

Стохастические системы

© 2024 г. В.В. РЫКОВ, д-р физ.-мат. наук (vladimir_rykov@mail.ru)
(Российский государственный университет нефти и газа
(национальный исследовательский университет) им. И.М. Губкина, Москва),
Н.М. ИВАНОВА, канд. физ.-мат. наук (nm_ivanova@bk.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

О НАДЕЖНОСТИ ВОССТАНАВЛИВАЕМОЙ ДУБЛИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ НАРАБОТКИ ДО ОТКАЗА И ВРЕМЕНИ РЕМОНТА ЕЕ ЭЛЕМЕНТОВ¹

Вводится понятие маркированного марковского процесса, с помощью которого изучается восстанавливаемая система нагруженного дублирования с одним ремонтным устройством. Предполагается, что наработки до отказа и длительности ремонта элементов системы имеют произвольные распределения. Предлагаемый подход позволяет вычислить вероятность безотказной работы системы, ее среднюю наработку до отказа и провести анализ чувствительности этих характеристик к виду исходных распределений. Апробация нового метода проведена на численных примерах путем сравнения с ранее полученными аналитическими результатами и показала их высокую точность.

Ключевые слова: маркированный марковский процесс, система нагруженного дублирования, произвольные распределения наработки до отказа и времени восстановления элементов, надежность, чувствительность.

DOI: 10.31857/S0005231024090068, EDN: ZQQMZC

1. Введение

Обеспечение надежности систем, объектов и процессов является одной из основных целей при их создании и дальнейшей эксплуатации. Одним из способов повышения структурной надежности системы является резервирование, предполагающее дублирование ее критически важных элементов или резервирование большей кратности. Система, состоящая из основного и одного дублирующего элементов, является наиболее простой резервированной системой, ее исследование интересно как с теоретической, так и практической точек зрения.

Дублированные системы с различными типами резерва, а также с возможностью восстановления отказавших элементов хорошо изучены многими авторами. Основные результаты исследования марковских дублированных

¹ Публикация выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 22-49-02023 (получатель Иванова Н.М., численный анализ, подготовка текста).

восстанавливаемых и невосстанавливаемых систем можно найти в классических работах по математической теории надежности (см., например, [1, 2] и др.).

Обширность практических приложений резервированных систем привела к созданию новых математических моделей более сложных систем. Так, в [3, 4] рассматривается надежность дублированной системы с неоднородными элементами, наработки до отказа которых имеют различные распределения. Работы [5, 6] содержат исследование систем с профилактическим и приоритетным обслуживанием отказавших элементов. Работы [7, 8] посвящены дублированным системам с различными типами ремонта системы после ее отказа, где отказы элементов подчинены модели Маршала–Олкина. В контексте внедрения избыточности в системы необходимо учитывать и вопросы оптимизации резервирования по разным критериям. Многочисленные исследования посвящены и этой проблематике (см., например, [9, 10]). Другой проблемой является определение исходных параметров системы, а именно вида распределения наработки до отказа и длительности восстановления элементов системы.

Зачастую на практике вид распределения наработки до отказа и времени ремонта элементов системы неизвестен. В самых ранних работах по исследованию надежности дублированных систем выдвигаются предположения об экспоненциальном распределении случайных величин соответствующих времен². Однако появление новых математических методов исследования позволило изучать системы, в которых одно время имеет экспоненциальное распределение, а другое – произвольное. Так, имеется ряд исследований, посвященных применению метода введения дополнительных переменных, полумарковских процессов и других к этим задачам (см., например, [11–14]). Продолжением этих исследований является анализ чувствительности показателей надежности к виду исходных распределений.

В [15] для исследования системы k -из- n с экспоненциально распределенной наработкой до отказа и произвольным распределением времени ремонта применена теория разложимых полурегенерирующих процессов, предложенная ранее автором В.В. Рыковым в качестве обобщения и развития идеи регенерации Смита [16]. Позже этот же подход был применен к исследованию надежности дублированных систем ненагруженного резервирования [17, 18] с произвольными исходными распределениями наработки до отказа и времени ремонта элементов. Однако, как оказалось, он неприменим для исследования аналогичной системы нагруженного резервирования и других более сложных моделей.

В настоящей работе для исследования дублированных восстанавливаемых систем нагруженного резервирования впервые предлагается новый под-

² Следуя классическим работам А.Я. Хинчина, Б.В. Гнеденко и других, далее всюду, где говорится о распределениях времен, подразумеваются распределения соответствующих случайных величин.

ход, опирающийся на новое понятие маркированных марковских процессов (ММП).

Понятие ММП введено как развитие понятия и теории точечных процессов [19]. В теории массового обслуживания точечным процессом называется возрастающая последовательность неотрицательных случайных величин, описывающих моменты наступления некоторых событий, на положительной полуоси времени [20]. Частными случаями точечных процессов являются пуассоновский процесс, точечный процесс Кокса, в которых время наступления событий подчиняется экспоненциальному распределению. Другим обобщением пуассоновского процесса является процесс восстановления, в котором промежутки между наступлениями событий подчинены отличному от экспоненциального распределению [21].

Для описания точечного процесса, распределение которого обладает свойством марковости, в 1977 г. было введено понятие марковских точечных процессов [22]. Позже его обобщением стало понятие марковского маркированного точечного процесса, который определяется парой случайных величин, где первая компонента есть время наступления случайного события, а вторая – метка, также являющаяся случайной величиной, дополнительно описывающей соответствующее событие.

С момента введения понятия точечного процесса соответствующая теория активно развивается, поскольку нашла применение в различных областях науки и техники. Работа [23] посвящена построению математической модели управления автотранспортом на перекрестке с помощью маркированных точечных процессов. В [24] исследован мультивариантный точечный процесс для задачи мониторинга состояния телекоммуникационного соединения. Возможность применения пространственных пуассоновских процессов для моделирования взаимодействия беспроводных устройств рассмотрена в [25].

Вводимый в настоящей работе ММП отличается от известных понятий тем, что состоит из двух компонент, первая из которых представляет собой число отказавших элементов системы, а вторая – набор случайных меток, определяющих их остаточные наработки до отказа и времени ремонта. С помощью предложенного подхода удастся вычислить вероятность безотказной работы системы до момента t и среднюю наработку до отказа дублированной системы нагруженного резерва с произвольными распределениями наработки до отказа и времени ремонта ее элементов. Далее пояснение относительно зависимости вероятности безотказной работы системы от времени t будет опущено.

Статья организована следующим образом. Постановка задачи, основные обозначения и предположения приводятся в следующем разделе 2. В разделе 3 представлено преобразование меток на отдельном периоде регенерации. В разделе 4 получены основные характеристики модели в терминах меток, а в разделе 5 предложен алгоритм их вычисления. Апробация предложенного алгоритма и примеры численного анализа предлагаются в разделе 6. В кон-

це сформулированы основные результаты работы и приведены направления дальнейших исследований.

2. Постановка задачи. ММП

2.1. Постановка задачи. Обозначения и предположения

Рассмотрим восстанавливаемую систему нагруженного дублирования с единственным устройством восстановления отказывающихся элементов, для которой используется обозначение $\langle GI_2|GI|1 \rangle$. Здесь скобки $\langle \rangle$ обозначают замкнутую систему, символы GI – рекуррентный поток отказов и рекуррентный механизм обслуживания с произвольными распределениями наработки до отказа и времени ремонта на первой и второй позициях соответственно. Подстрочный индекс у первого символа обозначает количество элементов системы. Цифра на последней позиции обозначает количество ремонтных единиц. Введем следующие обозначения и предположения:

- $A_i : (i = 1, 2, \dots)$ – наработки до отказа элементов системы, которые предполагаются независимыми одинаково распределенными (н.о.р.) случайными величинами (с.в.) с общей для них функцией распределения (ф.р.) $A(t) = \mathbf{P}\{A_i \leq t\}$, плотностью распределения (п.р.) $a(t) = A'(t)$ и конечными математическим ожиданием $\mu_a = \mathbf{E}[A_i] < \infty$ и дисперсией $\sigma_a^2 = \mathbf{D}[A_i] < \infty$.
- $B_i : (i = 1, 2, \dots)$ – времена ремонта элементов системы, которые предполагаются н.о.р. с.в. с общей ф.р. $B(t) = \mathbf{P}\{B_i \leq t\}$, п.р. $b(t) = B'(t)$ и конечными математическим ожиданием $\mu_b = \mathbf{E}[B_i] < \infty$ и дисперсией $\sigma_b^2 = \mathbf{D}[B_i] < \infty$.

2.2. Определение ММП

Для исследования такой модели введем понятие *маркированного марковского процесса* (ММП) с дискретным параметром

$$Z(n) = \{(J(n), \mathbf{X}(n)), n = 0, 1, \dots\},$$

первая компонента которого представляет собой условную марковскую цепь $J(n) := J$ с не более чем счетным пространством состояний \mathcal{J} , а вторая – набор случайных меток $\mathbf{X}(n) := \mathbf{X}_i(n)$, где $i \in \mathcal{J}$, со значениями в измеримом пространстве меток (E_i, \mathcal{E}_i) . Такой процесс задается:

- переходными вероятностями $p_{ij}(\mathbf{X}_i)$ условной марковской цепи J , зависящими от содержания метки \mathbf{X}_i в состоянии i ;
- операторами преобразования меток $\Phi_{ij}(\mathbf{X}_i)$ при переходе из состояния i в состояние j марковской цепи и их распределениями.

Замечание 1. Этот процесс можно рассматривать как специальный вид марковской последовательности с общим пространством состояний и задавать с помощью переходного ядра (генератора процесса). Однако для исследования различных приложений удобнее отталкиваться от понятия ММП.

Замечание 2. На основе такой модели можно исследовать широкий класс процессов, таких как полумарковские, полурегенерирующие процессы, процессы марковского восстановления и т.п.

2.3. Построение ММП

Приведем построение ММП на примере модели $\langle GI_2|GI|1 \rangle$. В качестве пространства состояний последовательности $J(n)$ выберем множество отказавших элементов $\mathcal{J} = (0, 1, 2)$, где состояние i означает число элементов системы, находящихся в неработоспособном состоянии. В качестве меток $\mathbf{X}_i(n)$ выберем многомерные с.в., содержанием которых являются

- в состоянии $i = 0$ остаточная наработка до отказа элемента $X_0^{(1)}(n)$ и время работы вновь отремонтированного элемента $X_0^{(2)}(n)$,
- в состоянии $i = 1$ остаточная наработка до отказа одного из элементов $X_1^{(1)}(n)$ и вновь назначенное время восстановления другого $X_1^{(2)}(n)$,
- в состоянии $i = 2$ остаточное время восстановления элемента $X_2(n)$, уже находящегося на ремонте.

Здесь верхний индекс указывает номер метки, нижний – состояние цепи $i \in \mathcal{J}$, а переменная в скобках – это номер шага.

Предположим, что в начальный момент времени (на шаге $n = 0$) оба элемента системы исправны, т.е. $J(0) = 0$. Тогда начальным содержанием меток будут являться наработки до отказа элементов системы (н.о.р с.в.), $X_0^{(1)}(0) = A_0^{(1)}$, $X_0^{(2)}(0) = A_0^{(2)}$ ($A_0^{(1)}$ и $A_0^{(2)}$ также, как и ранее, н.о.р. с.в. с распределением $A(\cdot)$). В последующем процесс оказывается в состоянии $i = 0$ с некоторым набором меток, значение которых будет вычислено ниже.

Возможные переходы рассматриваемой цепи и преобразования меток, описывающие поведение рассматриваемой системы, показаны на рис. 1.

Из состояния 0 процесс переходит в состояние 1 независимо от значения меток с вероятностью $p_{01}(\mathbf{X}(n)) = 1$. При этом на первом шаге метки в состоянии 1 преобразуются следующим образом:

$$(1) \quad \mathbf{X}_1(1) = \Phi_{01}[\mathbf{X}_0(0)]: \quad X_1^{(1)}(1) = A_0^{(1)} \vee A_0^{(2)} - A_0^{(1)} \wedge A_0^{(2)}, \quad X_1^{(2)}(1) = B_1.$$

Из состояния 1 возможны переходы в состояние 0 в случае восстановления отказавшего элемента и в состояние 2 в случае отказа второго элемента

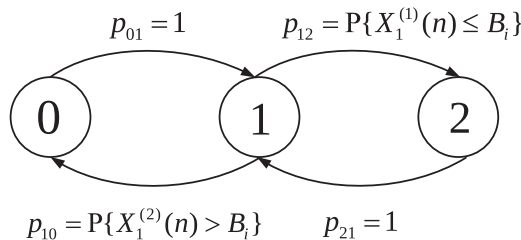


Рис. 1. Граф переходов системы $\langle GI_2|GI|1 \rangle$.

системы. При переходе в состояние 0 на первом шаге эта вероятность имеет вид

$$p_{10}(\mathbf{X}_1(1)) = \mathbf{P} \left\{ X_1^{(1)}(1) > X_1^{(2)}(1) \right\}.$$

При этом метки в состоянии 0 преобразуются следующим образом:

$$(2) \quad \mathbf{X}_0(1) = \Phi_{10}[\mathbf{X}_1(0)]: \quad X_0^{(1)}(1) = (X_1^{(1)}(1) - B_1)1_{\{X_1^{(1)}(1) > B_1\}}, \quad X_0^{(2)}(1) = A_1.$$

Аналогично при переходе в состояние 2 соответствующая вероятность перехода принимает вид

$$p_{12}(\mathbf{X}_1(1)) = \mathbf{P} \left\{ X_1^{(1)}(1) \leq X_1^{(2)}(1) \right\},$$

при этом метка в состоянии 2 преобразуется следующим образом:

$$(3) \quad \mathbf{X}_2(1) = \Phi_{12}[\mathbf{X}_1(1)]: \quad X_2(1) = (B_1 - X_1^{(1)}(1))1_{\{X_1^{(1)}(1) \leq B_1\}}.$$

Наконец, из состояния 2 возможен только один переход в состояние 1, так что $p_{21}(\mathbf{X}_2(1)) = 1$, при этом метки в новом состоянии (на втором шаге) преобразуются следующим образом:

$$(4) \quad \mathbf{X}_1(2) = \Phi_{21}[\mathbf{X}_2(1)]: \quad X_1^{(2)}(2) = A_1, \quad X_1^{(1)}(2) = B_2.$$

Таким образом очевидно, что переход из состояния 2 в состояние 1 представляет собой регенерацию системы, поэтому для ее изучения достаточно исследовать ее поведение только на отдельном периоде регенерации.

3. Исследование поведения процесса на периоде регенерации

Имея в виду регенеративный характер поведения системы, рассмотрим более подробно поведение процесса $Z(n)$ на периоде регенерации. Аналогично предыдущему разделу приведем преобразование меток на периоде регенерации системы. При этом для остаточного времени работы системы после отказа одного из ее элементов на l -м шаге периода регенерации для краткости используем следующее обозначение:

$$W(l) = X_0^{(1)}(l) \vee X_0^{(2)}(l) - X_0^{(1)}(l) \wedge X_0^{(2)}(l) \quad (l = 0, 1, 2, \dots).$$

Тогда с учетом преобразования меток (1)–(4) справедлива

Лемма 1. Между возвращениями в состояние 1 из состояния 2 (т.е. на периоде регенерации системы) метки преобразуются следующим образом:

$$(5) \quad \begin{aligned} X_0^{(1)}(l) &= (X_1^{(1)}(l-1) - X_1^{(2)}(l-1))1_{\{X_1^{(1)}(l-1) > X_1^{(2)}(l-1)\}}, \quad X_0^{(2)} = A_l \in A(\cdot), \\ X_1^{(1)}(l) &= W(l-1), \quad X_1^{(2)} = B_l \in B(\cdot), \\ X_2(l) &= (X_1^{(1)}(l) - X_1^{(2)}(l))1_{\{X_1^{(1)}(l) \leq X_1^{(2)}(l)\}}, \end{aligned}$$

где в качестве начального содержания меток выбраны

$$X_0^{(1)}(0) = X_0^{(2)}(0) = 0, \quad X_1^{(1)}(0) = A_0, \quad X_1^{(2)}(0) = B_0, \quad X_2(0) = 0.$$

Доказательство. Действительно, отправляясь из состояния 1 с метками $X_1^{(1)}(0) = A_0$, $X_1^{(2)}(0) = B_0$ процесс сразу переходит в состояние 2, если отказ работающего элемента произойдет раньше восстановления ремонтирующегося, т.е. при $A_0 \leq B_0$, при этом процесс окажется в состоянии 2 с меткой

$$X_2(1) = (X_1^{(1)}(0) - X_1^{(2)}(0))1_{\{X_1^{(1)}(0) \leq X_1^{(2)}(0)\}}.$$

Из состояния 1 процесс перейдет в состояние 0, если восстановление ремонтирующегося элемента произойдет раньше отказа работающего, т.е. при $A_0 > B_0$; при этом метки преобразуются следующим образом:

$$X_0^{(1)}(1) = (X_1^{(1)}(0) - X_1^{(2)}(0))1_{\{X_1^{(1)}(0) > X_1^{(2)}(0)\}}, \quad X_0^{(2)}(1) = A_1.$$

Далее процесс возвратится в состояние 1 с вероятностью 1 и метками

$$X_1^{(1)}(1) = X_0^{(1)}(1) \vee A_1 - X_0^{(1)}(1) \wedge A_1 \equiv W(1), \quad X_1^{(2)}(1) = B_1.$$

Из состояния 1 процесс может перейти в состояние 2 с вероятностью

$$\mathbf{P}\{X_1^{(1)}(1) \leq X_1^{(2)}(1)\} \equiv \mathbf{P}\{W(1) \leq B_1\}$$

и остаточным временем ремонта (меткой)

$$X_2(2) = (X_1^{(2)}(1) - X_1^{(1)}(1))1_{\{X_1^{(1)}(1) \leq X_1^{(2)}(1)\}},$$

после чего с вероятностью 1 вернется в состояние 1. На этом период регенерации закончится.

В противном случае период регенерации продолжится, и процесс перейдет в состояние 0 с вероятностью

$$\mathbf{P}\{X_1^{(1)}(1) > X_1^{(2)}(1)\} \equiv \mathbf{P}\{W(1) > B_1\}$$

и метками

$$X_0^{(1)}(2) = (X_1^{(1)}(1) - X_1^{(2)}(1))1_{\{X_1^{(1)}(1) > X_1^{(2)}(1)\}}, \quad X_0^{(2)}(2) = A_2.$$

Аналогично происходит преобразование меток на l -м шаге. Из состояния 1 процесс l раз возвратится в состояние 0, если при $(l-1)$ -м посещении состояния 1 из состояния 0 ремонт закончится раньше остаточной наработки до отказа работающего элемента, т.е. при

$$X_1^{(2)}(l-1) = B_{l-1} < W(l-1) = X_1^{(1)}(l-1).$$

При этом остаточная наработка до отказа уменьшится на $X_1^{(2)}(l-1) = B_{l-1}$, и содержание метки в состоянии 0 станет равным

$$\begin{aligned} X_0^{(1)}(l) &= (X_1^{(1)}(l-1) - X_1^{(2)}(l-1))1_{\{X_1^{(1)}(l-1) > X_1^{(2)}(l-1)\}} \equiv \\ &\equiv (W(l-1) - B_{l-1})1_{\{W(l-1) > B_{l-1}\}}. \end{aligned}$$

У отремонтированного элемента начинается новая наработка до отказа $X_0^{(2)}(l) = A_l$, что с учетом содержания меток доказывает первую из формул (5).

Далее из состояния 0 процесс с вероятностью 1 возвратится в состояние 1. Тогда остаточная наработка до отказа системы $W(l)$ после l -го возвращения в состояние 1 представляет собой разность между максимумом и минимумом с.в. $X_0^{(1)}(l)$ и A_l , и начинается ремонт второго элемента, т.е. вторая метка принимает значение B_l ,

$$X_1^{(1)}(l) = X_0^{(1)}(l) \vee A_l - X_0^{(1)}(l) \wedge A_l \equiv W(l), \quad X_1^{(2)}(l) = B_l,$$

что доказывает вторую из формул (5).

Наконец, из состояния 1 в случае отказа работающего элемента, т.е. при

$$X_1^{(2)}(l) = B_l \geq W(l) = X_1^{(1)}(l),$$

процесс переходит в состояние 2 с меткой

$$X_2(l) = (X_l^{(1)}(l) - X_1^{(2)}(l))1_{\{X_l^{(1)}(l) \leq X_1^{(2)}(l)\}} \equiv (B_l - W(l))1_{\{W(l) \leq B_l\}},$$

что доказывает последнюю из формул (5) и завершает доказательство леммы.

В следующем разделе полученные соотношения использованы для вычисления основных характеристик надежности модели.

4. Вычисление основных характеристик надежности

Основными характеристиками надежности рассматриваемой системы на периоде регенерации при начальном значении меток

$$X_0^{(1)}(0) = X_0^{(2)}(0) = 0, \quad X_1^{(1)}(0) = A_0, \quad X_1^{(2)}(0) = B_0, \quad X_2(0) = 0$$

являются:

- распределение $\pi_l = \mathbf{P}\{\nu = l\}$ числа шагов ν до момента отказа системы;
- длительности $T_{ij}(l)$, ($i, j = 0, 1, 2$, $l = 1, 2, \dots$) перехода из состояния i в состояние j на l -м шаге и их характеристики;
- время R от момента возвращения процесса из состояния 2 в состояние 1 до следующего момента перехода в состояние 2, соответствующее распределение $R(t)$, т.е. вероятность безотказной работы системы, а также соответствующее среднее время μ_R между возвращениями;
- распределение периода регенерации системы $\Pi = R + T_{21}(\nu)$.

Вычислим основные характеристики модели в терминах меток. Обозначим через

$$T(l) = T_{10}(l-1) + T_{01}(l), \quad l = 1, 2, \dots,$$

время до возвращения в состояние 1 на l -м шаге периода регенерации, Ω_l и $\hat{\Omega}_l$ – множества элементарных событий, для которых выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \Omega_l &= \{\omega : W(0) > B_0, W(1) > B_1, \dots, W(l) > B_l\} \quad (l = 1, 2, \dots), \\ \hat{\Omega}_l &= \Omega_{l-1} \wedge \{W(l) \leq B_l\}, \quad \hat{\Omega}_0 = \{A_0 \leq B_0\}. \end{aligned}$$

Тогда справедлива следующая

Теорема 1. Распределение числа шагов ν на периоде регенерации π_l , длительности пребывания $T_{ij}(l)$ в состоянии i до перехода в состояние j на l -м шаге, наработка системы R до отказа, ее период регенерации Π в терминах меток выражаются следующим образом:

$$(6) \quad \pi_l = \mathbf{P}\{\nu = l\} = \mathbf{P}(\hat{\Omega}_l),$$

$$(7) \quad T_{10}(l) = X_1^{(2)}(l)1_{\{X_1^{(1)}(l) > X_1^{(2)}(l)\}}, \quad T_{01}(l) = X_0^{(1)}(l) \wedge X_0^{(2)}(l),$$

$$(8) \quad T(l) = T_{10}(l-1) + T_{01}(l),$$

$$(9) \quad T_{12}(l) = X_1^{(1)}(l)1_{\{X_1^{(1)}(l) \leq X_1^{(2)}(l)\}}, \quad T_{21}(l) = X_2(l),$$

$$(10) \quad R = \sum_{l \geq 0} [T(l) + T_{12}(l)]1_{\{\hat{\Omega}_l\}},$$

$$(11) \quad \Pi = R + T_{21}(l)1_{\{\hat{\Omega}_l\}}.$$

При этом условием конечности периода регенерации является расходимость ряда

$$(12) \quad \sum_{i \geq 0} \ln \mathbf{P}\{W(i) \leq B_i \mid W(i-1) \leq B_{i-1}\}.$$

Доказательство. Действительно, согласно лемме 1, отправляясь из состояния 1 с метками $X_1^{(1)}(0) = A_0$, $X_1^{(2)}(0) = B_0$, процесс сразу переходит в состояние 2, если отказ работающего элемента произойдет раньше восстановления ремонтирующегося, т.е. при $X_1^{(1)}(0) \leq X_1^{(2)}(0)$, проведя в нем время

$$T_{12}(1) = X_1^{(1)}(0) \wedge X_1^{(2)}(0) = X_1^{(1)}(0)1_{\{X_1^{(1)}(0) \leq X_1^{(2)}(0)\}}.$$

При этом процесс окажется в состоянии 2 с меткой $X_2(1) = (B_0 - A_0)1_{\{A_0 \leq B_0\}}$ и проведет в нем случайное время, равное этой величине,

$$T_{21}(1) = (B_0 - A_0)1_{\{A_0 \leq B_0\}}.$$

Таким образом,

$$\pi_0 = \mathbf{P}\{A_0 \leq B_0\}, \quad R = A_0, \quad \Pi = B_0,$$

что соответствует формулам (6), (9)–(11) при $l = 0$.

Число возвращений в состояние 1 будет равно 1, если восстановление ремонтирующегося элемента произойдет раньше отказа работающего, т.е. при $A_0 > B_0$; при этом процесс проведет в состоянии 1 до перехода в состояние 0 случайное время

$$T_{10}(1) = X_1^{(1)}(0) \wedge X_1^{(2)}(0) 1_{\{X_1^{(1)}(0) > B_0\}} \equiv A_0 \wedge B_0 1_{\{A_0 > B_0\}}$$

и перейдет в состояние 0 с метками

$$X_0^{(1)}(1) = (A_0 - B_0) 1_{\{A_0 > B_0\}}, \quad X_0^{(2)}(1) = A_1.$$

Далее процесс возвратится с вероятностью 1 в состояние 1 с метками

$$X_1^{(1)}(1) = X_0^{(1)}(1) \vee A_1 - X_0^{(1)}(1) \wedge A_1 \equiv W(1), \quad X_1^{(2)}(1) = B_1$$

за время $T_{01}(1) = X_0^{(1)}(1) \wedge X_0^{(2)}(1)$.

Затем из состояния 1 процесс перейдет в состояние 2 с вероятностью $\mathbf{P}\{W(1) \leq B_1\}$ и меткой

$$X_2(1) = (B_1 - W(1)) 1_{\{W(1) \leq B_1\}},$$

проведя в нем время $T_{12}(1) = W(1) 1_{\{W(1) \leq B_1\}}$, после чего с вероятностью 1 за время $T_{21}(1) = (B_1 - W(1)) 1_{\{W(1) \leq B_1\}}$ вернется в состояние 1. На этом цикл закончится. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \mathbf{P}\{\nu = 1\} = \mathbf{P}(\hat{\Omega}_1), \\ R &= T_{10}(1) + T_{01}(1) + T_{12}(1), \\ \Pi &= R + T_{21}(1), \end{aligned}$$

что соответствует формулам (6)–(11) при $l = 1$.

Аналогично, число возвращений в состояние 1 будет равно l , если осуществится событие $\hat{\Omega}_l$, т.е. если процесс $l - 1$ раз перейдет из состояния 1 в 0 и обратно, а на l -м шаге перейдет в состояние 2. Вероятность этого события равна

$$\pi_l = \mathbf{P}\{\nu = l\} = \mathbf{P}(\hat{\Omega}_l),$$

что доказывает формулу (6). При этом преобразования меток осуществляются в соответствии с леммой 1, а времена переходов $T_{10}(l)$ из состояния 1 в 0 и обратно $T_{01}(l)$ на l -м шаге равны

$$\begin{aligned} T_{10}(l) &= X_1^{(2)}(l) 1_{\{X_1^{(1)}(l) > X_1^{(2)}(l)\}}, & T_{01}(l) &= X_0^{(1)}(l) \wedge X_0^{(2)}(l) 1_{\{X_0^{(1)}(l) > X_0^{(2)}(l)\}}, \\ T_{12}(l) &= X_1^{(1)}(l) 1_{\{X_1^{(1)}(l) \leq X_1^{(2)}(l)\}}, & T_{21}(l) &= X_2(l). \end{aligned}$$

Соображение о том, что наработка системы R до отказа складывается из последовательностей длительностей ремонтов и остаточных наработок до отказа элементов, т.е. длительностей переходов между состояниями 1 и 0 до перехода в состояние 2, а ее период регенерации Π включает в себя дополнительно время $T_{21}(l)$ в состоянии 2, доказывает справедливость формул (10), (11).

Приведем теперь условие конечности периода регенерации. Так как время возвращения из состояния 2 в состояние 1 конечно с вероятностью 1 для любого шага цикла, для этого достаточно конечности с вероятностью 1 наработки системы до отказа,

$$\mathbf{P}\{R < \infty\} = 1.$$

Рассмотрим сначала условие конечности числа шагов на периоде регенерации $\mathbf{P}\{\nu < \infty\} = 1$. Замечая, что

$$\mathbf{P}\{\nu < \infty\} = \sum_{l \geq 0} \mathbf{P}\{\nu = l\} = \sum_{l \geq 0} \mathbf{P}(\hat{\Omega}_l),$$

вычислим вероятность события $\hat{\Omega}_l$, пользуясь марковской зависимостью меток,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\hat{\Omega}_l) &= \mathbf{P}\{W(l) > B_l \mid \Omega_{l-1}\} \mathbf{P}(\Omega_l) = \\ &= \mathbf{P}\{W(l) > B_l \mid W(l-1) \leq B_{l-1}\} \mathbf{P}(\Omega_{l-1}) = \\ &= (1 - p_l) \mathbf{P}(\Omega_{l-1}) = (1 - p_l) \mathbf{P}(\Omega_{l-1} \mid \Omega_{l-2}) \mathbf{P}(\Omega_{l-1}) = \dots = \\ &= (1 - p_l) p_{l-1} \dots p_0 + \dots + p_0 (1 - p_1) + p_0, \end{aligned}$$

где использованы обозначения

$$p_0 = \mathbf{P}\{A_0 > B_0\}, \quad p_i = \mathbf{P}\{W(i) \leq B_i \mid W(i-1) \leq B_{i-1}\}.$$

Суммируя полученные выражения, найдем

$$\sum_{l \geq 0} \pi_l = 1 - p_0 + p_0(1 - p_1) + \dots + p_0 \dots p_{l-1}(1 - p_l) + \dots = 1 - \prod_{l \geq 0} p_l.$$

Таким образом, условием конечности числа шагов на периоде регенерации является расходимость произведения $\prod_{l \geq 0} p_l$ или, что эквивалентно, расходимость ряда (12),

$$\sum_{l \geq 0} \ln p_l,$$

что завершает доказательство теоремы.

Полученные соотношения показывают, что основные характеристики модели выражаются в терминах меток. Однако аналитические выражения их распределений и числовых показателей достаточно громоздки и требуют введения специальных преобразований. При этом вычислительные процедуры для представления окончательных результатов достаточно проблематичны. Поэтому в следующем разделе предлагается алгоритм вычисления основных характеристик модели путем имитационного моделирования, опирающийся непосредственно на предложенный подход.

5. Алгоритм вычисления основных характеристик надежности

В этом разделе представлен алгоритм вычисления характеристик надежности восстанавливаемой дублированной системы нагруженного резервирования на основе предлагаемого метода.

Алгоритм 1.

Исходные данные:

$A(\cdot)$, $B(\cdot)$ – распределения с.в. A_i , B_i , соответствующие средние (μ_a, μ_b) и коэффициенты вариации (v_a, v_b) ,

N – число реализаций модели,

n – счетчик числа реализаций,

ν_l – массив числа циклов длины l на периоде регенерации,

l – счетчик длины периода регенерации,

R – массив значений наработки системы до отказа,

Π – массив периода регенерации системы.

Задать: $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, N , $n = 1$, $\nu_l = [0] * \max(l)$, $R = [0] * N$, $\Pi = [0] * N$.

Начало. Положить: $l = 0$, $X_1^{(1)}(0) = A_0 \in A(\cdot)$, $X_1^{(2)}(0) = B_0 \in B(\cdot)$,
 $X_0^{(1)}(0) = X_0^{(2)}(0) = X_2(0) = 0$, $T(0) = 0$.

Шаг 1. Если $n < N$, то переход на Шаг 2, в противном случае переход на Шаг 4.

Шаг 2. Пока $X_1^{(1)}(l) > X_1^{(2)}(l) \forall l = 0, 1, \dots$, повторять:

$$l := l + 1$$

$$T_{10}(l) = X_1^{(2)}(l - 1)$$

$$X_0^{(1)}(l) = X_1^{(1)}(l - 1) - X_1^{(2)}(l - 1), \quad X_0^{(2)}(l) = A_l \in A(\cdot)$$

$$T_{01}(l) = X_0^{(1)}(l) \wedge X_0^{(2)}(l)$$

$$T(l) := T(l - 1) + T_{10}(l) + T_{01}(l)$$

$$X_1^{(1)}(l) = X_0^{(1)}(l) \vee X_0^{(2)}(l) - X_0^{(1)}(l) \wedge X_0^{(2)}(l), \quad X_1^{(2)}(l) = B_l \in B(\cdot),$$

иначе $X_1^{(1)}(l) < X_1^{(2)}(l)$

$$T_{12}(l) = X_1^{(1)}(l)$$

$$T_{21}(l) = X_2(l) = X_1^{(2)}(l) - X_1^{(1)}(l).$$

Переход на Шаг 3.

Шаг 3. Сбор статистики:

– заполнение массива $\nu_l := \nu_l + 1$,

– заполнение массива $R_n := T(l) + T_{12}(l)$,

– заполнение массива $\Pi_n := R_n + T_{21}(l)$.

Положить $n := n + 1$. Перейти на Начало.

Шаг 4. Обработка статистики:

– вычисление оценки распределения числа шагов ν на периоде регенерации,

$$\hat{\pi} = \frac{\nu_l}{\sum_{l>0} \nu_l},$$

– оценка вероятности безотказной работы системы по полученному массиву R :

$$\hat{R}(t) = 1 - \frac{1}{N} R_n, \quad R_n \leq t \leq R_{n+1},$$

– вычисление оценки средней наработки системы до отказа как среднего значения массива R ,

$$\hat{\mu}_R = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N R_n,$$

– вывод результатов.

СТОП.

6. Примеры

В данном разделе рассмотрим несколько примеров численного анализа, а также сравним результаты, полученные с помощью предлагаемого подхода и методов теории марковских процессов. Выбор исходных данных не относится к какому-либо примеру из практической задачи и носит лишь демонстративный характер.

6.1. Система $\langle M_2 | M | 1 \rangle$

Пусть наработка до отказа и время ремонта элементов имеют экспоненциальное распределение с параметрами α и β соответственно, $A(t) \sim \text{Exp}(\alpha)$, $B(t) \sim \text{Exp}(\beta)$. Характеристики надежности такой системы можно вычислить прямым методом из процесса рождения и гибели. Таким образом, вероятность безотказной работы системы $\langle M_2 | M | 1 \rangle$ вычисляется как

$$(13) \quad R(t) = \frac{1}{2r} e^{-\frac{1}{2}(3\alpha+\beta+r)t} (e^{rt}(\alpha + \beta + r) - (\alpha + \beta - r)),$$

где $r = \sqrt{\alpha^2 + 6\alpha\beta + \beta^2}$, откуда получаем среднюю наработку системы μ_R до отказа,

$$(14) \quad \mu_R = \int_0^{\infty} R(t) dt = \frac{1 + 2\alpha\beta^{-1}}{2\alpha^2\beta^{-1}}.$$

Для иллюстрации примера положим $\alpha = \beta = 1$. В этом случае средние значения наработки до отказа и времени ремонта равны $\mu_a = \mu_b = 1$. Для проведения эксперимента было взято $N = 10^5$ – число реализаций алгоритма,

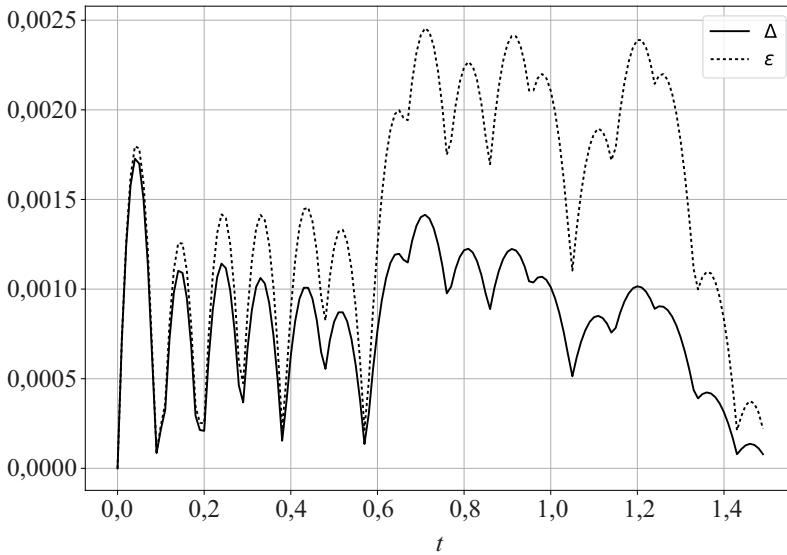


Рис. 2. Абсолютная и относительная погрешности оценки вероятности безотказной работы системы $\langle M_2|M|1 \rangle$.

подобранное экспериментальным путем для достижения высокой точности результатов алгоритма. Непосредственная реализация алгоритма выполнена на языке программирования Python. Для оценки точности полученных результатов по предложенному алгоритму рассмотрим абсолютную Δ и относительную ε погрешности,

$$\Delta = |R_{th}(t) - \hat{R}(t)|, \quad \varepsilon = \frac{\Delta}{R_{th}(t)},$$

где $R_{th}(t)$ обозначает значения вероятности безотказной работы системы, вычисленные по формуле (13), а $\hat{R}(t)$ — значения, полученные с помощью алгоритма. На рис. 2 показаны графические результаты вычисления этих оценок на интервале $t = [0, 1,5]$, где $t = 1,5$ соответствует средней наработке системы μ_R до отказа, вычисленной по формуле (14). Из графика видно, что на рассматриваемом интервале t максимальное значение абсолютной ошибки составляет $\Delta \approx 0,0017$, а максимальное значение относительной ошибки $\max(\varepsilon) \approx 0,0025$. При этом значения средних оценок на всем интервале t равны соответственно $\mathbf{E}[\Delta] = 0,0008$ и $\mathbf{E}[\varepsilon] = 0,0014$.

Значения средней наработки системы μ_R до отказа, вычисленные аналитически и по алгоритму, равны соответственно $\mu_R = 1,5$ и $\hat{\mu}_R = 1,502127$ и подчеркивают сопоставимость полученных результатов.

6.2. Система $\langle M_2|GI|1 \rangle$

Рассмотрим далее случай, когда наработка до отказа элементов имеет экспоненциальное распределение, а время их ремонта подчиняется произвольному закону распределения, т.е. рассмотрим систему $\langle M_2|GI|1 \rangle$.

Для вычисления аналитического выражения вероятности безотказной работы такой системы используется метод введения дополнительных переменных [26], который приводит к необходимости решения системы дифференциальных уравнений Колмогорова в частных производных,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\pi_0(t) &= -2\alpha\pi_0(t) + \int_0^t \beta(x)\pi_1(t, x)dx, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\pi_1(t; x) &= -(\alpha + \beta(x))\pi_1(t, x), \\ \frac{d}{dt}\pi_2(t) &= \alpha \int_0^t \pi_1(t, x)dx,\end{aligned}$$

вместе с начальными $\pi_0(0) = 0$, $\pi_1(0) = 1$, $\pi_2(0) = 0$ и граничным условиями $\pi_1(t, 0) = 2\alpha\pi_0(t)$ с помощью метода характеристик. Путем решения этой системы в терминах преобразований Лапласа (ПЛ) получено ПЛ вероятности безотказной работы системы, которое в терминах ПЛ п.р. времени ремонта ее элементов $\tilde{b}(s)$ имеет вид

$$(15) \quad \tilde{R}(s) = \frac{s + \alpha(2 - \tilde{b}(s + \alpha))}{(s + \alpha)(s + 2\alpha(1 - \tilde{b}(s + \alpha)))}.$$

Откуда найдем среднюю наработку до отказа системы

$$\mu_R = \tilde{R}(0) = \frac{2 - \tilde{b}(\alpha)}{2\alpha(1 - \tilde{b}(\alpha))}.$$

Для сравнения аналитических результатов и их оценок, полученных с помощью нового алгоритма, предположим, что время ремонта элементов имеет Гамма распределение ($\Gamma = \Gamma(l, \theta)$) с соответствующими характеристиками: п.р. $b(t) = \theta^l t^{l-1} e^{-\theta t} \Gamma(l)^{-1}$, $t > 0$, средним $\mu_b = l\theta^{-1} = 1$ и коэффициентом вариации $v_b = \sqrt{l}/l = 0,5$. Для остальных параметров снова положим $\alpha = 1$, $N = 10^5$. Для оценки полученных результатов рассмотрим также абсолютную Δ и относительную ε погрешности (см. рис. 3). Для вычисления этих оценок в качестве теоретического $R_{th}(t)$ взято обратное ПЛ вероятности безотказной работы (15), вычисленное численно с использованием встроенной функции языка программирования Python. Аргумент t рассматривается на интервале $t = [0, 1,35]$, где $\max(t) = 1,35$ соответствует значению μ_R при заданных параметрах.

По результатам эксперимента, максимальное значение для Δ составило $\max(\Delta) \approx 0,0017$, а для ε составило $\max(\varepsilon) \approx 0,0028$. Средние значения на всем интервале t составили $\mathbf{E}[\Delta] = 0,0007$ и $\mathbf{E}[\varepsilon] = 0,0012$. В данном случае средняя наработка до отказа системы составила $\mu_R = 1,3469$ для аналитического результата и $\hat{\mu}_R = 1,3478$ для алгоритма. Результаты оценки алгоритма снова демонстрируют высокую точность относительно аналитических результатов.

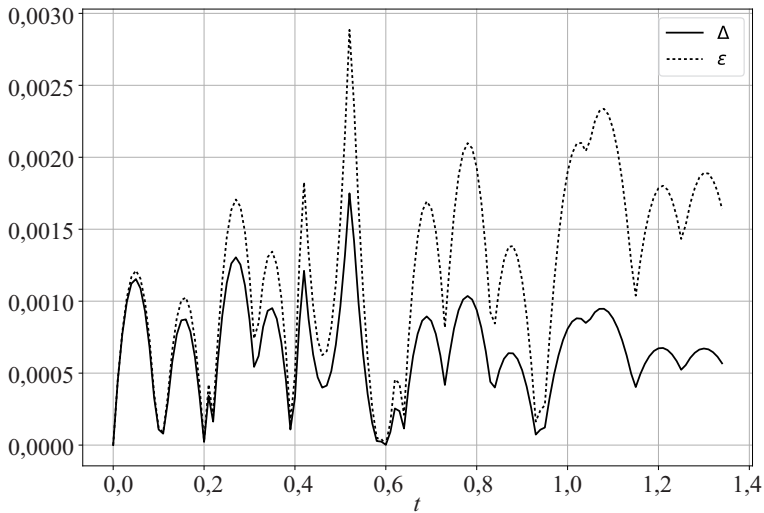


Рис. 3. Абсолютная и относительная погрешности оценки вероятности безотказной работы системы $\langle M_2|\Gamma|1 \rangle$.

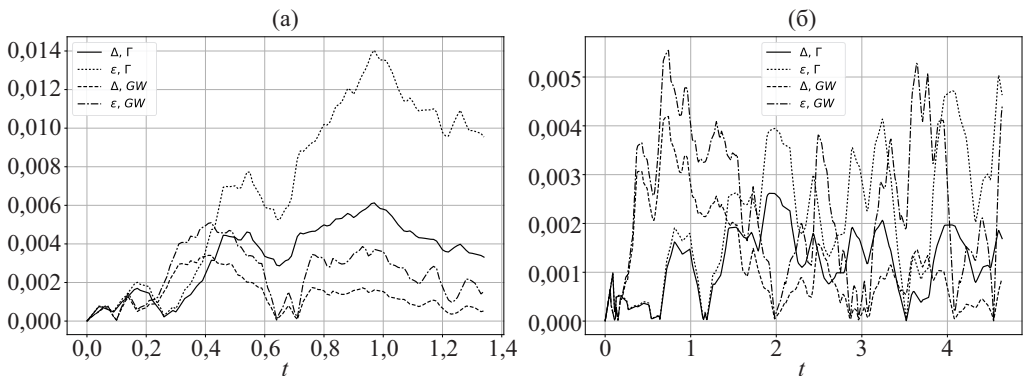


Рис. 4. Абсолютная и относительная погрешности оценки вероятности безотказной работы системы $\langle M_2|GI|1 \rangle$. $a - v_b = 0,5$. $b - v_b = 5$.

Для дополнительной проверки рассмотрим имитационное моделирование восстанавливаемой дублированной системы с использованием метода дискретно-событийного моделирования [27]. Реализация метода выполнена на языке программирования Python, для чего общее время моделирования взято $T = 10^5$. Для примера рассмотрим распределения Γ и Гнеденко–Вейбулла (GW) времени ремонта элементов, при этом фиксируя для обоих распределений значения среднего $\mu_b = 1$ и коэффициента вариации $v_b = 0,5, 5$. Остальные параметры остаются прежними.

На рис. 4,а,б представлены абсолютная и относительная погрешности оценки вероятности безотказной работы системы $\langle M_2|GI|1 \rangle$ для рассматриваемого примера.

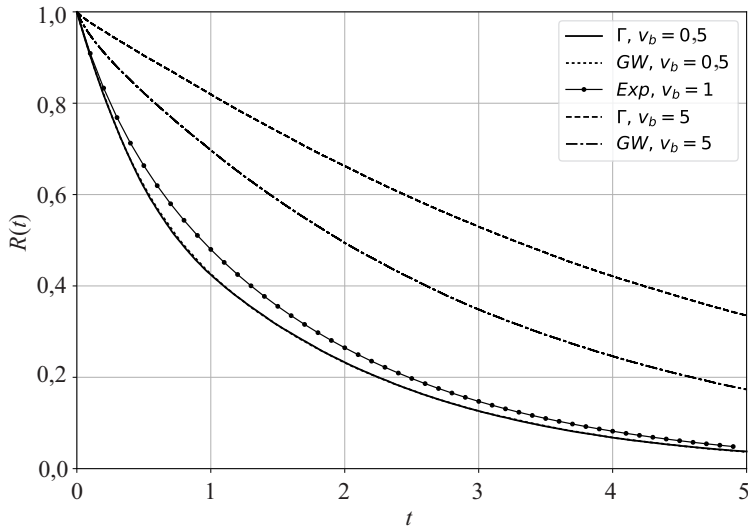


Рис. 5. Вероятность безотказной работы системы $\langle M_2|GI|1 \rangle$.

Аргумент t выбран до максимального значения средней наработки до отказа системы для $v_b = 0,5$ и $v_b = 5$ соответственно для каждого рисунка. Результаты оценки вероятности безотказной работы с помощью метода дискретно-событийного моделирования взяты как $R_{th}(t)$. Полученные результаты показали, что среди рассмотренных распределений времени ремонта и соответствующих значений коэффициента вариации максимальные значения погрешностей составили $\max(\Delta) \approx 0,006$ и $\max(\varepsilon) \approx 0,014$.

Средние значения этих погрешностей для всех случаев представлены в табл. 1. Эти результаты эксперимента подтверждают точность характеристик надежности, полученных с помощью предлагаемого подхода.

Далее приведем непосредственно график вероятности безотказной работы системы $\langle M_2|GI|1 \rangle$, полученный с помощью предложенного подхода (см. рис. 5). Легенда рисунка определяет тип линии для выбранных распределений времени ремонта и соответствующих значений коэффициента вариации. Для выявления влияния коэффициента вариации времени ремонта на вероятность безотказной работы системы на рисунке также представлен случай, определяющий марковскую модель (*Exp*).

Результаты данного примера показывают, что вид распределения и коэффициент вариации времени ремонта существенно влияют на вероятность

Таблица 1. Средние значения погрешностей Δ и ε

$B(\cdot), v_b$	$\mathbf{E}[\Delta]$	$\mathbf{E}[\varepsilon]$
$\Gamma, v_b = 0,5$	0,0034	0,0070
$\Gamma, v_b = 5$	0,0006	0,0007
$GW, v_b = 0,5$	0,0014	0,0024
$GW, v_b = 5$	0,0023	0,0031

Таблица 2. Средняя наработка до отказа системы $\langle M_2|GI|1 \rangle$

$B(\cdot), v_b$	Событийное моделирование	Алгоритм
$\Gamma, v_b = 0,5$	1,34619	1,34457
$\Gamma, v_b = 5$	4,63125	4,64059
$GW, v_b = 0,5$	1,34111	1,352305
$GW, v_b = 5$	2,80304	2,82017

безотказной работы системы. Однако стоит отметить, что кривые вероятности безотказной работы при $v_b = 0,5$ и $v_b = 1$ расположены друг к другу довольно близко. Более того, при $v_b = 0,5$, несмотря на различные распределения времени ремонта, эти кривые сливаются на рассмотренном интервале t . В случае $v_b = 5$, наоборот, кривые вероятности безотказной работы при тех же распределениях времени ремонта значительно отличаются друг от друга. Таким образом, можно сделать вывод о нечувствительности вероятности безотказной работы к виду распределения времени ремонта при фиксированных среднем μ_b и коэффициенте вариации v_b при $v_b < 1$ и, наоборот, о ее чувствительности при $v_b > 1$.

В табл. 2 представлены значения средней наработки до отказа системы для данного примера, и также приведены соответствующие значения, полученные с помощью метода дискретно-событийного моделирования. Результаты демонстрируют нечувствительность среднего μ_R к виду распределения времени ремонта при фиксированных μ_b и v_b при $v_b < 1$. Кроме того, средняя наработка до отказа системы оказывается чувствительной к виду распределения времени ремонта и значению коэффициента вариации при $v_b > 1$.

6.3. Система $\langle GI_2|GI|1 \rangle$

В последнем примере рассмотрим такую систему, наработка до отказа и время ремонта элементов которой имеют произвольные распределения. В качестве этих распределений возьмем снова Γ и GW . Введем обозначение коэффициента вариации наработки до отказа элементов системы v_a и положим $v_a = 0,5$. Остальные исходные параметры сохраняются из предыдущего примера. На рис. 6, 7 демонстрируются оценки абсолютной Δ и относительной ε погрешностей для различных исходных распределений и коэффициентов вариации. Легенда рисунка определяет тип линии для погрешностей при Γ и GW распределениях времени ремонта. В качестве $R_{th}(t)$ снова рассмотрена оценка вероятности безотказной работы, полученная методом событийного моделирования.

Согласно полученным графическим результатам максимальная абсолютная погрешность среди рассмотренных случаев составляет $\max(\Delta) < 0,005$. Максимальное значение относительной погрешности варьируется в интервале $\max(\varepsilon) \approx [0,003, 0,014]$. С учетом заданных значений $N = 10^5$ и $T = 10^5$ эти результаты объективно удовлетворительны.

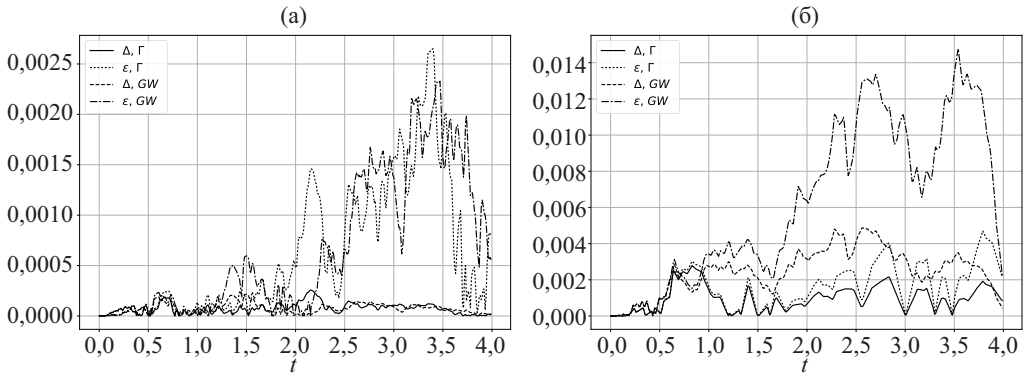


Рис. 6. Абсолютная и относительная погрешности оценки вероятности безотказной работы системы $\langle \Gamma_2 | GI | 1 \rangle$. а - $v_b = 0,5$. б - $v_b = 5$.

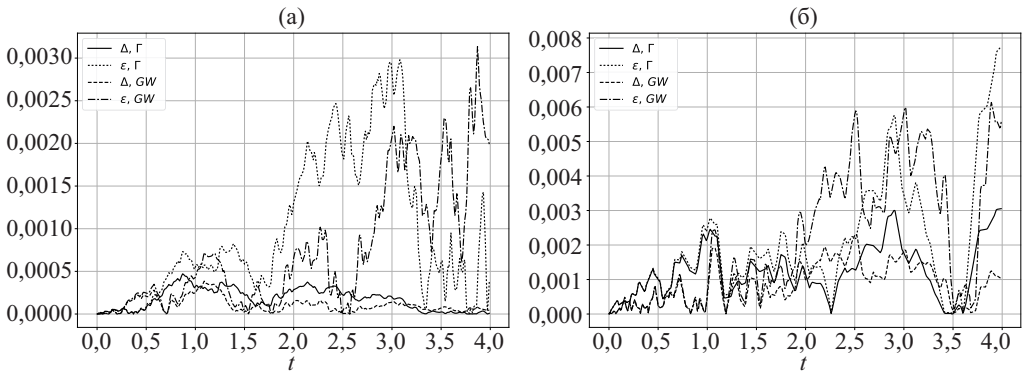


Рис. 7. Абсолютная и относительная погрешности оценки вероятности безотказной работы системы $\langle GW_2 | GI | 1 \rangle$. а - $v_b = 0,5$. б - $v_b = 5$.

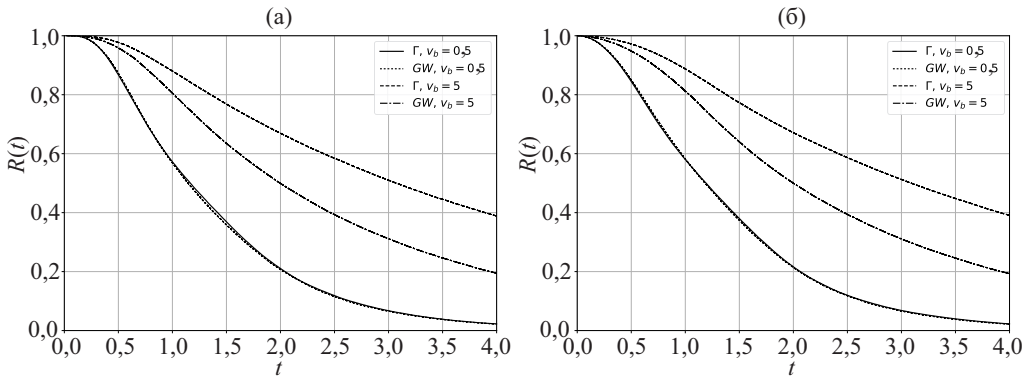


Рис. 8. Вероятность безотказной работы системы $\langle GI_2 | GI | 1 \rangle$. а - $A \sim \Gamma, v_a = 0,5$. б - $A \sim GW, v_a = 0,5$.

На рис. 8 представлены графики вероятности безотказной работы для распределений Γ и GW наработки до отказа элементов. Эксперимент демонстрирует аналогичные результаты предыдущего примера. Значение коэффициен-

Таблица 3. Средняя наработка до отказа системы $\langle GI_2|GI|1 \rangle$

а) $A \sim \Gamma, v_a = 0,5$		
$B(\cdot), v_b$	Событийное моделирование	Алгоритм
$\Gamma, v_b = 0,5$	1,4059	1,4003
$\Gamma, v_b = 5$	4,1305	4,2208
$GW, v_b = 0,5$	1,3900	1,3877
$GW, v_b = 5$	2,6242	2,6349
б) $A \sim GW, v_a = 0,5$		
$B(\cdot), v_b$	Событийное моделирование	Алгоритм
$\Gamma, v_b = 0,5$	1,4061	1,4044
$\Gamma, v_b = 5$	4,1637	4,2347
$GW, v_b = 0,5$	1,3983	1,3985
$GW, v_b = 5$	2,6329	2,6433

та вариации времени восстановления $v_b = 5$ приводит к увеличению значений вероятности безотказной работы на рассматриваемом интервале t . Кроме того, вид распределения времени восстановления влияет на поведение этой кривой при $v_b > 1$. При этом очевидно, что кривые вероятности безотказной работы достаточно близки друг к другу при различных исходных распределениях, но фиксированных значениях параметров μ_a и v_a .

В табл. 3 представлены значения средней наработки до отказа системы для рассмотренной модели, включая оценки, полученные методом событийного моделирования. Таблицы 3,а и 3,б демонстрируют близкие результаты при различных распределениях наработки до отказа элементов. Значения средней наработки до отказа системы μ_R отличаются лишь на втором или третьем знаках после запятой. Таким образом, можно сделать вывод о нечувствительности средней наработки до отказа системы к виду распределения наработки до отказа при фиксированных среднем μ_a и коэффициенте вариации v_a .

Дополнительно сравнивая значения табл. 2 и 3, можно сделать вывод о низкой чувствительности средней наработки до отказа системы к виду распределения наработки до отказа элементов при фиксированных среднем μ_a и коэффициенте вариации $v_a \leq 1$.

7. Заключение

В статье введено понятие маркированного марковского процесса, с помощью которого исследована система нагруженного дублирования с произвольными исходными распределениями. Предложены методика и алгоритм вычисления вероятности безотказной работы такой системы. Апробация результатов, полученных с помощью нового подхода, проводилась путем сравнения с результатами аналитических вычислений и дискретно-событийного моделирования. Новый подход показал высокую точность в сравнении с известными методами.

Главное преимущество предлагаемого алгоритма моделирования по сравнению с дискретно-событийным моделированием заключается в том, что представленная процедура полностью опирается на математически сформулированный подход и, по сути, состоит в реализации преобразования меток, которая однозначно определяет работу системы. Более того, данный алгоритм освобождает от необходимости написания дополнительного кода программы дискретно-событийного моделирования, что существенно облегчает процесс исследования дублированной системы нагруженного резерва с произвольными исходными распределениями.

В дальнейшем предполагается применить этот подход для исследования других сложных стохастических систем, в том числе для исследования характеристик надежности системы k -из- n с произвольными исходными распределениями и произвольным числом ремонтных единиц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. М.: Наука, 1965.
2. Барлоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надежности. Пер. с англ., под ред. Б.В. Гнеденко. М.: Сов. радио, 1969.
3. Sugawara, Y., Murata, K. Reliability and Preventive Maintenance of a Two-Unit Standby Redundant System with Different Failure Time Distributions // Lecture Notes Econom. Math. Syst., Springer Publ. 1984. V. 235.
https://doi.org/10.1007/978-3-642-45587-2_6
4. Houankpo H.G.K., Kozyrev D. Mathematical and Simulation Model for Reliability Analysis of a Heterogeneous Redundant Data Transmission System // Mathematics, MDPI Publ. 2021. V. 9. 2884. <https://doi.org/10.3390/math9222884>
5. Yali M., Haiying Z. Reliability analysis of warm standby redundant repairable system without being repaired “as good as new” // 2012 IEEE Symposium on Robotics and Applications (ISRA), IEEE Publ. 2012. P. 141–143.
<https://doi.org/10.1109/ISRA.2012.6219142>
6. Takemoto Y, Arizono I. A study of MTTF in two-unit standby redundant system with priority under limited information about failure and repair times // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O: Journal of Risk and Reliability, Sage Publ. 2015. V. 230. No. 1. P. 67–74.
<https://doi.org/10.1177/1748006X15584235>
7. Rykov V. On steady state probabilities of renewable system with Marshal-Olkin failure model // Stat Papers, Springer Publ. 2018. V. 59. P. 1577–1588.
<https://doi.org/10.1007/s00362-018-1037-6>
8. Rykov V., Zaripova E., Ivanova N., Shorgin S. On Sensitivity Analysis of Steady State Probabilities of Double Redundant Renewable System with Marshall-Olkin Failure Model // Commun. Comput. Inform. Sci., Springer Publ. 2018. V. 919. P. 234–245. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99447-5_20
9. Peiravi S., Nourelfath M., Zanjani M.K. Universal redundancy strategy for system reliability optimization // Reliabil. Engin. Syst., Elsevier Publ. 2022. V. 225.
<https://doi.org/10.1016/j.res.2022.108576>

10. *Parveen, Singh D., Taneja A.K.* Redundancy optimization for a system comprising one operative unit and N hot standby units // *Reliabil.: Theor. Appl.* 2023. V. 18. No. 4(76). P. 547–562. <https://doi.org/10.24412/1932-2321-2023-476-547-562>
11. *Shunji Osaki, Toshio Nakagawa* On a Two-Unit Standby Redundant System with Standby Failure // *Oper. Res. Institut. Oper. Res. Management Sci.* 1971. V. 19. No. 2. P. 510–523. <https://doi.org/10.1287/opre.19.2.510>
12. *Rykov V., Efrosinin D., Vishnevsiy V.* On Sensitivity of Reliability Models to the Shape of Life and Repair Time Distributions // 2014 Ninth International Conference on Availability, Reliability and Security, Fribourg, Switzerland, IEEE Publ. 2014. P. 430–437. <https://doi.org/10.1109/ARES.2014.65>
13. *Koutras V.P., Platis A.N.* Semi-Markov Availability Modeling of a Redundant System with Partial and Full Rejuvenation Actions // 2008 Third International Conference on Dependability of Computer Systems DepCoS-RELCOMEX. 2008. <https://doi.org/10.1109/depcos-relcomex.2008.13>
14. *Mishchenko V.I., Kravtsov A.N. Mamleev T.F.* A Semi-Markov Model of the Functioning of Redundant Measuring Instruments Relative to the Frequency of Verification // *Meas Tech.* 2021. V. 64. P. 289–295. <https://doi.org/10.1007/s11018-021-01931-3>
15. *Rykov V., Ivanova N., Kozyrev D.* Application of Decomposable Semi-Regenerative Processes to the Study of k -out-of- n Systems // *Mathematics*, MDPI Publ. 2021. V. 9. 1933. <https://doi.org/10.3390/math9161933>
16. *Smith W.* Regenerative stochastic processes // *Proc. Royal Soc. Ser. A. The Royal society Publ.* 1955. V. 232. P. 6–31.
17. *Rykov V., Efrosinin D., Stepanova N., Sztrik J.* On Reliability of a Double Redundant Renewable System with a Generally Distributed Life and Repair Times // *Mathematics*, MDPI Publ. 2020. V. 8. 278. <https://doi.org/10.3390/math8020278>
18. *Rykov V., Ivanova N.* On Reliability of a Double Redundant Renewable System with Arbitrarily Distributed Life- and Repair Times of its Units // *J. Math. Sci.*, Springer Publ. In print.
19. *Ibe O.C.* Markov Processes for Stochastic Modeling. London: Elsevier, 2013.
20. *Daley D.J., Vere-Jones D.* An Introduction to the Theory of Point Processes. New York: Springer, 2003.
21. *Cox D.R., Isham V.* Point processes. Chapman & Hall/CRC, 1980.
22. *Ripley B.D., Kelly F.P.* Markov Point Processes // *J. London Math. Soc.*, 1977. V. 15. 1. <https://doi.org/10.1112/jlms/s2-15.1.188>
23. *Литвак Н.В., Федоткин М.А.* Вероятностная модель адаптивного управления конфликтными потоками // *АиТ.* 2000. № 5. С. 67–76.
24. *Борисов А.В., Миллер Б.М., Семенухин К.В.* Фильтрация марковского скачкообразного процесса по наблюдениям мультивариантного точечного процесса // *АиТ.* 2015. № 2. С. 34–60.
25. *Абаев П.О., Бесчастный В.А., Гайдамака Ю.В.* О применении пространственных точечных процессов в решении оптимизационных задач для беспроводных сетей с установлением прямых соединений // *Современные информационные технологии и ИТ-образование.* 2015. Т. 11. № 2. С. 160–165.

26. Rykov V., Ivanova N., Kozyrev D. Sensitivity Analysis of a k -out-of- n : F System Characteristics to Shapes of Input Distribution // Lecture Notes Comp. Sci., Springer Publ. 2021. V. 12563. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66471-8_37
27. Ivanova N. Modeling and Simulation of Reliability Function of a k -out-of- n : F System // Commun. Comput. Inform. Sci., Springer Publ. 2021. V. 1337. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66242-4_22

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Вишневым.

Поступила в редакцию 28.06.2024

После доработки 11.07.2024

Принята к публикации 25.07.2024