

Стохастические системы

© 2025 г. А.В. БОСОВ, д-р техн. наук (ABosov@frccsc.ru)
(Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН,
Москва)

ПРИМЕНЕНИЕ ФИЛЬТРА ЛИНЕЙНЫХ ПСЕВДОНАБЛЮДЕНИЙ В ЗАДАЧАХ СЛЕЖЕНИЯ И ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ СО СЛУЧАЙНЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ¹

Исследуется возможность адаптации и результативность применения фильтра линейных псевдонаблюдений в модели стохастической системы наблюдения со случайными временными задержками между поступающими наблюдениями и фактическим состоянием движущегося объекта. Метод псевдонаблюдений модифицируется для объединения результатов наблюдений, выполняемых несколькими измерительными комплексами, расположенными на разных расстояниях до объекта и имеющими отличающиеся временные задержки. Фильтр реализуется в модели, учитывающей измерения углов направления и дальности. Экспериментальные расчеты выполнены для модельного примера, описывающего движение автономного подводного аппарата, использующего для позиционирования два стационарных акустических маяка.

Ключевые слова: стохастическая система со случайными временными задержками наблюдений, линейные псевдонаблюдения, расширенный фильтр Калмана, позиционирование, слежение за целью, сонары.

DOI: 10.31857/S0005231025100058

1. Введение

Методы фильтрации состояний в стохастических динамических системах находят применение в разнообразных приложениях, в числе которых управление автономными подводными аппаратами (ПА) [1]. Наряду с беспилотными летательными аппаратами [2] и беспилотными автомобилями [3], эта область в настоящее время является актуальным источником исследовательских задач. Сама по себе водная среда имеет особенности, учитывать которые в задачах, связанных с движением на поверхности, не приходится. Это, например, такие факторы, как изменяющаяся температура, соленость и давление воды [4], довольно интересны течения [5]. Помимо влияния на движущийся объект, даже большие особенности создает вода для измерительных

¹ Работа выполнена при поддержке проекта № 075-15-2024-544 Министерства науки и высшего образования РФ. Работа выполнена с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования «Высокопроизводительные вычисления и большие данные» (ЦКП «Информатика» ФИЦ ИУ РАН, Москва).

средств. Если не касаться акселерометров и гироскопов, функционирующих на борту ПА, а рассматривать только внешних наблюдателей, то все доступные измерительные средства строятся на общих физических законах, используют акустический сигнал, т.е. относятся к акустическим сенсорам или сонарам [6]. Принципиальной особенностью таких устройств является значимое влияние на точность измерений случайной временной задержки поступления данных о состоянии наблюдаемого ПА. Этот эффект имеет место и в измерителях, использующих электромагнитное излучение. Так, локаатор, наблюдающий за объектом на расстоянии в 1 км, получит его координаты с задержкой порядка 10^{-7} с. Такими значениями можно пренебречь. Если используется сонар, то при скорости звука в воде 1500 м/с задержка в определении координат объекта на расстоянии 1 км составит около 0,7 с, на расстоянии 10 км – уже 7 с. Даже если объект движется не слишком быстро, пренебрегать такими значениями нельзя. Тем более этот эффект надо учитывать в моделях, связанных с движением скоростных ПА.

Модель стохастической динамической системы наблюдения, которая учитывает фактор временной задержки акустического сигнала, предложена в [7, 8], расширена на задачу идентификации неизвестных параметров модели движения в [9, 10]. Для оценки состояния и параметров записаны соотношения оптимальной байесовской фильтрации [11].

Как и в большинстве приложений, ни универсальные методы фильтрации, типа расширенного фильтра Калмана (РФК) [12], фильтров частиц [13] и различных вариантов сигма-точечных фильтров [14], ни условно-оптимальные и минимаксные фильтры Пугачева–Панкова [15, 16] типовой структуры, ни тем более оптимальные байесовские фильтры применять на практике не удастся: либо чрезмерно вычислительно затратной оказывается реализация, либо проявляется склонность субоптимальных алгоритмов к расходимости. Исключением мог бы стать метод линейных псевдонаблюдений, занимающий промежуточное место между универсальными методами, применимыми к любой модели, и специализированными, т.е. предназначенными исключительно для конкретной модели. Хотя идея этого метода достаточно универсальна, применяться он должен к вполне конкретным измерениям, линеаризуя их. В задачах подводной навигации применяются разнообразные сенсоры, несущие косвенную информацию о положении объекта. В их числе измерители углов направления и расстояний занимают значимое место [17].

Сама идея псевдоизмерений известна достаточно давно и представляется логичным дополнением или развитием наиболее известного метода субоптимальной фильтрации – РФК [12]. Как известно, РФК воспроизводит структуру линейного фильтра Калмана [18], оптимального в задаче фильтрации состояния в линейно-гауссовской системе наблюдения, а также обладающего целой серией выдающихся свойств в различных задачах робастного и адаптивного оценивания и управления. Формальное следование структуре линейного фильтра означает линеаризацию. В случае РФК – это линеаризация около прогноза состояния для получения эвристических оценок ковариаций

прогноза состояния и оценки фильтрации. Усовершенствованная за счет некоторых функциональных преобразований линеаризация наблюдений, которая делает комбинации наблюдений более похожими на линейные, по-видимому, впервые продемонстрирована для измерений углов направлений в [19]. Более современный практический взгляд – в [20]. Новое качество фильтру псевдо-наблюдений придала серия работ, начатая в [21], за счет обновления модели.

Цель данной статьи состоит в адаптации метода РФК на основе линейных псевдонаблюдений для модели с временными задержками. Для этого в разделе 2 предложена более универсальная модель псевдонаблюдений, развивающая классический метод [19, 20]. Далее, в разделе 3 эта модель использована для записи уравнений фильтрации на основе РФК для модели стохастической системы наблюдения с временными задержками. Раздел 4 статьи посвящен вычислительному эксперименту, который описывает слежение за движением к заданной цели ПА, наблюдаемого двумя стационарными акустическими маяками. В заключение подведены итоги, в т.ч. указаны возможные недостатки метода линейных псевдонаблюдений на основе РФК и пути их устранения.

2. Фильтрация по методу линейных псевдонаблюдений

2.1. Модель системы и определение псевдонаблюдений

Используются обозначения $E\{X\}$ – математическое ожидание случайного вектора X , $\text{cov}(X, Y)$ – ковариация X и Y , X' – операция транспонирования X .

Предполагается, что движение автономного ПА (A – AUV, autonomous underwater vehicle) описывается в системе координат $Oxyz$ такой, что плоскость Oxy совпадает с поверхностью моря, а ось Oz направлена вниз и соответствует глубине (рис. 1).

Вектор координат A в некоторый фиксированный, например начальный, момент времени обозначим $(X_A, Y_A, Z_A)'$, координаты в зависимости от времени – $(X(t), Y(t), Z(t))'$.

Сначала будем считать, что за движением наблюдает один измерительный комплекс (M – meter), имеющий координаты (X_M, Y_M, Z_M) . Это может быть пассивное акустическое устройство для оценки направления движения [22], позволяющее выполнять измерение на борту ПА, или активный гидроакустический буй [23], формирующий измерения для внешнего наблюдателя.

Тип измерительного устройства зависит от того, какая навигационная задача решается. Если ПА взаимодействует с измерителем (кооперативный сценарий), то на борту ПА решается задача позиционирования. Если преследуются противоположные интересы, то внешним комплексом решается задача слежения за целью.

Вне зависимости от задачи выполняется измерение угла φ направления на источник акустического сигнала (азимут или пеленг) в плоскости Oxy , угла возвышения λ – наклона акустического луча по отношению к прямой Oz ,

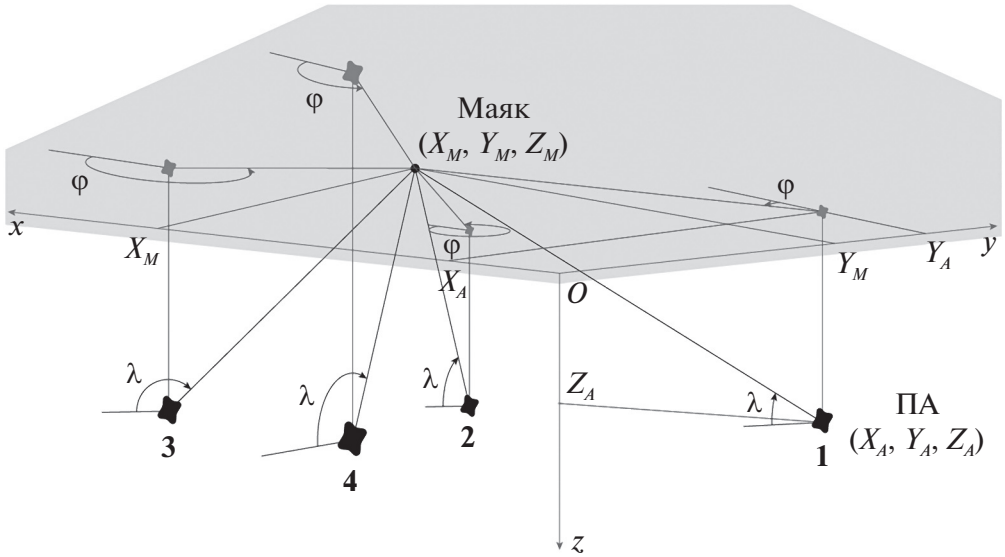


Рис. 1. Взаимное расположение ПА и наблюдателя.

и дальности r – расстояния между $\mathcal{A}$ и $\mathcal{M}$. Варианты взаимного расположения ПА и наблюдателя и правила отсчета углов показаны на рис. 1.

Предлагаемый вариант формирования из измерений φ , λ и r линейных псевдонаблюдений комбинирует идею классического фильтра [19] и модель с наблюдением тангенсов [20].

Первым рассмотрим измерение $y_\varphi = \varphi + v_\varphi$, пеленга φ , где ошибка v_φ имеет распределение с нулевым средним $\mathbb{E}\{v_\varphi\} = 0$ и средним отклонением σ_φ : $\text{cov}(v_\varphi, v_\varphi) = \sigma_\varphi^2$. Если считать, что погрешность сонаров при измерении углов составляет порядка 1° – 2° , то, представляя измерения в радианах, величину σ_φ можно положить равной $\sigma_\varphi = \frac{\pi}{180} \approx 0,0175$. Таким образом, $v_\varphi \ll 1$.

Для измерения y_φ запишем синус и косинус и аппроксимируем их соответствующими линейными частями разложения Тейлора для малых v_φ :

$$y_\varphi^{\sin} = \sin(y_\varphi) = \sin(\varphi + v_\varphi) \approx \sin(\varphi) + \cos(\varphi)v_\varphi,$$

$$y_\varphi^{\cos} = \cos(y_\varphi) = \cos(\varphi + v_\varphi) \approx \cos(\varphi) - \sin(\varphi)v_\varphi.$$

Далее, исходя из предположения, что для распределения v_φ заданы только моменты $\mathbb{E}\{v_\varphi\} = 0$ и $\mathbb{E}\{v_\varphi^2\} = \sigma_\varphi^2$, а величины φ и v_φ независимы, имеем $\mathbb{E}\{(\cos(\varphi)v_\varphi)^2\} \leq \sigma_\varphi^2$ и $\mathbb{E}\{(\sin(\varphi)v_\varphi)^2\} \leq \sigma_\varphi^2$. Кроме того, $\mathbb{E}\{\cos(\varphi)v_\varphi \sin(\varphi)v_\varphi\} = \frac{1}{2}\sigma_\varphi^2\mathbb{E}\{\sin(2\varphi)\} = 0$, если φ имеет симметричное относительно нуля распределение. Учитывая физический смысл φ , последнее предположение является вполне реалистичным. Остается сослаться на известное минимаксное свойство нормального распределения, максимизирующего дисперсию на классе распределений с известным математическим ожиданием и ограниченной дис-

персией [24], и сформировать аппроксимацию вида:

$$y_{\varphi}^{\sin} \approx \sin(\varphi) + v_1, \quad y_{\varphi}^{\cos} \approx \cos(\varphi) + v_2,$$

где v_1 и v_2 – независимые гауссовские случайные величины, $E\{v_1\} = E\{v_2\} = 0$ и $E\{v_1^2\} = E\{v_2^2\} = \sigma_{\varphi}^2$. Ошибка измерения $(v_1, v_2)'$ при этом интерпретируется как наихудшая.

Можно предположить, что такая интерпретация окажется излишне грубой, что часто свойственно минимаксным оценкам, поэтому имеет смысл ориентироваться на другой вариант аппроксимации $E\{(\cos(\varphi)v_{\varphi})^2\}$ и $E\{(\sin(\varphi)v_{\varphi})^2\}$. Вычислить эти моменты, не зная распределение φ , нельзя. Но можно предполагать, что φ принимает любые значения с одинаковой вероятностью, т.е. имеет «близкое» к равномерному распределение. Это отражает предположение, что цель может появиться в любом месте. Тогда можно считать

$$E\{(\cos(\varphi)v_{\varphi})^2\} = E\{(\sin(\varphi)v_{\varphi})^2\} \approx \frac{1}{4}\sigma_{\varphi}^2.$$

Проверить, какой из вариантов $E\{v_{1,2}^2\} = \sigma_{\varphi}^2$ или $E\{v_{1,2}^2\} = \frac{1}{4}\sigma_{\varphi}^2$ лучше, возможно экспериментально.

Продолжая выкладки далее, получаем

$$\sin(\varphi) \approx y_{\varphi}^{\sin} - v_1, \quad \cos(\varphi) \approx y_{\varphi}^{\cos} - v_2,$$

$$\tan(\varphi) = \frac{Y_{\mathcal{A}} - Y_{\mathcal{M}}}{X_{\mathcal{A}} - X_{\mathcal{M}}} \approx \frac{y_{\varphi}^{\sin} - v_1}{y_{\varphi}^{\cos} - v_2},$$

$$(Y_{\mathcal{A}} - Y_{\mathcal{M}})y_{\varphi}^{\cos} - (X_{\mathcal{A}} - X_{\mathcal{M}})y_{\varphi}^{\sin} \approx (Y_{\mathcal{A}} - Y_{\mathcal{M}})v_2 - (X_{\mathcal{A}} - X_{\mathcal{M}})v_1.$$

Если в последнем выражении вместо точных координат $(X_{\mathcal{A}}, Y_{\mathcal{A}})$ подставлять их оценки, то получится невязка псевдонаблюдений, фигурирующая в уравнениях фильтрации. Сами псевдонаблюдения можно записать в виде

$$\begin{aligned} & -Y_{\mathcal{M}}y_{\varphi}^{\cos} + X_{\mathcal{M}}y_{\varphi}^{\sin} \approx \\ & \approx (y_{\varphi}^{\sin}, -y_{\varphi}^{\cos}) \begin{pmatrix} X_{\mathcal{A}} \\ Y_{\mathcal{A}} \end{pmatrix} + (Y_{\mathcal{A}} - Y_{\mathcal{M}})v_2 - (X_{\mathcal{A}} - X_{\mathcal{M}})v_1, \end{aligned}$$

что объясняет смысл выполненных преобразований: псевдонаблюдения $-Y_{\mathcal{M}}y_{\varphi}^{\cos} + X_{\mathcal{M}}y_{\varphi}^{\sin}$ аппроксимируют измерения линейной комбинации оцениваемых координат $(X_{\mathcal{A}}, Y_{\mathcal{A}})$ на фоне аддитивного шума с известной ковариацией.

Итак, для измерения $y_{\varphi} = \varphi + v_{\varphi}$ пеленга φ формируется псевдонаблюдение Y_{φ} :

$$(1) \quad Y_{\varphi} = -Y_{\mathcal{M}}y_{\varphi}^{\cos} + X_{\mathcal{M}}y_{\varphi}^{\sin}, \quad y_{\varphi}^{\sin} = \sin(y_{\varphi}), \quad y_{\varphi}^{\cos} = \cos(y_{\varphi}),$$

и алгоритм фильтрации использует модель наблюдения вида:

$$(2) \quad Y_\varphi = (y_\varphi^{\sin}, -y_\varphi^{\cos}) \begin{pmatrix} X_{\mathcal{A}} \\ Y_{\mathcal{A}} \end{pmatrix} + (X_{\mathcal{M}} - X_{\mathcal{A}}, Y_{\mathcal{A}} - Y_{\mathcal{M}}) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Следующее измерение $y_\lambda = \lambda + v_\lambda$ для угла возвышения λ . Аналогично пеленгу, аппроксимируем синус и косинус, исходя из таких же предположений об ошибке измерения v_λ

$$\begin{aligned} y_\lambda^{\sin} &= \sin(y_\lambda) \approx \sin(\lambda) + \cos(\lambda)v_\lambda \approx \sin(\lambda) + v_3, \\ y_\lambda^{\cos} &= \cos(y_\lambda) \approx \cos(\lambda) - \sin(\lambda)v_\lambda \approx \cos(\lambda) + v_4 \end{aligned}$$

с независимыми гауссовскими v_3 и v_4 , $E\{v_3\} = E\{v_4\} = 0$ и $E\{v_3^2\} = E\{v_4^2\} = \sigma_\lambda^2$ (в альтернативной версии $E\{v_{3,4}^2\} = \frac{1}{4}\sigma_\lambda^2$). Отсюда

$$\begin{aligned} \sin(\lambda) &\approx y_\lambda^{\sin} - v_3, \quad \cos(\lambda) \approx y_\lambda^{\cos} - v_4, \\ \tan(\lambda) &= \frac{Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}}}{|X_{\mathcal{A}} - X_{\mathcal{M}}|} \cos(\varphi) \approx \frac{y_\lambda^{\sin} - v_3}{y_\lambda^{\cos} - v_4}. \end{aligned}$$

Для упрощения манипуляций с измерением λ будем предполагать, что взаимное расположение $\mathcal{A}$ и $\mathcal{M}$ учтено при выборе системы координат так, чтобы выполнялось $X_{\mathcal{A}} > X_{\mathcal{M}}$, а далее при движении $X(t) > X_{\mathcal{M}}$. Используя имеющуюся аппроксимацию пеленга, заменим $\cos(\varphi)$ на $y_\varphi^{\cos} - v_2$ и получим

$$\begin{aligned} &y_\varphi^{\cos} y_\lambda^{\cos} (Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}}) - y_\lambda^{\sin} (X_{\mathcal{A}} - X_{\mathcal{M}}) \approx \\ &\approx (Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}}) y_\lambda^{\cos} v_2 - (X_{\mathcal{A}} - X_{\mathcal{M}}) v_3 + (Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}}) y_\varphi^{\cos} v_4 - (Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}}) v_2 v_4. \end{aligned}$$

Поскольку все v_i предполагались независимыми и центрированными, то дисперсия правой части полученного выражения (ошибки псевдонаблюдений) имеет вид

$$\begin{aligned} &E\left\{((Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}}) y_\lambda^{\cos} v_2 - (X_{\mathcal{A}} - X_{\mathcal{M}}) v_3 + \right. \\ &\quad \left. + (Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}}) y_\varphi^{\cos} v_4 - (Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}}) v_2 v_4)^2\right\} = \\ &= E\{(Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}})^2 (y_\lambda^{\cos})^2\} \sigma_\varphi^2 + E\{(X_{\mathcal{A}} - X_{\mathcal{M}})^2\} \sigma_\lambda^2 + \\ &+ E\{(Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}})^2 (y_\varphi^{\cos})^2\} \sigma_\lambda^2 + E\{(Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}})^2\} \sigma_\varphi^2 \sigma_\lambda^2. \end{aligned}$$

Апеллируя к тем же положениям о малых значениях v_i , σ_φ и σ_λ , пренебрежем последним слагаемым и представим невязку псевдонаблюдений (когда вместо точных координат $(X_{\mathcal{A}}, Y_{\mathcal{A}}, Z_{\mathcal{A}})$ будут подставлены их оценки) как

$$\begin{aligned} &y_\varphi^{\cos} y_\lambda^{\cos} (Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}}) - y_\lambda^{\sin} (X_{\mathcal{A}} - X_{\mathcal{M}}) \approx \\ &\approx (Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}}) y_\lambda^{\cos} v_2 - (X_{\mathcal{A}} - X_{\mathcal{M}}) v_3 + (Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}}) y_\varphi^{\cos} v_4, \end{aligned}$$

а сами псевдонаблюдения запишем в виде

$$\begin{aligned} & -y_\varphi^{\cos} y_\lambda^{\cos} Z_{\mathcal{M}} + y_\lambda^{\sin} X_{\mathcal{M}} \approx \\ & \approx -y_\varphi^{\cos} y_\lambda^{\cos} Z_{\mathcal{A}} + y_\lambda^{\sin} X_{\mathcal{A}} + (Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}}) y_\lambda^{\cos} v_2 - (X_{\mathcal{A}} - X_{\mathcal{M}}) v_3 + (Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}}) y_\varphi^{\cos} v_4. \end{aligned}$$

Итак, для измерения $y_\lambda = \lambda + v_\lambda$ угла возвышения λ формируется псевдонаблюдение Y_λ

$$(3) \quad \begin{aligned} Y_\lambda &= -y_\varphi^{\cos} y_\lambda^{\cos} Z_{\mathcal{M}} + y_\lambda^{\sin} X_{\mathcal{M}}, \\ y_\lambda^{\sin} &= \sin(y_\lambda), \quad y_\lambda^{\cos} = \cos(y_\lambda), \quad y_\varphi^{\cos} = \cos(y_\varphi), \end{aligned}$$

и алгоритм фильтрации использует модель наблюдения вида

$$(4) \quad \begin{aligned} Y_\lambda &= (y_\lambda^{\sin}, -y_\varphi^{\cos} y_\lambda^{\cos}) \begin{pmatrix} X_{\mathcal{A}} \\ Z_{\mathcal{A}} \end{pmatrix} + \\ &+ ((Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}}) y_\lambda^{\cos}, X_{\mathcal{M}} - X_{\mathcal{A}}, (Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}}) y_\varphi^{\cos}) \begin{pmatrix} v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Последним рассмотрим измерение $y_r = r + v_5$ дальности r с независимой от предыдущих v_i ошибкой v_5 : $\mathbf{E}\{v_5\} = 0$, $\mathbf{E}\{v_5^2\} = \sigma_r^2$. Используя измерение угла возвышения λ и аппроксимацию $\sin(\lambda) \approx y_\lambda^{\sin} - v_3$, запишем

$$r = \frac{Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}}}{\sin(\lambda)} \Rightarrow y_r - v_5 \approx \frac{Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}}}{y_\lambda^{\sin} - v_3}.$$

Поступая аналогично преобразованиям углов, получаем

$$Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}} - y_r y_\lambda^{\sin} \approx -y_r v_3 - y_\lambda^{\sin} v_5 + v_3 v_5.$$

Записанная справа центрированная ошибка имеет дисперсию

$$\mathbf{E}\{(-y_r v_3 - y_\lambda^{\sin} v_5 + v_3 v_5)^2\} = \mathbf{E}\{y_r^2\} \sigma_\lambda^2 + \mathbf{E}\{(y_\lambda^{\sin})^2\} \sigma_r^2 + \sigma_\lambda^2 \sigma_r^2.$$

Здесь третьим слагаемым в сравнении с первыми двумя можно пренебречь и представить невязку псевдонаблюдений (когда вместо точной координаты $Z_{\mathcal{A}}$ будет подставлена ее оценка) как

$$Z_{\mathcal{A}} - Z_{\mathcal{M}} - y_r y_\lambda^{\sin} \approx -y_r v_3 - y_\lambda^{\sin} v_5.$$

Сами псевдонаблюдения запишем в виде

$$Z_{\mathcal{M}} + y_r y_\lambda^{\sin} \approx Z_{\mathcal{A}} + y_r v_3 + y_\lambda^{\sin} v_5.$$

Итак, для измерения $y_r = d + v_5$ дальности формируется псевдонаблюдение Y_r :

$$(5) \quad Y_r = Z_{\mathcal{M}} + y_r y_\lambda^{\sin}, \quad y_\lambda^{\sin} = \sin(y_\lambda),$$

и алгоритм фильтрации использует модель наблюдения вида

$$(6) \quad Y_r = Z_A + (y_r, y_\lambda^{\sin}) \begin{pmatrix} v_3 \\ v_5 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно объединить все три модели (2), (4), (6) в один вектор наблюдений $Y = (Y_\varphi, Y_\lambda, Y_r)'$ вида

$$(7) \quad Y = \begin{pmatrix} y_\varphi^{\sin} & -y_\varphi^{\cos} & 0 \\ y_\lambda^{\sin} & 0 & -y_\varphi^{\cos} y_\lambda^{\cos} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X + \\ + \begin{pmatrix} X_{\mathcal{M}} - X_A & Y_A - Y_{\mathcal{M}} & 0 \\ 0 & (Z_A - Z_{\mathcal{M}}) y_\lambda^{\cos} & X_{\mathcal{M}} - X_A \\ 0 & 0 & y_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ (Z_A - Z_{\mathcal{M}}) y_\varphi^{\cos} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_\lambda^{\sin} \end{pmatrix} V,$$

где $X = (X_A, Y_A, Z_A)'$, $V = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)'$.

2.2. Применение расширенного фильтра Калмана

Будем предполагать, что из измерений $y_\varphi, y_\lambda, y_r$ в момент времени t формируется вектор наблюдений $y_t \in \mathbb{R}^{q_y}$ за движущимся объектом (для одного наблюдателя $q_y = 3$), имеющим вектор состояния $X_t \in \mathbb{R}^{p_x}$. Не ограничивая общности, можно считать, что состояние X_t определяется координатами ПА в системе $Oxyz$, которые обозначим $X_t = (X(t), Y(t), Z(t))'$, $p_x = 3$. Ниже в модель движения будут добавлены переменные, но целью останется оценка положения.

Оценивание X_t начинается в момент времени $t = 0$ и выполняется в дискретные моменты времени $1, 2, \dots, t, \dots$, отвечающие разбиению интервала наблюдения с шагом δ : $\delta, 2\delta, \dots, t\delta, \dots$. Начальное положение ПА определяется вектором $X_0 = \eta = (\eta_X, \eta_Y, \eta_Z)' = (X(0), Y(0), Z(0))'$.

X_t и y_t описываются дискретной стохастической динамической системой общего вида:

$$(8) \quad X_t = \Phi_t^{(1)}(X_{t-1}) + \Phi_t^{(2)}(X_{t-1})W_t, \quad t = 1, 2, \dots, \quad X_0 = \eta, \\ y_t = \psi_t^{(1)}(X_t) + \psi_t^{(2)}(X_t)v_t.$$

Предполагается, что случайные последовательности X_t и y_t имеют конечные ковариации, возмущения $W_t \in \mathbb{R}^{p_w}$ и ошибки измерений $v_t \in \mathbb{R}^{q_v}$ – независимые дискретные белые шумы второго порядка; вектор начальных условий $\eta \in \mathbb{R}^{p_x}$ не зависит от W_t и v_t и имеет конечную ковариацию. Соответствующие центральные моменты обозначаются, например для W_t , как $m_W(t), D_W(t)$.

Дополним систему (8) уравнением для псевдонаблюдений $Y_t \in \mathbb{R}^{q_y}$ (поскольку во всех имеющихся примерах для одного измерения формируется

ровно одно псевдонаблюдение, то $q_Y = q_y = 3$, но в общем случае размерности могут отличаться):

$$(9) \quad Y_t = \Psi_t^{(1)}(X_t, y_t) + \Psi_t^{(2)}(X_t, y_t)V_t.$$

Здесь матричные функции $\Psi_t^{(1)}(X, y)$ и $\Psi_t^{(2)}(X, y)$ определены полученным выше выражением (7), линейность которого дает $\Psi_t^{(1)}(X, y) = \Psi_t^{(1)}(y)X$.

Фильтрация по методу линейных псевдонаблюдений [19] состоит в применении РФК [12] к системе (8), в которой наблюдения y_t заменены на псевдонаблюдения (9). В используемых обозначениях такой фильтр имеет вид:

$$(10) \quad \begin{aligned} \tilde{X}_t &= \Phi_t^{(1)}(\hat{X}_{t-1}) + \Phi_t^{(2)}(\hat{X}_{t-1})m_W(t), \\ \tilde{K}_t &= \tilde{\Phi}_t^{(1)}\hat{K}_{t-1}\left(\tilde{\Phi}_t^{(1)}\right)' + \tilde{\Phi}_t^{(2)}D_W(t)\left(\tilde{\Phi}_t^{(2)}\right)', \\ \tilde{\Phi}_t^{(1)} &= \left.\frac{\partial\Phi_t^{(1)}(X)}{\partial X}\right|_{X=\tilde{X}_t}, \quad \tilde{\Phi}_t^{(2)} = \Phi_t^{(2)}(\tilde{X}_t), \\ \hat{X}_t &= \tilde{X}_t + K_t\left(Y_t - \Psi_t^{(1)}(\tilde{X}_t, y_t) - \Psi_t^{(2)}(\tilde{X}_t, y_t)m_V(t)\right), \\ K_t &= \tilde{K}_t\left(\tilde{\Psi}_t^{(1)}\right)'\left(\tilde{\Psi}_t^{(1)}\tilde{K}_t\left(\tilde{\Psi}_t^{(1)}\right)' + \tilde{\Psi}_t^{(2)}D_V(t)\left(\tilde{\Psi}_t^{(2)}\right)'\right)^{-1}, \\ \tilde{\Psi}_t^{(1)} &= \left.\frac{\partial\Psi_t^{(1)}(X, y_t)}{\partial X}\right|_{X=\tilde{X}_t} = \Psi_t^{(1)}(y_t), \quad \tilde{\Psi}_t^{(2)} = \Psi_t^{(2)}(\tilde{X}_t, y_t), \\ \hat{K}_t &= \tilde{K}_t - K_t\tilde{\Psi}_t^{(1)}\tilde{K}_t. \end{aligned}$$

Отличие от классического РФК здесь состоит в обязательной линейности функции $\Psi_t^{(1)}$ по оцениваемому состоянию, так что $\frac{\partial\Psi_t^{(1)}(X, y_t)}{\partial X} = \Psi_t^{(1)}(y_t)$, что определяется самим уравнением псевдонаблюдений (7). Все остальное – как в обычном РФК: прогноз $\tilde{X}_t$ в силу системы, эвристическая ковариация ошибки прогноза $\tilde{K}_t$ – результат линеаризации уравнения состояния около прогноза, коррекция – невязка наблюдений и калмановский коэффициент усиления K_t , эвристическая ковариация ошибки оценки $\hat{K}_t$ – результат линеаризации уравнения наблюдения. Также особенность РФК по методу линейных псевдонаблюдений – это зависимость $\tilde{\Psi}_t^{(1)}$ и $\tilde{\Psi}_t^{(2)}$ от «настоящих» наблюдений y_t . Действительно, согласно (7) величины y_t используются не только для вычисления псевдонаблюдений (1), (3), (5), но и для матриц приближенной модели $\Psi_t^{(1)}$ и $\Psi_t^{(2)}$.

2.3. Псевдонаблюдения с временной задержкой

Зависимость в (8) наблюдений y_t и в (9) псевдонаблюдений Y_t от состояния X_t меняется принципиально, если временем обмена информацией между

наблюдаемым объектом и наблюдателем нельзя пренебречь. Такова ситуация с сонарами, о чем упомянуто выше. Соответственно, измерения оказываются выполненными для положения A , имевшего место в некоторый момент времени $s < t$. Определяется этот момент следующим образом.

Пусть известна $v_s = \text{const}$ – скорость звука в воде. Вне зависимости от типа сонара и места выполнения измерений (на борту ПА или внешним комплексом), есть разница между временем, когда измерение получено наблюдателем $\mathcal{M}$, и временем, когда $\mathcal{A}$ имел «измеренное» положение. Эта разница – время, затрачиваемое акустическим сигналом на прохождение расстояния между $\mathcal{A}$ и $\mathcal{M}$, т.е. $\tau = t - s = r/(\delta v_s)$. Это случайное значение, следуя идее псевдонаблюдений, можно аппроксимировать величиной $\tilde{\tau} = y_r/(\delta v_s)$. Учитывая, что типовое значение $v_s = 5400$ км/ч (1500 м/с), вносимой погрешностью можно пренебречь и модель псевдонаблюдений (7) дополнить соотношением

$$(11) \quad X = (X(t - \tilde{\tau}), Y(t - \tilde{\tau}), Z(t - \tilde{\tau}))', \quad \tilde{\tau} = y_r/\delta v_s.$$

Общий вид системы наблюдения–псевдонаблюдения

$$(12) \quad \begin{aligned} X_t &= \Phi_t^{(1)}(X_{t-1}) + \Phi_t^{(2)}(X_{t-1})W_t, \quad t = -T, -T+1, \dots, 1, 2, \dots, \quad X_{-T-1} = \eta, \\ y_t &= \psi_t^{(1)}(X_{t-\tau_t}) + \psi_t^{(2)}(X_{t-\tau_t})v_t, \quad \tau_t = \tau_t(X_t), \\ Y_t &= \Psi_t^{(1)}(y_t)X_{t-\tilde{\tau}_t} + \Psi_t^{(2)}(X_{t-\tilde{\tau}_t}, y_t)V_t, \quad \tilde{\tau}_t = \tilde{\tau}_t(y_t). \end{aligned}$$

В этой модели предполагается, что известна величина $T\delta > 0$ – максимально возможная временная задержка наблюдений (фактически, максимальная дальность обнаружения движущегося объекта) и движение $\mathcal{A}$ начинается в момент времени $-T\delta$, т.е. $t = -T$, чтобы в момент $t = 0$ наблюдатель $\mathcal{M}$ гарантированно мог реализовать измерение. Начальное положение $\mathcal{A}$ определяется вектором $\eta = (\eta_X, \eta_Y, \eta_Z)' = (X(-T-1), Y(-T-1), Z(-T-1))'$. Временная задержка τ_t является функцией состояния X_t – временем, которое требуется звуковой волне на преодоление расстояния между $\mathcal{A}$ и $\mathcal{M}$ (именно из этого соображения в псевдонаблюдения (11) включена оценка $\tilde{\tau}$).

Функции $\tau_t(X)$ и $\tilde{\tau}_t(y)$ в (12) должны принимать целые значения из множества $\{0, 1, \dots, T\}$. Для «настоящих» состояний и наблюдений они имеют вид

$$(13) \quad \begin{aligned} \tau_t &= \min \left\{ T, \left\lceil \frac{\sqrt{(X(t) - X_{\mathcal{M}})^2 + (Y(t) - Y_{\mathcal{M}})^2 + (Z(t) - Z_{\mathcal{M}})^2}}{\delta v_s} \right\rceil \right\}, \\ \tilde{\tau}_t &= \min \left\{ T, \left\lceil \frac{y_r}{\delta v_s} \right\rceil \right\}, \end{aligned}$$

где через $\lceil \cdot \rceil$ обозначена целая часть числа.

2.4. Фильтрация в модели с несколькими наблюдателями

Пусть теперь вектор наблюдений y_t в (12) комбинирует измерения углов и дальности, поступающие от q наблюдателей, т.е. $y_t = (y_{\varphi_t}^{(1)}, y_{\lambda_t}^{(1)}, y_{r_t}^{(1)}, \dots, y_{\varphi_t}^{(q)}, y_{\lambda_t}^{(q)}, y_{r_t}^{(q)})'$. Поскольку $y_t \in \mathbb{R}^{qy}$, получается $qy = 3q$. Для каждого i -го наблюдателя определим временную задержку $\tau_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, q$, со значениями во множестве $\{0, 1, \dots, T\}$. Величины $\tau_t^{(i)}$ объединены в вектор $\tau_t = (\tau_t^{(1)}, \dots, \tau_t^{(q)})' \in \mathbb{R}^q$, который является функцией X_t так же, как τ_t в (12). Таким образом, измерения $y_{\varphi_t}^{(i)}, y_{\lambda_t}^{(i)}, y_{r_t}^{(i)}$ в каждой группе могут быть представлены как функции положения $X_{t-\tau_t^{(i)}}$. В итоге система наблюдения принимает вид

$$\begin{aligned}
 X_t &= \Phi_t^{(1)}(X_{t-1}) + \Phi_t^{(2)}(X_{t-1})W_t, \\
 t &= -T, -T+1, \dots, 0, 1, \dots, \quad X_{-T-1} = \eta, \\
 (14) \quad y_t^{(i)} &= \psi_t^{(i,1)}(X_{t-\tau_t^{(i)}}) + \psi_t^{(i,2)}(X_{t-\tau_t^{(i)}})v_t^{(i)}, \quad i = 1, \dots, q, \\
 Y_t^{(i)} &= \Psi_t^{(i,1)}(y_t^{(i)})X_{t-\tilde{\tau}_t^{(i)}} + \Psi_t^{(i,2)}(X_{t-\tilde{\tau}_t^{(i)}}, y_t^{(i)})V_t^{(i)}.
 \end{aligned}$$

Чтобы (14) корректно отражало сделанные предположения и превращалось в (8), (9) при исчезновении временных задержек, т.е. при $T = 0$, нужно обозначать:

$y_t = ((y_t^{(1)})', \dots, (y_t^{(q)})')'$ – вектор наблюдений, составленный из q групп измерений $y_t^{(i)} = (y_{\varphi_t}^{(i)}, y_{\lambda_t}^{(i)}, y_{r_t}^{(i)})'$,

$v_t^{(i)}$ – вектор ошибок измерений в этой группе;

$Y_t = ((Y_t^{(1)})', \dots, (Y_t^{(q)})')'$ – вектор q групп псевдонаблюдений,

$Y_t^{(i)} = (Y_t^{(i)}, Y_t^{(i)}, Y_t^{(i)})'$, отвечает соответствующей группе $y_t^{(i)}$, $V_t^{(i)}$ – вектор ошибок измерений в этой группе;

вектор-функции $\psi_t^{(i,1)}$ и матрицы $\psi_t^{(i,2)}$, $\Psi_t^{(i,1)}$, $\Psi_t^{(i,2)}$, $i = 1, \dots, q$, определяются для каждой группы наблюдений–псевдонаблюдений, их наличие означает независимость каждого наблюдателя, формирующего измерения группы, т.е.

$$\begin{aligned}
 \psi_t^{(1)} &= ((\psi_t^{(1,1)})', \dots, (\psi_t^{(q,1)})')', \quad \psi_t^{(2)} = \text{diag}(\psi_t^{(1,2)}, \dots, \psi_t^{(q,2)}), \\
 \Psi_t^{(1)} &= \begin{pmatrix} \Psi_t^{(1,1)} \\ \vdots \\ \Psi_t^{(q,1)} \end{pmatrix}, \quad \Psi_t^{(2)} = \text{diag}(\Psi_t^{(1,2)}, \dots, \Psi_t^{(q,2)}).
 \end{aligned}$$

Базовые уравнения РФК (10) теперь можно уточнить для модели с временными задержками (14), записав:

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_t &= \Phi_t^{(1)}(\hat{X}_{t-1}) + \Phi_t^{(2)}(\hat{X}_{t-1})m_W(t), \\
\tilde{K}_t &= \tilde{\Phi}_t^{(1)}\hat{K}_{t-1}(\tilde{\Phi}_t^{(1)})' + \tilde{\Phi}_t^{(2)}D_W(t)(\tilde{\Phi}_t^{(2)})', \\
\tilde{\Phi}_t^{(1)} &= \left. \frac{\partial \Phi_t^{(1)}(X)}{\partial X} \right|_{X=\tilde{X}_t}, \quad \tilde{\Phi}_t^{(2)} = \Phi_t^{(2)}(\tilde{X}_t), \\
\hat{X}_t &= \tilde{X}_t + K_t \Delta \tilde{Y}_t, \\
\Delta \tilde{Y}_t &= \left(Y_t^{(1)} - \Psi_t^{(1,1)}(y_t^{(1)})\tilde{X}_{t-\tilde{\tau}_t^{(1)}}, \dots, Y_t^{(q)} - \Psi_t^{(q,1)}(y_t^{(q)})\tilde{X}_{t-\tilde{\tau}_t^{(q)}} \right), \\
K_t &= \tilde{K}_t(\Psi_t^{(1)})' \left(\Psi_t^{(1)}\tilde{K}_t(\Psi_t^{(1)})' + \tilde{\Psi}_t^{(2)}D_V(t)(\tilde{\Psi}_t^{(2)})' \right)^{-1}, \\
\Psi_t^{(1)} &= \Psi_t^{(1)}(y_t), \tilde{\Psi}_t^{(2)} = \text{diag} \left\{ \Psi_t^{(1,2)}(\tilde{X}_{t-\tilde{\tau}_t^{(1)}}, y_t), \dots, \Psi_t^{(q,2)}(\tilde{X}_{t-\tilde{\tau}_t^{(q)}}, y_t) \right\}, \\
\hat{K}_t &= \tilde{K}_t - K_t \Psi_t^{(1)} \tilde{K}_t.
\end{aligned}
\tag{15}$$

По сути, в запись фильтра (15) в сравнении с фильтром (10) просто имплементированы оценки $\tilde{\tau}_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, q$, временных задержек. Невязка наблюдений $\Delta \tilde{Y}_t$ и матрица отклонений ошибок измерений $\tilde{\Psi}_t^{(2)}$ составлены из значений прогнозов положения $\tilde{X}_{t-\tilde{\tau}_t^{(i)}}$, отвечающих тем моментам времени, для которых выполнены текущие наблюдения y_t и составлены псевдонаблюдения Y_t . Для этого использованы прогнозы положения, сдвинутые относительно текущего времени на величину оценки $\tilde{\tau}_t^{(i)}$ временной задержки $\tau_t^{(i)}$ для соответствующего i -го наблюдателя.

3. Слежение за приближением ПА по измерениям акустических маяков

3.1. Модель системы наблюдения

Для применения алгоритма фильтрации (15) воспользуемся той же моделью, что в [9, 10] изучалась для идентификации параметров, немного изменив ее, чтобы придать смысл задачи слежения за приближающимся неизвестным объектом. Следуя рис. 1, будем считать, что начало O системы координат $Oxyz$ определяет находящийся на поверхности моря в неподвижном положении объект ($\mathcal{O}$, object), к которому приближается ПА. $\mathcal{A}$ обнаруживается в начальном положении $\eta = (\eta_X, \eta_Y, \eta_Z)'$, элементы которого независимы и имеют равномерное распределение: $\eta_X \sim R[10, 20]$, $\eta_Y \sim R[10, 20]$, $\eta_Z \sim R[0, 5; 1, 5]$. Таким образом, начальное положение $\mathcal{A}$ характеризуется математическим ожиданием $E\{\eta\} = (15, 15, 1)'$ и ковариацией $\text{cov}(\eta, \eta) \approx \text{diag}\{2, 9^2; 2, 9^2; 0, 29^2\}$. Все расстояния даны в километрах (км). Предполагается, что обнаруженный ПА движется в направлении $\mathcal{O}$, совершая хаотические маневры, но сохраняя среднюю постоянную скорость ≈ 21 км/ч.

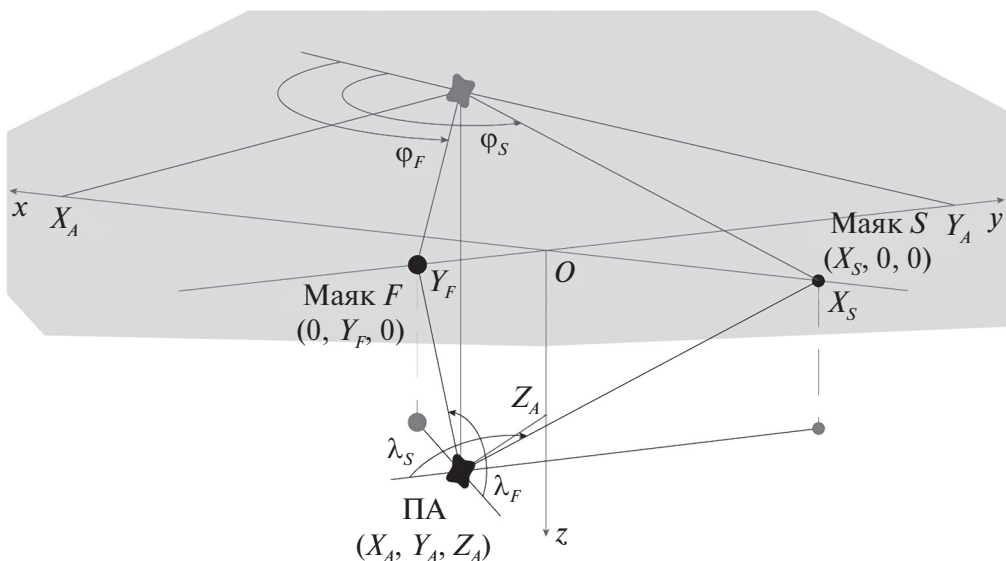


Рис. 2. Схема расположения наблюдателей в эксперименте.

Для наблюдения за ПА имеется два комплекса ($\mathcal{F}$, first) и ($\mathcal{S}$, second). Система координат $Oxyz$ ориентирована так, что ось z направлена вниз вертикально к поверхности воды (как на рис. 1) и соответствует глубине ПА, ось y – по направлению от объекта на первого наблюдателя ($\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{F}$), ось x – по направлению $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{S}$. Моделируемые наблюдатели считаются расположенными неподвижно на поверхности воды, т.е. на нулевой глубине. Таким образом, координаты наблюдателей: $\mathcal{F}(X_{\mathcal{F}}, Y_{\mathcal{F}}, Z_{\mathcal{F}}) = (0, Y_{\mathcal{F}}, 0)$ и $\mathcal{S}(X_{\mathcal{S}}, Y_{\mathcal{S}}, Z_{\mathcal{S}}) = (X_{\mathcal{S}}, 0, 0)$, $X_{\mathcal{S}} = -2$ км и $Y_{\mathcal{F}} = -1$ км. Кроме того, будем предполагать, что на протяжении всего времени наблюдения координаты $\mathcal{A}(X(t), Y(t), Z(t))$ таковы, что ПА остается на глубине и не всплывает на поверхность, т.е. $Z(t) > 0$, и для обоих наблюдателей выполнены условия $X(t) > X_{\mathcal{M}}$, использованные для псевдонаблюдения (3), т.е. $X(t) > 0$. Пересечение траектории движения оси Ox на псевдонаблюдения не влияет, а возможное пересечение оси Oy нетрудно учесть, используя для псевдонаблюдений (3) котангенс вместо тангенса. Схематически эксперимент проиллюстрирован на рис. 2.

Вектор $(X(t), Y(t), Z(t))'$ моделирует положение $\mathcal{A}$ в дискретные моменты времени $t = 0, \dots, 1000$, которые отвечают разбиению интервала времени наблюдения с шагом дискретизации $\delta = 0,0001$ ч. Навигационная задача с учетом максимальной временной задержки T , таким образом, решается в течение $0,1$ ч = 6 мин. В те же моменты времени выполняются измерения, т.е. в секунду выполняется порядка трех измерений каждым комплексом. При абсолютной постоянной средней скорости 21 км/ч за это время ПА в среднем перемещается на расстояние порядка 2,1 км, приближаясь к $\mathcal{O}$. Максимальное расстояние от $\mathcal{A}$ до $\mathcal{O}$ и до $\mathcal{F}$ или $\mathcal{S}$ составляет соответственно ≈ 28 и ≈ 30 км.

Минимальные расстояния – ≈ 14 и ≈ 16 км. Соответственно, величина максимальной временной задержки, возможной в момент обнаружения ПА, $T = 56$, т.е. составляет 0,0056 ч или ≈ 20 с.

Предполагается, что движения ПА происходит с постоянной средней скоростью $(s_x, s_y, s_z)'$, отклонения от которой описываются вектором аддитивных возмущений $(w_x(t), w_y(t), w_z(t))'$:

$$(16) \quad \begin{aligned} X(t) &= X(t-1) + \delta S_x(t), & S_x(t) &= s_x + \sigma_{s_x} w_x(t), \\ Y(t) &= Y(t-1) + \delta S_y(t), & S_y(t) &= s_y + \sigma_{s_y} w_y(t), \\ Z(t) &= Z(t-1) + \delta S_z(t), & S_z(t) &= s_z + \sigma_{s_z} w_z(t). \end{aligned}$$

Средняя скорость $(s_x, s_y, s_z)'$ задается на каждой траектории случайным вектором, элементы которого независимы и имеют равномерное распределение: $s_x \sim R[-20, -10]$, $s_y \sim R[-20, -10]$, $s_z \sim R[-2, 0]$. Таким образом, средняя скорость движения $\mathcal{A}$ характеризуется математическим ожиданием $E\{S(t)\} = (-15, -15, -1)'$ (отсюда абсолютное значение средней скорости ≈ 21 км/ч и направление движения на $\mathcal{O}(0, 0, 0)$) и ковариацией $\text{diag}\{D_{s_x}; D_{s_y}; D_{s_z}\} \approx \text{diag}\{2,9^2; 2,9^2; 0,4^2\}$. Стандартные отклонения вектора аддитивных возмущений скорости $W_t = (w_x(t), w_y(t), w_z(t))'$ составляют: $\sigma_{s_x} = 15$, $\sigma_{s_y} = 15$, $\sigma_{s_z} = 1$. В итоге ковариация скорости $\text{cov}(S(t), S(t)) \approx \text{diag}\{15,3^2; 15,3^2; 1,1^2\}$.

В дополнение к (16) моделировалась ситуация скачкообразного изменения средней скорости. Пусть имеется не зависящий от положения $\mathcal{A}$ стандартный пуассоновский процесс $P(u)$ и известна интенсивность λ_u изменения постоянной средней скорости ПА (известно среднее время между скачками скорости). Дискретное время t связано с непрерывным u шагом дискретизации: $u = t\delta$, вектор состояния $X_t \in \mathbb{R}^{p_X}$ можно расширить $(p_X + 1)$ -м элементом, так что $X_{(p_X+1)t} = P(\lambda_{t\delta} t\delta)$.

Постоянную, точнее кусочно-постоянную, среднюю скорость моделирует последовательность $(s_x^p(t), s_y^p(t), s_z^p(t))'$, сечение которой в момент $t = 0$ имеет то же распределение, что $(s_x, s_y, s_z)'$. Модель движения имеет, таким образом, вид

$$(17) \quad \begin{aligned} X(t) &= X(t-1) + \delta S_x(t), & S_x(t) &= s_x^p(t) + \sigma_{s_x} w_x(t), \\ Y(t) &= Y(t-1) + \delta S_y(t), & S_y(t) &= s_y^p(t) + \sigma_{s_y} w_y(t), \\ Z(t) &= Z(t-1) + \delta S_z(t), & S_z(t) &= s_z^p(t) + \sigma_{s_z} w_z(t). \end{aligned}$$

Для определения последовательности $s^p(t) = (s_x^p(t), s_y^p(t), s_z^p(t))'$ при $t > 0$ зададим $p(t) = X_{(p_X+1)t} - X_{(p_X+1)t-1}$ – индикатор скачков процесса $P(\lambda_{t\delta} t\delta)$ на текущем интервале дискретизации. Будем предполагать, что $s^p(t) = s^p(t-1)$, если $p(t) = 0$, т.е. сохранять постоянную среднюю скорость, если скачка нет. При $p(t) = 1$ $s^p(t)$ принимает новое случайное значение. Для определения его распределения воспользуемся той же идеей, что и для распределения начального значения скорости $(s_x, s_y, s_z)'$, смысл которого был в

том, чтобы в среднем двигаться в сторону объекта $\mathcal{O}$, т.е. начала координат, сохраняя дисперсию. Для этого новое значение средней скорости $s^p(t)$ моделируется равномерным распределением со средним $-X_t$ и той же ковариацией, что в предыдущей модели. Именно, если обозначить $s_x \sim R[a_x, b_x]$, то $s_x^p(t) \sim R[a_x, b_x] - (a_x + b_x)/2 - X(t-1)$, т.е. условное относительно $X(t-1)$ распределение $s_x^p(t)$ имеет среднее $-X(t-1)$ (сохраняет в среднем направление движения $\mathcal{A}$ на объект $\mathcal{O}$) и дисперсию $D[s_x^p(t) | X(t-1)] = D_{s_x}$. Аналогичные выражения описывают $s_y^p(t)$ и $s_z^p(t)$.

Используемый в эксперименте процесс $P(u)$ имеет интенсивность $\lambda_u = \frac{3}{6 \text{ мин}}$, т.е. за время наблюдения в среднем происходят три изменения постоянной средней скорости $(s_x, s_y, s_z)'$ или среднее время между скачками равно 2 мин. В остальном модель (17) сохраняет те же параметры.

Остаются параметры наблюдателей. Поскольку выше уже сказано, что их два, и выбраны координаты, остается задать параметры точности измерений y_t . Используемые значения можно представить как

$$(18) \quad \begin{aligned} \text{cov}(v_t^F, v_t^F) &= \text{cov}(v_t^S, v_t^S) = \text{diag} \{ \sigma_\varphi, \sigma_\lambda, \sigma_r \}, \\ \sigma_\varphi &= \sigma_\lambda = \frac{\pi}{180} \text{ рад } (1^\circ), \quad \sigma_r = 0,1 \text{ км } (100 \text{ м}). \end{aligned}$$

Распределение ошибок v_t^F, v_t^S нормальное.

3.2. Численные эксперименты

Посредством компьютерного моделирования $N = 10\,000$ траекторий движения (16) и (17) и наблюдений $y_t^{(F)} = (y_{\varphi_t}^{(F)}, y_{\lambda_t}^{(F)}, y_{r_t}^{(F)})'$ и $y_t^{(S)} = (y_{\varphi_t}^{(S)}, y_{\lambda_t}^{(S)}, y_{r_t}^{(S)})'$ вычислялись оценки положения $\hat{X}_t = (\hat{X}(t), \hat{Y}(t), \hat{Z}(t))'$ по формулам (15) для вариантов наблюдений с временными задержками ($T = 56$) и без ($T = 0$), для параметров аппроксимации угловых псевдонаблюдений $E\{v_i^2\} = \sigma_{\varphi, \lambda}^2$ и $E\{v_i^2\} = 1/4 \sigma_{\varphi, \lambda}^2$. Точность оценивания определялась средними квадратическими отклонениями $\sigma_{\hat{X}}(t), \sigma_{\hat{Y}}(t), \sigma_{\hat{Z}}(t)$ (на рисунках указываются в метрах), вычисленными путем осреднения ошибок оценок на смоделированном пучке.

На рис. 3 эксперимент иллюстрируется примером характерной траектории положения ПА: на рис. 3,а изображена траектория в координатах $X(t), Y(t)$ и соответствующие оценки $\hat{X}(t), \hat{Y}(t)$, на рис. 3,б показаны скорости $S_x(t), S_y(t)$. Этот пример взят из расчета для модели (17) и $E\{v_i^2\} = 1/4 \sigma_{\varphi, \lambda}^2$. Траектории с движением (16) отличаются более прямолинейным видом, так как отсутствуют смены направления и величины скорости, динамика по глубине $Z(t)$ на порядок более гладкая. Обращает внимание, что при весьма хаотических величинах скорости общее направление движения $\mathcal{A}$ в сторону $\mathcal{O}$ сохраняется как в целом на траектории, так и при смене характера скорости (при изменении направления). Для изображенной траектории временные задержки менялись в диапазоне от 35 до 32, среди всех смоделированных траекторий – от 55 до 25.

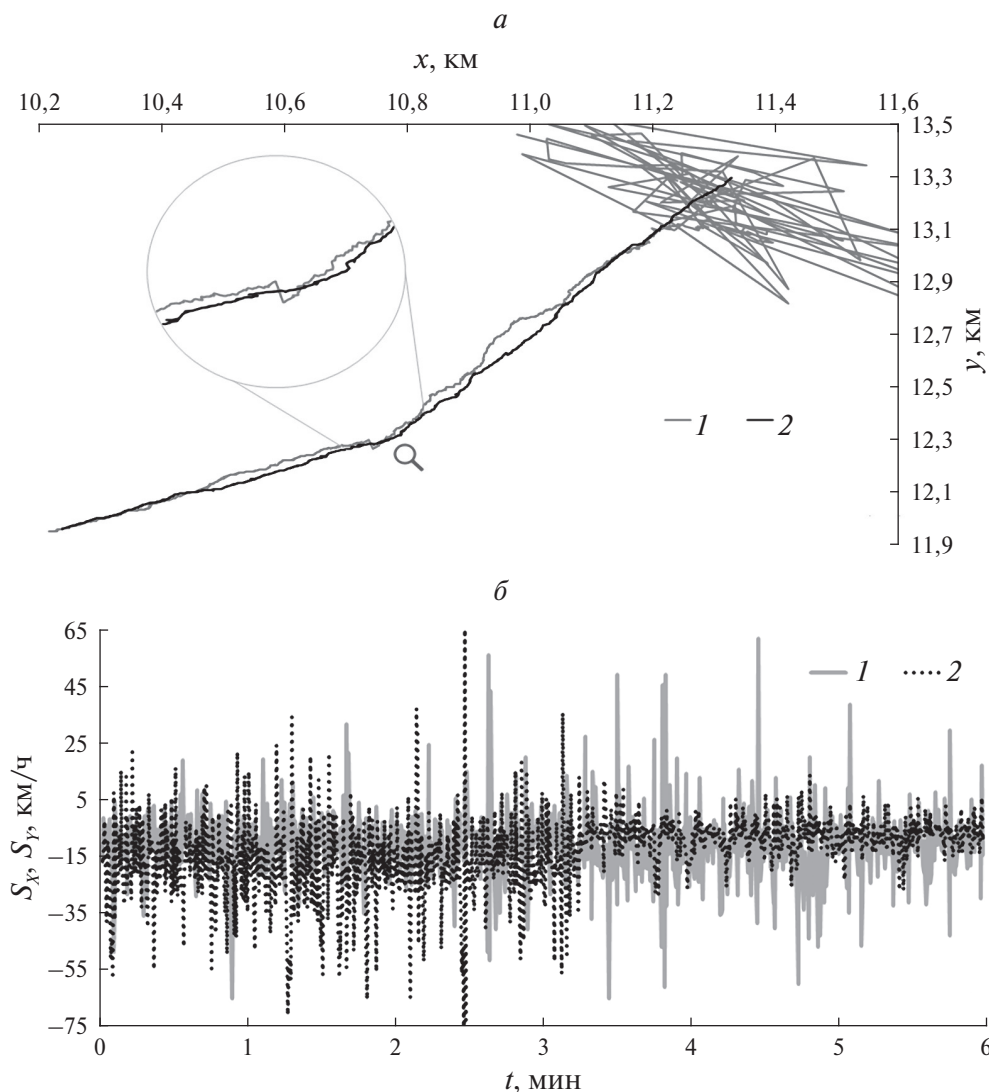


Рис. 3. Типовая таректория ПА: a – положение 1 – $X(t)$, $Y(t)$, 2 – оценки $\hat{X}(t)$, $\hat{Y}(t)$; b – скорости 1 – $S_x(t)$, 2 – $S_y(t)$.

Заметим, что на рис. 3, a начало движения сопровождается группой неточных оценок. Это период первых 56 шагов, когда согласно алгоритму (15) оценивание РФК не выполняется. На этих шагах вычислялась оценка прямых измерений: в предположении, что два имеющихся измерения $y_t^{(F)}$ и $y_t^{(S)}$ не содержат ошибок, из каждого набора углов и дальности вычислялись координаты, а итоговая оценка положения – как среднее значение. Далее, средние квадратические отклонения этой оценки обозначены $\Sigma_{\hat{X}}(t)$, $\Sigma_{\hat{Y}}(t)$, $\Sigma_{\hat{Z}}(t)$. Иллюстрация точности оценивания дана на рис. 4. Обратим внимание на начальный период, когда $\sigma_{\hat{X}}(t) = \Sigma_{\hat{X}}(t)$, $\sigma_{\hat{Y}}(t) = \Sigma_{\hat{Y}}(t)$, $\sigma_{\hat{Z}}(t) = \Sigma_{\hat{Z}}(t)$. Оценка РФК рассчитывается, начиная с $t = 57$.

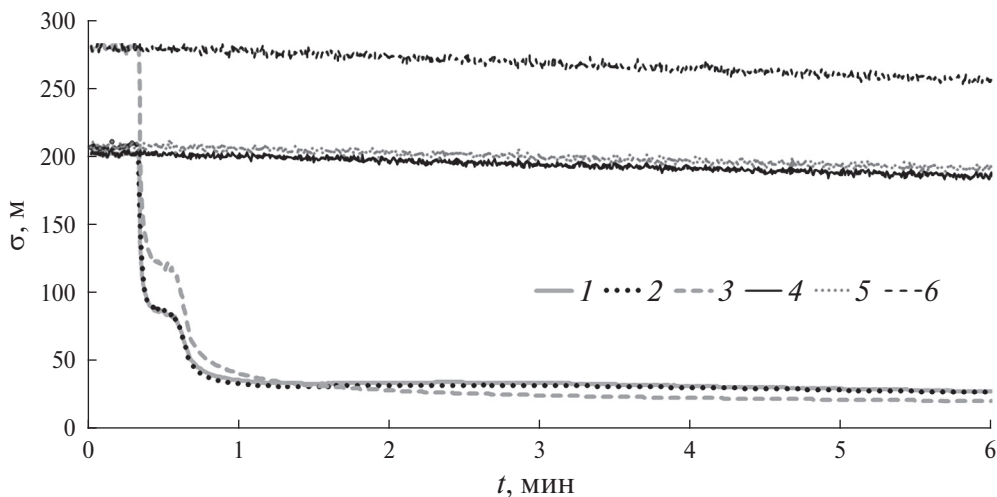


Рис. 4. Среднеквадратические отклонения: 1 – $\sigma_{\hat{X}}(t)$, 2 – $\sigma_{\hat{Y}}(t)$, 3 – $\sigma_{\hat{Z}}(t)$, 4 – $\Sigma_{\hat{X}}(t)$, 5 – $\Sigma_{\hat{Y}}(t)$, 6 – $\Sigma_{\hat{Z}}(t)$.

Другие варианты выполненных расчетов (для модели движения (16), без временных задержек ($T = 0$) и для параметров аппроксимации угловых псевдонаблюдений $E\{v_i^2\} = \sigma_{\varphi, \lambda}^2$) имеют некоторые отличия. Так, модель (16) дает более прямолинейную траекторию, наблюдения с $T = 0$ – отсутствие переходного периода с фильтром прямых измерений, параметры шумов псевдонаблюдений меняют точность оценок. Приведенные иллюстрации показывают качественную картину результативности предложенного фильтра в самой сложной модели. Формальное сравнение во всех моделях приведено в ниже-следующей таблице. Для характеристики точности среднеквадратические отклонения ошибок оценок усреднены по траекториям, т.е. например для $\hat{X}(t)$ вычислены величины $\hat{\sigma}_{\hat{X}} = \frac{1}{1000} \sum_{t=1}^{1000} \sigma_{\hat{X}}(t)$ и $\hat{\Sigma}_{\hat{X}} = \frac{1}{1000} \sum_{t=1}^{1000} \Sigma_{\hat{X}}(t)$, и т.д. Все отклонения приведены в метрах.

Сравнение качества оценивания

Модель	$\hat{\sigma}_{\hat{X}}$	$\hat{\sigma}_{\hat{Y}}$	$\hat{\sigma}_{\hat{Z}}$	$\hat{\Sigma}_{\hat{X}}$	$\hat{\Sigma}_{\hat{Y}}$	$\hat{\Sigma}_{\hat{Z}}$
(16), $T = 0$, $E\{v_i^2\} = \sigma_{\varphi, \lambda}^2$	24,01	22,33	27,04	192,54	198,35	266,86
(16), $T = 0$, $E\{v_i^2\} = \frac{1}{4}\sigma_{\varphi, \lambda}^2$	21,96	22,07	22,69			
(16), $T = 56$, $E\{v_i^2\} = \sigma_{\varphi, \lambda}^2$	37,82	37,09	44,76	193,42	199,23	267,89
(16), $T = 56$, $E\{v_i^2\} = \frac{1}{4}\sigma_{\varphi, \lambda}^2$	36,47	37,32	41,31			
(17), $T = 0$, $E\{v_i^2\} = \sigma_{\varphi, \lambda}^2$	24,78	23,34	26,55	193,04	198,56	267,44
(17), $T = 0$, $E\{v_i^2\} = \frac{1}{4}\sigma_{\varphi, \lambda}^2$	22,73	22,72	24,55			
(17), $T = 56$, $E\{v_i^2\} = \sigma_{\varphi, \lambda}^2$	50,46	47,37	49,23	193,95	199,48	268,49
(17), $T = 56$, $E\{v_i^2\} = \frac{1}{4}\sigma_{\varphi, \lambda}^2$	44,46	43,37	45,63			

4. Заключение

Эксперимент подтвердил способность представленного фильтра линейных псевдонаблюдений решать задачу фильтрации состояния в модели с временными запаздываниями. Результаты в сравнении с прямой оценкой показывают, что фильтр работает, что временные задержки приводят к двукратному ухудшению качества оценивания в сравнении с их отсутствием. В отношении абсолютных значений погрешностей в десятки метров надо отметить экстремальные для оценивания условия: удаленность объекта и внешние возмущения той же мощности, что и скорость объекта. Кроме того, с точки зрения задачи слежения ошибка порядка десятков метров при удаленности объекта более 10 км – вполне удовлетворительна. Более точные результаты нужны, когда решается задача позиционирования на борту ПА. Но в этом случае, помимо внешних наблюдателей, можно рассчитывать на измерения на борту, например, скорости. Это дает значительный прирост точности [25].

Далее можно отметить, что превосходство имеет фильтр с параметрами $E\{v_i^2\} = \frac{1}{4}\sigma_{\varphi,\lambda}^2$, т.е. модель с более мягкими предположениями относительно ошибки в псевдонаблюдениях. Наибольшее преимущество этот параметр дает в последней, самой сложной модели, в остальных разница невелика. Здесь нужно упомянуть результаты, не вошедшие в таблицу, а именно эксперименты с другими значениями $E\{v_i^2\}$. Приведенные в таблице результаты наводят на мысль о нечувствительности фильтра к этой величине, поскольку оценка качества фильтрации при разных $E\{v_i^2\}$ меняется мало. Однако это обстоятельство имеет место только для значений $E\{v_i^2\}$ в диапазоне $[\frac{1}{4}, 1]\sigma_{\varphi,\lambda}^2$. Не вошедшие в таблицу дополнительные расчеты показывают, что если $E\{v_i^2\}$ выходит в любую сторону из этого отрезка, то оценка фильтрации ухудшается значительно.

Так же надо отметить, что результаты хорошо согласуются с расчетами, выполненными для других похожих моделей. Так, в [7–10] такая же модель движения использовалась совместно с наблюдениями тангенсов углов направлений, а для оценивания применялся метод условно-минимаксной нелинейной фильтрации [15, 16].

Наконец, крайне важным является то, что в представленных здесь экспериментах предполагалось известным значение единственного параметра модели движения – постоянной средней скорости, в том числе в модели с ее скачкообразными изменениями. Из-за этого, в частности, не слишком ухудшается точность оценки прямых измерений при переходе от модели $T = 0$ к модели $T = 56$. Основанием к этому является показанная ранее возможность идентификации этого параметра.

Перечисляя положительные результаты, нельзя оставить без внимания и некоторые отрицательные моменты. Несмотря на продемонстрированную эффективность методологии линейных псевдонаблюдений, РФК сохранил свои худшие черты, прежде всего тенденцию к расходимости. Такой эффект проявлялся, когда модель движения была нелинейной (за счет неизвестного па-

раметра), когда не применялись прямые измерения для задания начального условия оценке РФК, когда увеличивалась скорость и траектории могли приближаться к координатным плоскостям. Из этого следует, что хотя методика линейных псевдонаблюдений очень хороша, но стараться применять ее надо не только в РФК, но и в других, более надежных, более устойчивых схемах фильтрации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ehlers F. (Ed.) Autonomous Underwater Vehicles: Design and Practice (Radar, Sonar & Navigation)*. London, UK: SciTech Publishing, 2020.
2. *Mohsan S.A.H., Khan M.A., Noor F., Ullah I., Alsharif M.H.* Towards the unmanned aerial vehicles (UAVs): A comprehensive review // *Drones*. 2022. V. 6. No. 6 (147).
3. *Burns L.D., Shulgan C.* *Autonomy: The quest to build the driverless car-and how it will reshape our world*. HarperCollins, 2018. 368 p.
4. *Christ R.D., Wernli R.L.* *The ROV Manual: A User Guide for Remotely Operated Vehicles*. 2nd Edition. Oxford, UK: Butterworth-Heinemann, 2013.
5. *Zhu Z., Hu S.-L.J., Li H.* Effect on Kalman based underwater tracking due to ocean current uncertainty // *Proc. 2016 IEEE/OES Autonomous Underwater Vehicles*, Tokyo, Japan, 6–9 November 2016. P. 131–137.
6. *Kebkal K.G., Mashoshin A.I.* AUV acoustic positioning methods // *Gyroscopy Navig.* 2017. V. 8. P. 80–89.
7. *Босов А.В.* Фильтрация состояния нелинейной динамической системы по наблюдениям со случайными запаздываниями // *АиТ*. 2023. № 6. С. 49–66.
Bosov A.V. Observation-Based Filtering of State of a Nonlinear Dynamical System with Random Delays // *Autom. Remote Control*. 2023. V. 84. No. 6. P. 594–605.
8. *Bosov A.* Tracking a Maneuvering Object by Indirect Observations with Random Delays // *Drones*. 2023. No. 7 (468).
9. *Босов А.В.* Позиционирование и идентификация параметров движения подводного аппарата по наблюдениям со случайными запаздываниями // *АиТ*. 2024. № 12. С. 23–48.
Bosov A.V. AUV Positioning and Motion Parameter Identification Based on Observations with Random Delays // *Autom. Remote Control*. 2024. V. 85. No. 12. P. 1149–1167 (1024–1040).
10. *Bosov A.* Maneuvering Object Tracking and Movement Parameters Identification by Indirect Observations with Random Delays // *Axioms*. 2024. No. 13 (668).
11. *Босов А.В.* Оптимальная фильтрация состояния нелинейной динамической системы по наблюдениям со случайными запаздываниями // *Информатика и ее применения*. 2023. Т. 17. Вып. 3. С. 8–17.
12. *Bernstein I., Friedland B.* Estimation of the State of a Nonlinear Process in the Presence of Nongaussian Noise and Disturbances // *J. Franklin Instit.* 1966. V. 281. No. 6. P. 455–480.
13. *Arulampalam S., Maskell S., Gordon N.J., Clapp T.* A Tutorial on Particle Filters for On-line Non-linear/Non-Gaussian Bayesian Tracking // *IEEE Trans. Signal Processing*. 2002. V. 50. No. 2. P. 174–188.

14. *Julier S.J., Uhlmann J.K., Durrant-Whyte H.F.* A new approach for filtering nonlinear systems // Proc. IEEE Amer. Control Conf. (ACC'95), 1995. P. 1628–1632.
15. *Пугачев В.С.* Оценивание переменных и параметров в дискретных нелинейных системах // АиТ. 1979. № 6. С. 63–79.
Pugachev V.S. Estimation of variables and parameters in discrete-time nonlinear systems // Autom. Remote Control. 1979. V. 40. No. 4. P. 39–50.
16. *Pankov A.R., Bosov A.V.* Conditionally minimax algorithm for nonlinear system state estimation // IEEE Trans. Autom. Control. 1994. V. 39. No. 8. P. 1617–1620.
17. *Su X., Ullah I., Liu X., Choi D.* A Review of Underwater Localization Techniques, Algorithms, and Challenges // J. Sens. 2020. No. 1 (6403161).
18. *Kalman R.E.* A new approach to linear filtering and prediction problems // J. Basic Eng. – T. ASME. 1960. V. 82. No. 1. P. 35–45.
19. *Lingren A., Gong K.* Position and Velocity Estimation Via Bearing Observations // IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst. 1978. No. AES-14. P. 564–577.
20. *Lin X., Kirubarajan T., Bar-Shalom Y., Maskell S.* Comparison of EKF, pseudomeasurement, and particle filters for a bearing-only target tracking problem // Signal and Data Processing of Small Targets 2002, Proceedings of the AEROSENSE 2002, Orlando, FL, USA, 1–5 April 2002; Drummond, O.E., Ed.; International Society for Optics and Photonics, SPIE: Bellingham, WA, USA, 2002. V. 4728. P. 240–250.
21. *Konovalenko I., Kuznetsova E., Miller A., et.al.* New Approaches to the Integration of Navigation Systems for Autonomous Unmanned Vehicles (UAV) // Sensors. 2018. No. 18 (3010).
22. *Hodges R.* Underwater Acoustics: Analysis, Design and Performance of Sonar. N.Y.: Wiley, USA, 2011.
23. *Holler R.A.* The evolution of the sonobuoy from World War II to the Cold War // US Navy J. Underwater Acoust. 2014. V. 25. No. 1. P. 322–346.
24. *Morris J.* The Kalman filter: A robust estimator for some classes of linear quadratic problems // IEEE Trans. Inf. Theory. 1976. V. 22. No. 5. P. 526–534.
25. *Босов А.В.* Анализ использования доплеровских измерений для идентификации параметров движения по наблюдениям со случайными запаздываниями // Информатика и ее применения. 2025. Т. 19. Вып. 1. С. 34–44.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 02.04.2025

После доработки 11.07.2025

Принята к публикации 17.07.2025