

Нелинейные системы

© 2025 г. А.Р. ГАЙДУК, д-р техн. наук (gaiduk_2003@mail.ru)
(Институт радиотехнических систем и управления
Южного федерального университета, Таганрог)

СИНТЕЗ ГИБРИДНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПОДХОДА¹

Разработан метод синтеза гибридных нелинейных систем управления объектами с дифференцируемыми нелинейностями и измеряемым вектором состояния на основе непрерывных квазилинейных моделей, с применением квазилинейной дискретизации. Гибридная система синтезируется с повышенным периодом дискретизации управления и нулевой статической ошибкой по задающему воздействию. Решение задачи синтеза существует, если нелинейный объект удовлетворяет условиям критериев управляемости по состоянию, критерия управляемости выхода и некоторым другим условиям. Устойчивость гибридной системы доказывается с применением «технического» подхода, предложенного М.А. Айзерманом и Е.С. Пятницким, а также метода функций Ляпунова. Эффективность предложенного метода синтеза гибридных систем управления иллюстрируется численным примером. Предложенный метод может применяться для создания гибридных систем управления нелинейными объектами различного назначения.

Ключевые слова: дифференцируемая нелинейность, квазилинейная модель, критерий управляемости по состоянию, критерий управляемости выхода, квазилинейная дискретизация, гибридная система, устойчивость, статическая ошибка.

DOI: 10.31857/S0005231025100027

1. Введение

В последнее время значительное внимание уделяется разработке методов синтеза гибридных нелинейных систем управления, которые характеризуются наличием непрерывной и дискретной нелинейной динамики, что обуславливает необходимость применения дифференциальных и разностных уравнений [1–3]. В действительности такие системы представляют совокупность непрерывных (аппаратных) и цифровых (программируемых) элементов [4]. В известных публикациях к гибридным относят весьма разнообразные системы.

¹ Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда, (грант № 24-19-00063), «Теоретические основы и методы группового управления безэкипажными подводными аппаратами», <https://rscf.ru/project/24-19-00063/>, выполняемый в Южном федеральном университете.

Гибридные системы первого класса включают либо один нелинейный объект, работающий в переключаемых режимах, либо несколько объектов, которые должны включаться в той или иной последовательности. В этом случае разностные уравнения описывают цифровую часть, которая обеспечивает переключение элементов непрерывной части [1, 5–8]. Для создания гибридных нелинейных систем оптимального управления, в [1] используется необходимый принцип гибридности (Hybrid Necessary Principle), который позволяет учесть ограничения, обусловленные стратегией переключения. В [5] эта же цель достигается применением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана и спектрального метода Галеркина.

Гибридность системы управления, рассматриваемой в [6], обусловлена переключениями нескольких непрерывных подсистем, а создаваемой в [7] системы – переключениями режимов ее работы. В [8] рассматривается квадрокоптер с переключаемой в полете морфологией. Его гибридная система управления включает нелинейный ПИД-регулятор и дискретный регулятор, которые обеспечивают устойчивость системы управления при всех возможных конфигурациях квадрокоптера.

Второй класс гибридных систем, представляется более определенным [2, 3]. Здесь непрерывный объект управления снабжается дискретным (цифровым) регулятором. Основная проблема – обеспечение стабильного функционирования гибридной системы при относительно большом периоде работы цифрового контроллера. Эта необходимость возникает при создании систем управления инерционными объектами, такими как хлебопекарные печи, инкубаторы, теплицы и т.п., а также объектами, функционирующими в жестких температурных условиях, когда затруднено охлаждение контроллера. Из-за большого периода оказываются невыполненными условия теоремы Котельникова, что исключает возможность сохранения устойчивости системы, которая имеет место в классических случаях при достаточно малом периоде дискретизации. Поэтому для создания гибридных систем управления данного класса привлекаются различные методы [2, 3, 9–12]. В [2] для этой цели применяется прогнозирующее управление на основе квадратичного и целочисленного программирования. Эффективность подхода иллюстрируется примером синтеза гибридной системы управления объектом, включающим три сферических резервуара.

Метод гибридного терминального управления с использованием идентифицированной модели объекта управления разработан в [3]. Здесь для идентификации нелинейных объектов предложено использовать искусственную двухслойную нейронную сеть. Для синтеза гибридных систем управления нелинейными объектами с запаздыванием и параметрической неопределенностью в [9–11] применяются критерий гиперустойчивости, условие L-диссипативности и фильтр-корректор. Дискретное управление здесь является результатом дискретизации непрерывного. В [12] рассматривается задача отслеживания заданной траектории квадрокоптером в условиях неопределен-

ности. В системе слежения применяется гибридный автопилот, реализующий прогнозирующее и нечеткое управление.

В данной работе разработан новый метод синтеза гибридных нелинейных систем управления односвязными объектами с дифференцируемыми нелинейностями и измеряемым вектором состояния. При этом используются квазилинейные модели нелинейных объектов, а также метод квазилинейной дискретизации [13–17]. Предполагается, что объект удовлетворяет критериям управляемости по состоянию, управляемости выхода и некоторым дополнительным условиям. Синтезируются гибридные системы второго класса с увеличенным периодом дискретизации, что позволяет существенно снизить требования к быстродействию вычислительных средств. Основным ограничением разработанного метода является дифференцируемость нелинейностей объекта управления. Если вектор состояния не измеряется, то может использоваться наблюдатель состояния.

2. Постановка задачи

Рассматриваются односвязные аффинные по управлению нелинейные объекты, уравнения которых в отклонениях имеют вид

$$(1) \quad \dot{x} = \varphi(x, u, f), \quad y = \xi(x, u),$$

где $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ – вектор переменных состояния; $u, f, y \in \mathbb{R}$ – скалярные управление, возмущение и выходная управляемая переменная; $\varphi(x, u, f)$ – нелинейная n -вектор-функция, $\xi(x, u)$ – скалярная нелинейная функция. Эти функции являются ограниченными, дифференцируемыми по всем аргументам; причем $\varphi(0, 0, 0) = 0$, $\xi(0, 0) = 0$. Вектор состояния x и выходная величина y или отклонение $\varepsilon = g - y$ измеряются. Здесь $0 \in \mathbb{R}^n$ – нулевой вектор, $g = g(t) \in \mathbb{R}$ и $f = f(t) \in \mathbb{R}$ – ограниченные по модулю задающее воздействие и возмущение, являющиеся произвольными функциями времени, причем $f(t)$ не измеряется.

Так как нелинейности $\varphi(x, u, f)$ и $\xi(x, u)$ в (1) являются дифференцируемыми, то методом, представленным в [15, 16], можно получить квазилинейную модель (КЛМ) вида

$$(2) \quad \dot{x} = A(x)x + b(x)u + h(x)f, \quad y = c^T(x)x + d(x)u,$$

где $A(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $b(x), h(x), c(x) \in \mathbb{R}^n$ – функциональные матрица и векторы, все элементы которых, а также $d(x) \in \mathbb{R}$ – известные ограниченные дифференцируемые нелинейные функции или числа. Подчеркнем, что КЛМ описывают соответствующие объекты с дифференцируемыми нелинейностями с той же точностью, что и уравнения (1), т.е. свойства уравнений (2) полностью соответствуют свойствам уравнений (1). Различные методы построения КЛМ известны достаточно давно. Например, уравнение $\dot{x} = D(x)x$ использовалось Н.Н. Красовским и др. для построения функций Ляпунова нелинейных систем еще в середине прошлого века, см. [18].

Предполагается, что КЛМ (2) удовлетворяет критерию управляемости по состоянию:

$$(3) \quad \det U_s(x) = \det[b(x) \ A(x)b(x) \ \dots \ A^{n-1}(x)b(x)] \neq 0, \ \forall x \in \Omega_{U_s},$$

а также критерию управляемости выхода:

$$(4) \quad \gamma_{об}(x) \neq 0, \ \forall x \in \Omega_{U_o},$$

где $\gamma_{об}(x)$ – показатель управляемости выхода объекта (1), определяемый выражением

$$(5) \quad \gamma_{об}(x) = d(x) \det A(x) - c^T(x) \text{adj} A(x) b(x).$$

В (3)–(5) $\Omega_{U_s} = \{x \in \mathbb{R}^n : \det U_s(x) \neq 0\}$; $\Omega_{U_o} = \{x \in \mathbb{R}^n : \gamma_{об}(x) \neq 0\}$; $\text{adj} A(x)$ – присоединенная к $A(x)$ матрица [19]; $\Omega_{U_u} = \Omega_{U_o} \cap \Omega_{U_s}$ – множество векторов $x \in \mathbb{R}^n$, при которых выполняются условия (3), (4); кроме этого, и Ω_{U_s} , и Ω_{U_o} включают вектор $x = \mathbf{0}$.

Целью данной работы является разработка метода синтеза гибридных систем второго класса для управления нелинейными объектами типа (1). Периоды дискретизации этих систем должны быть существенно большими тех периодов, которые имеют дискретные системы управления, созданные с применением традиционных методов. Для решения этой задачи используется кусочно-постоянное управление, получаемое методом квазилинейной дискретизации нелинейных объектов [17].

3. Метод квазилинейной дискретизации

В этом методе подвергаются дискретизации не уравнения нелинейных объектов, а их квазилинейные модели, с применением метода трапеций. Возможность этого обусловлена ограниченностью правых частей уравнений КЛМ (2) при ограниченных x , u , g и f .

Пусть T – некоторый период дискретизации решений $x = x(t) \in \Omega_{U_u}$ дифференциального уравнения (2). Каждому моменту времени $t = kT$, $k = 0, 1, 2, \dots$ соответствует дискретное значение $x_k = x(kT)$ этого решения. Точное значение $x_{k+1} = x(kT + T)$ можно определить выражением

$$(6) \quad x_{k+1} = x_k + \int_{kT}^{kT+T} F(t) dt,$$

где $F(t) = A(x)x + b(x)u + h(x)f(t) |_{x=x(t)}$ – правая часть первого уравнения (2). Примем, что управление $u = u_k$ является ограниченным и кусочно-постоянным. В настоящее время точные методы вычисления интегралов (6) неизвестны, поэтому на основе модифицированного метода трапеций подынтегральное выражение в (6) заменяется следующим:

$$\bar{F} = 0,5[A_k x_k + A_k x_{k+1} + 2b_k u_k + 2h_k f_k] + \Delta_k,$$

где $\Delta_k = 0,5[(A_{k+1} - A_k)x_{k+1} + b_{k+1}u_{k+1} - b_k u_k + h_{k+1}f_{k+1} - h_k f_k]$. Здесь для краткости записи введены обозначения: $A_k = A(x_k)$, $b_k = b(x_k)$, $h_k = h(x_k)$. Заменяя в (6) $F(t)$ на $\bar{F}$ при $\Delta_k = \mathbf{0}$ и интегрируя, получим разностное уравнение

$$(7) \quad [E - 0,5TA(x_k)]x_{k+1} = [E + 0,5TA(x_k)]x_k + Tb(x_k)u_k + Th(x_k)f_k, \quad x_k \in \Omega_{U_u}.$$

Отметим, что модификация метода трапеций состоит в добавлении и вычитании суммы $A_k x_{k+1} + b_k u_k + h_k f_k$ при выводе выражения $\bar{F}(kT)$ из $F(t)$.

Уравнение (7) может быть разрешено относительно x_{k+1} , если матрица $[E - 0,5TA(x_k)]$ имеет обратную, т.е. если выполняется следующее условие на выбор периода T :

$$(8) \quad \det[E - 0,5TA(x)] \neq 0, \quad x \in \Omega_{U_u}.$$

Чтобы найти T , ищутся корни η_i вспомогательного уравнения $\det[E - 0,5\eta A(x)] = 0$. Пусть это уравнение при $x \in \Omega_{U_u}$ имеет $0 < m(x) \leq n$ [20, с. 37] вещественных, положительных корней, причем из них $m_1(x)$ не зависят от x , а $m_2(x) = m(x) - m_1(x)$ зависят от x . Тогда

$$(9) \quad 0 < T < \min\{\eta_{\min,1}, \eta_{\min,2}\},$$

где $\eta_{\min,1} = \min\{\eta_i, i = \overline{1, m_1(x)}, x \in \Omega_{U_u}\}$; $\eta_{\min,2} = \inf\{\eta > 0 : \eta_i = \eta_i(x), i = \overline{1, m_2(x)}, x \in \Omega_{U_u}\}$.

Если же $m(x) \equiv 0$, т.е. уравнение $\det[E - 0,5\eta A(x)] = 0$ не имеет вещественных, положительных корней η_i , то из условия на матрицу $[E - 0,5TA(x_k)]$ ограничений на T не следует.

В этом случае значение T в (8) принимается произвольным, исходя из конструктивных ограничений, причем в дальнейшем значение T может быть уточнено.

Если период T выбран согласно (8), то из (7) и второго уравнения (2) следуют выражения:

$$(10) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= A_d(x_k)x_k + b_d(x_k)u_k + h_d(x_k)f_k, \\ y_k &= c^T(x_k)x_k + d(x_k)u_k, \quad x_k \in \Omega_{U_u}, \end{aligned}$$

где

$$(11) \quad A_d(x_k) = [E - 0,5TA(x_k)]^{-1}[E + 0,5TA(x_k)],$$

$$(12) \quad \begin{aligned} b_d(x_k) &= [E - 0,5TA(x_k)]^{-1}Tb(x_k), \\ h_d(x_k) &= [E - 0,5TA(x_k)]^{-1}Th(x_k). \end{aligned}$$

Соотношения (6)–(12) представляют метод квазилинейной дискретизации, а выражения (10)–(12) являются дискретной квазилинейной моделью

(ДКЛМ) объекта (1) [17]. В отличие от точной КЛМ (2) эта модель является приближенной. Однако, как будет показано ниже, если некоторое управление u_k обеспечивает устойчивость положения равновесия ДКЛМ (10), то это же управление, при некоторых условиях, обеспечивает устойчивость и положения равновесия системы управления объектом (1). В этом смысле квазилинейная дискретизация аналогична классической линеаризации в непрерывном случае, при которой управление, построенное по уравнениям первого приближения, стабилизирует в малом положение равновесия нелинейной системы.

Применение ДКЛМ (10)–(12) позволяет придать гибридным системам значительно больший период дискретизации по сравнению с традиционными подходами, тем самым существенно снижая требования по быстродействию к контроллерам систем управления.

4. Стабилизирующее управление

Построение этого управления осуществляется алгебраическим полиномиально-матричным (АПМ) методом [21, 22]. Будем считать, что период T выбран таким, что выполнено условие (8) и получена ДКЛМ (10)–(12), которая удовлетворяет критерию управляемости по состоянию² нелинейных дискретных объектов:

$$(13) \quad \det U_d(x_k) = \det[b_d(x_k) \ A_d(x_k)b_d(x_k) \ \dots \ A_d^{n-1}(x_k)b_d(x_k)] \neq 0, \quad x_k \in \Omega_{Ud},$$

где $\Omega_{Ud} = \{x_k \in \Omega_{Uu} : \det U_d(x_k) \neq 0\}$, т.е. $\Omega_{Ud} \subset \Omega_{Uu}$ – область, в которой выполнены условия (3), (4), (8), (13) и содержится точка $x = \mathbf{0}$.

При этом дискретное управление, стабилизирующее систему (10)–(12), имеет вид

$$(14) \quad u_k(x_k) = -l^T(x_k)x_k = -[l_1(x_k) \ l_2(x_k) \ \dots \ l_n(x_k)]x_k.$$

Коэффициенты $l_i(x_k)$ определяются по следующему алгоритму [21]:

1) по (11), (12) находятся функциональные полиномы:

$$(15) \quad \begin{aligned} A_d(z, x_k) &= \det[zE - A_d(x_k)] = \\ &= z^n + \alpha_{n-1}(x_k)z^{n-1} + \dots + \alpha_1(x_k)z + \alpha_0(x_k), \end{aligned}$$

$$(16) \quad \begin{aligned} V_{d,i}(z, x_k) &= e_i^T \text{adj}[zE - A_d(x_k)]b_d(x_k) = \\ &= v_{i,n-1}(x_k)z^{n-1} + v_{i,n-2}(x_k)z^{n-2} + \dots + v_{i,0}(x_k), \end{aligned}$$

где e_i – i -й столбец единичной $n \times n$ -матрицы E ; $\alpha_j(x_k)$, $v_{i,j}(x_k)$ – функциональные или числовые коэффициенты, $i = 1, \dots, n$; $j = 0, 1, \dots, n-1$.

² Вопрос о том, выполняется ли условие (13), если выполнены условия (3) и (8), является открытым.

2) формируется полином

$$(17) \quad D^*(z) = \prod_{i=1}^n (z - \sigma_i^*) = z^n + \delta_{n-1}^* z^{n-1} + \dots + \delta_1^* z + \delta_0^*,$$

где σ_i^* – вещественные числа, для которых найдутся не зависящие от i и κ величины $0 < \varsigma_1 < 1$ и $0 < \varsigma_2$, удовлетворяющие условиям:

$$(18) \quad |\sigma_i^*| \leq 1 - \varsigma_1, \quad \varsigma_2 < |\sigma_i^* - \sigma_\kappa^*|, \quad i \neq \kappa, \quad i, \kappa = 1, \dots, n.$$

3) определяются коэффициенты разности

$$(19) \quad D^*(z) - A_d(z, x_k) = \rho_{n-1}(x_k) z^{n-1} + \dots + \rho_1(x_k) z + \rho_0(x_k),$$

где $\rho_j(x_k) = \delta_j^* - \alpha_j(x_k)$, $j = 0, 1, \dots, n-1$. Далее, коэффициенты суммы произведений полиномов $V_{d,i}(z, x_k)$ (16) на коэффициенты $l_i(x_k)$ из (14), $i = 1, \dots, n$, приравниваются коэффициентам полинома (19) при одинаковых степенях z . Полученные уравнения, записанные в векторно-матричной форме, образуют систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$(20) \quad \begin{bmatrix} v_{10}(x_k) & v_{20}(x_k) & \cdots & v_{n0}(x_k) \\ v_{11}(x_k) & v_{21}(x_k) & \cdots & v_{n1}(x_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1,n-1}(x_k) & v_{2,n-1}(x_k) & \cdots & v_{n,n-1}(x_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1(x_k) \\ l_2(x_k) \\ \vdots \\ l_n(x_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_0(x_k) \\ \rho_1(x_k) \\ \vdots \\ \rho_{n-1}(x_k) \end{bmatrix}.$$

СЛАУ (20) имеет единственное решение в силу условия (13). Вектор $l(x_k)$ – решение этой системы подставляется в управление (14), а полученное управление u_k – в уравнение ДКЛМ (10), что приводит к следующему уравнению виртуальной дискретной системы:

$$(21) \quad x_{k+1} = D_d(x_k) x_k + h_d(x_k) f_k, \quad x_k \in \Omega_{Ud}, \quad = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$(22) \quad D_d(x_k) = A_d(x_k) - b_d(x_k) l^\Gamma(x_k).$$

Следующая лемма устанавливает эффективность АПМ метода.

Лемма 1. Если выполнено условие (13), то СЛАУ (20) имеет единственное решение $l(x_k)$. При этом для любого $x_k \in \Omega_{Ud}$ собственные значения матрицы $D_d(x_k)$ (22) совпадают с корнями полинома $D^(z)$ (17), т.е. не зависят от x_k , являются вещественными, различными и по модулю меньшими единицы.*

Доказательство леммы 1 приведено в Приложении. Подчеркнем, что соотношения (8)–(22) могут использоваться для синтеза дискретных нелинейных систем управления [17, 22].

5. Синтез гибридной системы

Переходя к решению этой задачи, введем матрицу

$$(23) \quad \tilde{D}(x) = [E - 0,5Tb(x)l^T(x)]H_g(x),$$

где $H_g(x) = [D_d(x) - E][D_d(x) + E]^{-1}$; $D_d(x)$ – матрица (22), а вектор $l(x) = l(x_k)$ при $x_k = x$.

Пусть $\lambda_i^{\tilde{D}(x)}$ – собственные значения матрицы $\tilde{D}(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Предположим, в (10)–(20) и (23) период T такой, что выполнены условия (8), (13) и неравенства

$$(24) \quad \operatorname{Re} \lambda_i^{\tilde{D}(x)} < 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad x \in \Omega_{sys},$$

где $\Omega_{sys} = \{x \in \Omega_{Ud} : \operatorname{Re} \lambda_i^{\tilde{D}(x)} < 0, i = 1, \dots, n\}$, т.е. предполагается, что собственные значения матрицы $\tilde{D}(x)$ могут быть как действительными, так и комплексно-сопряженными, но с отрицательными вещественными частями, т.е. матрица $\tilde{D}(x)$ является гурвицевой в области Ω_{sys} . Отметим, что выбор значения T может быть итерационным: если при выбранном периоде T условие (24) не выполняется, то в (8)–(20) и (23) период T уменьшается.

Если условия (3), (4), (8), (13) и (24) выполнены, то в качестве управления гибридной системы принимается дискретная, кусочно-постоянная функция следующего вида:

$$(25) \quad u = u_T(x_k, g_k) = l_g(x_k)g_k - l^T(x_k)x_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $x_k \in \Omega_{sys}$, $g_k = g(t)|_{t=kT}$ – значения задающего воздействия $g(t)$; коэффициент

$$(26) \quad l_g(x) = \det D_r(x) / \gamma_{об}(x),$$

а матрица $D_r(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ определяется выражением

$$(27) \quad D_r(x) = A(x) - b(x)l^T(x).$$

Здесь и ниже вектор $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ – решение системы (1), (25) или (2), (25).

Из выражений (2) и (25) вытекают следующие уравнения КЛМ гибридной системы:

$$(28) \quad \dot{x} = A(x)x - b(x)l^T(x_k)x_k + b(x)l_g(x_k)g_k + h(x)f, \quad kT \leq t < (k+1)T,$$

$$(29) \quad y = c^T(x)x - d(x)l^T(x_k)x_k + d(x)l_g(x_k)g_k, \\ kT \leq t < (k+1)T, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

В соответствии с определением (25) на поверхностях $\varphi(t, x) = t - kT = 0$, $k = 1, 2, 3, \dots$ управление $u = u(t)$ претерпевает разрывы первого рода, т.е. мгновенно изменяет свое значение [23]. Такие мгновенно изменяющие свои значения управления используются как допустимые в [24–26]. В данном слу-

чае указанные поверхности разрыва при каждом $k \geq 1$ образуют по два сектора непрерывности как управления и (25), так и правой части уравнения (28) [23]. По формуле (25) в левых секторах непрерывности $kT - T < t < kT$ управление определяется выражением $u^-(t) = l_g(x_{k-1})g_{k-1} - l^T(x_{k-1})x_{k-1}$, а в правых секторах $kT < t < kT + T$ — выражением $u^+(t) = l_g(x_k)g_k - l^T(x_k)x_k$. Здесь x_k — значения решения дифференциальной системы (28) на поверхностях разрыва, т.е. при $t = kT$, $k = 1, 2, 3, \dots$. При этом, как и в [24, с. 15] или в [25, с. 22], предполагается существование правого и левого конечных пределов в каждом секторе непрерывности.

Однако в классическом смысле значения x_k дифференциальной системой (28) не определяются из-за разрывов ее правой части. Известно несколько подходов к преодолению этой проблемы [26]. Одним из них является «техническое» [23] («физическое» [26]) направление. Его авторы М.А. Айзерман и Е.С. Пятницкий предложили учитывать физический смысл задачи, пользуясь «дополнительной информацией об «исходной системе», чтобы сузить область возможных решений» на поверхностях разрыва [23, с. 39]. Учитывая, что x_0 задано, а в гибридной системе рассматриваемого типа последующие значения x_k , $k = 1, 2, 3, \dots$ измеряются, примем, что в левых секторах непрерывности решение уравнения (28) определяется выражением

$$(30) \quad x^-(t) = x_{k-1} + \int_{kT-T}^t [A(x(\tau))x(\tau) - b(x(\tau))l^T(x_{k-1})x_{k-1} + v^-(\tau)]d\tau, \\ kT - T \leq t < kT, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

где $x_0 = x(0)$, $v^-(\tau) = b(x(\tau))l_g(x_{k-1})g_{k-1} + h(x(\tau))f(\tau)$, а интеграл является интегралом Лебега [23]. При этом измеряемые значения, следуя [24, с. 15], удобно определить выражением $x_k = \lim_{t \rightarrow T} x^-(t)$. Заменяя в равенстве (30) индекс k на $k + 1$, получим выражение для $x(t)$ в правых секторах непрерывности:

$$(31) \quad x^+(t) = x_k + \int_{kT}^t [A(x(\tau))x(\tau) - b(x(\tau))l^T(x_k)x_k + v^+(\tau)]d\tau, \\ kT \leq t < kT + T, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

где $v^+(\tau) = b(x(\tau))l_g(x_k)g_k + h(x(\tau))f(\tau)$.

Из предположения о существовании правого и левого пределов в каждом секторе непрерывности следует, что оба выражения (30) и (31) дают одно и то же значение $x_k = \lim_{t \rightarrow T} x^-(t) = \lim_{t \rightarrow 0} x^+(t)$. Таким образом, подход Айзермана–Пятницкого позволяет определить для всех t значения непрерывного решения $x(t)$ дифференциальной системы (28) при кусочно-постоянном управлении (25) путем учета дополнительной информации о свойствах гибридной системы.

Сформулируем теорему о свойствах системы (1), (25).

Теорема. Если выполняются условия (3), (4), (8), (13), (18) и (24), а вектор $l(x_k)$ в (25) определяется решением СЛАУ (20), то при $g(t) = f(t) \equiv 0$ и всех $t \geq 0$ существует множество решений $x(t, x_0)$ уравнения (28) таких, что

$$(32) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = \mathbf{0}, \quad x \in \Omega_{sys}.$$

Если коэффициент $l_g(x_k)$ в (25) определяется выражением (26), то статическая ошибка системы (1), (25) по воздействию $g(t)$ равна нулю, т.е. при $g(t) = g_0 1(t)$ и $f(t) \equiv 0$

$$(33) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_g(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [g(t) - y_g(t)] = 0.$$

Здесь $1(t)$ – единичная ступенчатая функция (функция Хэвисайда); $y_g(t)$ – реакция системы (28), (29), т.е. (1), (25), при $f(t) \equiv 0$ на воздействие $g(t) = g_0 1(t)$ при некоторых $x_0 = x(0)$ и g_0 таких, что $x(t, x_0, g_0) \in \Omega_{sys}$, $t \geq 0$.

Доказательство теоремы дается в Приложении. Следующая лемма устанавливает, что из управляемости объекта следует «управляемость» замкнутой системы, т.е. возможность обеспечения необходимого изменения выхода системы соответствующим задающим воздействием.

Лемма 2. Если матрицы $U_s(x)$ и $D_r(x)$ определены выражениями (3) и (27), то выполняется равенство

$$(34) \quad \begin{aligned} \det Q_r(x) &= \det[b(x) \ D_r(x)b(x) \ \dots \ D_r^{n-1}(x)b(x)] = \\ &= \det U_s(x), \quad x \in \Omega_{sys}. \end{aligned}$$

Доказательство леммы 2 приведено в Приложении. Соотношения (2), (5), (9)–(20), (22), (23), (25)–(29) являются математическим обеспечением предлагаемого метода синтеза гибридных нелинейных систем управления, а неравенства (3), (4), (8), (13), (18) и (24) составляют условия разрешимости задачи синтеза этим методом. Эффективность разработанного метода иллюстрируется численным модельным примером.

6. Пример

Синтезировать гибридную систему управления дифферентом (ГСУД) автономного необитаемого подводного аппарата (АНПА). Управление дифферентом осуществляется с применением носовой и кормовой емкостей изменяемого объема [27] и описывается системой уравнений:

$$(35) \quad \ddot{\psi} = \alpha_1 U_\psi \cos \psi - \alpha_2 U_a \sin \psi - \beta \left| \dot{\psi} \right| \dot{\psi}, \quad \dot{U}_\psi = -k_v U_\psi + k_u u, \quad y = \psi,$$

где ψ и $\dot{\psi}$ – угол дифферента и скорость его изменения, U_ψ – разность объемов носовой и кормовой емкостей, U_a – водоизмещение АНПА; α_1 , α_2 – гидродинамические коэффициенты; β – коэффициент сопротивления изменению дифферента; k_v и k_u – параметры устройства, изменяющего U_ψ ; u – управление этого устройства; y – управляемая выходная переменная ГСУД

АНПА; ψ , $\dot{\psi}$ и U_ψ – измеряемые величины. ГСУД должна иметь нулевую ошибку по дифференту, а также длительность переходного процесса не более 5 с при нулевых начальных условиях и желаемом дифференте $g(t) = \psi^*(t) = -0,5236 \times 1(t)$ рад.

Решение. Полагая $\mathfrak{x}_1 = \psi$, $\mathfrak{x}_2 = \dot{\psi}$ и $\mathfrak{x}_3 = U_\psi$, запишем уравнения (35) в форме Коши:

$$(36) \quad \begin{aligned} \dot{\mathfrak{x}}_1 &= \mathfrak{x}_2, \\ \dot{\mathfrak{x}}_2 &= \alpha_1 \mathfrak{x}_3 \cos \mathfrak{x}_1 - \alpha_2 U_a \sin \mathfrak{x}_1 - \beta |\mathfrak{x}_2| \mathfrak{x}_2, \\ \dot{\mathfrak{x}}_3 &= -k_v \mathfrak{x}_3 + k_u u, y = \mathfrak{x}_1. \end{aligned}$$

Так как $\sin \mathfrak{x}_1 = \omega(\mathfrak{x}_1)\mathfrak{x}_1$, где $\omega(\mathfrak{x}_1) = (\sin \mathfrak{x}_1)/\mathfrak{x}_1$ – КЛМ функции $\sin \mathfrak{x}_1$ [16], то КЛМ нелинейной системы уравнений (36) имеет вид (2), где

$$(37) \quad \begin{aligned} A(x) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a_{21}(x) & -a_{22}(x) & a_{23}(x) \\ 0 & 0 & -a_{33}(x) \end{bmatrix}; \\ b(x) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_u \end{bmatrix}; \quad c(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad h(x) = \mathbf{0}; \quad d(x) = 0. \end{aligned}$$

Здесь $x = [\mathfrak{x}_1 \ \mathfrak{x}_2 \ \mathfrak{x}_3]^T$, $a_{21}(x) = \alpha_2 U_a \omega(\mathfrak{x}_1)$, $a_{22}(x) = \beta |\mathfrak{x}_2|$, $a_{23}(x) = \alpha_1 \cos \mathfrak{x}_1$, $a_{33}(x) = k_v$.

Рассмотрим решение задачи синтеза ГСУД при $g(t) = \psi^*(t)$ и следующих модельных значениях коэффициентов в (37): $a_{21}(x) = 7,044\omega(\mathfrak{x}_1)$; $a_{22}(x) = 1,192 |\mathfrak{x}_2|$; $a_{23}(x) = 6,48 \cos \mathfrak{x}_1$; $a_{33}(x) = 1,326$; $k_v = k_u = 0,12$. В данном случае условия (3) и (4) с учетом (5) и (37) имеют вид $\det U_s(x) = 0,0933(\cos \mathfrak{x}_1)^2 \neq 0$ и $\gamma_{об}(x) = 0,7776 \cos \mathfrak{x}_1 \neq 0$, т.е. область Ω_{U_u} ограничена условиями: $|\mathfrak{x}_1| < \pi/2$, $|\mathfrak{x}_2| \leq \mathfrak{x}_{2,\max}$; $|\mathfrak{x}_3| \leq \mathfrak{x}_{3,\max}$, где $\mathfrak{x}_{2,\max}, \mathfrak{x}_{3,\max}$ – некоторые конструктивные ограничения. Пусть $\mathfrak{x}_{2,\max} = 3,5$ рад/с; $L(\eta, x) = [E - 0,5\eta A(x)]$, тогда с учетом (37) имеем уравнение

$$(38) \quad \det L(\eta, x) = (1 + 0,663\eta) [1 + 0,596 |\mathfrak{x}_2| \eta + 3,522\omega(\mathfrak{x}_1)\eta^2] = 0.$$

Уравнение (38) в области Ω_{U_u} не имеет вещественных, положительных корней η_i , т.е. из условия (8) на матрицу $[E - 0,5T\eta A(x_k)]$ не следуют ограничения на период T . Поэтому примем $T_1 = 0,6$ с и $T_2 = 0,8$ с исходя из конструктивных ограничений. Переходя к определению управления, по (11), (12) и (37) находятся матрица $A_d(x_k)$ и вектор $b_d(x_k)$; численным методом устанавливается выполнение условия (13) в области $\Omega_{U_d} = \Omega_{U_u}$; по (15), (16) находятся полиномы $A_d(z, x_k)$ и $V_{d,i}(z, x_k)$, $i = 1, 2, 3$.

Полином $D^*(z)$, найденный по (17) и (18), позволяет по (19) найти коэффициенты $\rho_j(x_k)$, $j = 0, 1, 2$, и составить СЛАУ (20), решение которой определяет трехмерный вектор $l(x_k)$. Далее по (22) находится матрица $D_d(x_k)$, а по (23) – матрица $\tilde{D}(x)$. Численным путем устанавливается, что условие (24)

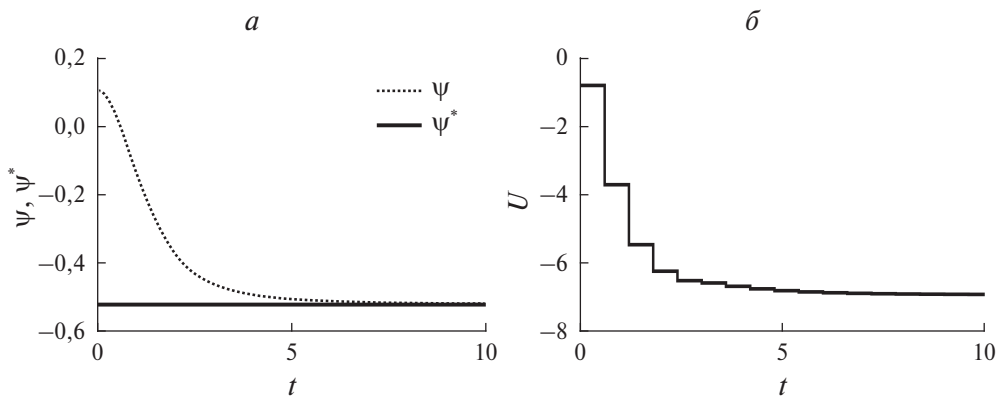


Рис. 1. Графики переменных при $T = 0,6$ с: a – углы дифферента; b – управление.

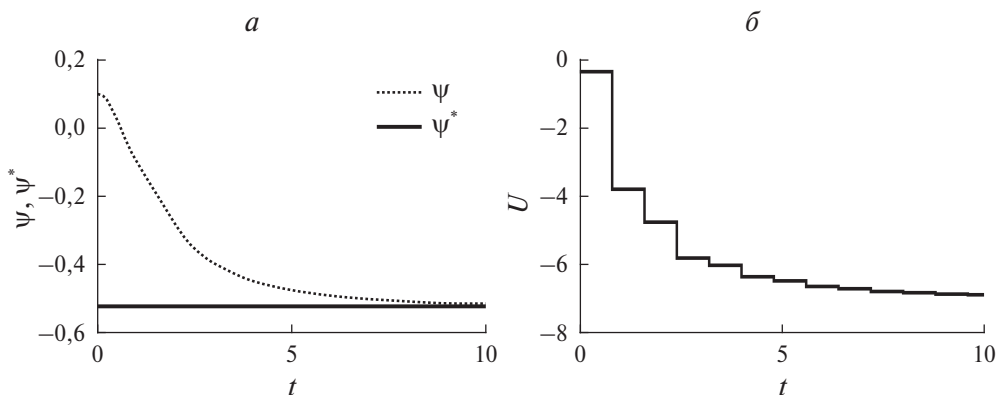


Рис. 2. Графики переменных при $T = 0,8$ с: a – углы дифферента; b – управление.

как при $T = 0,6$ с, так и при $T = 0,8$ с выполняется в области $\Omega_{sys} = \Omega_{Uu}$. Наконец, по формулам (27), (26) и (25) определяются $D_r(x)$, $l_g(x)$ и $u_r(x_k, g_k)$.

Подчеркнем, что при работе ГСУД все операции, кроме формирования полинома $D^*(z)$, начиная с вычисления матрицы $A(x)$ и вектора $b(x)$ (37), затем $A_d(x_k)$, $b_d(x_k)$ и заканчивая определением управления $u_r(x_k, g_k)$, выполняются цифровым устройством управления при всех $k = 0, 1, 2, \dots$ с периодом T . Этот факт обусловлен нелинейным характером объекта (35).

Исследование синтезированной ГСУД. С этой целью в MATLAB при каждом $t = kT$ вычисляются, как описано выше, значения дискретного управления $u_r(x_k, g_k)$, а на каждом интервале времени $kT \leq t < (k+1)T$ с применением функции ode45 интегрируется система уравнений (36) при $u = u_r(x_k, g_k)$ с начальными условиями $x_{0,k} = x(kT)$ и $\psi^*(t) = \psi_0 1(t)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. На рис. 1 и 2 приведены переходные процессы синтезированной ГСУД АНПА при $D^*(z) = z^3 - 0,8z^2 + 0,2032z - 0,01613$; $x_{0,0} = [0,1 \ 0,01 \ 0]^T$ и $\psi_0 = -0,5236$ рад.

Как видно, переменные объекта управления являются непрерывными функциями, хотя управление изменяется со значительным периодом, что характерно для гибридных систем. Аналогичными являются переходные процессы и при других условиях. При этом незначительное увеличение периода дискретизации приводит лишь к небольшому увеличению длительности переходного процесса.

В таблице приведены собственные значения $\lambda_i(x)$, $i = 1, 2, 3$ матрицы $D_{\Gamma}(x_k)$ ГСУД АНПА при двух значениях периода T и некоторых значениях k .

Таблица

k	$T = 0,6$		$T = 0,8$	
	λ_1	$\lambda_{2,3}$	λ_1	$\lambda_{2,3}$
0	-1,3463	$-0,7002 \pm 1,5983i$	-1,3250	$-0,2280 \pm 1,3446i$
1	-1,3484	$-0,8130 \pm 1,6057i$	-1,3249	$-0,3112 \pm 1,3637i$
5	-1,3468	$-0,7261 \pm 1,5810i$	-1,3249	$-0,2556 \pm 1,3322i$
10	-1,3466	$-0,7138 \pm 1,5753i$	-1,3249	$-0,2487 \pm 1,3249i$

Из таблицы следует, что собственные значения матрицы $D_{\Gamma}(x)$ имеют отрицательные вещественные части, причем с увеличением периода T эти части уменьшаются по модулю, что и приводит к потере устойчивости при значительном увеличении T . Представляется существенным, что в течение переходного процесса гибридной системы вещественные части собственных значений указанной матрицы изменяются незначительно.

7. Заключение

В работе предложен метод синтеза гибридных нелинейных систем управления непрерывными объектами с дифференцируемыми нелинейностями и измеряемым вектором состояния. Решение задачи получено с применением непрерывных и дискретных квазилинейных моделей, алгебраического полиномиально-матричного метода синтеза нелинейных систем, а также подхода Айзермана–Пятницкого к решению дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. Предложенный метод может применяться, если непрерывная и дискретная квазилинейные модели нелинейного объекта являются управляемыми по состоянию, выполняются условие критерия управляемости его выхода и некоторые дополнительные условия. Эффективность метода иллюстрируется численным примером синтеза гибридной нелинейной системы управления дифферентом автономного необитаемого подводного аппарата. Предложенный метод может применяться для создания гибридных систем управления нелинейными объектами производственного, социального и специального назначения с применением вычислительных средств автоматизации невысокого быстродействия.

Доказательство леммы 1. Из выражений (6.3) и (6.55) [28, с. 145 и с. 169] следует, что условия управляемости систем в непрерывном и дискретном случаях по форме совпадают. Поэтому для доказательства леммы 1, сформулированной по отношению к дискретной системе, здесь используется теорема о свойствах управляемых непрерывных систем. С учетом этого замечания из теорем 1.1 и 1.2 [29, с. 29, 31, 32] следует утверждение: если выполнено неравенство (13), то задача определения вектора $l^T(x_k)$ для управления $u_k = -l^T(x_k)x_k$ (14), при котором собственные числа матрицы замкнутой дискретной системы (21) расположены на комплексной плоскости z заданным образом, имеет единственное решение.

Матрицей указанной замкнутой дискретной системы (21) является матрица $D_d(x_k) = A_d(x_k) - b_d(x_k)l^T(x_k)$ (22) с характеристическим полиномом:

$$(П.1) \quad D_d(z, x_k) = \det[zE - A_d(x_k) + b_d(x_k)l^T(x_k)], \quad x_k \in \Omega_{Ud}.$$

Таким образом, при заданном полиноме $D_d(z, x_k)$, т.е. при $D_d(z, x_k) = D^*(z)$, выражение (П.1) является уравнением относительно вектора $l^T(x_k)$, и именно оно в соответствии с указанными теоремами 1.1 и 1.2 из [29] при выполнении условия (13) имеет единственное решение. Применяя к (П.1) равенство (П.25) из [30, с. 233] при $\mu = 1$, вытекающее, в частности, из формул (I) и (II) [19, с. 55], получим:

$$D_d(z, x_k) = \det[zE - A_d(x_k)] + l^T(x_k)\text{adj}[zE - A_d(x_k)]b_d(x_k).$$

Отсюда с учетом обозначений (15), (16) и вектора $l^T(x_k) = [l_1(x_k) \ l_2(x_k) \ \dots \ l_n(x_k)]$ выводим, следуя [14, 15], эквивалентное представление того же полинома (П.1):

$$(П.2) \quad D_d(z, x_k) = A_d(z, x_k) + \sum_{i=1}^n l_i(x_k)V_{d,i}(z, x_k).$$

При этом, по построению, система (20) эквивалентна полиномиальному уравнению

$$\sum_{i=1}^n l_i(x_k)V_{d,i}(z, x_k) = \rho_{n-1}(x_k)z^{n-1} + \dots + \rho_1(x_k)z + \rho_0(x_k),$$

которое с учетом обозначения (19) записывается следующим образом:

$$(П.3) \quad \sum_{i=1}^n l_i(x_k)V_{d,i}(z, x_k) = D^*(z) - A_d(z, x_k), \quad x_k \in \Omega_{Ud}.$$

По (17) корнями полинома $D^*(z)$ являются числа σ_i^* , т.е. $D^*(\sigma_i^*) = 0$. Тогда согласно (П.3) $A_d(\sigma_i^*, x_k) + \sum_{i=1}^n l_i(x_k)V_{d,i}(\sigma_i^*, x_k) = 0$. Отсюда в силу (П.2)

следует равенство $D_d(\sigma_i^*, x_k) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, что соответствует утверждению леммы 1. Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Для этой цели воспользуемся известным свойством определителя, которое заключается в том, что если к одному столбцу матрицы определителя прибавить или вычесть другой ее столбец, умноженный на *число*, то значение определителя не изменится [31, с. 143]. Для краткости записей опустим аргументы матриц $A(x)$, $D_\Gamma(x)$, $Q_\Gamma(x)$ и векторов $b(x)$, $l(x)$ из (3), (27), (34) и подчеркнем, что $D_\Gamma = A - bl^T$, а $\det Q_\Gamma = \det[b \ D_\Gamma b \ \dots \ D_\Gamma^{n-1}b]$ при всех n . Докажем лемму 2 методом математической индукции, показав сначала, что она верна при $n = 1$ и $n = 2$.

Пусть $n = 1$, тогда $A = a_1$, $b = b_1$, $l = l_1$ и $\det U_s = b_1$ по (3). При этом $D_\Gamma = a_1 - b_1 l_1$, а $\det Q_\Gamma = b_1$; очевидно, $\det Q_\Gamma = \det U_s$. Положим $n = 2$. В этом случае по (3) $\det U_s = \det[b \ Ab]$, а по (34) $\det Q_\Gamma = \det[b \ D_\Gamma b] = \det[b \ Ab - \check{\beta}b]$, где $\check{\beta} = l^T b$ – скаляр, т.е. число, так как при каждом конкретном значении x векторы $l(x)$ и $b(x)$ являются числовыми. Отсюда по указанному свойству определителя $\det Q_\Gamma = \det \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix}$, т.е. $\det Q_\Gamma = \det U_s$. Итак, при $n = 1$ и $n = 2$ лемма 2 верна.

Предположим, лемма 2 верна при $n = \mu$, т.е. если $\det U_s = \det[b \ Ab \ \dots \ A^{\mu-1}b]$ и $\det Q_\Gamma = \det[b \ D_\Gamma b \ \dots \ D_\Gamma^{\mu-1}b] = \det U_s$, то покажем, что она верна и при $n = \mu + 1$. С этой целью запишем левую часть выражения (34) при $n = \mu + 1$ в более развернутой форме:

$$(П.4) \quad \det Q_\Gamma = \det[b \ D_\Gamma b \ D_\Gamma^2 b \ \dots \ D_\Gamma^{\mu-3} b \ D_\Gamma^{\mu-2} b \ D_\Gamma^{\mu-1} b \ D_\Gamma^\mu b].$$

Далее, будем преобразовывать по шагам столбцы матрицы определителя (П.4), начиная с $D_\Gamma^\mu b$ с учетом указанного свойства определителя и того, что матрица $D_\Gamma = A - bl^T$.

Шаг 1.1. $D_\Gamma^\mu b = D_\Gamma^{\mu-1}(A - bl^T)b = D_\Gamma^{\mu-1}Ab + \beta_0 D_\Gamma^{\mu-1}b \succ D_\Gamma^{\mu-1}Ab$, так как $\beta_0 = -l^T b$ – скаляр, а столбец $\beta_0 D_\Gamma^{\mu-1}b$ равен столбцу $D_\Gamma^{\mu-1}b$ матрицы определителя (П.4), умноженному на β_0 . Здесь и далее « $\succ$ » – это знак соответствия, в том смысле, что при замене в матрице определителя (П.4) столбца $D_\Gamma^\mu b$ столбцом $D_\Gamma^{\mu-1}Ab$ значение определителя (П.4) не изменится.

Шаг 1.2. $D_\Gamma^\mu b \succ D_\Gamma^{\mu-1}Ab = D_\Gamma^{\mu-2}(A - bl^T)Ab = D_\Gamma^{\mu-2}A^2b + \beta_1 D_\Gamma^{\mu-2}b \succ D_\Gamma^{\mu-2}A^2b$ в силу указанного свойства определителя, так как $\beta_1 = -l^T Ab$ – скаляр, а столбец $\beta_1 D_\Gamma^{\mu-2}b$ равен столбцу $D_\Gamma^{\mu-2}b$ матрицы определителя (П.4), умноженному на β_1 , т.е. столбец $\beta_1 D_\Gamma^{\mu-2}b$ пропорционален столбцу $D_\Gamma^{\mu-2}b$.

Шаг 1.3. $D_\Gamma^\mu b \succ D_\Gamma^{\mu-2}A^2b = D_\Gamma^{\mu-3}(A - bl^T)A^2b = D_\Gamma^{\mu-3}A^3b + \beta_2 D_\Gamma^{\mu-3}b \succ D_\Gamma^{\mu-3}A^3b$ в силу указанного свойства определителя, так как $\beta_2 = -l^T A^2b$ – скаляр, а столбец $\beta_2 D_\Gamma^{\mu-3}b$ пропорционален столбцу $D_\Gamma^{\mu-3}b$ матрицы определителя (П.4). Продолжая этот процесс на шаге 1. μ получим $D_\Gamma^\mu b \succ D_\Gamma^{\mu-\mu}A^\mu b = A^\mu b$.

Перейдем к преобразованию столбца $D_\Gamma^{\mu-1}b$ матрицы определителя (П.4).

Шаг 2.1. $D_\Gamma^{\mu-1}b = D_\Gamma^{\mu-2}(A - bl^T)b = D_\Gamma^{\mu-2}Ab + \beta_0 D_\Gamma^{\mu-2}b \succ D_\Gamma^{\mu-2}Ab$.

Шаг 2.2. $D_{\Gamma}^{\mu-1}b \succ D_{\Gamma}^{\mu-2}Ab = D_{\Gamma}^{\mu-3}(A - bl^T)Ab = D_{\Gamma}^{\mu-3}A^2b + \beta_1 D_{\Gamma}^{\mu-3}b \succ D_{\Gamma}^{\mu-3}A^2b$.

Продолжая преобразование, на шаге 2. $(\mu - 1)$ получим $D_{\Gamma}^{\mu-1}b \succ A^{\mu-1}b$. Очевидно, результатом применяемого преобразования каждого столбца $D_{\Gamma}^j b$ матрицы определителя (П.4) является столбец $A^j b$, $j = 1, \dots, \mu$. Так как это преобразование в силу указанного свойства определителя не изменяет значения (П.4), то отсюда следует, что $\det Q_{\Gamma} = \det U_s$ и при $n = \mu + 1$.

Итак, лемма 2 верна при $n = 1, 2$. Если она верна при $n = \mu$, то она верна и при $n = \mu + 1$. Тогда она верна для любого целого положительного n . Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы. Как показано выше, непрерывное решение уравнения (28) определено при всех $t \geq 0$ и $x \in \Omega_{sys}$. При этом его правая часть зависит от времени t , помимо вектора $x(t)$, что проявляется в дополнительных выражениях: $kT \leq t < kT + T$ и $k = 0, 1, 2, \dots$. С тем, чтобы зависимость от t сделать более явной и исключить k , заменим обозначение $x_k = x(kT)$ на $x(T \lfloor t/T \rfloor)$, где $\lfloor t/T \rfloor$ – операция взятия целой части от отношения t/T . В результате уравнение состояния (28) гибридной системы (1), (25) или, что тоже самое, (2), (25) примет вид:

$$(П.5) \quad \dot{x}(t) = D_{\Gamma}(x)x + \Upsilon_1(t, x) + b(x)l_g(x(T \lfloor t/T \rfloor))g(T \lfloor t/T \rfloor) + h(x)f(t),$$

$$(П.6) \quad \Upsilon_1(t, x) = b(x)[l^T(x)x - l^T(x(T \lfloor t/T \rfloor))x(T \lfloor t/T \rfloor)],$$

где $D_{\Gamma}(x)$ – матрица, определяемая выражением (27), и по-прежнему $x = x(t)$.

Для доказательства теоремы прежде всего покажем, что собственные значения матрицы $D_{\Gamma}(x)$ имеют отрицательные вещественные части. С этой целью, учитывая (11), (12) и заменяя (для краткости) x_k на x , запишем равенство (22) следующим образом:

$$(П.7) \quad \begin{aligned} & -^1[E + 0,5TA(x)] - \\ & - [E - 0,5TA(x)]^{-1}Tb(x)l^T(x) = D_d(x). \end{aligned}$$

Умножив обе части равенства (П.7) на матрицу $[E - 0,5TA(x)]$ слева, раскроем квадратные скобки и перенесем слагаемые с матрицей $A(x)$ в левую часть. Это дает выражение

$$(П.8) \quad 0,5TA(x)[D_d(x) + E] = D_d(x) - E + Tb(x)l^T(x).$$

По лемме 1 все собственные значения σ_i^* матрицы $D_d(x)$ такие, что $\sigma_i^* \neq \sigma_{\kappa}^*$, $i \neq \kappa$ и $|\sigma_i^*| < 1$. Поэтому существует матрица $[D_d(x) + E]^{-1}$, и из (П.8) следует равенство

$$(П.9) \quad A(x) = 2T^{-1}[D_d(x) - E + Tb(x)l^T(x)][D_d(x) + E]^{-1}.$$

Добавляя величину $-b(x)l^T(x)$ в обеих частях (П.9) и снова вынося матрицу $[D_d(x) + E]^{-1}$ вправо, получим с учетом обозначения (27) выражение

$$D_r(x) = \left\{ 2T^{-1} [D_d(x) - E + Tb(x)l^T(x)] - b(x)l^T(x)[D_d(x) + E] \right\} [D_d(x) + E]^{-1}.$$

Раскрыв в фигурных скобках обе квадратные скобки и приведя подобные, вынесем матрицу $[D_d(x) - E]$ за фигурные скобки вправо, а величину $2T^{-1}$ влево. Это дает равенство

$$(П.10) \quad D_r(x) = 2T^{-1} [E - 0,5Tb(x)l^T(x)] H_g(x), \quad x \in \Omega_{sys},$$

где $H_g(x) = [D_d(x) - E][D_d(x) + E]^{-1}$. Матрица $H_g(x)$ в условиях теоремы гурвицевая и имеет различные собственные значения. В этом легко убедиться, поскольку матрица $D_d(x)$ имеет различные собственные значения, т.е. она подобна диагональной матрице [20, с. 84].

Сравнивая (П.10) с (23), заключаем: матрица $D_r(x) = 2T^{-1}\tilde{D}(x)$, поэтому в соответствии с 2.15.8 из [20, с. 39] и условием (24) собственные значения матрицы $D_r(x)$ из (П.5) в условиях теоремы имеют отрицательные вещественные части при $x \in \Omega_{sys}$.

Далее, рассмотрим сначала свободное движение гибридной системы (28), (29), полагая $g(t) = f(t) \equiv 0$. Кроме того, имея ввиду теорему Ляпунова [32, с. 257], представим уравнение (П.5) с учетом (П.6) при $t \geq 0$ следующим образом:

$$(П.11) \quad \dot{x} = D_{r,0}x + \Upsilon(t, x),$$

где $D_{r,0} = D_r(0)$, $\Upsilon(t, x) = \Upsilon_1(t, x) + \Upsilon_2(x)$; $\Upsilon_2(x) = [D_r(x) - D_{r,0}]x$; вектор $\Upsilon_1(t, x)$ определен (П.6).

По доказанному выше матрица $D_r(x)$ при $\forall x \in \Omega_{sys}$ является гурвицевой; следовательно, в (П.11) постоянная матрица $D_{r,0}$ тоже гурвицевая. Покажем, что в условиях доказываемой теоремы вектор-функция $\Upsilon(t, x) = o(\|x\|)$ равномерно по t [32, с. 257]. С этой целью найдем пределы отношений $\Upsilon_1(x)/\|x\|^2$ и $\Upsilon_2(x)/\|x\|^2$ при $x(t) \rightarrow 0$. Достаточно очевидно, что при $\forall t \geq 0$

$$(П.12) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\Upsilon_2(x)/\|x\|^2) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^T P [D_r(x) - D_{r,0}] x / \|x\|^2) = 0.$$

Рассматривая предел отношения $\Upsilon_1(t, x)/\|x\|^2$, примем во внимание, что при всех t согласно (31) и (32), если $x \rightarrow 0$, то и $x(T \lfloor t/T \rfloor) \rightarrow 0$ тоже. Поэтому с учетом (П.6) имеем

$$(П.13) \quad \begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} (\Upsilon_2(t, x)/\|x\|^2) = \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \left(b(x) \left[l^T(x)x - l^T(x(T \lfloor t/T \rfloor))x(T \lfloor t/T \rfloor) \right] / \|x(t)\|^2 \right) = 0, \end{aligned}$$

так как при всех t оба вектора и $l^T(x)$, и $l^T(x(T|t/T))$ в этом выражении умножаются на векторы, стремящиеся к нулю. Таким образом, из (П.12) и (П.13) следует, что вектор-функция $\Upsilon(t, x) = o(\|x\|)$ равномерно по t , т.е.

$$(П.14) \quad \frac{\Upsilon(t, x)}{\|x\|} \xrightarrow[t]{} 0 \text{ при } x \rightarrow 0.$$

Матрица $D_{r,0}$ является гурвицевой, поэтому из (П.14) следует, что дифференциальная система (П.11) удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова [32, с. 257], в соответствии с которой решение $x = 0$ этой системы асимптотически устойчиво, т.е. выполнено условие (32) в области Ω_{sys} . Причем согласно [32, с. 258–260] существует функция Ляпунова $V(x) = x^T S_L x > 0$, которая имеет $\dot{V}(x) < 0$ в силу этой системы. Здесь S_L – действительная симметричная матрица.

С другой стороны, уравнение (П.11) соответствует уравнению (70.1), а уравнение (П.5) – уравнению (70.3) из монографии [33, с. 301]. Причем по И.Г. Малкину (П.11) является уравнением возмущенного движения рассматриваемой гурвицевой системы (1), (25) и (28), (29), а слагаемое $b(x)l_g(x(T|t/T))g(T|t/T) + h(x)f(t)$ в (П.5) характеризует постоянно действующие возмущения этой системы. При этом для дифференциальной системы (П.11) существует определенно-положительная функция $V(x) = x^T S_L x$, полная производная которой по времени, составленная в силу этой системы, является определенно-отрицательной. В области $t \geq 0$, $x \in \Omega_{sys}$ частные производные $(\partial V(x)/\partial x_i) = 2S_{Li}x$, где S_{Li} – i -я строка матрицы S_L , $i = 1, \dots, n$, очевидно ограничены. Поэтому по теореме И.Г. Малкина [33, с. 302] невозмущенное движение гибридной системы, описываемой уравнениями (П.5) и (28), устойчиво при постоянно действующих возмущениях. Другими словами, при достаточно малых начальных условиях и внешних воздействиях $g(t)$ и $f(t)$ таких, что $x(t) \in \Omega_{sys}$ в системе (П.5) или, что то же самое, в системе (1), (25), КЛМ которой имеет вид (28), (29), возникает установившийся режим.

Рассмотрим этот режим при $f(t) \equiv 0$, $g(t) = g_0 1(t)$ и достаточно малых $\|x_0\|$ и $|g_0|$. В этом режиме при $t \rightarrow \infty$ имеют место следующие процессы: $\dot{x}(t) \rightarrow 0$, $x(t) \rightarrow x^\circ$, $x(T|t/T) \rightarrow x^\circ$, $y_g(t) \rightarrow y_g^\circ$, где x°, y_g° – установившиеся значения переменных $x(t)$, $x(T|t/T)$, $y_g(t)$, обусловленные (в соответствии с леммой 2) воздействием $g_0 1(t)$. При этом уравнения (28) и (29) принимают следующий вид:

$$(П.15) \quad \begin{aligned} 0 &= D_r(x^\circ)x^\circ + b(x^\circ)l_g(x^\circ)g_0, \\ y_g^\circ &= [c^T(x^\circ) - d(x^\circ)l^T(x^\circ)]x^\circ + d(x^\circ)l_g(x^\circ)g_0, \end{aligned}$$

где матрица $D_r(x^\circ)$ определяется выражением (27) при $x = x^\circ$.

Поскольку матрица $D_r(x)$ гурвицевая при $x \in \Omega_{sys}$, то существует матрица $D_r^{-1}(x^\circ)$, поэтому из (П.15) следуют равенства $x^\circ = -D_r^{-1}(x^\circ)b(x^\circ)l_g(x^\circ)g_0$ и

$$(П.16) \quad y_g^\circ = \{[d(x^\circ)l^T(x^\circ) - c^T(x^\circ)]D_r^{-1}(x^\circ)b(x^\circ) + d(x^\circ)\}l_g(x^\circ)g_0.$$

Равенство (33) теоремы очевидно будет выполнено, если $y_g^\circ = g_0$, поэтому из (П.16) следует необходимое и достаточное для этого условие: $\{[d(x^\circ)l^T(x^\circ) - c^T(x^\circ)]D_\Gamma^{-1}(x^\circ)b(x^\circ) + d(x^\circ)\}l_g(x^\circ) = 1$. Однако значение x° заранее неизвестно, поэтому это условие заменяется, с учетом формулы $D_\Gamma^{-1}(x) = \text{adj}D_\Gamma(x)/\det D_\Gamma(x)$, равенством

$$(П.17) \quad \{[d(x)l^T(x) - c^T(x)]\text{adj}D_\Gamma(x)b(x) + d(x)\det D_\Gamma(x)\}l_g(x) = \det D_\Gamma(x).$$

Равенство $y_g^\circ = g_0$ следует из (П.17) и (П.16) в силу указанной выше теоремы И.Г. Малкина. Из определения (27) по формулам (П.25) и (П.26) из [30, с. 233] следуют равенства

$$\begin{aligned} \text{adj}D_\Gamma(x)b(x) &= \text{adj}[A(x) - b(x)l^T(x)]b(x) = \text{adj}A(x)b(x) \text{ и} \\ \det D_\Gamma(x) &= \det[A(x) - b(x)l^T(x)] = \det A(x) - l^T(x)\text{adj}A(x)b(x). \end{aligned}$$

Подставив эти равенства в (П.17) и упростив, получим

$$\{d(x)\det A(x) - c^T(x)\text{adj}A(x)b(x)\}l_g(x) = \det D_\Gamma(x).$$

С учетом обозначения (5) отсюда следует справедливость равенства (33) при выполнении условия (4) и определении коэффициента $l_g(x)$ по (26). Теорема доказана полностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Garavello M., Piccoli B.* Hybrid Necessary Principle // 44th IEEE Conference on Decision and Control, European Control Conference. Seville, Spain, December 12–15, 2005. P. 723–728.
2. *Nandola N.N., Bhartiya S.* Predictive Control of Nonlinear Hybrid Systems Using Generalized Outer Approximation // 17th World Congress International Federation of Automatic Control Seoul, Korea, July 6–11, 2008. P. 3623–3628. <https://doi.org/10.3182/20080706-5-KR-1001.2056>
3. *Безуглая А.Е., Тимофеева Т.И., Шушлягин Е.А.* Управление нелинейными гибридными системами на основе идентифицированных моделей // X Международная конференция «Идентификация систем и задачи управления», SICPRO-15 Москва, 26–29 января 2015. С. 619–633.
4. *Закирзянов Р.М.* Критерии выбора оптимальной структуры распределенной системы управления технологическими процессами крупных промышленных предприятий // Математические методы в технологиях и технике. 2024. № 10. С. 17–23.
5. *Sharifi E., Damaren C.J.* A numerical approach to hybrid nonlinear optimal control // International Journal of Control. 2020. P. 1–14. <https://doi.org/10.1080/00207179.2020.1763471>
6. *Christofides P.D., El-Farra N.H.* Control of Hybrid Nonlinear Systems // Control of Nonlinear and Hybrid Process Systems. Lect. Notes Control. 2005. V. 324. P. 225–275. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/11376316_7

7. *Alessandri A., Bedouhene F., Bouhadjra D., Zemouche A., Bagnerini P.* Observer-based control for a class of hybrid linear and nonlinear systems // *Discrete and Continuous Dynamical Systems*. 2021. V. 14. I. 4. P. 1213–1231.
<https://doi.org/10.3934/dcdss.2020376>
8. *Ghane R.G., Hassan M.Y.* Advanced hybrid nonlinear control for morphing quadrotors // *Mathematical Modelling of Engineering Problems*, 2023. V. 10. No. 4. P. 1216–1224. <https://doi.org/10.18280/mmep.100414>
9. *Кван Н.В., Семичевская Н.П.* Гибридные системы робастного управления нелинейными объектами // *Вестник Амурского государственного университета*. 2010. Выпуск 51: Серия: Естественные и экономические науки. С. 33–37.
10. *Годяев А.И., Ерёмин Е.Л., Шеленок Е.А.* Имитационная модель системы периодического управления электродинамическим вибростендом // *Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники*. 2012. № 1(25). Часть 2. С. 257–261.
11. *Ерёмин Е.Л., Шеленок Е.А.* Гибридная система нелинейного управления неаффинным объектом с запаздыванием по состоянию в периодических режимах // *Информатика и системы управления*. 2019. № 4(62). С. 120–131.
<https://doi.org/10.22250/isu.2019.62.120-131>
12. *Santoso F., Garratt M.A., Anavatti S.G., Petersen I.* Robust Hybrid Nonlinear Control Systems for the Dynamics of a Quadcopter Drone // *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*. V. 50. No. 8. Aug. 2020. P. 3059–3071.
<https://doi.org/10.1109/TSMC.2018.2836922>
13. *Гайдук А.Р.* Алгебраический синтез нелинейных стабилизирующих управлений // *Синтез алгоритмов сложных систем*. Вып. 7. Таганрог: ТРТИ. 1989. С. 15–19.
14. *Gaiduk A.R., Stojković N.M.* Analytical design of quasilinear control systems // *FACTA UNIVERSITATIS. Series: Automatic Control and Robotics*. 2014. V. 13. No. 2. P. 73–84.
15. *Gaiduk A.R.* Nonlinear control systems design by transformation method // *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*. 2018. V. 19. No. 12. P. 755–761.
<https://doi.org/10.17587.19.755-761>
16. *Гайдук А.Р.* Численный метод синтеза квазилинейных моделей нелинейных объектов // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2021. Том 22. № 6. С. 283–290. <https://doi.org/10.17587/mau.22.283-290>
17. *Гайдук А.Р.* Метод квазилинейной дискретизации уравнений нелинейных систем [Электронный ресурс]. Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ-24): труды, Москва, 17–21 июня 2024. М.: ИПУ РАН, 2024. С. 167–171.
18. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.
19. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. 4-е изд. М.: Наука, 1988. 553 с.
20. *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972. 232 с.
21. *Гайдук А.Р., Плаксиенко В.С., Кабалам А.Е.А.* Алгебраический полиномиально-матричный метод синтеза нелинейных астатических систем // *Математические методы в технологиях и технике*. 2022. № 1. С. 41–45.
https://doi.org/10.52348/2712-8873_MMTT_2022_1_41

22. *Гайдук А.Р., Плаксиенко В.С., Капустян С.Г.* Синтез нелинейных дискретных систем управления методом квазилинейной дискретизации // Математические методы в технологиях и технике. 2023. № 2. С. 7–11.
https://doi.org/10.52348/2712-8873_MMTT_2023_2_07
23. *Айзерман М.А., Пятницкий Е.С.* Основы теории разрывных систем. I // *АиТ*. 1974. № 7. С. 33–47. <https://www.mathnet.ru/at8429>
24. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматлит, 1961. 392 с.
25. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1969. С. 408.
26. *Финогенко И.А.* О дифференциальных уравнениях с разрывной правой частью // *Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика»*. 2010. Т. 3. № 2. С. 88–102.
27. *Инзарцев А.В., Кисилёв Л.В., Костенко В.В., и др.* Подводные робототехнические комплексы: системы, технологии, применение. Под ред. Л.В. Кисилёва. Владивосток: ФГБУН Институт проблем морских технологий ДВО РАН. 2018. 368 с. ISBN 978-5-7311-0486-9
28. *Chen C-T.* Linear system theory and design. New York: Oxford University Press, 1999. 334 p. ISBN 0-19-511777-8
29. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы: Учеб. пособие. М.: Физматлит, 2004. 464 с. ISBN 5-9221-0534-5
30. *Гайдук А.Р.* Непрерывные и дискретные динамические системы. М.: УМ и ИЦ «Учебная литература», 2004. 252 с.
31. *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учеб. для вузов. 11-е изд., испр. М.: Физматлит, 2006. 312 с.
32. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
33. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. 2-изд., испр. М.: Наука, 1966. 530 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.

Поступила в редакцию 17.03.2025

После доработки 10.08.2025

Принята к публикации 12.08.2025