

© 2025 г. В.Л. ХАЦКЕВИЧ, д-р техн. наук (vlkhats@mail.ru)
(Военно-воздушная академия им. профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина,
Воронеж)

МЕТОД ФУНКЦИЙ ГРИНА В ЗАДАЧЕ О ПРЕОБРАЗОВАНИИ НЕЧЕТКОГО СИГНАЛА ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

Задача о преобразовании нечеткого сигнала линейной динамической системой в данной работе сводится к изучению задачи об ограниченных решениях для линейного дифференциального уравнения высокого порядка с постоянными коэффициентами и нечеткозначной неоднородностью в правой части. Для решения последней разработана модификация метода функций Грина на случай нечетких задач. Выделен класс уравнений, обладающих положительными коэффициентами и неотрицательной функцией Грина, для которых установлены результаты о существовании и гладкости нечеткозначного, ограниченного на всей оси решения. Показано, что в случае правой части треугольного вида, такого же вида будет и решение. Рассмотрены приложения для радиотехнических цепей с нечеткозначными входными сигналами. Установлена взаимосвязь между модальными значениями входных и выходных нечеткозначных сигналов для линейной динамической системы.

Ключевые слова: нечеткие числа, динамические системы с постоянными коэффициентами и нечеткозначными входными сигналами, метод функций Грина.

DOI: 10.31857/S0005231025100035

1. Введение

Динамические модели многих прикладных процессов характеризуются неопределенностью входных данных. В случае, когда можно оценить вероятностные характеристики входного сигнала при моделировании, используется теория случайных процессов [1].

С другой стороны, в последние десятилетия широко применяется интервальный подход, когда с помощью экспертных оценок можно указать границы интервалов изменения входных переменных [2].

Наряду с интервальным подходом исследователями активно используются методы нечеткой математики [3, 4]. А именно, если предварительно неизвестно формальное распределение вероятностей, но все же удастся указать некоторые возможностные оценки, то часто используются методы «нечеткости»,

которые характеризуются довольно простым аппаратом, дающим интуитивно понятный результат. При этом подходы, основанные на методах «нечеткости», позволяют трансформировать оценку возможности исходных данных в оценку возможностей результатов.

При нечетком подходе используется функция принадлежности (возможности) нечеткого числа, которая характеризует возможность принять нечеткому числу заданное вещественное значение. Так что нечеткий подход содержит больше информации об имеющейся неопределенности, чем интервальный. Соответственно нечеткое моделирование дает более содержательный результат, чем интервальное. Практически для построения функций принадлежности используются экспертные оценки.

В данной работе рассматриваются «нечеткие» динамические системы, описываемые линейными дифференциальными уравнениями n -го порядка с постоянными коэффициентами и нечеткозначными правыми частями. Такие системы встречаются в теории автоматического регулирования, в задачах обработки сигналов (в радиотехнике) и других приложениях.

Основы теории нечетких дифференциальных уравнений заложены в работах [5–7] и получили дальнейшее развитие в [8–11]. Различные приложения отражены в [12, 13]. Из последних работ отметим [14–17].

В литературе рассматриваются различные определения дифференцируемости нечеткозначных функций. В настоящей работе применяется «классическое» определение производной по Хукухаре [5] и связанной с ним производной по Сеиккала [7].

Обычно [18] при решении линейных нечетких дифференциальных уравнений выписывают систему уравнений для соответствующих α -индексов и решают ее. Затем проверяют, определяют ли производные полученных α -индексов производную нечеткозначной функции. Как показывают примеры [18, 19], это не всегда так. Отметим, что в [19] развит так называемый «операторный метод», когда дифференциальные уравнения для α -индексов сводятся к интегральным уравнениям, которые затем решаются.

В последние годы широкое распространение для решения линейных нечетких дифференциальных уравнений высокого порядка получил метод нечеткого преобразования Лапласа [20–22]. Однако он не представляет возможности предварительно определить, будут ли полученные функции гладкими и, соответственно, решениями.

В отличие от известных подходов предлагаемый в данной работе подход опирается на развитие метода функции Грина, широко распространенного в теории обыкновенных дифференциальных уравнений [23, гл. 1, 2; 24], на случай нечетких дифференциальных уравнений.

Метод функций Грина полезен тем, что он дает формулы для α -индексов нечетких решений. А это позволяет привести условия, при которых производные α -индексов определяют производную нечеткозначного решения по Сеиккала. В данной работе это условие на положительность коэффициентов ди-

намической системы, неотрицательность соответствующей функции Грина, а также дифференцируемость по Сеиккала входного нечеткого сигнала. Эти условия естественны для ряда прикладных задач. В частности, положительность коэффициентов является необходимым условием устойчивости соответствующего характеристического многочлена, соответствующего линейной динамической системе. Условия неотрицательности функции Грина широко известны (см., например, [23]). Они изучены в связи с различными прикладными задачами.

Уточним, что в данной статье используется понятие ультраслабого нечеткого решения как нечеткозначной функции, α -индексы которой удовлетворяют уравнениям для α -индексов, вытекающих из заданного нечеткого дифференциального уравнения. Отметим установленный в данной работе факт, состоящий в том, что j -кратная дифференцируемость по Сеиккала нечеткозначной неоднородности влечет j -кратную дифференцируемость ультраслабого нечеткозначного решения по Сеиккала.

Кроме того, важным является вопрос о виде выходного нечеткого сигнала линейной динамической системы, когда на вход подается нечеткий сигнал определенного типа, например треугольный. В настоящей работе показано, что при определенных условиях (положительность коэффициентов системы и неотрицательность соответствующей функции Грина) на выходе также наблюдается нечеткий сигнал треугольного вида.

Добавим, что рядом авторов в последнее время исследованы нечеткие дифференциальные уравнения с обобщенными (по Беду-Гелу) производными [10, 18–22]. Развитый в настоящей статье подход допускает применение и к этому случаю.

В качестве приложений в настоящей работе рассмотрены модели радиотехнических цепей с нечеткими входными сигналами. Рассмотрена взаимосвязь модальных значений входного и выходного нечетких треугольных сигналов линейной динамической системы. Введено и использовано понятие доверительного возможностного интервала.

2. Нечеткие числа и нечеткозначные функции

Пусть $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел. Нечетким числом $\tilde{u}$ называют подмножество из $\mathbb{R}$, определенное с помощью своей функции принадлежности (возможности) $\mu_{\tilde{u}} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ (см., напр., [3, гл. 5; 4, гл. 2, 3]), которое ставит в соответствие каждому числу $x \in \mathbb{R}$ число $\mu_{\tilde{u}}(x)$ из интервала $[0, 1]$, характеризующее степень принадлежности элемента x множеству $\tilde{u}$. При этом 0 и 1 представляют собой соответственно низшую и высшую степень принадлежности элемента данному множеству. Таким образом, нечеткое число $\tilde{u}$ можно трактовать как пару $\{x, \mu_{\tilde{u}}(x) : x \in \mathbb{R}\}$.

Отметим, что введение понятия функции принадлежности связано с недостаточностью вероятностного подхода для описания проблем неопределенности. В частности, во многих прикладных задачах сложно определить апри-

орное распределение вероятностей. При этом функция принадлежности есть некоторый аналог распределения вероятностей случайной величины в теории вероятностей. Уточним, что число $\mu_{\tilde{u}}(x)$ трактуется как возможность принять значение x . Подчеркнем, что, как правило, для построения функций принадлежности используются экспертные оценки.

Отметим еще, что функция принадлежности нечеткого числа является обобщением понятия характеристической функции множества, которая может принимать только два значения: 0 и 1 (0, когда элемент не принадлежит множеству и 1, когда элемент принадлежит множеству).

Число x_M , для которого $\mu(x_M) = \max_{x \in \mathbb{R}} \mu(x)$, называют модальным значением или модой нечеткого числа. Оно трактуется как наиболее возможное значение.

Как правило, предполагают, что носитель нечеткого числа $\tilde{u}$ (т.е. множество $\{x : \mu_{\tilde{u}}(x) > 0\}$) ограничен, а функция принадлежности выпукла, непрерывна сверху и нормальна (т.е. $\sup_x \mu_{\tilde{u}}(x) = 1$). Множество таких нечетких чисел обозначим через J .

Ниже будет рассматриваться интервальное представление нечетких чисел.

Как известно [3, гл. 5], интервалы α -уровня (α -уровни) нечеткого числа $\tilde{u} \in J$ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{u}}(x)$ определяются соотношениями

$$u_{\alpha} = \{x | \mu_{\tilde{u}}(x) \geq \alpha\}, \quad (\alpha \in (0, 1]), \quad z_0 = cl\{x | \mu_{\tilde{u}}(x) > 0\},$$

где cl обозначает замыкание множества. Согласно принятым предположениям все α -уровни нечеткого числа – замкнутые и ограниченные интервалы вещественной оси.

Обозначим левую границу α -интервала через u_{α}^{-} , а правую через u_{α}^{+} . Таким образом, $u_{\alpha} = [u_{\alpha}^{-}, u_{\alpha}^{+}]$. Выражения u_{α}^{-} и u_{α}^{+} называют соответственно левым и правым α -индексами (индексами) нечеткого числа.

Для нечеткого числа $\tilde{u} \in J$ выполнены следующие условия на α -индексы:

1. $u_{\alpha}^{-} \leq u_{\alpha}^{+}$, $\forall \alpha \in [0, 1]$.
2. Функция u_{α}^{-} ограничена, не убывает, непрерывна слева на промежутке $(0, 1]$ и непрерывна справа в точке 0.
3. Функция u_{α}^{+} ограничена, не возрастает, непрерывна слева на промежутке $(0, 1]$ и непрерывна справа в точке 0.

Обратно, пара функций на промежутке $[0, 1]$, для которых выполняются условия 1–3, задают нечеткое число, α -интервал которого имеет вид $[u_{\alpha}^{-}, u_{\alpha}^{+}]$.

Ниже под суммой нечетких чисел с индексами u_{α}^{-} , u_{α}^{+} и v_{α}^{-} , v_{α}^{+} понимается нечеткое число с интервалами α -уровня $[u_{\alpha}^{-} + v_{\alpha}^{-}, u_{\alpha}^{+} + v_{\alpha}^{+}]$. Умножение на положительное число c характеризуется интервалами α -уровня $[cu_{\alpha}^{-}, cu_{\alpha}^{+}]$, а умножение на отрицательное число c – интервалами α -уровня $[cu_{\alpha}^{+}, cu_{\alpha}^{-}]$. Равенство нечетких чисел понимается как равенство всех соответствующих α -индексов при $\forall \alpha \in [0, 1]$.

В приложениях широко используются треугольные числа, для которых графики функций принадлежности имеют треугольный вид.

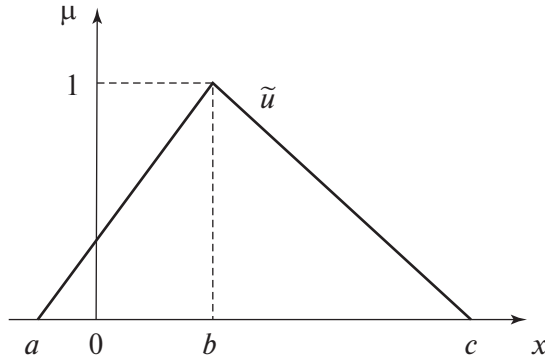


Рис. 1. Треугольное нечеткое число.

Пример 1. Нечеткое треугольное число $\tilde{u}$, характеризуемое тройкой вещественных чисел (a, b, c) при $a < b < c$, определяется функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{u}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } x \in [a, b]; \\ \frac{x-c}{b-c}, & \text{если } x \in [b, c]; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Ее график порождает треугольник, изображенный на рис. 1.

Отметим, что число b является модальным значением (или модой) рассматриваемого нечеткого числа. Для него $\mu_{\tilde{u}}(b) = 1$. Нечеткое треугольное число, изображенное на рис. 1, трактуется как около b .

Как известно, в случае треугольного числа нижняя и, соответственно, верхняя границы α -интервала имеют вид:

$$u_{\alpha}^{-} = (b-a)\alpha + a, \quad u_{\alpha}^{+} = -(c-b)\alpha + c.$$

На множестве нечетких чисел можно по-разному ввести определения расстояний между ними. При интервальном подходе часто используют расстояние Хаусдорфа между множествами α -уровня нечетких чисел. А именно, для нечетких чисел $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ с α -уровнями u_{α} и v_{α} задают метрику [25]

$$(1) \quad \rho(\tilde{u}, \tilde{v}) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \max\{|u_{\alpha}^{-} - v_{\alpha}^{-}|, |u_{\alpha}^{+} - v_{\alpha}^{+}|\}.$$

Здесь $[u_{\alpha}^{-}, u_{\alpha}^{+}]$ и $[v_{\alpha}^{-}, v_{\alpha}^{+}]$ — интервалы α -уровней нечетких чисел $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ соответственно.

Отметим, что условие $\rho(\tilde{u}, \tilde{v}) = 0$ в силу (1) эквивалентно определению равенства нечетких чисел $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$, данному выше.

Фиксируем промежуток T числовой оси. Отображение $\tilde{z} : T \rightarrow J$ будем называть нечеткозначной функцией.

Пусть нечеткозначная функция $\tilde{z}(t)$ при $\forall t \in T$ характеризуется функцией принадлежности $\mu_{\tilde{z}(t)}(x)$. При фиксированном $\alpha \in (0, 1]$ рассмотрим α -интервал $z_\alpha(t) = \{x \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde{z}(t)}(x) \geq \alpha\}$ и $z_0(\alpha) = cl\{x \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde{z}(t)}(x) > 0\}$. Обозначим через $z_\alpha^-(t)$ и $z_\alpha^+(t)$ левую и соответственно правую границы α -интервала. Так что $z_\alpha(t) = [z_\alpha^-(t), z_\alpha^+(t)]$.

Непрерывность функции $\tilde{z}(t)$ по t будем понимать по метрике (1), а ограниченность в следующем смысле: найдется постоянная $C > 0$, такая что при всех $t \in T$ выполнено неравенство

$$\rho(\tilde{z}(t), \tilde{0}) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \max\{|z_\alpha^-(t)|, |z_\alpha^+(t)|\} \leq C.$$

Здесь $\tilde{0}$ – нечеткое число, у которого α -индексы $0_\alpha^\pm = 0$ при $\forall \alpha \in [0, 1]$.

Замечание 1. Индексы $z_\alpha^-(t)$ и $z_\alpha^+(t)$ непрерывной нечеткозначной функции $\tilde{z}(t)$ непрерывны по t при любом $\alpha \in [0, 1]$. А если $\tilde{z}(t)$ ограничена при $t \in T$, то это влечет ограниченность $z_\alpha^\pm(t)$ по $t \in T$ при любом $\alpha \in [0, 1]$.

Интегралом по промежутку T от непрерывного нечеткозначной функции $\tilde{z}(t)$ называют [6] нечеткое число $\tilde{g}$, такое что его интервалы α -уровня при любом $\alpha \in [0, 1]$ имеют вид $g_\alpha = \int_T z_\alpha(t) dt$. Интеграл обозначают как $\int_T \tilde{z}(t) dt$.

По существу, это интеграл Аумана [26] от многозначного отображения $z_\alpha(t)$. Фактически, имеет место интервальное представление [27]

$$\int_T \tilde{z}(t) dt = \left[\int_T z_\alpha^-(t) dt, \int_T z_\alpha^+(t) dt \right].$$

Перейдем к рассмотрению производных от нечеткозначных функций. В литературе используются различные определения. Одно из наиболее распространенных опирается на определение разности Хукухары [28]. А именно, для множеств A, B множество C называют разностью Хукухары, если $A = B + C$, и обозначают как $A \ominus B$.

Функцию $\tilde{z} : T \rightarrow J$ называют H -дифференцируемой (или дифференцируемой по Хукухаре) в точке $t \in T$ [5], если для всех достаточно малых $h > 0$ существуют разности Хукухары $\tilde{z}(t+h) \ominus \tilde{z}(t)$, $\tilde{z}(t) \ominus \tilde{z}(t-h)$ и элемент $\tilde{z}'(t) \in J$ такие, что

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \rho \left(\frac{\tilde{z}(t+h) \ominus \tilde{z}(t)}{h}, \tilde{z}'(t) \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \rho \left(\frac{\tilde{z}(t) \ominus \tilde{z}(t-h)}{h}, \tilde{z}'(t) \right) = 0,$$

где расстояние ρ определяется формулой (1). В этом случае элемент $\tilde{z}'(t)$ называют H -производной в точке t .

Нечеткозначную функцию $\tilde{z} : T \rightarrow J$ называют S -дифференцируемой или дифференцируемой по Сеиккала в точке $t \in T$ [7], если ее α -индексы $z_\alpha^-(t)$ и $z_\alpha^+(t)$ дифференцируемы и их производные $(z_\alpha^-)'(t)$ и $(z_\alpha^+)'(t)$ при $\forall \alpha \in [0, 1]$ образуют нечеткое число с α -интервалом $[\tilde{z}'(t)]_\alpha = [(z_\alpha^-)'(t), (z_\alpha^+)'(t)]$.

Утверждение 1 [8]. Пусть нечеткозначная функция $\tilde{z}(t)$ H -дифференцируема в точке $t \in T$. Тогда она S -дифференцируема в точке $t \in T$.

Например, нечеткозначная функция $\tilde{z}(t)$ вида $\tilde{z}(t) = g(t)\tilde{r}$, где $g(t)$ – вещественнозначная дифференцируемая функция, а $\tilde{r} \in J$ – заданное нечеткое число, будет H -дифференцируемой (а значит, и S -дифференцируемой) в точке t при условии $g(t) \cdot g'(t) \geq 0$ [9].

Замечание 2. По определению нечеткая S -производная является аддитивной и положительно однородной, т.е. для нечеткозначных S -дифференцируемых функций $\tilde{z}(t)$ и $\tilde{w}(t)$ имеем $(\tilde{z}(t) + \tilde{w}(t))' = \tilde{z}'(t) + \tilde{w}'(t)$ и $(c\tilde{z}(t))' = c\tilde{z}'(t)$ для любой вещественной постоянной $c \geq 0$.

Вторая производная по Сеиккала $\tilde{z}''(t)$ в точке $t \in T$ определяется как S -производная от первой производной, т.е. как нечеткое число $\tilde{z}''(t)$, имеющее левый α -индекс $(z_{\alpha}^{-})''(t)$ и правый α -индекс $(z_{\alpha}^{+})''(t)$ при $\forall \alpha \in [0, 1]$.

Аналогично определяются последующие S -производные.

3. Преобразование непрерывного нечеткого сигнала линейной динамической системой

Устройство называют линейной динамической системой, если связь между входом и выходом описывается дифференциальным уравнением n -го порядка с постоянными коэффициентами. Если на входе и выходе наблюдаются нечеткие сигналы $\tilde{f}(t)$ и $\tilde{z}(t)$ соответственно, то линейная динамическая система описывается «нечетким» дифференциальным уравнением ($t \in T$)

$$(2) \quad a_n \tilde{z}^{(n)}(t) + a_{n-1} \tilde{z}^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \tilde{z}'(t) + a_0 \tilde{z}(t) = \tilde{f}(t).$$

Здесь коэффициенты a_i ($i = 0, \dots, n$) – вещественные числа, $\tilde{f}(t)$ – входная нечеткозначная функция, производные от нечеткозначной функции $\tilde{z}(t)$ понимаются как S -производные.

Ниже в качестве промежутка T рассматривается $T = (-\infty, \infty)$.

Рассмотрим задачу об ограниченных решениях для вещественного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами при $t \in (-\infty, \infty)$

$$(3) \quad a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t).$$

Функцию $G(t)$ называют функцией Грина задачи об ограниченных решениях уравнения (3), если она удовлетворяет следующим условиям (см., например, [23, гл. 1, § 4; 24]):

1) $G(t)$ непрерывно дифференцируема $(n-2)$ раза при всех t , а n -я и $(n-1)$ -я производные непрерывно дифференцируемы при всех t , кроме $t = 0$, причем

$$G^{(n-1)}(+0) - G^{(n-1)}(-0) = \frac{1}{a_n};$$

2) во всех точках, кроме $t = 0$, функция $G(t)$ удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению, соответствующему (3) (при $f(t) \equiv 0$);

3) функция Грина и ее производные подчинены оценке

$$|G^{(i)}(t)| \leq M e^{-\gamma|t|} \quad (i = 0, 1, \dots, n, \quad -\infty < t < +\infty),$$

где M и γ – некоторые положительные постоянные.

Утверждение 2 [23, гл. 1, 24]. Пусть корни характеристического уравнения $a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$ не содержат точек мнимой оси. Тогда для любой непрерывной ограниченной на всей числовой оси функции $f(t)$ уравнение (3) имеет ограниченное на всей числовой оси решение, причем единственное. Оно дается формулой

$$(4) \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)f(s) ds,$$

где $G(t)$ – функция Грина задачи об ограниченных решениях уравнения (3).

При этом

$$x^{(j)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_t^{(j)}(t-s)f(s) ds, \quad j = (0, 1, \dots, n-1),$$

$$x^{(n)}(t) = f(t) + \int_{-\infty}^{\infty} G_t^{(n)}(t-s)f(s) ds.$$

Подчеркнем, что сходимость несобственного интеграла (4) и соответствующих интегралов для производных обеспечивается экспоненциальными оценками на функцию Грина и ее производные, а также непрерывностью и ограниченностью функции $f(t)$ на всей числовой оси.

Отметим, что общий вид функции Грина задачи об ограниченных решениях уравнения (3) известен (см., например, [23, гл. 2, §8]).

Утверждение 3 [23, гл. 2]. Пусть в условиях утверждения 2 все корни характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости ($\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, $i = 1, \dots, n$). Тогда ограниченное решение уравнения (3) асимптотически устойчиво по Ляпунову. При этом решение (4) приобретает вид

$$(5) \quad x(t) = \int_{-\infty}^t G(t-s)f(s) ds.$$

Здесь функция Грина $G(\sigma) = \begin{cases} K(\sigma) & \text{при } \sigma \geq 0 \\ 0 & \text{при } \sigma < 0 \end{cases}$, а $K(\sigma)$ – функция Коши, являющаяся решением однородного дифференциального уравнения, соответствующего уравнению (3) (при $f(t) \equiv 0$), и удовлетворяющая начальным условиям

$$K^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-2, \quad K^{(n-1)}(0) = 1.$$

Обратимся к случаю входных и выходных нечетких сигналов. В некоторых случаях, используя представление (4), удается выписать α -индексы нечеткого сигнала на выходе динамической системы (2) в явном виде.

Сильным решением нечеткого дифференциального уравнения (2) будем называть n раз непрерывно S -дифференцируемую нечеткозначную функцию, удовлетворяющую (2) на соответствующем промежутке.

Лемма 1. Пусть коэффициенты нечеткого дифференциального уравнения (2) положительны $a_i > 0$, $i = 0, \dots, n$. Если нечеткозначная функция $\tilde{z}(t)$ есть сильное решение уравнения (2) на промежутке T , то соответствующие α -индексы $z_\alpha^\pm(t)$ при $\forall \alpha \in [0, 1]$ и $t \in T$ удовлетворяют следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$(6) \quad a_n(z_\alpha^-)^{(n)}(t) + a_{n-1}(z_\alpha^-)^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(z_\alpha^-)'(t) + a_0 z_\alpha^-(t) = f_\alpha^-(t),$$

$$(7) \quad a_n(z_\alpha^+)^{(n)}(t) + a_{n-1}(z_\alpha^+)^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(z_\alpha^+)'(t) + a_0 z_\alpha^+(t) = f_\alpha^+(t).$$

Действительно, подставим сильное решение $\tilde{z}(t)$ нечеткого дифференциального уравнения в (2). Поскольку равенство нечетких чисел означает равенство всех соответствующих α -индексов, то согласно правилам интервальной арифметики с учетом положительности коэффициентов a_i и в силу определения нечеткой производной по Сеиккала, а также замечания 2 получим, что уравнение (2) влечет при $\forall \alpha \in [0, 1]$ и $t \in (-\infty, \infty)$ выполнение равенств (6), (7).

Лемма 2. Пусть коэффициенты нечеткого дифференциального уравнения (2) положительны ($a_i > 0$, $i = 0, \dots, n$), а корни характеристического уравнения $a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$ не содержат точек мнимой оси. Пусть нечеткозначная функция $\tilde{f}(t)$, стоящая в правой части уравнения (2), непрерывна и ограничена по метрике (1) при $t \in (-\infty, \infty)$. Тогда при $\forall \alpha \in [0, 1]$ существует, причем единственное, ограниченное на всей числовой оси решение каждого из уравнений (6), (7), и они могут быть представлены в виде

$$(8) \quad z_\alpha^-(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s) f_\alpha^-(s) ds, \quad z_\alpha^+(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s) f_\alpha^+(s) ds.$$

Действительно, по условию и согласно замечанию 1 при $\forall \alpha \in [0, 1]$ функции $f_\alpha^\pm(t)$ непрерывны и ограничены на всей числовой оси. Тогда в силу утверждения 2 при $\forall \alpha \in [0, 1]$ решения уравнений (6), (7) существуют, единственны и выполнены равенства (8).

Лемма 3. Пусть выполнены условия леммы 2 и дополнительно функция Грина G задачи (3) неотрицательна. Тогда выражения (8) при $\forall t \in (-\infty, \infty)$ удовлетворяют условиям 1–3 раздела 2 на индексы нечетких чисел.

Доказательство. Фиксируем $t \in (-\infty, \infty)$. По предположению имеем $f_\alpha^-(s) \leq f_\alpha^+(s)$ при $\forall s \in (-\infty, \infty)$. Тогда в силу неотрицательности функции

Грина

$$G(t-s)f_{\alpha}^{-}(s) \leq G(t-s)f_{\alpha}^{+}(s).$$

Поэтому на основании (8) и в силу монотонности интеграла получим, что $z_{\alpha}^{-}(t) \leq z_{\alpha}^{+}(t)$. То есть при $\forall t \in (-\infty, \infty)$ для выражений (8) выполнено условие 1 раздела 2 для α -индексов нечетких чисел.

Фиксируем произвольное $t \in (-\infty, \infty)$ и покажем, что функция $z_{\alpha}^{-}(t)$ не убывает по α . Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$ и $\alpha_1 < \alpha_2$. По условию при $\forall s \in (-\infty, \infty)$ выполнено условие $f_{\alpha_1}^{-}(s) \leq f_{\alpha_2}^{-}(s)$. Тогда в силу неотрицательности функции Грина $G(t-s)f_{\alpha_1}^{-}(s) \leq G(t-s)f_{\alpha_2}^{-}(s)$. Следовательно, в силу свойства монотонности интеграла имеем $z_{\alpha_1}^{-}(t) \leq z_{\alpha_2}^{-}(t)$, т.е. функция $z_{\alpha}^{-}(t)$ монотонно не убывает по α . Аналогично показывается, что функция $z_{\alpha}^{+}(t)$ монотонно не возрастает по α .

По предположению функция $\tilde{f}(t)$ ограничена по t при $t \in (-\infty, \infty)$ в метрике (1). Это означает, что найдется постоянная $C > 0$ такая, что $\rho(\tilde{f}(t), \tilde{0}) \leq C$ при любых $t \in (-\infty, \infty)$. Следовательно, $\sup_{0 \leq \alpha \leq 1} |f_{\alpha}^{\pm}(t)| \leq C$. Тогда согласно (8) при фиксированном t и $\forall \alpha \in [0, 1]$ имеем

$$|z_{\alpha}^{\pm}(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |G(t-s)| |f_{\alpha}^{\pm}(s)| ds \leq C \int_{-\infty}^{\infty} |G(t-s)| ds,$$

а это гарантирует при каждом $t \in (-\infty, \infty)$ ограниченность по $\alpha \in [0, 1]$ выражений (8).

Непрерывность слева функций $z_{\alpha}^{\pm}(t)$ при фиксированном t по $\alpha \in (0, 1]$ вытекает из следующего соображения. Фиксируем $\alpha_0 \in [0, 1]$ и рассмотрим равенство

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0 - 0} z_{\alpha}^{\pm}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s) \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0 - 0} f_{\alpha}^{\pm}(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s) f_{\alpha_0}^{\pm}(s) ds = z_{\alpha_0}^{\pm}(t).$$

Здесь используется представление (8), возможность предельного перехода под знаком абсолютно сходящегося несобственного интеграла и непрерывность слева по $\alpha \in (0, 1]$ при произвольном $s \in (-\infty, \infty)$ α -индексов $f_{\alpha}^{\pm}(s)$ нечеткозначной функции $\tilde{f}(s)$. Аналогично проверяется непрерывность справа функций $z_{\alpha}^{\pm}(t)$ по α при $\alpha = 0$. Следовательно, для $z_{\alpha}^{\pm}(t)$ выполнены условия 2, 3 раздела 2.

Таким образом, для выражений $z_{\alpha}^{\pm}(t)$, определяемых в (8), выполнены все условия раздела 2 на α -индексы нечетких чисел.

Подчеркнем значимость леммы 3. Как показывают примеры [18, 19], решения систем для α -индексов линейных нечетких дифференциальных уравнений не всегда являются α -индексами некоторой нечеткозначной функции.

Теорема 1. Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда нечеткозначная функция, порождаемая при $\forall t \in (-\infty, \infty)$ α -индексами (8), характеризуется

представлением

$$(9) \quad \tilde{z}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)\tilde{f}(s)ds.$$

Действительно, согласно леммам 1–3 и определению интеграла от нечеткозначной функции при $\forall \alpha \in [0, 1]$ имеют место соотношения для α -индексов

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)\tilde{f}(s)ds \right)_{\alpha}^{-} &= \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)f_{\alpha}^{-}(s)ds, \\ \left(\int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)\tilde{f}(s)ds \right)_{\alpha}^{+} &= \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)f_{\alpha}^{+}(s)ds, \end{aligned}$$

которые в силу (8) влекут представление (9).

Теорема 2. В условиях теоремы 1 нечеткозначная функция $\tilde{z}(t)$, определенная формулой (9), непрерывна и ограничена по t на всей числовой оси.

Доказательство. Фиксируем вещественные числа t_1, t_2 . Тогда согласно (8)

$$z_{\alpha}^{\pm}(t_1) - z_{\alpha}^{\pm}(t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} (G(t_1-s) - G(t_2-s))f_{\alpha}^{\pm}(s)ds.$$

Следовательно,

$$|z_{\alpha}^{\pm}(t_1) - z_{\alpha}^{\pm}(t_2)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |G(t_1-s) - G(t_2-s)| |f_{\alpha}^{\pm}(s)| ds.$$

Заметим, что $G(t_1-s) - G(t_2-s) = G'_t(\tau-s)(t_1-t_2)$, где $\tau \in ((1-\theta)t_1 + \theta t_2)$, а $\theta \in (0, 1)$. Поэтому в силу предыдущего

$$\begin{aligned} |z_{\alpha}^{\pm}(t_1) - z_{\alpha}^{\pm}(t_2)| &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |G'_t(\tau-s)| |f_{\alpha}^{\pm}(s)| ds \right) |t_1 - t_2| \leq \\ &\leq C |t_1 - t_2| \int_{-\infty}^{\infty} |G'_t(\tau-s)| ds, \end{aligned}$$

где постоянная $C > 0$ характеризует условие ограниченности: $\rho(\tilde{f}(t), \tilde{0}) \leq C$ при $\forall t \in (-\infty, \infty)$.

Воспользуемся теперь оценками производной функции Грина $|G'_t(t)| \leq M e^{-\gamma|t|}$ (см. п. 3) свойств функции Грина в разделе 3. Тогда

$$|z_\alpha^\pm(t_1) - z_\alpha^\pm(t_2)| \leq MC|t_1 - t_2| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|\tau-s|} ds = 2 \frac{MC}{\gamma} |t_1 - t_2|.$$

Отсюда по определению метрики (1) получим $\rho(z_\alpha^\pm(t_1), z_\alpha^\pm(t_2)) \leq 2 \frac{MC}{\gamma} |t_1 - t_2|$, что влечет непрерывность нечеткозначной функции $\tilde{z}(t)$, определенной формулой (9).

Покажем ограниченность нечеткозначной функции $\tilde{z}(t)$, представимой формулой (9), при $t \in (-\infty, \infty)$. По определению

$$\rho(\tilde{z}(t), \tilde{0}) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} |z_\alpha^\pm(t)|.$$

При этом согласно (8)

$$\begin{aligned} |z_\alpha^\pm(t)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |G(t-s)| |f_\alpha^\pm(s)| ds \leq \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |G(t-s)| ds \right) \rho(\tilde{f}(t), \tilde{0}) \leq 2 \frac{M\rho(\tilde{f}(t), \tilde{0})}{\gamma}. \end{aligned}$$

Здесь опять используется экспоненциальная оценка на функцию Грина. Таким образом, $\rho(\tilde{z}(t), \tilde{0}) \leq 2 \frac{M\rho(\tilde{f}(t), \tilde{0})}{\gamma} \leq 2 \frac{MC}{\gamma} \ (\forall t \in (-\infty, \infty))$.

Непрерывную нечеткозначную функцию $\tilde{z}(t)$ назовем ультраслабым решением нечеткого дифференциального уравнения (2), если ее α -индексы $z_\alpha^\pm(t)$ при $\forall \alpha \in [0, 1]$ n раз непрерывно дифференцируемы по t и удовлетворяют уравнениям (6) и (7) на соответствующем промежутке времени. При этом слабым решением нечеткого дифференциального уравнения (2) будем называть нечеткозначную функцию, удовлетворяющую соответствующему (2) интегро-дифференциальному или интегральному нечеткому уравнению (см., например, [19]). Такие решения в настоящей работе рассматриваться не будут. Имеет место

Теорема 3. В условиях теоремы 1 ультраслабое решение нечеткого дифференциального уравнения (2), ограниченное на всей числовой оси, существует и единственно.

Существование следует из теорем 1, 2. Покажем единственность. Предположим противное. Пусть $\tilde{z}(t)$ и $\tilde{w}(t)$ – два различных ультраслабых решения уравнения (2), ограниченных на всей числовой оси. Тогда индексы $z_\alpha^-(t)$ и $w_\alpha^-(t)$ являются ограниченными решениями уравнения (6). Поэтому

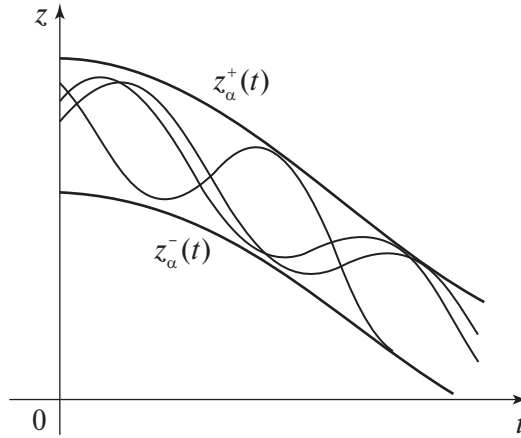


Рис. 2. Графическое представление ультраслабого нечеткозначного решения в интервальной форме.

в силу утверждения 2 $z_{\alpha}^{-}(t) = w_{\alpha}^{-}(t)$ при $\forall \alpha \in [0, 1]$ и $t \in (-\infty, \infty)$. Аналогично $z_{\alpha}^{+}(t) = w_{\alpha}^{+}(t)$ при $\forall \alpha \in [0, 1]$ и $t \in (-\infty, \infty)$. Но тогда, согласно признаку равенства нечетких чисел, $\tilde{z}(t) = \tilde{w}(t)$ при $\forall t \in (-\infty, \infty)$. Полученное противоречие доказывает высказанное утверждение.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 1 и дополнительно все корни характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости. Тогда ультраслабое ограниченное на всей числовой оси решение нечеткого дифференциального уравнения (2) существует, единственно и имеет следующий вид:

$$(10) \quad \tilde{z}(t) = \int_{-\infty}^t G(t-s) \tilde{f}(s) ds.$$

Это вытекает из теоремы 1 с учетом утверждения 3.

В качестве геометрической иллюстрации нечеткозначного решения приведем рис. 2.

Нечеткозначную функцию $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow J$ назовем треугольной, или треугольного типа $(a(t), b(t), c(t))$, если найдутся непрерывные на всей числовой оси вещественные функции $a(t), b(t), c(t)$ такие, что $a(t) < b(t) < c(t)$ при $\forall t \in \mathbb{R}$ и функции принадлежности $\mu_{\tilde{f}(t)}(x)$ при $\forall t \in \mathbb{R}$ имеют треугольный вид (см. пример 1)

$$\mu_{\tilde{f}(t)}(x) = \begin{cases} \frac{x - a(t)}{b(t) - a(t)}, & \text{если } x \in [a(t), b(t)]; \\ \frac{x - c(t)}{b(t) - c(t)}, & \text{если } x \in [b(t), c(t)]; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В частности, нечеткозначная функция вида $\tilde{f}(t) = g(t)\tilde{r}$, где $g(t)$ – вещественнозначная, непрерывная, неотрицательная функция, а $\tilde{r} \in J$ – заданное нечеткое треугольное число, будет треугольной.

Рассмотрим специальный случай, когда на вход динамической системы, описываемой уравнением (2), поступает нечеткий сигнал треугольного типа. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 1 и дополнительно правая часть уравнения (2) – нечеткозначная функция $\tilde{f}(t)$ при $\forall t \in (-\infty, \infty)$ – имеет треугольный вид $(a(t), b(t), c(t))$. Тогда ультраслабое ограниченное на всей числовой оси решение уравнения (2), определяемое формулой (9), при $\forall t \in (-\infty, \infty)$ имеет треугольный тип $(\int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)a(s)ds, \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)b(s)ds, \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)c(s)ds)$.

Действительно, по условию $\tilde{f}(t)$ порождается тройкой непрерывных и ограниченных на всей оси вещественных функций $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, причем $a(t) < b(t) < c(t)$ при $\forall t \in (-\infty, \infty)$. Тогда согласно примеру 1 при $\forall \alpha \in [0, 1]$ и $t \in (-\infty, \infty)$ имеем

$$f_{\alpha}^{-}(t) = (b(t) - a(t))\alpha + a(t), \quad f_{\alpha}^{+}(t) = (b(t) - c(t))\alpha + c(t).$$

Поэтому в силу (8) будет:

$$z_{\alpha}^{-}(t) = (B(t) - A(t))\alpha + A(t), \quad z_{\alpha}^{+}(t) = (B(t) - C(t))\alpha + C(t).$$

Здесь использовано обозначение

$$A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)a(s)ds, \quad B(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)b(s)ds, \quad C(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)c(s)ds.$$

Таким образом, $\tilde{z}(t)$ при $\forall t \in (-\infty, \infty)$ есть нечеткое треугольное число типа $(A(t), B(t), C(t))$.

Аналогичный результат справедлив для нечеткозначных функций $\tilde{f}(t)$ трапецидального типа [3, гл. 5]. Тогда решение $\tilde{z}(t)$ также имеет трапецидальный тип.

Выясним условия, при которых ультраслабое ограниченное решение (10) нечеткого дифференциального уравнения (2) будет S -дифференцируемо по t .

Ниже используется следующее представление для ограниченного решения скалярного дифференциального уравнения (3) в предположениях утверждения 3:

$$(11) \quad x(t) = \int_0^{\infty} G(\sigma)f(t-\sigma)d\sigma,$$

которое получено из (5) заменой $t-s=\sigma$.

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 4 и дополнительно нечеткозначная функция $\tilde{f}(t)$ дифференцируема при $\forall t \in (-\infty, \infty)$ по Сеиккала, причем S -производная $\tilde{f}'(t)$ непрерывна и ограничена при $t \in (-\infty, \infty)$. Тогда ультраслабое ограниченное решение (10) нечеткого дифференциального уравнения (2) будет S -дифференцируемо при $t \in (-\infty, \infty)$ и выполнено равенство

$$(12) \quad \tilde{z}'(t) = \int_0^{\infty} G(\sigma) \tilde{f}'_t(t - \sigma) d\sigma.$$

Действительно, согласно (6), (7) и в силу (11) для α -индексов ультраслабого решения $\tilde{z}(t)$ нечеткого дифференциального уравнения (2) можем записать

$$(13) \quad z_{\alpha}^{\pm}(t) = \int_0^{\infty} G(\sigma) f_{\alpha}^{\pm}(t - \sigma) d\sigma.$$

Аналогично лемме 3 они порождают нечеткозначную функцию

$$(14) \quad \tilde{z}(t) = \int_0^{\infty} G(\sigma) \tilde{f}(t - \sigma) d\sigma.$$

По условию α -индексы $f_{\alpha}^{\pm}(t)$ при $\forall \alpha \in [0, 1]$ дифференцируемы по $t \in (-\infty, \infty)$, причем производные $(f_{\alpha}^{\pm})'_t(t)$ являются непрерывными и ограниченными на всей числовой оси скалярными функциями. Тогда вследствие (13) для производных α -индексов $z_{\alpha}^{\pm}(t)$ по t имеем

$$(15) \quad (z_{\alpha}^{\pm})'(t) = \int_0^{\infty} G(\sigma) (f_{\alpha}^{\pm})'_t(t - \sigma) d\sigma.$$

Здесь учтена возможность дифференцирования по параметру под знаком абсолютно сходящегося интеграла.

В силу неотрицательности функции Грина (аналогично доказательству леммы 3) при каждом t выражения (15) являются α -индексами S -производной $\tilde{z}'(t)$. Поэтому из (14), (15) с учетом теоремы 1 следует (12).

Тогда в силу теоремы 3 о единственности ультраслабого ограниченного на всей числовой оси решения уравнения (2) и согласно (10), (14) получим, что

$$\left(\int_{-\infty}^t G(t-s) \tilde{f}(s) ds \right)'_t = \left(\int_0^{\infty} G(\sigma) \tilde{f}(t - \sigma) d\sigma \right)'_t = \int_0^{\infty} G(\sigma) \tilde{f}'_t(t - \sigma) d\sigma.$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

Следствие 1. В условиях теоремы 6 нечеткая производная (12) непрерывна и ограничена при $t \in (-\infty, \infty)$.

Это доказывается аналогично теореме 2.

Утверждение 4. Пусть выполнены условия теоремы 4 и дополнительно нечеткозначная функция $\tilde{f}(t)$ дважды S -дифференцируема, причем первая и вторая S -производные $f'_t(t)$ и $f''_t(t)$ непрерывны и ограничены при $t \in (-\infty, \infty)$. Тогда ультраслабое ограниченное на всей числовой оси решение $\tilde{z}(t)$, определяемое формулой (14), является дважды S -дифференцируемым при $t \in (-\infty, \infty)$.

Действительно, при $\forall \alpha \in [0, 1]$ для α -индексов $z^\pm_\alpha(t)$ в соответствии с равенством (15) можно записать

$$(z^\pm_\alpha)''(t) = \left(\int_0^\infty G(\sigma)(f^\pm_\alpha)'_t(t - \sigma) d\sigma \right)' = \int_0^\infty G(\sigma)(f^\pm_\alpha)''_t(t - \sigma) d\sigma.$$

Отсюда на основании неотрицательности функции Грина выводим, что при $\forall t \in (-\infty, \infty)$ интегралы в правой части порождают нечеткое число $\tilde{z}''(t)$ – вторую S -производную $\tilde{z}(t)$.

Следствие 2. В условиях утверждения 4 производные $\tilde{z}'(t)$ и $\tilde{z}''(t)$ непрерывны и ограничены при $t \in (-\infty, \infty)$.

Следствие 3. Пусть в условиях теоремы 4 нечеткозначная функция $\tilde{f}(t)$ непрерывно S -дифференцируема порядка $j > 2$, причем все производные до порядка j ограничены на всей числовой оси. Тогда ультраслабое ограниченное решение (14) нечеткого дифференциального уравнения (2) является нечеткозначной функцией, непрерывно S -дифференцируемой j раз.

Замечание 3. Согласно утверждению 2 для производных α -индексов $z^\pm_\alpha(t)$, определяемых формулами (8), справедливы представления

$$(z^\pm_\alpha)^{(j)}_t(t) = \int_{-\infty}^\infty G_t^{(j)}(t - s) f^\pm_\alpha(s) ds \quad (j = 1, \dots, n - 1).$$

Однако, как показывают приведенные ниже примеры 2, 3, производные $G_t^{(j)}(t - s)$ функции Грина не сохраняют знак. Так что для доказательства S -дифференцируемости нечеткозначного решения более удобным оказалось представление (13).

Во многих прикладных задачах важно, чтобы нечеткозначное решение $\tilde{z}(t)$ было неотрицательно, что означает $z^-_\alpha(t) \geq 0$ ($\forall \alpha \in [0, 1], \forall t \geq 0$). В условиях теоремы 1 имеет место

Следствие 4. Пусть выполнены условия теоремы 1 и дополнительно нечеткозначная неоднородность уравнения (2) $\tilde{f}(t)$ неотрицательна, т.е. $f^-_\alpha(t) \geq 0$ для $\forall \alpha \in [0, 1]$ и $\forall t \in (-\infty, \infty)$. Тогда ультраслабое ограниченное на всей оси решение уравнения (2) неотрицательно.

Это вытекает из представления (9) в силу предположения о неотрицательности функции Грина $G(t-s)$ и $f_{\alpha}^{-}(s)$.

В частности, для треугольного нечеткого числа (a, b, c) неотрицательность означает, что $a \geq 0$.

4. Примеры радиотехнических цепей с нечеткозначными входными сигналами

В настоящем разделе рассмотрены приложения результатов раздела 3 к простейшим радиотехническим цепям (см., например, [29]) с нечеткими входными сигналами.

Пример 2. Рассмотрим RC-фильтр, т.е. радиотехническую цепь, характеризующую схемой, изображенной на рис. 3, где R – сопротивление, C – емкость.

На вход RC-фильтра, т.е. динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением первого порядка с постоянными коэффициентами

$$(16) \quad \tilde{z}'(t) + \beta \tilde{z}(t) = \tilde{y}(t), \quad \beta = \frac{1}{RC} > 0,$$

поступает нечеткий непрерывный и ограниченный на всей числовой оси сигнал $\tilde{y}(t)$.

Укажем характеристики выходного нечеткого ограниченного сигнала $\tilde{z}(t)$ в случае RC-фильтра. Заметим, что функция Грина задачи об ограниченных решениях скалярного уравнения $x' + \beta x = y(t)$ при $\beta > 0$ представима формулой

$$G_1(t) = \begin{cases} e^{-\beta t} & \text{при } t \geq 0; \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

При этом $G_1(t) \geq 0$ при $\forall t \in (-\infty, \infty)$.

Утверждение 5. Пусть коэффициент β нечеткого дифференциального уравнения (16) положителен, а правая часть $\tilde{y}(t)$ – непрерывная, ограниченная при $t \in (-\infty, \infty)$ нечеткозначная функция. Тогда нечеткий непрерывный

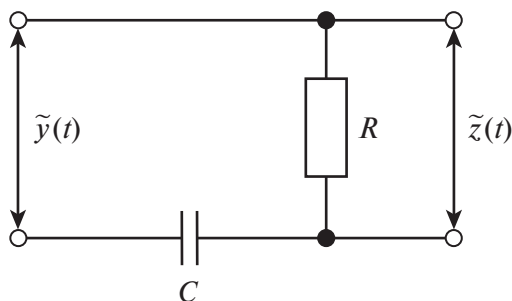


Рис. 3. RC-фильтр.

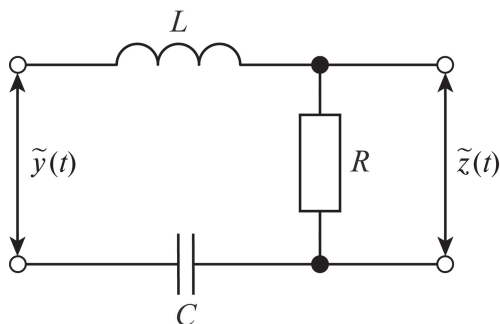


Рис. 4. Последовательный колебательный контур.

и ограниченный на всей числовой оси ультраслабый сигнал на выходе динамической системы (16) имеет вид

$$(17) \quad \tilde{z}(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-s)} \tilde{y}(s) ds.$$

Это следует из теоремы 4.

Утверждение 6. Пусть выполнены условия утверждения 5 и дополнительно нечеткозначная функция $\tilde{y}(t)$, стоящая в правой части уравнения (16), имеет треугольный тип при $t \geq 0$. Тогда решение (17) также имеет треугольный тип при $\forall t \geq 0$.

Это вытекает из представления (17) согласно теореме 5.

В [9] рассмотрен случай, когда правая часть уравнения (16) имеет вид $\tilde{y}(t) = \tilde{r}f(t)$, где $\tilde{r} \in J$ – нечеткое число, а функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ почти периодична и $f(t) \geq 0$ для $\forall t \in \mathbb{R}$. В этом случае приведено следующее условие, обеспечивающее H -дифференцируемость решения (17) нечеткого дифференциального уравнения (16): $f(t) > \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-s)} f(s) ds$.

Это условие накладывает дополнительное ограничение либо на область изменения t , либо на взаимосвязь параметров β и $f(t)$ уравнения (16).

Ниже приведено утверждение, обеспечивающее S -дифференцируемость нечеткозначного решения уравнения (16), вытекающее из теоремы 6.

Утверждение 7. Пусть выполнены условия утверждения 5 и дополнительно нечеткозначная правая часть уравнения (16) $\tilde{y}(t)$ непрерывно S -дифференцируема при $\forall t \in (-\infty, \infty)$, причем S -производная $\tilde{y}'(t)$ ограничена на всей числовой оси. Тогда ультраслабое ограниченное решение (17) непрерывно S -дифференцируемо при $\forall t \in (-\infty, \infty)$ и удовлетворяет нечеткому дифференциальному уравнению (16) при $\forall t \in (-\infty, \infty)$.

Таким образом, в условиях утверждения 7 формула (17) дает сильное ограниченное решение нечеткого уравнения (16).

Пример 3. Рассмотрим последовательный колебательный контур, т.е. радиотехническую цепь, характеризуемую схемой, изображенной на рис. 4, где R – сопротивление, C – емкость, L – индуктивность.

На вход последовательного колебательного контура, описываемого дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами

$$(18) \quad a_2 \ddot{z}(t) + a_1 \dot{z}(t) + a_0 z(t) = \tilde{y}(t), \quad a_2 = L \geq 0, \quad a_1 = R > 0, \quad a_0 = \frac{1}{RC} > 0,$$

поступает непрерывный нечеткий ограниченный на всей числовой оси сигнал $\tilde{y}(t)$ (см. рис. 4).

Укажем характеристики выходного нечеткого ограниченного сигнала $\tilde{z}(t)$.

Теорема 7. Пусть коэффициенты нечеткого дифференциального уравнения (18) удовлетворяют условиям $a_i > 0$ ($i = 0, 1, 2$) и $a_1^2 - 4a_0a_2 > 0$. Пусть входной сигнал $\tilde{y}(t)$ является непрерывной ограниченной при $t \in (-\infty, \infty)$ нечеткозначной функцией. Тогда для нечеткого ультраслабого сигнала $\tilde{z}(t)$ на выходе динамической системы (18) справедливо представление

$$(19) \quad \tilde{z}(t) = \int_{-\infty}^t G_2(t-s) \tilde{y}(s) ds.$$

Здесь $G_2(t)$ – функция Грина задачи об ограниченных решениях для вещественного дифференциального уравнения $a_2 x'' + a_1 x' + a_0 x = f(t)$ с непрерывной и ограниченной на всей числовой оси вещественнозначной функцией $f(t)$, имеющая вид

$$G_2(t) = \begin{cases} (e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t})(\lambda_2 - \lambda_1)^{-1} & \text{при } t \geq 0; \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

При этом λ_1, λ_2 – вещественные, различные и отрицательные корни характеристического уравнения $a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$ ($\lambda_1 < \lambda_2 < 0$).

Действительно, заметим, что $G_2(t) \geq 0$ при $\forall t \in (-\infty, \infty)$. Тогда в соответствии с теоремой 4 для нечеткозначного сигнала $\tilde{z}(t)$ на выходе справедливо равенство (19).

При этом выражение (19) является ультраслабым решением нечеткого дифференциального уравнения (18).

Утверждение 8. Пусть выполнены условия теоремы 7. Если дополнительно правая часть (18) $\tilde{y}(t)$ при $\forall t \in (-\infty, \infty)$ – треугольное нечеткое число, то ультраслабое ограниченное на всей числовой оси решение (19) нечеткого дифференциального уравнения (18) при $t \in (-\infty, \infty)$ – также треугольное нечеткое число.

Это вытекает из представления (19) и теоремы 5.

Выясним, когда ультраслабое ограниченное решение (19) нечеткого дифференциального уравнения (18) является S -дифференцируемой нечеткозначной функцией.

Теорема 8. Пусть выполнены условия теоремы 7 и дополнительно нечеткозначная функция $\tilde{y}(t)$ непрерывно S -дифференцируема при $\forall t \in (-\infty, \infty)$, причем S -производная $\tilde{y}'(t)$ ограничена при $t \in (-\infty, \infty)$. Тогда ультраслабое ограниченное решение $\tilde{z}(t)$ нечеткого дифференциального уравнения (18), определяемое формулой (19), S -дифференцируемо при $\forall t \in (-\infty, \infty)$.

Это вытекает из теоремы 6.

Кроме того справедлива

Теорема 9. Пусть выполнены условия теоремы 7 и дополнительно правая часть уравнения (18) $\tilde{y}(s)$ дважды непрерывно S -дифференцируема, причем S -производные $\tilde{y}'(t)$ и $\tilde{y}''(t)$ ограничены при $t \in (-\infty, \infty)$. Тогда ультраслабое ограниченное решение $\tilde{z}(t)$, определяемое формулой (19), также дважды непрерывно S -дифференцируемо и удовлетворяет нечеткому дифференциальному уравнению (18).

Это вытекает из утверждения 4.

Таким образом, в условиях теоремы 9 формула (19) дает сильное ограниченное решение нечеткого уравнения (18).

5. О взаимосвязи модальных значений входного и выходного нечетких сигналов

Специфика рассмотрения нечетких входных сигналов в радиотехнике (когда неизвестно априорное распределение вероятностей входного сигнала) состоит в выделении наиболее возможного входного сигнала. После этого с учетом параметров системы делаются выводы и для характеристик наиболее возможного выходного нечеткого сигнала.

В теории вероятностей для соответствующей задачи слово «возможное» надо было бы заменить на слово «вероятное». Особенно это наглядно для входного и выходного нечетких сигналов треугольного типа (см. пример 1). А именно, пусть, например, на вход радиотехнической цепи, описываемой нечетким дифференциальным уравнением (2), поступает нечеткий входной сигнал треугольного типа $(a(t), b(t), c(t))$. Для него при каждом t согласно примеру 1 $b(t)$ есть модальное значение. Тогда согласно теореме 5 справедливо

Утверждение 9. В условиях теоремы 5 модальное значение нечеткого треугольного сигнала на выходе линейной динамической системы (2) определяется по модальному значению $b(t)$ входного нечеткого треугольного сигнала $(a(t), b(t), c(t))$ формулой $B(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)b(s)ds$, где использованы обозначения теоремы 5.

Важным разделом математической статистики является теория доверительных интервалов (см., например, [30, гл. 2]). По аналогии обсудим задачу о доверительных возможностных интервалах значений входных и выходных нечетких сигналов.

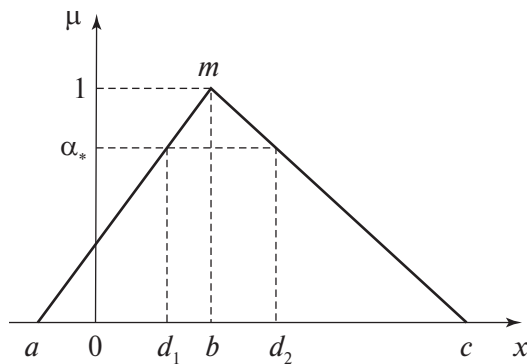


Рис. 5. Доверительный возможностный интервал модального значения входного нечеткого сигнала.

Допустим, что эксперты смоделировали входной нечеткий сигнал с уровнем доверительной возможности $\alpha_* \in [0,7; 1)$ при произвольном $t \geq 0$ как треугольный с функцией принадлежности $\mu_t(x)$, обладающей носителем $(a(t), c(t))$. Кроме того, предположим, что модальное значение при заданном $t \geq 0$ лежит в доверительном возможностном интервале $[d_1(t), d_2(t)]$ с уровнем доверительной возможности α_* , причем $[d_1(t), d_2(t)] \subset (a(t), c(t))$ (см. рис. 5).

Замечание 4. В указанных предположениях модальное значение нечеткого треугольного сигнала с уровнем доверительной возможности α_* имеет вид

$$b(t) = \frac{1}{\alpha_*}(d_1(t) - (1 - \alpha_*)a(t)).$$

Это вытекает из того, что, согласно рис. 5 точка m с координатами $(b, 1)$ лежит на прямой, проходящей через точки с координатами $(a, 0)$ и (d_1, α_*) и, следовательно, описываемой уравнением $\frac{\mu}{\alpha_*} = \frac{x-a}{d_1-a}$.

Рассмотрим вопрос о доверительном возможностном интервале модального значения выходного нечеткого сигнала с этим же уровнем доверительной возможности α_* .

Утверждение 10. Пусть выполнены условия теоремы 5, причем на вход динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением (2), с доверительной возможностью α_* поступает нечеткий сигнал треугольного типа с носителем $(a(t), c(t))$, модальное значение которого при произвольном $t \geq 0$ и заданном уровне доверительной возможности $\alpha_* \in [0,7; 1)$, лежит в доверительном возможностном интервале $[d_1(t), d_2(t)]$. Тогда доверительный возможностный интервал для модального значения выходного нечеткого сигнала имеет вид $[D_1(t), D_2(t)]$. Здесь $D_1(t) = (1 - \alpha_*)A(t) + \alpha_*B(t)$ и $D_2(t) = \alpha_*B(t) + (1 - \alpha_*)C(t)$, где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ определены в теореме 5. При этом в качестве $b(t)$ для определения модального значения $B(t)$ используется значение, приведенное в замечании 4.

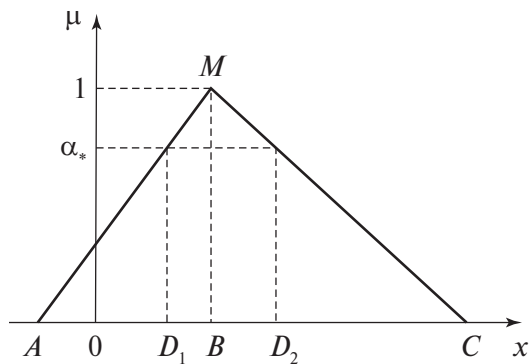


Рис. 6. Доверительный возможностный интервал модального значения выходного нечеткого сигнала.

Действительно, по теореме 5 и с учетом замечания 4 выходной нечеткий сигнал есть сигнал треугольного типа $(A(t), B(t), C(t))$. Тогда согласно рис. 6 получим доверительный возможностный интервал $[D_1(t), D_2(t)]$ для модального значения выходного нечеткого сигнала при фиксированном $t > 0$ с уровнем доверительной возможности α_* .

При этом согласно рис. 6 $D_1 = (1 - \alpha_*)A + \alpha_*B$ определяется как абсцисса точки пересечения прямой $[A, M]$, характеризуемой уравнением (см. пример 1) $\mu = (x - A)(B - A)^{-1}$ и прямой $\mu = \alpha_*$. А точка $D_2 = \alpha_*B + (1 - \alpha_*)C$ есть абсцисса точки пересечения прямой $[M, C]$, определяемой уравнением $\mu = (x - C)(B - C)^{-1}$ и прямой $\mu = \alpha_*$.

Отметим, что при практическом применении результатов разделов 4, 5 удобно моделировать входной нечеткий сигнал формулой $\tilde{y}(t) = \tilde{r}g(t)$, где $\tilde{r} \in J$ – нечеткое треугольное число, а $g(t)$ – вещественная функция; либо моделировать $\tilde{y}(t)$ при $t \geq 0$ и полагать $\tilde{y}(t) = \tilde{y}(0)$ при $t \leq 0$.

6. Заключение

Основные результаты данной работы относятся к «нечетким» динамическим системам, описываемым линейными дифференциальными уравнениями n -го порядка с постоянными коэффициентами, в предположении непрерывности и ограниченности входного нечеткого сигнала (раздел 3). Они опираются на развитие метода функций Грина на случай нечетких дифференциальных уравнений. Важное место в работе уделяется выяснению вопроса о гладкости полученных решений. Отметим еще результат о треугольном типе нечеткого сигнала на выходе динамической системы, если таков нечеткий сигнал на входе.

Приложения, приведенные в разделе 4 статьи, демонстрируют возможности применения установленных общих положений к радиотехническим цепям с нечеткими входными сигналами. Они уточняют некоторые результаты раздела 3 на случай динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями первого и второго порядков. Существенную роль играет

раздел 5, в котором введено и использовано понятие доверительного возможностного интервала по аналогии с доверительным интервалом, используемым в математической статистике.

Подход, представленный в настоящей статье, является альтернативой стандартному подходу к исследованию линейных динамических систем с постоянными коэффициентами, связанному с частотной характеристикой, прямым и обратным преобразованием Фурье, а также преобразованию Лапласа.

Отметим, что развитый подход допускает распространение на случай периодических и почти периодических сигналов, а также может быть полезен при исследовании краевых задач для нечетких дифференциальных уравнений.

Многие результаты могут быть модифицированы на случай обобщенных нечетких производных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. М.: КноРус, 2014.
2. *Алефельд Г., Херицбергер Ю.* Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987.
3. *Аверкин А.Н.* Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. М.: Наука, 1986.
4. *Пегат А.* Нечеткое моделирование и управление. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.
5. *Puri M.L., Ralescu D.A.* Differential of fuzzy functions // J. Math. Anal. Appl. 1983. V. 91. P. 552–558.
6. *Kaleva O.* Fuzzy differential equations // Fuzzy sets and systems. 1987. V. 24. No. 3. P. 301–317.
7. *Seikkala S.* On the fuzzy initial value problem // Fuzzy Sets and Systems. 1987. V. 24. No. 3. P. 319–330.
8. *Jong Yeoul Park, Han H.* Existence and uniqueness theorem for a solution of fuzzy differential equations // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 1996. P. 271–280.
9. *Barnab'as Bede, Sorin G. Gal.* Almost periodic fuzzy-number-valued functions // Fuzzy Sets and Systems. 2004. V. 151. P. 385–403.
10. *Barnab'as Bede, Sorin G. Gal.* Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. 2005. V. 147. P. 581–599.
11. *Liu H.K.* Comparison result of two-point fuzzy boundary value problems // World Academy of Science. Engineering and Technology. 2011. V. 51. P. 697–703.
12. *Мочалов И.А., Хрисат М.С., Шихаб Еддин М.Я.* Нечеткие дифференциальные уравнения в задачах управления. Часть II. // Информационные технологии. 2015. Т. 21. № 4. С. 243–250.
13. *Деменков Н.П., Микрин Е.А., Мочалов И.А.* Нечеткое оптимальное управление линейными системами. Позиционное управление. Часть 1. // Информационные технологии. 2019. Т. 25. № 5. С. 259–270.

14. *Esmi E., Sanchez D.E., Wasques V.F., de Barros L.C.* Solutions of higher order linear fuzzy differential equations with interactive fuzzy values // *Fuzzy Sets and Systems*. 2021. V. 419. P. 122–140.
15. *Liang Cao, Deyin Yao, Hongyi Li, Wei Meng, Renquan Lu.* Fuzzy-based dynamic event triggering formation control for nonstrict-feedback nonlinear MASs // *Fuzzy Sets and Systems*. 2023. V. 452. P. 1–22.
16. *Rong Zhao, Lu Liu, Gang Feng.* Asynchronous fault detection filtering design for continuous-time T-S fuzzy affine dynamic systems in finite-frequency domain // *Fuzzy Sets and Systems*. 2023. V. 452. P. 168–190.
17. *Rui Dai, Minghao Chen.* On the structural stability for two-point boundary value problems of undamped fuzzy differential equations // *Fuzzy Sets and Systems*. 2023. V. 453. P. 95–114.
18. *Khastan A., Bahrami F., Ivaz K.* New Results on Multiple Solutions for Nth-Order Fuzzy Differential Equations under Generalized Differentiability // *Boundary Value Problems*. 2009. No. 7. P. 1–13.
19. *Allahviranloo T., Abbasbandy S., Salahshour S., Hakimzadeh A.* A new method for solving fuzzy linear differential equations // *Soft Computing*. 2011. V. 92. P. 181–197.
20. *Salahshour S., Allahviranloo T.* Applications of fuzzy Laplace Transforms // *Soft Computing*. 2013. V. 17. No. 1. P. 145–158.
21. *Ahmad L., Farooq M., Abdullah S.* Solving nth order fuzzy differential equation by fuzzy Laplace transform // *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2014. P. 1–20.
22. *Elhassan ElJaoui, Said Melliani, L. Saadia Chadli.* Solving second-order fuzzy differential equations by the fuzzy Laplace transform method // *Advances in Difference Equations*. February 2015. P. 1–14.
23. *Красносельский М.А., Бузд В.Ш., Колесов Ю.С.* Нелинейные почти периодические колебания. М.: Наука, 1970. 351 с.
24. *Перов А.И.* Об ограниченных решениях обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений n -го порядка // *Дифференциальные уравнения*. 2010. Т. 46. № 9. С. 1228–1244.
25. *Kaleva O., Seikkala S.* On fuzzy metric spaces // *Fuzzy Sets and Systems*. 1984. V. 12. P. 215–229.
26. *Aumann R.J.* Integrals of set-valued functions // *J. Math. Anal. Appl.* 1965. No. 12. P. 1–12.
27. *Hsien-Chung Wu.* The fuzzy Riemann integral and its numerical integration // *Fuzzy Sets and Systems*. 2000. V. 110(1). P. 1–25.
28. *Hukuhara M.* Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe // *Func. Ekvacioj*. 1967. No. 11. P.205–223.
29. *Баскаков С.И.* Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высш. школа, 1988. 448 с.
30. *Ивченко Г.И., Медведев Ю.И.* Математическая статистика. М.: Книжный дом «Либроком», 2019. 352 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Матасовым.

Поступила в редакцию 15.12.2023

После доработки 10.07.2025

Принята к публикации 11.07.2025