при ней обслуживание пачки полностью заканчивается в течение этого интервала, т.е. выполняется условие

$$(3) \quad B \tau_S \leq T,$$

где τ_S – время обслуживания одной заявки из пачки. Границу интервала для малых ρ , которую обозначим через ρ_0 , можно вычислить следующим образом: из определения квазипуассоновского потока следует, что в среднем за время $T + 1/\lambda$ приходит B заявок, т.е. в среднем одна заявка на $(T + 1/\lambda)/B$ единиц времени. Тогда время обслуживания одной заявки при занятости прибора ρ должна быть

$$(4) \quad \tau_S = \rho \frac{T + 1/\lambda}{B},$$

и, учитывая (3), получаем

$$(5) \quad \rho_0 = \frac{T}{T + 1/\lambda} = \frac{\alpha}{\alpha + 1}.$$

Нетрудно видеть, что при малых нагрузках ситуация очень похожа на ситуацию в случае группового детерминированного потока (когда пачки приходят всегда через равные промежутки времени). И к ней, так же как к детерминированному потоку, можно применить обобщенную формулу Поллачека–Хинчина (это другой частный случай, когда это можно легко сделать). При этом используется следующее соображение:

$$R(Q_i, m_{i+1}(\tau_S)) = M(Q_i | m_{i+1}(\tau_S)) - M(Q_i) M(m_{i+1}(\tau_S)),$$

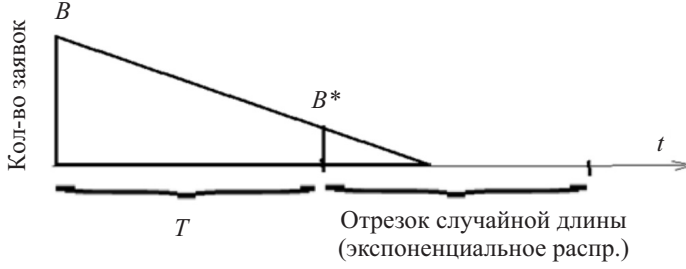


Рис. 1. Изменение количества заявок из пришедшей пачки в системе во время паузы при большой загрузке.

но Q_i отлична от нуля только в течение интервала паузы, в котором $m_{i+1}(\tau) = 0$, т.е.

$$R(Q_i, m_{i+1}(\tau_S)) = -M(Q_i) \quad M(m_{i+1}(\tau_S)) = -\bar{Q}(\rho) \rho,$$

и, подставив это в (1), получим

$$\bar{Q}(\rho) = \frac{D(m(\tau)) - 2\bar{Q}(\rho)\rho}{2(1 - \rho)} - \frac{\rho}{2},$$

откуда нетрудно получить

$$(6) \quad \bar{Q}(\rho) = \frac{\rho B - \rho(1 - \rho)}{2}.$$

Заметим, что при больших B зависимость $\bar{Q}$ от ρ близка к линейной.

Теперь рассмотрим приблизительную оценку очереди для больших загрузок ($\rho > \rho_0$).

В этом случае $B\tau_S > T$, и на момент начала экспоненциально-распределенной части интервала между пачками количество заявок из пачки, еще остающихся в системе, можно оценить как

$$(7) \quad B^*(\rho) = \left\lceil \frac{B\tau_S - T}{\tau} \right\rceil = \left\lceil B - \frac{T}{\tau_S} \right\rceil = \left\lceil B \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) \right\rceil$$

где использовали (4), (5), а скобки $\lceil \dots \rceil$ означают наименьшее целое, больше либо равное выражению в них. Для иллюстрации на рис. 1 изображена зависимость количества заявок из пачки, остающихся в системе в течение соответствующей паузы, в начале которой эта пачка пришла. При этом у заявки, находящейся на обслуживании, учитывается ее не обслуженная еще часть.

То есть в момент окончания паузы размер необслуженной пачки будет меньше начального, и он будет зависеть от ρ . Если убрать из квазипуассоновского потока все паузы, “склеив” экспоненциально-распределенные интервалы, то получится групповой пуассоновский поток с размером пачки B^* .

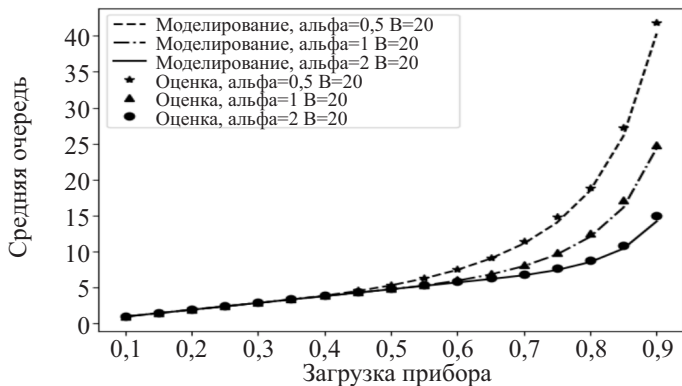


Рис. 2. Сравнение зависимости средней очереди от загрузки прибора, полученной в имитационном эксперименте и вычисленной по формуле (9). Для всех потоков $B = 20$.

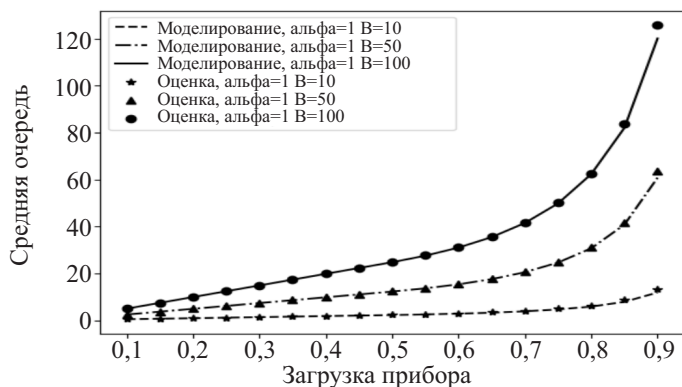


Рис. 3. Сравнение зависимости средней очереди от загрузки прибора, полученной в имитационном эксперименте и вычисленной по формуле (9). Для всех потоков $\alpha = 1$.

Для оценки можно считать, что очередь, образуемая таким пуассоновским потоком будет добавляться к очереди из (6). Эту добавочную очередь можно найти по формуле (2), только при этом в нее надо подставлять не ρ , а приведенное

$$(8) \quad \rho^* = \frac{\rho - \rho_0}{1 - \rho_0},$$

так как этот особый групповой пуассоновский поток появляется только при $\rho > \rho_0$, а при $\rho = 1$ должно быть и $\rho^* = 1$, чтобы очередь обращалась в бесконечность.

Также необходимо скорректировать то слагаемое в выражении для очереди, которое относится к участку паузы T , т.е. подобное выражению (6). Теперь обслуживание “хвоста” пачки размера B выходит за интервал T и учитывается в выражении пуассоновской части очереди, так что его надо ис-

ключить из (6). С учетом того, что средняя очередь пропорциональна площади фигуры на рис. 1, поправочный коэффициент можно найти как отношение площадей трапеции с основаниями B и B^* к треугольнику с катетом B (см. рис. 1):

$$\frac{S^*}{S} = \frac{\tau(B^2 - (B^*)^2)}{\tau B^2} = 1 - \frac{(B^*)^2}{B^2} \approx 1 - \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)^2 = \left(2 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) \frac{\rho_0}{\rho}.$$

Таким образом, имеем следующую формулу для очереди:

$$(9) \quad \bar{Q}(\rho) = \begin{cases} \frac{\rho B - \rho(1 - \rho)}{2}, & \rho \leq \rho_0; \\ \frac{\rho_0}{\rho} \left(2 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) \left(\frac{\rho B - \rho(1 - \rho)}{2}\right) + \frac{\rho^* B^* - \rho^*(1 - \rho^*)}{2(1 - \rho^*)}, & \rho > \rho_0. \end{cases}$$

где B^* и ρ^* задаются формулами (7) и (8) соответственно.

Сравним результаты вычислений средней очереди по формуле (9) с результатами имитационного эксперимента по прохождению квазипуассоновского потока через СМО G/D/1, см. рис. 2 и 3. Приведены примеры для разных значений параметров квазипуассоновского потока (результаты, полученные при имитационном моделировании изображены линиями, а оценки по формуле (9) – различными маркерами). Приближение получается весьма хорошее.

4. Аппроксимация очереди реального видеотрафика

Далее для опытов возьмем трассы трафика с видеокодека стандарта H264 при разных значениях размера видеобуфера, использующегося для сжатия видеокадров. Трасса в данном случае – это последовательность моментов выхода из видеокодека информационных пакетов, и каждый такой момент считается моментом прихода заявки на обслуживание в СМО G/D/1. Время обслуживания заявки берется таким, чтобы загрузка прибора ρ при этом входном потоке была равна заданной величине. Во время прохождения этого потока через СМО, вычисляется эмпирическое среднее по времени значение очереди для данного ρ .

Для каждой трассы реального трафика таким образом были найдены значения средней очереди для ряда значений загрузки прибора ρ , которые обозначены как $\hat{Q}(\rho_i)$, $i = 1, \dots, N$. Они использовались для оценки методом наименьших квадратов параметров квазипуассоновского потока, зависимость средней очереди которого в СМО G/D/1 от ρ аппроксимирует найденную в описанном выше имитационном эксперименте зависимость средней очереди реального трафика от ρ .

Оценки $\hat{\alpha}, \hat{B}$ параметров α, B аппроксимирующего квазипуассоновского потока были найдены как

$$\hat{\alpha}, \hat{B} = \arg \min_{\alpha, B} \sum_{i=1}^N \left(\hat{Q}(\rho_i) - \bar{Q}(\rho_i) \right)^2,$$

где $\bar{Q}(\rho_i)$ рассчитывалась по формуле (9).

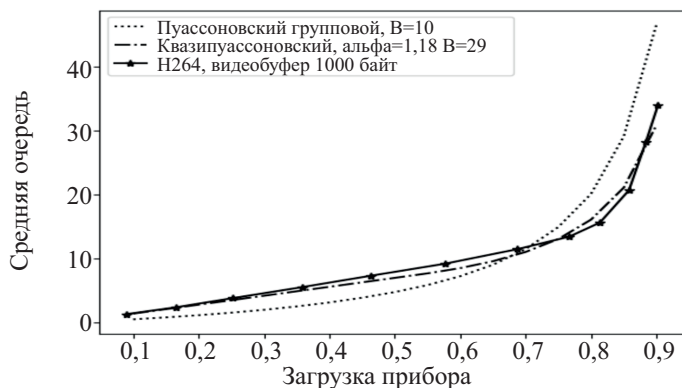


Рис. 4. Аппроксимация зависимости средней очереди от загрузки прибора для трафика видеокодека стандарта H264. Размер видеобуфера 1000 байт.

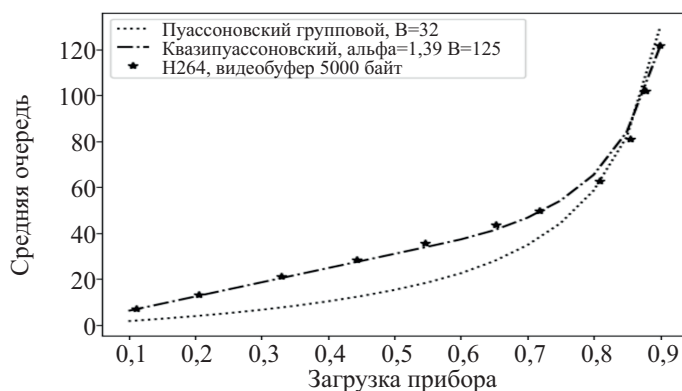


Рис. 5. Аппроксимация зависимости средней очереди от загрузки прибора для трафика видеокодека стандарта H264. Размер видеобуфера 5000 байт.

Результаты приведены на рис. 4 и 5, где для сравнения приведена также аналогичная аппроксимация групповым пуассоновским потоком, размер пачки которого находился также методом наименьших квадратов (для реального трафика график изображен сплошной линией, для аппроксимации квазипуассоновским потоком – пунктиром с маркерами, для аппроксимации пуассоновским потоком – точечным пунктиром). Очевидно, что квазипуассоновский поток обеспечивает значительно лучшую аппроксимацию средней очереди данного реального трафика.

Для полноты картины интересно посмотреть, насколько хорошо аппроксимируются дисперсии очередей реального трафика. Они приведены на рис. 6 и 7. Хотя различие между реальным трафиком и аппроксимирующим модельным трафиком больше, чем для средней очереди, приближение по-прежнему неплохое и гораздо лучше приближения, обеспечиваемого групповым пуассоновским потоком.

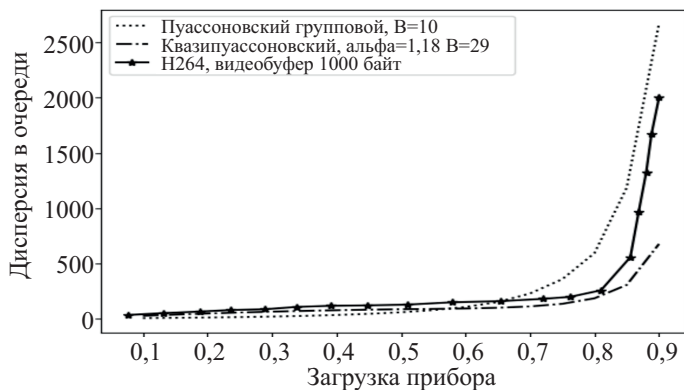


Рис. 6. Аппроксимация зависимости дисперсии очереди от загрузки прибора для трафика видеокodeка стандарта H264. Размер видеобуфера 1000 байт.

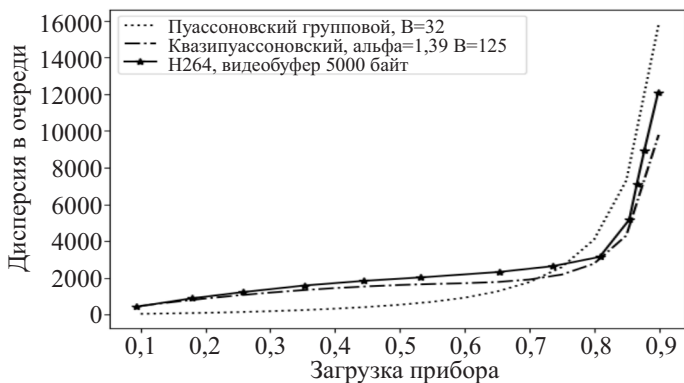


Рис. 7. Аппроксимация зависимости дисперсии очереди от загрузки прибора для трафика видеокodeка стандарта H264. Размер видеобуфера 5000 байт.

Заметим, что с практической точки зрения близость двух первых моментов распределения двух случайных величин позволяет говорить о большой близости и их распределений, так что представленные оценки имеют практическую ценность.

5. Оценка параметров аппроксимирующей модели с помощью нейросети

Выше удалось построить хорошую аппроксимирующую формулу для средней очереди. Представим здесь еще один способ оценки параметров модели трафика, пригодный для случая, когда аппроксимирующей формулы нет. Он заключается в обучении нейросети определять параметры квазипуассоновского потока.

Входными данными для нейросети является набор значений средней очереди для заданных загрузок прибора. В данной работе использовалось 9 значений, соответствующих загрузкам от 0,1 до 0,9 с шагом 0,1. Выходных зна-

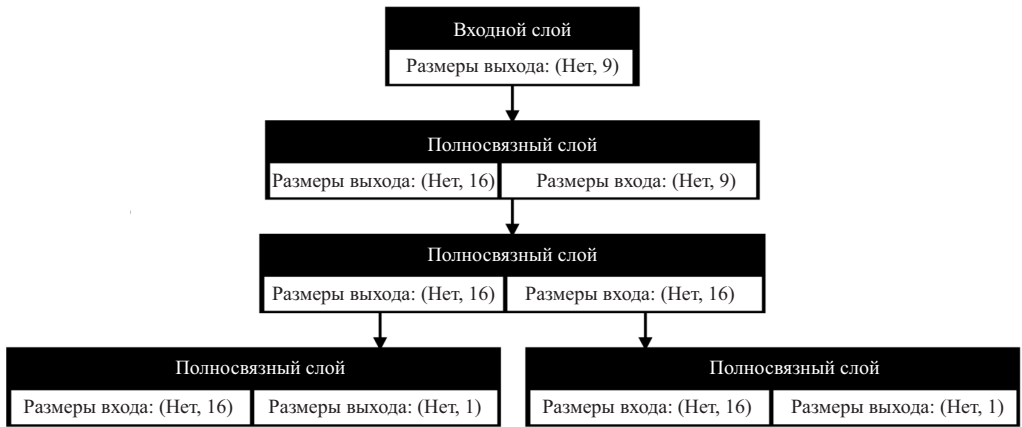


Рис. 8. Архитектура использованной нейросети (стандартное графическое изображение архитектуры, применяющееся в пакете Keras языка Python).

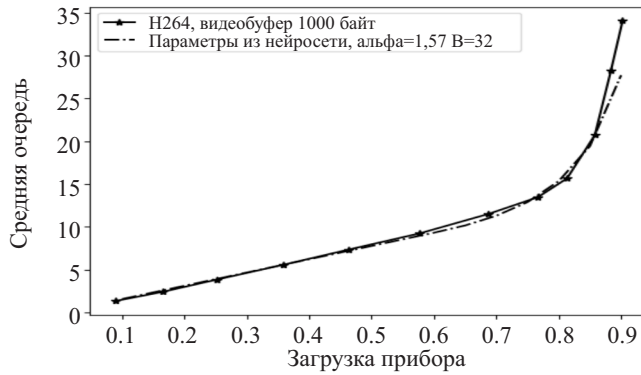


Рис. 9. Аппроксимация зависимости средней очереди от загрузки прибора для трафика видеокodeка H264 при определении параметров с помощью нейросети. Размер видеобуфера 1000 байт.

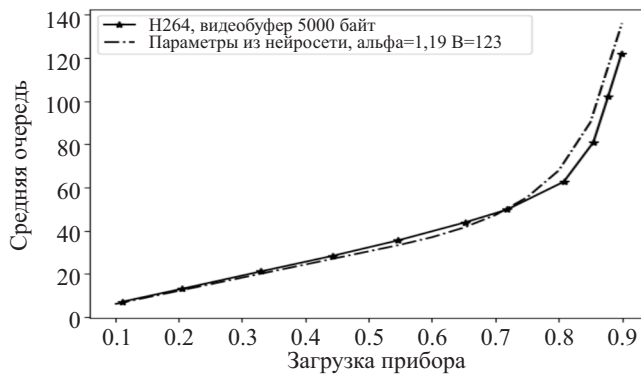


Рис. 10. Аппроксимация зависимости средней очереди от загрузки прибора для трафика видеокodeка H264 при определении параметров с помощью нейросети. Размер видеобуфера 5000 байт.

чений два – это значения параметров α и B . После окончания обучения с учителем нейросети в качестве входных параметров для распознавания подается набор средних значений очереди, полученных при прохождении через СМО реального трафика при тех же нагрузках. Выход нейросети является оценкой параметров квазипуассоновского потока для аппроксимации реального трафика.

На рис. 8 изображена архитектура использованной нейросети. У двух нейронов, каждый из которых является выходным слоем, оценивающим один из параметров квазипуассоновского потока, нелинейный элемент отсутствует, у всех остальных – “ReLU”. Все слои полносвязные.

Обучающая выборка состояла из 2000 примеров, но для каждой реальной трассы выборка была своя, обучающие примеры генерировались с параметрами из небольшого диапазона, в котором находилась искомая оценка (график средней очереди реального трафика лежал между графиками при граничных значениях параметров примеров из обучающей выборки).

На рис. 9 и 10 приведены результаты эксперимента – параметры, предсказанные нейросетью, использовались для имитационного моделирования, и на графиках приведена средняя очередь и для реального трафика, и для смоделированного (для реального трафика график изображен сплошной линией, для смоделированного – пунктирной с маркерами). Видно, что оценка тоже весьма неплоха.

6. Заключение

В работе был представлен квазипуассоновский поток с одинаковыми паузами как модель для аппроксимации средней очереди реального трафика на примере видеотрафика стандарта H264.

Аналитическая формула для оценки средней очереди, представленная в работе, обеспечивает хорошее приближение к результатам имитационного моделирования.

Параметры потока для аппроксимации средней очереди реального трафика, полученные с использованием этой формулы, обеспечивают аппроксимацию, значительно более точную, чем аппроксимация групповым пуассоновским потоком.

Была продемонстрирована возможность определения параметров потока для решения задачи аппроксимации с помощью нейронной сети, тоже дающая хорошие результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вишневский В.М., Дудин А.Н. Системы массового обслуживания с коррелированными входными потоками и их применение для моделирования телекоммуникационного трафика // *АиТ*. 2017. № 8. С. 3–59.
2. Neuts M.F. Markovian point process // *J. Appl. Probab.* 1979. V.16. Issue 4. P. 764–779. <https://doi.org/10.2307/3213143>

3. *Lakatos L., Szeidl L., Telek M.* Introduction to Queueing Systems with Telecommunication Applications // Springer Science+Business Media, 2013. 388 p.
<https://doi.org/10.1007/978-1-4614-5317-8>
4. *Klimenok V.I., Dudin A.N., Vishnevsky V.M., Semenova O.V.* Retrial BMAP/PH/N Queueing System with a Threshold-Dependent Inter-Retrial Time Distribution // Mathematics. 2022. V. 10(2). 269.
<https://doi.org/10.3390/math10020269>
5. *Vishnevsky V., Vytovtov K., Barabanova E., Semenova O.* Analysis of a MAP/M/1/N Queue with Periodic and Non-Periodic Piecewise Constant Input Rate // Mathematics. 2022. Vol. 10(10). 1684.
<https://doi.org/10.3390/math10101684>
6. *Лихтциндер Б.Я.* Трафик мультисервисных сетей доступа (интервальный анализ и проектирование). М.: Горячая линия-Телеком, 2018. 290 с.
7. *Лихтциндер Б.Я., Бакай Ю.О.* Модели групповых пуассоновских потоков в управлении телекоммуникационным трафиком // Вест. Самар. гос. тех. ун-та. Серия: Технические науки. 2020. Т.28. № 3. С. 75–89.
8. *Lichtzinder B.Ya., Privalov A.Yu., Moiseev V.I.* Batch Poissonian Arrival Models of Multiservice Network Traffic // Problems of Information Transmission. 2023. V. 59. No. 1. P. 63–70.
9. *Lichtzinder B.Ya., Privalov A.Yu.* Generalization of Formulas for Queue Length Moments under Nonordinary Poissonian Arrivals for Batch Queues in Telecommunication Systems // Problems of Information Transmission. 2023. V. 59. No. 4. P. 243–248.
10. *Лихтциндер Б.Я., Привалов А.Ю.* Об использовании группового пуассоновского потока в имитационном моделировании современного видеотрафика // Информационные технологии. 2023. Т. 21. № 3(83). С. 11–16.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Вишневым.

Поступила в редакцию 03.09.2024

После доработки 03.06.2025

Принята к публикации 20.06.2025

Заметки, хроника, информация



ДЫХТА ВЛАДИМИР АЛЕКСАНДРОВИЧ (1949–2025)

2 апреля 2025 г., к огромному сожалению, ушел из жизни Владимир Александрович Дыхта, замечательный российский и советский математик, заслуженный деятель науки Российской Федерации (1997), замечательный человек, доктор физико-математических наук, профессор, работавший до конца жизни на должностях главного научного сотрудника Института динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук (ИДСТУ СО РАН)¹ и профессора кафедры вычислительной математики и оптимизации Института математики и информационных технологий Иркутского государственного университета (ИМИТ ИГУ)². На сайтах ИДСТУ СО РАН, ИГУ и ИМИТ ИГУ размещены некрологи^{3,4,5}. Владимир Александрович сделал выдающийся вклад в теорию оп-

¹ <http://idstu.irk.ru/>

² <https://math.isu.ru/ru/>

³ <http://idstu.irk.ru/ru/inews/ushel-iz-zhizni-zasluzhennyy-deyatel-nauki-rf-vladimir-dyhta> (фотография с этой веб-страницы).

⁴ <https://isu.ru/ru/news/2025/details/news-id2025necrologDYCHTA>

⁵ <https://math.isu.ru/export/sites/math/ru/media/announces/2025/.galleries/docs/necrolog.pdf>

тимального управления и ее приложения. Далее приведен не претендующий на полноту список публикаций [1–92], в которых В.А. Дыхта является одним автором или соавтором. Статьи опубликованы в журналах «Автоматика и телемеханика», «Доклады Академии наук», «Известия Академии наук СССР. Техническая кибернетика», «Известия РАН. Теория и системы управления», «Математические заметки», «Дифференциальные уравнения», «Труды Математического института имени В.А. Стеклова», «Журнал вычислительной математики и математической физики», «Известия высших учебных заведений. Математика», «Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры», «Труды Института математики и механики УрО РАН», «Сибирский математический журнал», «Известия Иркутского государственного университета. Серия “Математика”», «Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика», «Journal of Optimization Theory and Applications», «European Journal of Control» и др. В.А. Дыхта является соавтором ряда монографий [5–15]. В частности, [14] — второе издание монографии «Оптимальное импульсное управление с приложениями» В.А. Дыхты, О.Н. Самсонюк.

В.А. Дыхта родился 1 октября 1949 г. в Иркутске, в 1972 г. окончил математический факультет Иркутского университета и работал в Alma Mater в течение десятилетий на разных должностях: ассистент, старший преподаватель, доцент, профессор, заведующий кафедрой. Под руководством Владимира Иосифовича Гурмана⁶, известного отечественного ученого, специалиста по теории оптимального управления и ее приложениям, В.А. Дыхта подготовил в Иркутске кандидатскую диссертацию «Достаточные условия оптимальности особых режимов» и защитил ее в 1979 г. в Свердловске [1, 2]. В 1992 г. Владимир Александрович подготовленную в докторантуре Иркутского вычислительного центра СО АН СССР / СО РАН (ныне ИДСТУ СО РАН) докторскую диссертацию «Расширение задач оптимального управления и вариационный принцип максимума»⁷ защитил в Институте математики СО РАН (Новосибирск) [3, 4]. В 1992–2007 гг. Владимир Александрович возглавлял кафедру высшей математики в Иркутской государственной экономической академии (ныне Байкальский государственный университет). С 2008 г. основным местом работы Владимира Александровича стал ИДСТУ СО РАН, где он работал на должностях заведующего лабораторией оптимального управления, заведующего отделением и главного научного сотрудника. В.А. Дыхта был членом диссертационных советов, председателем оргкомитетов нескольких международных школ-семинаров «Нелинейный анализ и экстремальные задачи» (NLA), включая, например, первую школу-семинар (2008 г.)⁸. Так-

⁶ О В.И. Гурмане (1934–2016) есть статьи [80, 81], [90 лет со дня рождения Владимира Иосифовича Гурмана // АиТ. 2024. № 11. С. 102–104.]

⁷ Научный консультант – д.ф.-м.н., проф. Александр Александрович Толстоногов. Заслуженный деятель науки Российской Федерации с 2002 г., чл.-корр. РАН с 2006 г. (<http://idstu.irk.ru/?q=aatol>). Является советником директора, зав. отд., г.н.с. в ИДСТУ СО РАН.

⁸ <http://idstu.irk.ru/ru/node/93/95>

же отмечаем труд В.А. Дыхты как научного руководителя и преподавателя, которым подготовлено 11 кандидатов наук (например, Н.В. Деренко (1994), О.Н. Самсонок (1999), Н.В. Антипина (2003), С.П. Сорокин (2012)) и 2 доктора наук, опубликован ряд учебных пособий, включая [16–21], прочитано большое число учебных курсов, главным образом в Иркутске, а также в качестве приглашенного профессора в Улан-Удэ (в Бурятском государственном университете и Восточно-Сибирском государственном технологическом университете).

Важной составляющей в научном наследии В.А. Дыхты является развитие фундаментальных результатов В.И. Гурмана и В.Ф. Кротова⁹. Одной из ключевых характеристик научной деятельности Владимира Александровича можно назвать цельное видение тематики разнообразных необходимых и достаточных условий оптимальности, учет тонких теоретических аспектов. Научное наследие В.А. Дыхты впечатляет. В работах В.А. Дыхты, включая работы с соавторами, охвачены:

- разнообразные классы задач оптимального управления (с сосредоточенными параметрами, а именно непрерывные, – в том числе вырожденные (во многих публикациях, начиная с [22, 23]), негладкие [41, 43, 86], – дискретные [85, 90], дискретно-непрерывные [66], а также с распределенными параметрами [12, 28, 30, 54]);
- преобразования задач (в том числе разработанное Владимиром Александровичем нелинейное преобразование Гоха [14, 25]);
- разнообразные необходимые и достаточные условия оптимальности (в том числе разработанные Владимиром Александровичем вариационный принцип максимума [3, 33, 35, 49], позиционный принцип минимума [82, 83, 88–90, 92], что важно, в частности, с точек зрения усиления принципа максимума Понтрягина в регулярных задачах, исследования вырожденных задач);
- методы решения задач оптимального управления (например, в [39, 44] речь идет о построении методов решения задач оптимального импульсного управления на основе вариационного принципа максимума);
- многочисленные аналитические примеры, включая примеры (в [14, 42, 46] и др.) об исследованиях задач оптимального управления по моделированию робота-манипулятора, квантовых систем, (эколого-)экономических процессов и др. с применением и обсуждением условий оптимальности, преобразований задач, с учетом вопросов о математической корректности построений;
- исследования в численных экспериментах (так, [10, § 4.1, 4.2] в этой связи);
- моделирование эколого-экономических систем — в этом отдельном пункте отмечаем соавторство В.А. Дыхты в коллективных монографиях [5–9].

⁹ Про В.Ф. Кротова (1932–2015), известного отечественного ученого, специалиста по теории оптимального управления и ее приложениям, есть статьи [Хрусталеv М.М. // *АиТ*. 2022. № 5. С. 164–168.], [«Кротов Вадим Федорович», <https://www.ipu.ru/node/32378>].

До самого ухода из жизни В.А. Дыхта вел активную научную деятельность. Здесь следует отметить работу [91] Владимира Александровича, представленную в декабре 2024 г. на 40-й конференции «Ляпуновские чтения» и посвященную позиционным усилениям метода В.Ф. Кротова, а также статью [92], посвященную позиционному принципу минимума. Зарегистрирована коллективная программа для ЭВМ по решению задач оптимального управления определенного типа с применением градиентного метода [93].

Для численного решения задач оптимального управления разных типов, включая вырожденные задачи, задачи с терминальными ограничениями и т.д., представляется перспективным создание новых алгоритмов и компьютерных программ, соответствующих фундаментальным результатам из работ В.А. Дыхты, в том числе с соавторами, включая, например, позиционный принцип минимума. Представляет интерес, например, учет результатов по импульсному управлению, представленных в [14, § 3.7, 6.8], [42, 46] (В.А. Дыхта и др.) и полученных для некоторых квантовых модельных оптимизационных задач.

Одной из целей этой статьи является привлечение внимания читателей как к научному наследию В.А. Дыхты, так и научному наследию В.И. Гурмана, В.Ф. Кротова и т.д., вообще к развитию теории оптимального управления. Заинтересованным молодым читателям, которые не знакомы с работами В.А. Дыхты, рекомендуется начать с видеозаписей докладов Владимира Александровича [94, 95].

Статья написана с учетом обсуждений с коллегами ее предварительных версий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Диссертации, авторефераты

1. *Дыхта В.А.* Достаточные условия оптимальности особых режимов: Дис. ... канд. физ.-мат. наук (01.01.02). Иркутск, 1978.
<https://search.rsl.ru/ru/record/01009432043>
2. *Дыхта В.А.* Достаточные условия оптимальности особых режимов: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук (01.01.02). Свердловск, 1979.
<https://search.rsl.ru/ru/record/01007746188>
3. *Дыхта В.А.* Расширение задач оптимального управления и вариационный принцип максимума: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук (01.01.09). Иркутск, 1992.
<https://search.rsl.ru/ru/record/01008059502>
4. *Дыхта В.А.* Расширение задач оптимального управления и вариационный принцип максимума: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук (01.01.09) / Ин-т матем. СО РАН. Новосибирск, 1992. <https://search.rsl.ru/ru/record/01000280612>

Монографии

5. *Бельчанский Г.И., Каллистов Ю.Н., Сазонов Н.В., ..., Дыхта В.А. и др.* Оптимальное управление природно-экономическими системами / Отв. ред. и авт. предисл. В.И. Гурман, А.И. Москаленко; СО АН СССР, Вост.-Сиб. филиал. М.: Наука, 1980. <https://search.rsl.ru/ru/record/01001003723>

6. Батурич В.А., Гурман В.И., Дроздовский Э.Е., Дыхта В.А. и др. Модели управления природными ресурсами / Под ред. В.И. Гурмана. М.: Наука, 1981. <https://search.rsl.ru/ru/record/01001033975>
7. Гурман В.И., Скитневский Д.М., Амбросов Н.В., ..., Дыхта В.А. и др. Системные исследования взаимодействия природы и хозяйства региона / Науч. ред. В.И. Гурман. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1986. <https://search.rsl.ru/ru/record/01001307901>
8. Гурман В.И., Дыхта В.А., Кашина Н.Ф., Амбросов Н.В., Багинов И.П. Эколого-экономические системы: модели, информация, эксперимент / СО АН СССР, Вост.-Сиб. филиал. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1987. <https://search.rsl.ru/ru/record/01001360293>
9. Брусиловский П.М., Гурман В.И., Дроздовский Э.Е., ..., Дыхта В.А. и др. Приложение математических моделей к анализу эколого-экономических систем / СО АН СССР, Вост.-Сиб. филиал. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988. <https://search.rsl.ru/ru/record/01001396601>
10. Гурман В.И., Батурич В.А., Москаленко А.И., ..., Дыхта В.А. и др. Методы улучшения в вычислительном эксперименте / Отв. ред. В.А. Дыхта, А.И. Тятюшкин; ИрВЦ СО АН СССР. Новосибирск: Наука: Сиб. отд-ние, 1988. <https://search.rsl.ru/ru/record/01001415425>
11. Батурич В.А., Дыхта В.А., Москаленко А.И. и др. Методы решения задач теории управления на основе принципа расширения / Отв. ред. В.И. Гурман, Г.Н. Константинов; ИрВЦ СО АН СССР. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1990. <https://search.rsl.ru/ru/record/01001574445>
12. Бокмельдер Е.П., Дыхта В.А., Москаленко А.И., Овсянникова Н.А. Условия экстремума и конструктивные методы решения в задачах оптимизации гиперболических систем / ИрВЦ СО РАН; Отв. ред. О.В. Васильев. Новосибирск: Наука, Сиб. изд. фирма, 1993. <https://search.rsl.ru/ru/record/01001662249>
13. Дыхта В.А., Самсоноч О.Н. Оптимальное импульсное управление с приложениями. М.: Физматлит, 2000. <https://search.rsl.ru/ru/record/01000693995>
14. Дыхта В.А., Самсоноч О.Н. Оптимальное импульсное управление с приложениями. 2-е изд. М.: Физматлит, 2003. <https://search.rsl.ru/ru/record/002149371>
15. Дыхта В.А., Самсоноч О.Н. Неравенства Гамильтона–Якоби и вариационные условия оптимальности / ИГУ, ИДСТУ СО РАН. Иркутск: Изд-во ИГУ, 2015. <https://search.rsl.ru/ru/record/01008140688>

Учебные пособия

16. Дыхта В.А. Выпуклый анализ. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1983. <https://search.rsl.ru/ru/record/01001147166>
17. Дыхта В.А. Линейная алгебра и экономические модели. Иркутск: Изд-во Иркут. гос. экон. акад., 1997. <https://search.rsl.ru/ru/record/01002130418>
18. Дыхта В.А., Антипина Н.В., Самсоноч О.Н. Оптимальное управление в экономике: простейшие модели. Иркутск: Изд-во ИГУ, 1998.
19. Дыхта В.А. Оптимальное управление. Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2013. http://idstu.irk.ru/ru/system/files/dykhta-optimal_control.pdf
20. Дыхта В.А. Динамические модели в экономике. Иркутск: Изд-во ИГУ, 2015. <https://search.rsl.ru/ru/record/01008529808>

21. Дыхта В.А. Оптимальное управление в моделях экономики. Иркутск: Изд-во ИГУ, 2015. <https://search.rsl.ru/ru/record/01008531908>

Статьи в научных журналах, сборниках трудов

22. Гурман В.И., Дыхта В.А. Достаточные условия сильного минимума для вырожденных задач оптимального управления // Дифф. уравн. 1976. Т. 12. № 12. С. 2129–2138. <https://www.mathnet.ru/rus/de2932>
23. Гурман В.И., Дыхта В.А. Вырожденные задачи оптимального управления и метод кратных максимумов // АиТ. 1977. № 3. С. 51–59. <http://www.mathnet.ru/at7300>
Gurman V.I., Dykhta V.A. Singular problems of optimal control and the method of multiple maxima // Autom. Remote Control. 1977. V. 38. No. 3. P. 343–350.
24. Дыхта В.А. Исследование особых режимов нелинейной системы в случае кратных максимумов // АиТ. 1979. № 2. Р. 16–19. <http://www.mathnet.ru/at6116>
Dykhta V.A. Investigation of singular modes of a nonlinear system in the case of multiple maxima // Autom. Remote Control. 1979. V. 40. No. 2. P. 166–168.
25. Дыхта В.А. Условия локального минимума для особых режимов в системах с линейным управлением // АиТ. 1981. № 12. С. 5–10. <https://www.mathnet.ru/rus/at6057>
Dykhta V.A. Conditions of local minimum for singular modes in systems with linear control // Autom. Remote Control. 1981. V. 42. No. 12. P. 1583–1587.
26. Гурман В.И., Дыхта В.А., Колокольникова Г.А., Константинов Г.Н., Москаленко А.И., Никифорова И.А. Принцип расширения в задачах оптимального управления // Изв. Акад. наук СССР. Техн. киберн. 1983. № 2. С. 200–213.
27. Дыхта В.А., Колокольникова Г.А. Условия минимума на множестве последовательностей в вырожденной вариационной задаче // Матем. заметки. 1983. Т. 34, № 5. С. 735–744. <http://www.mathnet.ru/mzm5907>
Dykhta V.A., Kolokol'nikova G.A. Minimum conditions on the set of sequences in a degenerate variational problem // Math. Notes of the Academy of Sciences of the USSR. 1983. V. 34. No. 5. P. 859–863.
28. Бокмельдер Е.П., Дыхта В.А. К теории принципа максимума для управляемых систем гиперболического типа // Теор. и прикл. вопросы оптим. управл. / ИрВЦ СО АН СССР; Отв. ред. С.Т. Завалишин, А.А. Толстоногов. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1985. С. 41–58. <https://search.rsl.ru/ru/record/01001273167>
29. Дыхта В.А., Колокольникова Г.А., Никифорова И.А. Нелокальные преобразования задач оптимального управления и условия минимума на множестве последовательностей в задачах с особыми режимами / Там же. С. 59–74.
30. Бокмельдер Е.П., Дыхта В.А. Принцип максимума для полулинейных гиперболических систем при функциональных ограничениях // Дифференц. уравн. и числ. методы / ИрВЦ СО АН СССР; Отв. ред. В.М. Матросов, Ю.Е. Бояринцев. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1986. С. 200–207. <https://search.rsl.ru/ru/record/01001297893>
31. Дыхта В.А. Об одном классе задач оптимального управления со стильтесовским интегральным критерием и фазовыми ограничениями // Вопросы оптим. управл. и исслед. операций: Сб. науч. тр.; Отв. ред. В.В. Васильев. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1988. С. 36–45. <https://search.rsl.ru/ru/record/001448858>
32. *Dykhta V.A. Impulse-trajectory extension of degenerate optimal control problems // The Lyapunov Functions Method and Applications; Ed. by P. Borne, V. Matrosov / IMACS Ann. Comput. Appl. Math. V. 8. J.C. Baltzer A.G., 1990. P. 103–109.*

33. *Дыхта В.А.* Вариационный принцип максимума для импульсных и особых режимов в задаче оптимизации, линейной по управлению // Изв. ВУЗов. Матем. 1991. № 11. С. 89–91. <https://www.mathnet.ru/rus/ivm5209>
Dykhta V.A. A variational maximum principle for pulse and singular regimes in an optimization problem that is linear with respect to control // Soviet Math. (Iz. VUZ). 1991. V. 35. No. 11. P. 89–91.
34. *Дыхта В.А.* Импульсно-траекторное расширение задач оптимального управления // Развитие и применение метода функций Ляпунова / ИрВЦ СО РАН; Отв. ред. акад. В.М. Матросов и др. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1992. С. 170–182. <https://search.rsl.ru/ru/record/01004931235>
35. *Дыхта В.А.* Вариационный принцип максимума и квадратичные условия оптимальности импульсных и особых процессов // Сиб. матем. журн. 1994. Т. 35. № 1. С. 70–82. <https://www.mathnet.ru/rus/smj789>
Dykhta V.A. The variational maximum principle and second-order optimality conditions for impulse processes and singular processes // Sib. Math. J. 1994. V. 35. Iss. 1. P. 65–76.
36. *Дыхта В.А.* Необходимые условия оптимальности импульсных процессов при ограничениях на образ управляющей меры // Изв. ВУЗов. Матем. 1996. № 12. С. 9–16. <https://www.mathnet.ru/rus/ivm1666>
Dykhta V.A. Necessary conditions for the optimality of impulse processes with constraints on the image of the control measure // Russian Math. (Iz. VUZ). 1996. V. 40. No. 12. P. 7–13.
37. *Dykhta V.* Optimality conditions for impulsive processes and its applications // IFAC Proc. Volumes. 1996. V. 29. Iss. 1. P. 1786–1791.
[https://doi.org/10.1016/S1474-6670\(17\)57928-8](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)57928-8)
38. *Dykhta V.* Second order necessary optimality conditions for impulse control problem and multiprocesses // IFAC Proc. Volumes. 1997. V. 30. Iss. 10. P. 97–101.
[https://doi.org/10.1016/S1474-6670\(17\)43112-0](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)43112-0)
39. *Derenko N., Dykhta V., Rodnina E., Chouprova O.* Optimal impulsive control problem and variational maximum principle // 1997 European Control Conf. P. 1125–1128. <https://doi.org/10.23919/ECC.1997.7082250>
40. *Dykhta V., Sumsonuk O.* A maximum principle for optimal impulsive processes and its application // Там же. P. 1129–1133.
<https://doi.org/10.23919/ECC.1997.7082251>
41. *Дыхта В.А., Самсоныук О.Н.* Принцип максимума в негладких задачах оптимального управления с разрывными траекториями // Изв. ВУЗов. Матем. 1999. № 12. С. 26–37. <http://www.mathnet.ru/ivm691>
Dykhta V.A., Samsonyuk O.N. The maximum principle in nonsmooth optimal control problems with discontinuous trajectories // Russian Math. (Iz. VUZ). 1999. V. 43. No. 12. P. 23–34.
42. *Дыхта В.А.* Импульсное оптимальное управление в моделях экономики и квантовой электроники // АиТ. 1999. № 11. С. 100–112.
<https://www.mathnet.ru/rus/at187>
Dykhta V.A. Impulsive optimal control in models of economics and quantum electronics // Autom. Remote Control. 1999. V. 60. No. 11. P. 1603–1613.
43. *Дыхта В.А., Самсоныук О.Н.* Принцип максимума в негладких задачах оптимального импульсного управления с многоточечными фазограничениями // Изв. ВУЗов. Матем. 2001. № 2. С. 19–32. <http://www.mathnet.ru/ivm847>

- Dykhta V.A., Samsonyuk O.N.* The maximum principle in nonsmooth optimal impulse control problems with multipoint phase constraints // Russian Math. (Iz. VUZ). 2001. V. 45. No. 2. P. 16–29.
44. *Дыхта В.А., Деренко Н.В.* Численные методы решения задач оптимального импульсного управления, основанные на вариационном принципе максимума // Изв. ВУЗов. Матем. 2001. № 12. С. 32–40. <http://www.mathnet.ru/ivm962>
Dykhta V.A., Derenko N.V. Numerical methods for solving problems of optimal impulse control that are based on the variational maximum principle // Russian Math. (Iz. VUZ). 2001. V. 45. No. 12. P. 29–37.
45. *Dykhta V.A., Samsonuk O.N.* Necessary conditions for nonsmooth optimal impulse control problem with intermediate constraints // Proc. 2001 European Control Conf. (Porto, 2001). P. 929–933. <https://doi.org/10.23919/ECC.2001.7076031>
46. *Dykhta V., Antipina N.* Applications of variational maximum principle to optimization models with discontinuous trajectories // IFAC Proc. Volumes, 2001. V. 34. Iss. 6. P. 583–587. [https://doi.org/10.1016/S1474-6670\(17\)35240-0](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)35240-0)
47. *Dykhta V., Samsonuk O.* Maximum principle for nonsmooth optimal impulse problems // Там же. P. 1303–1307. [https://doi.org/10.1016/S1474-6670\(17\)35367-3](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)35367-3)
48. *Антипина Н.В., Дыхта В.А.* Линейные функции Ляпунова–Кротова и достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума // Изв. ВУЗов. Матем. 2002. № 12. С. 11–22. <http://www.mathnet.ru/ivm1095>
Antipina N.V., Dykhta V.A. Linear Lyapunov–Krotov functions and sufficient conditions for optimality in the form of the maximum principle // Russian Math. (Iz. VUZ). 2002. V. 46. No. 12. P. 9–20.
49. *Дыхта В.А.* Вариационный принцип максимума для классических задач оптимального управления // АиТ. 2002. № 4. С. 47–54. <http://www.mathnet.ru/at2056>
Dykhta V.A. A variational maximum principle for classical optimal control problems // Autom. Remote Control. 2002. V. 63. No. 4. P. 560–567.
50. *Arutyunov A., Dykhta V., Pereira F.* First and second order necessary conditions of optimality for impulsive control problems // 42nd IEEE Intern. Conf. Decision Control (2003). 2004. P. 6357–6362. <https://doi.org/10.1109/CDC.2003.1272331>
51. *Антипина Н.В., Дыхта В.А.* Достаточные условия оптимальности для задач импульсного управления // Изв. РАН.ТиСУ. 2004. № 4. С. 76–83.
Antipina N.V., Dykhta V.A. Sufficient optimality conditions for impulse control problems // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2004. V. 43. No. 4. P. 566–573.
52. *Arutyunov A., Dykhta V., Karamzin D., Pereira F.* Necessary optimality conditions for impulsive control problems // IFAC Proc. Volumes. 2004. V. 37. Iss. 17. P. 2–12. [https://doi.org/10.1016/S1474-6670\(17\)30792-9](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)30792-9)
53. *Arutyunov A., Dykhta V., Pereira F.L.* Necessary conditions for impulsive nonlinear optimal control problems without a priori normality assumptions // J. Optim. Theory Appl. 2005. V. 124. Iss. 1. P. 55–77. <https://doi.org/10.1007/s10957-004-6465-x>
54. *Дыхта В.А.* Неравенство Гамильтона–Якоби и достаточные условия оптимальности в распределенных системах // Методы оптимизации и их приложения: Тр. XIII Байкальской междунар. shk.-семинара. Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2005. Т. 2. С. 147–152. <https://search.rsl.ru/ru/record/01002725706>
55. *Дыхта В.А.* Неравенство Ляпунова–Кротова и достаточные условия в оптимальном управлении // Итоги науки и техн. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. 2006. Т. 110. С. 76–108. <https://www.mathnet.ru/rus/into138>

- Dykhta V.A.* Lyapunov–Krotov inequality and sufficient conditions in optimal control // *J. Math. Sci.* 2004. V. 121. Iss. 2. P. 2156–2177.
56. *Дыхта В.А.* Достаточные условия оптимальности в задачах импульсного управления // *Вестник Тамбов. ун-та. Сер.: Естеств. техн. науки.* 2007. Т. 12. № 4. С. 443–445. <https://elibrary.ru/item.asp?id=9912305>
 57. *Антипина Н.В., Дыхта В.А.* Неравенство Гамильтона–Якоби в вырожденных задачах динамической оптимизации с линейным неограниченным управлением // *Вестник Бурят. гос. ун-та. Матем. информат.* 2008. № 9. С. 3–10.
 58. *Дыхта В.А.* Некоторые приложения неравенств Гамильтона–Якоби в оптимальном управлении // *Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Матем.* 2009. № 1. С. 183–196. <https://mathizv.isu.ru/ru/article?id=1140>
 59. *Дыхта В.А., Самсоныук О.Н.* Принцип максимума для гладких задач оптимального импульсного управления с многоточечными фазоограничениями // *ЖВМиМФ.* 2009. Т. 49. № 6. С. 981–997. <https://www.mathnet.ru/rus/zvmmf4701>
Dykhta V.A., Samsonyuk O.N. A maximum principle for smooth optimal impulsive control problems with multipoint state constraints // *Comput. Math. Math. Phys.* 2009. V. 49. No. 6. P. 942–957.
 60. *Дыхта В.А., Самсоныук О.Н.* Оценки множеств достижимости и достаточные условия оптимальности для нелинейных управляемых систем с разрывными траекториями // *Вестник Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. техн. науки.* 2009. Т. 14. № 4. С. 707–709. <https://elibrary.ru/item.asp?id=13035462>
 61. *Аргучинцев А.В., Дыхта В.А., Срочко В.А.* Оптимальное управление: нелокальные условия, вычислительные методы и вариационный принцип максимума // *Изв. ВУЗов. Матем.* 2009. № 1. С. 3–43. <http://www.mathnet.ru/ivm1252>
Arguchintsev A.V., Dykhta V.A., Srochko V.A. Optimal control: nonlocal conditions, computational methods, and the variational principle of maximum // *Russian Math. (Iz. VUZ).* 2009. V. 53. No. 1. P. 1–35.
 62. *Дыхта В.А., Самсоныук О.Н.* Неравенства Гамильтона–Якоби в задачах управления импульсными динамическими системами // *Тр. МИАН.* 2010. Т. 271. С. 93–110. <https://www.mathnet.ru/rus/tm3238>
Dykhta V.A., Samsonyuk O.N. Hamilton–Jacobi inequalities in control problems for impulsive dynamical systems // *Proc. Steklov Inst. Math.* 2010. V. 271. P. 86–102.
 63. *Дыхта В.А.* Неравенства Гамильтона–Якоби в оптимальном управлении: гладкая двойственность и улучшение // *Вестник Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. техн. науки.* 2010. Т. 15. № 1. С. 405–426. <https://elibrary.ru/item.asp?id=14805237>
 64. *Дыхта В.А.* Анализ достаточных условий оптимальности с множеством функций Ляпунова // *Тр. ИММ УрО РАН.* 2010. Т. 16. № 5. С. 66–75. <http://www.mathnet.ru/timm609>
 65. *Дыхта В.А., Самсоныук О.Н., Сорокин С.П.* Слабая инвариантность, оценки интегральных воронок и необходимые условия оптимальности в динамических системах с неограниченными и импульсными управлениями // *Вестник Бурят. гос. ун-та. Матем. информат.* 2010. Вып. 9. С. 35–47.
 66. *Дыхта В.А., Сорокин С.П.* Позиционные решения неравенств Гамильтона–Якоби в задачах управления дискретно-непрерывными системами // *АиТ.* 2011. № 6. С. 48–63. <http://www.mathnet.ru/at2223>
Dykhta V.A., Sorokin S.P. Positional solutions of Hamilton–Jacobi equations in control problems for discrete-continuous systems // *Autom. Remote Control.* 2011. V. 72. No. 6. P. 1184–1198.

67. Дыхта В.А., Сорокин С.П. Неравенства Гамильтона–Якоби и условия оптимальности в задачах управления с общими конечными ограничениями // *АиТ*. 2011. № 9. С. 13–27. <http://www.mathnet.ru/at2270>
Dykhta V.A., Sorokin S.P. Hamilton–Jacobi inequalities and the optimality conditions in the problems of control with common end constraints // *Autom. Remote Control*. 2011. V. 72. No. 9. P. 1808–1821.
68. Дыхта В.А., Сорокин С.П., Яковенко Г.Н. Управляемые системы: условия экстремальности, оптимальности и идентификация алгебраической структуры // *Тр. МФТИ*. 2011. Т. 3. № 3 (11). С. 122–131.
<https://elibrary.ru/item.asp?id=17103752>
69. *Dykhta V., Samsonyuk O.* Some applications of Hamilton–Jacobi inequalities for classical and impulsive optimal control problems // *European J. Control*. 2011. V. 17. Iss. 1. P. 55–69. <https://doi.org/10.3166/ejc.17.55-69>
70. *Dykhta V.A.* Hamilton–Jacobi inequalities for optimal impulsive control problems // *IFAC Proc. Volumes*. 2011. V. 44. Iss. 1. P. 6816–6821.
<https://doi.org/10.3182/20110828-6-IT-1002.02738>
71. Дыхта В.А., Сорокин С.П. О реализации нестандартной двойственности в задачах оптимального управления // *Вестник Тамбов. ун-та. Сер.: Естеств. техн. науки*. 2011. Т. 16. № 4. С. 1071–1073. <https://elibrary.ru/item.asp?id=16710722>
72. Александров В.М., Дыхта В.А. Приближенное решение задачи минимизации расхода ресурсов. I, II // *Сиб. журн. индустр. матем.* 2011. Т. 14. № 2. С. 3–14. № 3. С. 3–13. <http://www.mathnet.ru/sjim660>, <http://www.mathnet.ru/sjim677>
Aleksandrov V.M., Dykhta V.A. Approximate solution to the resource consumption minimization problem. I, II // *J. Appl. Industr. Math.* 2011. V. 5. No. 4. P. 467–477. 2012. V. 6. No. 2. P. 135–144.
73. Дыхта В.А., Самсоныук О.Н. Каноническая теория оптимальности импульсных процессов // *Совр. матем. Фундам. направл.* 2011. Т. 42. С. 118–124.
<https://www.mathnet.ru/rus/cmfd194>
Dykhta V.A., Samsonyuk O.N. The canonical theory of the impulse process optimality // *J. Math. Sci.* 2014. V. 199. No. 6. P. 646–653.
74. Дыхта В.А. Вариационные условия оптимальности с позиционными управлениями спуска, усиливающие принцип максимума // *Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Матем.* 2014. Т. 8. С. 86–103. <http://www.mathnet.ru/iigum189>
75. Дыхта В.А. Слабо монотонные решения неравенства Гамильтона–Якоби и условия оптимальности с позиционными управлениями // *АиТ*. 2014. № 5. С. 31–49. <http://www.mathnet.ru/at9092>
Dykhta V.A. Weakly monotone solutions of the Hamilton–Jacobi inequality and optimality conditions with positional controls // *Autom. Remote Control*. 2014. V. 75. No. 5. P. 829–844.
76. Дыхта В.А. Нестандартная двойственность и нелокальные необходимые условия оптимальности в невыпуклых задачах оптимального управления // *АиТ*. 2014. № 11. С. 19–37. <http://www.mathnet.ru/at14140>
Dykhta V.A. Nonstandard duality and nonlocal necessary optimality conditions in nonconvex optimal control problems // *Autom. Remote Control*. 2014. V. 75. No. 11. P. 1906–1921.
77. Дыхта В.А. Вариационные необходимые условия оптимальности с позиционными управлениями спуска в задачах оптимального управления // *Докл. Акад. наук*. 2015. Т. 462. № 6. С. 653–656. <https://doi.org/10.7868/S0869565215180048>

- Dykhta V.A.* Variational necessary optimality conditions with feedback descent controls for optimal control problems // *Dokl. Math.* 2015. V. 91. No. 3. P. 394–396.
78. *Дыхта В.А.* Двойственные условия оптимальности с позиционными управлениями спуска в задачах, квадратичных по состоянию // *Динамика систем и процессы управл.* Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2015. С. 171–178.
 79. *Дыхта В.А.* Позиционные усиления принципа максимума и достаточные условия оптимальности // *Тр. ИММ УрО РАН.* 2015. Т. 21. № 2. С. 73–86.
<http://www.mathnet.ru/timm1172>
Dykhta V.A. Positional strengthenings of the maximum principle and sufficient optimality conditions // *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.).* 2016. V. 293, suppl. 1. P. 43–57.
 80. *Аргучинцев А.В., Бычков И.В., Батулин В.А., Дыхта В.А., Шишкин Г.А.* Памяти профессора Владимира Иосифовича Гурмана (1934–2016) // *Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Матем.* 2017. Т. 19. С. 1–5. <https://www.mathnet.ru/rus/iigum283>
 81. *Дыхта В.А.* Научное творчество В.И. Гурмана // Там же. С. 6–21.
 82. *Дыхта В.А.* Позиционный принцип минимума для квазиоптимальных процессов в задачах управления с терминальными ограничениями // Там же. С. 113–128.
 83. *Дыхта В.А., Самсонык О.Н.* Позиционный принцип минимума для импульсных процессов // *Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Матем.* 2018. Т. 25. С. 46–62.
<http://www.mathnet.ru/iigum345>
 84. *Dykhta V.A., Samsonyuk O.N.* Optimality conditions with feedback controls for optimal impulsive control problems // *IFAC-PapersOnLine.* 2018. V. 51. Iss. 32. P. 509–514. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.472>
 85. *Dykhta V., Sorokin S.* Feedback minimum principle for optimal control problems in discrete-time systems and its applications // *Proc. 18th Intern. Conf. MOTOR (Russia, 2019).* Cham: Springer, 2019. P. 449–460.
https://doi.org/10.1007/978-3-030-22629-9_31
 86. *Dykhta V.A.* Approximate feedback minimum principle for suboptimal processes in non-smooth optimal control problems // *Proc. Intern. Conf. SCDG 2019 (Russia).* Cham: Springer, 2020. P. 127–132. https://doi.org/10.1007/978-3-030-42831-0_12
 87. *Дыхта В.А.* О множестве необходимых условий оптимальности с позиционными управлениями, порожденном слабо убывающими решениями неравенства Гамильтона–Якоби // *Тр. ИММ УрО РАН.* 2022. Т. 28. № 3. С. 83–93.
<http://www.mathnet.ru/timm1929>
 88. *Дыхта В.А.* Позиционный принцип минимума: вариационное усиление понятий экстремальности в оптимальном управлении // *Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Матем.* 2022. Т. 41. С. 19–39. <http://www.mathnet.ru/iigum492>
 89. *Дыхта В.А.* Методы повышения эффективности позиционного принципа минимума в задачах оптимального управления // *Итоги науки и техн. Современ. мат. и ее прил. Темат. обзоры.* 2023. Т. 224. С. 54–64. <http://www.mathnet.ru/into1171>
 90. *Дыхта В.А.* Опорные мажоранты и позиционные принципы минимума для дискретных задач оптимального управления // *Итоги науки и техн. Современ. мат. и ее прил. Темат. обзоры.* 2024. Т. 234. С. 43–49. <http://www.mathnet.ru/into1291>
 91. *Дыхта В.А.* Позиционные усиления метода Кротова. Светлой памяти профессора Владимира Иосифовича Гурмана посвящается // *Матер. 40-й междунар. конф. «Ляпуновские чтения».* Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2024. С. 80–85.
<https://www.elibrary.ru/item.asp?id=78322027>

92. Дыхта В.А. Позиционный принцип минимума в задачах оптимального управления с терминальными ограничениями и его расширения // Итоги науки и техн. Современ. мат. и ее прил. Темат. обзоры. 2025. Т. 241. С. 18–29.
<https://www.mathnet.ru/rus/into1347>

Регистрация программы для ЭВМ

93. Аникин А.С., Горнов А.Ю., Дыхта В.А., Зароднюк Т.С., Тятюшкин А.И. PRIVGRAD: программа для числ. решения нелинейной задачи оптим. управл. с параллелеп. огранич. на управл. и термин. функц. (с применением метода приведен. градиента). <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=76403611>

Видеозаписи докладов

94. Дыхта В.А. Позиционный принцип минимума в задачах оптимального управления: Видеозапись доклада на семинаре «Геометрическая теория оптимального управления» (2020). <https://www.mathnet.ru/rus/present28868>
95. Дыхта В.А. О вариационных необходимых условиях оптимальности с позиционными управлениями спуска, усиливающих принцип максимума: Видеозапись доклада на Междунар. конф. «Дифференциальные уравнения и оптимальное управление» (2022). <https://www.mathnet.ru/rus/present35178>

О.В. Моржун, канд. физ.-мат. наук, ст. научн. сотр.
Математического института им. В.А. Стеклова РАН,
член редколлегии «АиТ»

СОДЕРЖАНИЕ

Нелинейные системы

Афанасьев В.Н. Псевдооптимальное решение вариационной задачи со свободным правым концом и заданным временем окончания переходного процесса.....	3
Гайдук А.Р. Синтез гибридных нелинейных систем управления на основе квазилинейного подхода	21
Хацкевич В.Л. Метод функций Грина в задаче о преобразовании нечеткого сигнала линейной динамической системой	42

Стохастические системы

Белов И.Р., Кустов А.Ю. Асимптотическое поведение анизотропийного регулятора в форме динамической обратной связи по выходу при малых значениях средней анизотропии внешних возмущений	66
Босов А.В. Применение фильтра линейных псевдонаблюдений в задачах слежения и позиционирования по наблюдениям со случайными запаздываниями	81
Лихтциндер Б.Я., Привалов А.Ю. Групповые квазипуассоновские модели в анализе очередей пачечного телекоммуникационного трафика.....	101

Заметки, хроника, информация

Моржин О.В. Дыхта Владимир Александрович (1949–2025).....	115
--	-----

C O N T E N T S

Nonlinear Systems

Afanas'ev V.N. Pseudo-Optimal Solution of a Variational Problem with a Free Right Endpoint and a Specified End Time of the Transient Process	3
Gaiduk A.R. Hybrid Nonlinear Control Systems Design Based on Quasilinear Approach.....	21
Khatskevich V.L. The Method of Green's Functions in the Problem of Transformation for a Fuzzy Signal by a Linear Dynamic System	42

Stochastic Systems

Belov I.R., Kustov A.Yu. The Asymptotic Behavior of Anisotropic DOF Controller at Infinitesimal Values of Upper Bound of Input's Mean Anisotropy...	66
Bosov A.V. Linear Pseudo-Observation Filter Application in Tracking and Positioning Tasks Based on Observations with Random Delays	81
Lichtzinder B.Ya., Privalov A.Yu. Batch Quasi-Poisson Models in the Queue Analysis of Packet Telecommunication Traffic	101

Notes, Meetings, Information

Morzhin O.V. Dykhita Vladimir Aleksandrovich (1949–2025)	115
---	-----